NICHTLINEARE FUNKTIONALANALYSIS WS 07/08

MATTHIAS BERGNER

Inhaltsverzeichnis

Literatur

Folgende Literatur ist empfehlenswert:

[A] Alt: Lineare Funktionalanalysis, Springer, 2002.

[E] Evans: Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathemics Volume 19, AMS, enthält einen Einsteigerabschnitt über Variationsmethoden (Chapter 8)

[Gi] Giusti: Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation, Monographs in Mathematics, Birkhäuser, 1984.

[G] Grunau: Vorlesungsskript "Abbildungsgrad und Fixpunktsätze", im Internet unter http://www-ian.math.uni-magdeburg.de/home/grunau/additional.html
enthält insbesondere einen Abschnitt über den Fixpunktsatz von Kakutani

[GT] Gilbarg, Trudinger: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Springer, 2001. Das klassische Werk über elliptische partielle Differentialgleichungen, welche dort mit der Leray-Schauder-Methode gelöst werden.

[H] Heuser: Funktionalanalysis, B.G.Teubner, 1992. Ein klassisches Buch über Funktionalanalysis.

[J] Jost: Partielle Differentialgleichungen, Springer 1998. Am Beispiel der Laplace- und Poisson-Gleichung werden verschiedene nichtlineare Lösungsmethoden vorgestellt, z.B. Variationsmethode, Perron-Methode, Schauder-Theorie.

[S] Sauvigny: Partielle Differentialgleichung der Geometrie und der Physik, Band 1 und 2, 2004/2005. Für die Vorlesung sind insbesondere die Kapitel VII und Kapitel VIII von Interesse.

[Sc] Schulz: Vorlesungsskript "Partielle Differenzialgleichungen" aus dem Sommersemester 2007, demnächst im Internet erhältlich

Einleitung

Dieses Skript dient als Ergänzung zu der von mir im Wintersemester 2007 zu haltenden Vorlesung über nichlineare Funktionalanalysis.

Im Einführungskapitel stellen wir kurz die benötigten Begriffe aus der Theorie der Banach-Räume vor. Insbesondere sollen die benötigten topologischen Begriffe wie Kompaktheit und Stetigkeit erklärt werden.

Danach schließt sich ein Kapitel über Fixpunktsätze an. Wir beginnen mit dem wahrscheinlich einfachsten, nämlich dem Banachschen Fixpunktsatz. Dieser Fixpunktsatz liefert Existenz, Eindeutigkeit sowie eine Konstruktionsvorschrift für den Fixpunkt. Als Anwendung lösen wir danach ein hyperbolisches Anfangswertproblem (eine hyperbolische partielle Differentialgleichung) für Funktionen in zwei Variablen.

Danach schließt sich ein Abschnitt über den Brouwerschen Fixpunktsatz an. Dieser Fixpunktsatz liefert nur die Existenz, nicht jedoch die Eindeutigkeit oder eine Konstruktionsvorschrift für den Fixpunkt. Wir zeigen diesen Satz zunächst auf der n-dimensionalen Einheitskugel und verwenden eine relativ einfache, analytische Beweismethode basierend auf dem Integralsatz von Gauss. Danach verallgemeinern wir den Brouwerschen Fixpunktsatz auch auf konvexe Teilmengen des $\mathbb{R}^n$.

Es folgt ein Abschnitt über den Fixpunktsatz von Kakutani, eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes auf mengenwertige Abbildungen, sogenannte Korrespondenzen. Ein kurzer Einstieg in die mathematische Wirtschaftstheorie zeigt auf, wie man mit Hilfe dieses Satzes die Existenz von Gleichgewichten in Wirtschaftsystemen zeigen kann.

Als nächstes werden wir den Schauderschen Fixpunktsatz beweisen, eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes im Banach-Raum. Für diesen Satz reichen im Allgemeinen die stetigen Funktionen nicht mehr aus, man muss zu den sogenannten vollstetigen Funktionen übergehen. Als Anwendung dieses Satzes lösen wir die Poisson-Gleichung mit nichtlinearer, rechter Seite zu Nullrandwerten. Als weitere Anwendung des Schauderschen Fixpunksatzes leiten wir eine Variante des Fredholmschen Alternativsatz im Banach-Raum her. Mit Hilfe dieses Satzes werden wir lineare, elliptische Differentialgleichungen lösen. Als letztes in diesem Teil studieren wir das Weylsche Eigenwertproblem für den Laplace-Operator.

Im dritten Teil der Vorlesung geht es um Variationsprobleme. Ein Funktional soll in einem geeigneten Raum minimiert werden. Zunächst stellen wir die notwendigen Hilfsmittel zur

Verfügung: Die erste Variation und daraus resultierend die Euler-Lagrange-Gleichung sowie die zweite Variation. Danach gehen wir auf die nötigen Konvexitätsbegriffe für Funktionale ein, welche insbesondere die Eindeutigkeit des Minimierers sicherstellen.

Im zweiten Abschnitt werden wir für Funktionale der Form

$$I(u) = \int_\Omega F(\nabla u(x))dx$$

Minimierer konstruieren. Die konstruierten Minimierer liegen dabei sofort im klassischen Raum $C^{0,1}(\Omega, \mathbb{R})$, d.h. im Raum der Lipschitz-stetigen Funktionen. Dazu müssen wir zunächst einen Abschnitt über die Sobolev-Räume $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R})$ der schwach differenzierbare Funktionen einschieben. Insbesondere zeigen wir unter gewissen Voraussetzungen, dass die Räume $C^{0,1}(\Omega, \mathbb{R})$ und $W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R})$ übereinstimmen. Danach konstruieren wir dann Minimierer des Funktionales I und verwenden dabei den von Giusti in [Gi], Kapitel 12 für das Flächeninhaltsfunktional eingeschlagenen Weg. Entscheidend zur Konstruktion des Minimierers wird eine a priori-Abschätzung der $C^{0,1}$-Norm von gewissen "Quasi-Minimierern" sein. Die Herleitung dieser a priori-Abschätung erfolgt dabei in zwei Schritten. Als erstes reduzieren wir mit Hilfe eines Maximumprinzipes die globale Abschätzung auf eine Randabschätzung. Mit Hilfe von geeigneten Barrieren werden wir danach diese Randabschätzung herleiten, wobei wir an dieser Stelle die Konvexität des Gebietes Ω fordern werden.

Im dritten Abschnitt behandeln wir schließlich den Brouwerschen Abbildungsgrad im $\mathbb{R}^n$. Dieser ist ein fundamentales Hilfsmittel zum Lösen von nichtlinearen Gleichungssystemen im $\mathbb{R}^n$. Als Definition verwenden wir eine, auf E. Heinz zurückgehende Integraldarstellung. Daraus werden wir die fundamentalen Eigenschaften des Abbildungsgrades ableiten, zum Beispiel die Invarianz under Homotopie, die Ganzzahligkeit und den Produktsatz. Mit Hilfe des Abbildungsgrades werden wir dann klassische Sätze der Topologie im $\mathbb{R}^n$, wie den Igelsatz von Poincaré, den Zerlegungssatz von Jordan-Brouwer sowie die Invarianz der Dimension beweisen.

Ulm, im August 2007

Teil 1. Grundlagen zu Banach-Räumen

Wir wollen zunächst einige grundlegende Begriffe aus der Theorie der Banach-Räume zusammenstellen, welche wir in dieser Vorlesung später benötigen werden. Wenn man bereits eine Vorlesung über Funktionalanalysis gehört hat, sollten diese Begriffe bekannt.

1. Definitionen

Wir betrachten hier nur Vektorräume über dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

Definition. (Normierter Raum)
Es sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$. Dann nennen wir $||\cdot|| : V \to [0, +\infty)$ eine *Norm* auf V, wenn die Axiome gelten:
1.) positive Definitheit: Aus $x \in V$ und $x \neq 0$ folgt $||x|| > 0$,
2.) Homogenität: $||\lambda x|| = |\lambda|\, ||x||$ für $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in V$,
3.) Dreiecksungleichung: $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ für $x, y \in V$.
Man nennt dann $(V, ||\cdot||)$ einen *normierten Raum.*

Wie in den reellen Zahlen erklärt man die Begriffe Cauchy- und konvergente Folge.

Definition. Eine Folge $x^n \in V$ in einem nomierten Raum heißt *Cauchy-Folge*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert mit $||x^m - x^n|| \leq \varepsilon$ für alle $m, n \geq N(\varepsilon)$.

Die Folge heißt *konvergent*, wenn ein $x \in V$ existiert mit $\lim\limits_{n\to\infty} ||x^n - x|| = 0$. Man nennt dann x einen *Grenzwert der Folge* und schreibt $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = x$.

Bemerkungen.
(i) Man zeigt leicht, dass der Genzwert einer konvergenten Folge eindeutig ist.
(ii) Mit Hilfe der Dreiecksungleichung zeigt man ebenfalls leicht, dass jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist. Allerdings ist im Allgemeinen eine Cauchy-Folge nicht automatisch konvergent. Deshalb benötigen wir folgende Definition.

Definition. (Banach-Raum)
Wir nennen einen normierten Raum $(V, ||\cdot||)$ einen *Banach-Raum*, wenn jede Cauchy-Folge in V eine konvergente Folge ist.

Die nachfolgenden Beispiele sind allesamt Banach-Räume.

Beispiele. (i) Der Vektorraum $V = \mathbb{R}^n$ zusammen mit der euklidischen Norm $||x||_2 := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ bildet einen Banach-Raum. Allgemeiner ist für $p \in [1, +\infty]$ die sogenannte L^p-Norm:

$$||x||_p := (x_1^p + \cdots + x_n^p)^{1/p} \quad \text{falls } p < \infty \quad , \quad ||x||_\infty := \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$$

erklärt.
(ii) Für eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ sei $V = L^\infty(K, \mathbb{R})$ der Vektorraum aller beschränkten, meßbaren Funktionen von K nach $\mathbb{R}$ zusammen mit der Norm

$$||f||_\infty := \sup_{x \in K} |f(x)| \, .$$

Die Menge $V' = C^0(K, \mathbb{R}) \subset L^\infty(K, \mathbb{R})$ aller stetigen Funktionen von K nach $\mathbb{R}$ mit derselben Norm bildet ebenfalls einen Banach-Raum.
(iii) Zu $1 \leq p < \infty$ betrachte man den Vektorraum der L^p-Funktionen

$$L^p(K, \mathbb{R}) := \{ f : K \to \mathbb{R} \, : \, f \text{ messbar und } ||f||_p < +\infty \}$$

mit der Norm

$$||f||_p := \Big(\int_K |f(x)|^p dx \Big)^{1/p} \, .$$

(iv) Der Vektorraum $V = C^k(K, \mathbb{R})$ der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf der kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ bildet zusammen mit der Norm

$$||f|| := \sup_{x \in K} \sum_{0 \leq |\beta| \leq k} |D^\beta f(x)|$$

einen Banach-Raum.

In der Analysis I kann man die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ konstruieren, indem man die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ vervollständigt. Eine reelle Zahl ist dann die Äquivalenzklasse von Cauchy-Folgen in den rationalen Zahlen. (Wurde dies in Ihrer Analysis-Vorlesung so gemacht?). Ähnliches kann man in normierten Räumen tun, was man in der Vorlesung Funktionalanalysis zeigt.

Satz 1 (Vervollständigung eines normierten Raumes)**.**
Es sei $(V, ||\cdot||_V)$ ein normierter Raum. Dann existiert ein Banachraum $(W, ||\cdot||_W)$ mit den Eigenschaften

$$V \subset W \quad \textit{und} \quad ||x||_V = ||x||_W \quad \textit{für alle } x \in V \, .$$

Weiter liegt V dicht in W, d.h. jedes Element in W ist Grenzwert einer Folge aus V.

Bemerkung. *(i)* Man nennt den Banachraum W eine Vervollständigung des normierten Raumes V. Die Vervollständigung ist bis auf Isomorphie eindeutig.
(ii) Die Vervollständigung erfolgt abstrakt durch Äquivalenzklassenbildung von äquivalenten Cauchy-Folgen. Dabei heißen zwei Cauchy-Folgen x^n und y^n äquivalent, wenn die Differenzfolge $x^n - y^n$ gegen Null konvergiert.

2. Topologie im normierten Raum

Wir benötigen einige topologische Begriffe.

Definition. Eine Teilmenge $M \subset V$ eines Banach-Raumes heißt:
(i) *beschränkt*, wenn ein $R \in \mathbb{R}$ existiert mit $||x|| \leq R$ für alle $x \in M$,
(ii) *abgeschlossen*, wenn mit jeder konvergenten Folge $x^n \in M$ auch ihr Grenzwert in M liegt,
(iii) *offen*, wenn ihr Komplement $V \backslash M$ abgeschlossen ist,
(iv) *kompakt*, wenn jede Folge $x^n \in M$ eine Teilfolge besitzt, welche gegen ein Element in M konvergiert,
(v) diskret, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $||x - y|| \geq \varepsilon$ für $x, y \in M$ mit $x \neq y$.

Allgemein gilt: Kompakte Mengen $M \subset V$ sind sowohl abgeschlossen als auch beschränkt.

Im endlich dimensionalen Banach-Raum gilt sogar die Rückrichtung dieser Aussage, jedoch nicht in unendlich dimensionalen Banach-Räumen.

Beispiel. Betrachte den Banach-Raum $V := L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der beschränkten Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit der Norm $||u|| := \sup_{t \in \mathbb{R}} |u(t)|$. Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$u_k(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } t = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und $M := \{u_k \,|\, k \in \mathbb{N}\}$. Man beachte, dass die Folge u_k keine konvergente Teilfolge besitzt wegen $||u_k - u_l|| = 1$ falls $k \neq l$. Die Menge M ist dann zwar abgeschlossen und beschränkt, jedoch nicht kompakt.

Wie im $\mathbb{R}^n$ kann man auch zwischen Banachräumen kann man stetige Funktionen betrachten.

Definition. (stetige Funktionen zwischen Banachräumen)
Seien V und W zwei Banachräume. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt *stetig*, wenn gilt: Für jede konvergente Folge $x^n \in V$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} x^n = x$ konvergiert ebenfalls $f(x^n)$ und es ist $\lim\limits_{n \to \infty} f(x^n) = f(x)$.

Beispiele. (i) Konstante Funktionen sind immer stetig.
(ii) Die Norm $|| \cdot || : V \to \mathbb{R}$ ist stetig: Wenn x^n gegen x konvergiert, so konvergiert auch $||x^n||$ gegen $||x||$. Dies folgt aus der Dreiecksungleichung

$$\Big| ||x^n|| - ||x|| \Big| \leq ||x^n - x|| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty \ .$$

Die folgenden topologischen Sätze sollten im endlichen dimensionalen bereits aus der Analysis-Vorlesung bekannt sein.

Satz 2 (stetige Bild kompakter Mengen).
Sei $f : U \to V$ stetig. Dann ist mit jeder kompakten Menge $K \subset U$ auch ihr Bild $f(K)$ kompakt.

Beweis. Für kompaktes $K \subset U$ zeigen wir, dass dann auch $f(K)$ kompakt ist. Sei $y^k \in f(K)$ eine Folge. Dann existiert auch eine Folge $x^k \in K$ mit $f(x^k) = y^k$. Da K kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge x^{k_l} von x^k, welche gegen ein $x^* \in K$ konvergiert. Wegen der Stetigkeit von f konvergiert dann die Teilfolge $y^{k_l} = f(x^{k_l})$ gegen $f(x^*)$. Somit ist $f(K)$ kompakt. □

Für reellwertige Abbildungen ergibt sich daraus

Korollar 3 (Satz vom Maximum/Minimum).
Sei $K \subset V$ eine kompakte Teilmenge eines Banach-Raumes und $f : K \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann nimmt f in K ihr Maximum und Minimum an, d.h. es existieren $x_{min}, x_{max} \in K$ mit $f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$ für alle $x \in K$.

3. Äquivalenz von Normen

Definition. Sei V ein Vektorraum. Zwei Normen $||\cdot||_1$ und $||\cdot||_2$ heißen äquivalent, wenn reelle Zahlen $0 < m \leq M$ existieren mit

$$m||x||_1 \leq ||x||_2 \leq M||x||_1 \quad \text{für } x \in V\ .$$

Bemerkung. Man zeigt leicht, dass die Äquivalenz von Normen tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist.

Beispiele. (i) Auf dem Raum $V := C^1([a,b],\mathbb{R})$ sind die beiden Normen

$$||x||_1 := |x(a)| + \sup_{t\in[a,b]} |x'(t)| \quad , \quad ||x||_2 := \sup_{t\in[a,b]} |x(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |x'(t)|$$

zueinander äquivalent wegen $||x||_1 \leq ||x||_2 \leq (b-a+1)||x||_1$.
(ii) Auf $V = C^0([a,b],\mathbb{R})$ sind die Normen

$$||x||_1 := \int_a^b |x(t)|dt \quad , \quad ||x||_\infty := \sup_{t\in[a,b]} |x(t)|$$

nicht zueinander äquivalent (Übungsaufgabe).
Sehr leicht zeigt man

Lemma 4. *Zwei äquivalente Normen induzieren dieselbe Topologie, dass heißt: Jede bezüglich der einen Norm abgeschlossene (bzw. offene, kompakte, beschränkte) Menge ist auch bezüglich der anderen Norm abgeschlossen (bzw. offen, kompakt, beschränkt).*

Für endlich dimensionale Räume gilt sogar

Satz 5. *Auf einem endlich dimensionalen Vektorraum V sind je zwei beliebige Normen zueinander äquivalent.*

Beweis. 1.) Da V endlich dimensional ist, können wir ohne Einschränkung $V = \mathbb{R}^n$ für ein $n = 0, 1, \ldots$ annehmen. Da die Äquivalenz von Normen eine Äquivalenzrelation ist, genügt es offensichtlich zu zeigen, dass jede Norm zur Maximumsnorm

$$||x||_\infty := \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$$

äquivalent ist. Sei dazu $||\cdot||$ eine beliebige, weitere Norm.
2.) Es sei $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{R}^n$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$||x|| = \Big|\Big|\sum_{i=1}^n x_i e_i\Big|\Big| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|\,||e_i|| \leq ||x||_\infty \sum_{i=1}^n ||e_i|| =: M||x||_\infty \,.$$

und wir haben die erste der beiden benötigten Abschätzungen bewiesen.
3.) Wir zeigen nun die zweite Abschätzung $m||x||_\infty \leq ||x||$ für ein $m > 0$ indirekt: Angenommen, dies gelte nicht. Dann existiert zu jedem $k = 1, 2\ldots$ ein $x_k \in \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft $\frac{1}{k}||x_k||_\infty > ||x_k||$. Durch Übergang zu $z_k := \frac{x_k}{||x_k||_\infty}$ erhalten wir eine Folge mit den Eigenschaften

$$||z_k||_\infty = 1 \quad , \quad ||z_k|| < \frac{1}{k} \,.$$

Wegen $||z_k||_\infty = 1$ können wir eine Teilfolge y_k von z_k auswählen [1], sodass y_k gegen ein $y \in \mathbb{R}^n$ konvegiert, also $\lim_{k\to\infty} ||y_k - y||_\infty = 0$. Wegen $||y_k||_\infty = 1$ folgt aus der Stetigkeit der Norm auch $||y||_\infty = 1$, insbesondere $y \neq 0$. Andererseits gilt $||z_k|| \to 0$ für $k \to \infty$ und dasselbe gilt für die Teilfolge y_k. Damit folgt

$$||y|| \leq ||y - y_k|| + ||y_k|| \leq M||y - y_k||_\infty + ||y_k|| \to 0 \quad \text{für } k \to \infty \,.$$

Daraus folgt nun $||y|| = 0$ und somit $y = 0$, also ein Widerspruch. Somit ist die zweite Ungleichung bewiesen. □

Korollar 6 (Heine-Borel)**.**
Es sei V ein endlich dimensionaler normierter Raum. Dann besitzt jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge. Insbesondere ist jede abgeschlossene und beschränkte Menge kompakt.

Beweis. Ohne Einschränkung sei $V = \mathbb{R}^n$ und $||\cdot||$ die Norm auf V. Sei $x_k \in V$ eine bez. $||\cdot||$ beschränkte Folge. Wegen Satz 5 ist dann x_k auch bezüglich der Maximumsnorm $||\cdot||_\infty$

[1] Häufungsstellensatz von Weierstraß: Jede bez. $||\cdot||_\infty$ beschränkte Folge hat eine Häufungsstelle (d.h. eine konvergente Teilfolge).

eine beschränkte Folge. Nach dem Häufungsstellensatz von Weierstraß existiert eine bez. $||\cdot||_\infty$ konvergente Teilfolge, welche dann wegen Satz 5 auch bezüglich $||\cdot||$ konvergiert. □

Als weiteres Ergebnis erhalten wir

Korollar 7 (Abgeschlossenheit endlich dimensionaler Räume).
Sei V ein Banach-Raum und $W \subset V$ ein endlich dimensionaler Untervektorraum. Dann ist W als Teilmenge von V abgeschlossen.

Beweis. Es sei $x_k \in V$ eine konvergente Folge mit $x_k \to x \in W$. Wir müssen $x \in V$ zeigen. Da die Folge x_k konvergent ist, ist sie auch beschränkt (leichte Übungsaufgabe). Wegen obigem Korollars besitzt x_k eine in V konvergente Teilfolge, welche gegen ein Element $\tilde{x} \in V$ konvergiert. Diese Teilfolge konvergiert allerdings immer noch gegen $x \in W$. Aus der Eindeutigkeit des Grenzwertes schließen wir $x = \tilde{x} \in V$. □

4. Charakterisierung kompakter Mengen

Wir wollen nun kompakte Teilmengen in normierten Räumen charakterisieren. Dazu benötigen wir

Lemma 8 (Lemma von Riesz).
Es sei V ein normierter Raum und $U \subset V$ ein abgeschlossener Unterraum mit $U \neq V$. Dann existiert ein $x_0 \in V$ mit $||x_0|| = 1$ sowie $||y - x_0|| \geq \frac{1}{2}$ für alle $y \in U$.

Beweis. Zu beliebigem $x \in V \backslash U$ setzen wir

$$d := \inf_{y \in U} ||x - y|| \, .$$

Wir behaupten $d > 0$. Andernfalls gebe es eine Folge $y^n \in U$ mit $||y^n - x|| \to 0$ für $n \to \infty$, d.h. $y^n \to x$ für $n \to \infty$. Wegen der Abgeschlossenheit von U müsste dann auch $x \in U$ sein, im Widerspruch zur Voraussetzung. Wegen $d > 0$ gibt es ein $y_0 \in U$ mit

$$||x - y_0|| \leq 2d \, .$$

Wir setzen nun

$$x_0 := \frac{x - y_0}{||x - y_0||}$$

und beachten $||x_0|| = 1$. Für ein beliebiges $y \in U$ ist zunächst $y_0 - ||x - y_0||y \in U$ und damit

$$||x_0 - y|| = \frac{\Big|\Big|x - y_0 - ||x - y_0||y\Big|\Big|}{||x - y_0||} \geq \frac{d}{||x - y_0||} \geq \frac{d}{2d} = \frac{1}{2} \, .$$

□

Korollar 9. *Sei V ein unendlich dimensionaler normierte Raum. Dann existiert eine beschränkte und abgeschlossene Menge, welche jedoch nicht kompakt ist.*

Beweis. Da V unendlich dimensional ist, existiert eine Folge von endlich dimensionalen Teilräumen $U^k \subset V$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ mit

$$U^0 \subset U^1 \subset U^2 \subset \ldots \quad , \quad \dim U^k = k \; .$$

Für jedes $k = 1, 2, \ldots$ existiert dann nach Lemma 8 ein $x^k \in U^k$ mit $||x^k|| = 1$ sowie $||x^k - x|| \geq 1/2$ für alle $x \in U^{k-1}$. Inbesondere gilt $||x^k - x^l|| \geq 1/2$ für alle $l = 1, \ldots, k-1$. Wir erhalten so eine Folge $x^k \in V$ mit der Eigenschaft $||x^k - x^l|| \geq 1/2$ für $k \neq l$. Insbesondere besitzt diese Folge keine Cauchy- und somit keine konvergente Teilfolge. Wir erklären nun die Menge $M := \{x^k \; : \; k \in \mathbb{N}\}$ mit den Eigenschaften

$$||x|| = 1 \quad \text{für } x \in M \quad , \quad ||x - y|| \geq \frac{1}{2} \quad \text{für } x, y \in M \; , \; x \neq y \; .$$

Diese ist dann abgeschlossen und beschränkt, jedoch nicht kompakt. □

In Verbindung mit Korollar 6 erhalten wir

Satz 10. *In einem normierten Raum V sind folgende Aussagen äquivalent:*

a) *Jede abgeschlossene, beschränkte Menge $M \subset V$ ist kompakt.*
b) *V ist endlich dimensional.*

Teil 2. Fixpunktsätze

In sehr vielen Teilen der Mathematik werden mathematische Probleme darauf reduziert, Fixpunkte einer Funktion $f : K \to K$ zu finden, d.h. wir suchen ein $x_* \in K$ mit $f(x_*) = x_*$. Die Menge K kann dabei eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, allgemeiner von $\mathbb{R}^n$ oder gar eines (unendlichdimensionalen) Banach-Raumes V sein. In der Analysis beweist man verschiedene Fixpunktsätze, welche die Existenz eines Fixpunktes sicherstellen. Manche dieser Fixpunktsätze liefern sogar die Eindeutigkeit des Fixpunktes sowie eine Konstruktionsvorschrift für diesen Fixpunkt, was für die numerische Berechnung von Interesse ist. Dazu gehört beispielsweise der Banachsche Fixpunktsatz.

Andere Fixpunktsätze liefern nur die Existenz eines Fixpunktes ohne eine Aussage über die Eindeutigkeit. Dazu gehören der Brouwersche, der Schaudersche und der Fixpunktsatz von Kakutani.

1. Der Banachsche Fixpunktsatz

1.1. Satz und Beweis.

Definition. Es sei $K \subset V$ eine Teilmenge eines Banach-Raumes V. Dann nennen wir eine Familie von Operatoren $T_\lambda : K \to K$, $\lambda \in [0,1]$, kontrahierend, wenn es eine Konstante $\Theta \in [0,1)$ gibt mit

$$||T_\lambda(x) - T_\lambda(y)|| \leq \Theta ||x - y|| \quad \text{für alle } x, y \in K \ .$$

Die Familie T_λ heißt stetig in λ, wenn für jedes feste $x \in K$ die Zuordnung $\lambda \mapsto T_\lambda(x)$ stetig ist.

Wir zeigen nun

Satz 1 (Banachscher Fixpunktsatz).
Sei $K \subset V$ eine abgeschlossene Teilmenge eines Banach-Raumes V und $T_\lambda : K \to K$, $\lambda \in [0,1]$, eine kontrahierende Familie von Operatoren, welche stetig von λ abhänge. Dann existiert für jedes $\lambda \in [0,1]$ genau ein Fixpunkt $x_\lambda \in K$ von T_λ. Dieser hängt stetig von λ ab, d.h. $\lambda \mapsto x_\lambda$ ist stetig.

Beweis. 1.) Wir wählen zunächst $x^0 \in K$ fest. Betrachte die induktiv erklärte Folge

$$x_\lambda^0 := x^0 \quad \text{und} \quad x_\lambda^k := T_\lambda(x_\lambda^{k-1}) \in K \quad \text{für } k \in \mathbb{N} \ .$$

Wir erklären $R := \frac{||x^0||+||T_\lambda(x^0)||}{1-\Theta}$ und behaupten $||x_\lambda^k|| \leq R$ für alle k. Dies zeigen wir mittels Induktion, wobei der Induktionsschritt wie folgt lautet

$$\begin{aligned} ||x_\lambda^{k+1}|| &= ||T_\lambda(x_\lambda^k) - T_\lambda(x^0) + T_\lambda(x^0)|| \leq \Theta||x_\lambda^k - x^0|| + ||T_\lambda(x^0)|| \\ &\leq \Theta||x_\lambda^k|| + \Theta||x^0|| + ||T_\lambda(x^0)|| \leq \Theta R + ||x^0|| + ||T_\lambda(x_0)|| = \Theta R + (1-\Theta)R = R\,. \end{aligned}$$

2.) Für $k, l \in \mathbb{N}$ mit $k \leq l$ betrachten wir folgende Abschätzung

$$\begin{aligned} ||x_\lambda^k - x_\lambda^l|| &= ||T_\lambda(x_\lambda^{k-1}) - T_\lambda(x_\lambda^{l-1})|| \leq \Theta||x_\lambda^{k-1} - x_\lambda^{l-1}|| \\ &\leq \cdots \leq \Theta^k||x_\lambda^0 - x_\lambda^{l-k}|| \leq \Theta^k(||x_\lambda^0|| + ||x_\lambda^{l-k}||) \leq 2R\,\Theta^k\,. \end{aligned}$$

Damit ist x_λ^k eine Cauchy-Folge und konvergiert somit im Banach-Raum V gegen einen Grenzwert $x_\lambda := \lim\limits_{k\to\infty} x_\lambda^k$. Aus K abgeschlossen folgt $x_\lambda \in K$. Nun ist T_λ kontrahierend und damit insbesondere stetig und deshalb folgt

$$T(x_\lambda) = T\Big(\lim_{k\to\infty} x_\lambda^k\Big) = \lim_{k\to\infty} T(x_\lambda^k) = \lim_{k\to\infty} x_\lambda^{k+1} = x_\lambda\,,$$

also x_λ ein Fixpunkt von T_λ.
3.) Um die Eindeutigkeit des Fixpunktes zu zeigen, sei $x'_\lambda \in K$ ein weiterer Fixpunkt. Dann gilt aber

$$||x_\lambda - x'_\lambda|| = ||T(x_\lambda) - T(x'_\lambda)|| \leq \Theta||x_\lambda - x'_\lambda||$$

und wegen $\Theta < 1$ folgt daraus $||x_\lambda - x'_\lambda|| = 0$, bez. $x_\lambda = x'_\lambda$.
4.) Um die stetige Abhängigkeit des Fixpunktes von λ zu zeigen, berechnen wir

$$\begin{aligned} ||x_\lambda - x_{\lambda'}|| &= ||T_\lambda(x_\lambda) - T_{\lambda'}(x_{\lambda'})|| \\ &\leq ||T_\lambda(x_\lambda) - T_\lambda(x_{\lambda'})|| + ||T_\lambda(x_{\lambda'}) - T_{\lambda'}(x_{\lambda'})|| \\ &\leq \Theta||x_\lambda - x_{\lambda'}|| + ||T_\lambda(x_{\lambda'}) - T_{\lambda'}(x_{\lambda'})|| \end{aligned}$$

beziehgungsweise

$$||x_\lambda - x_{\lambda'}|| \leq \frac{1}{1-\Theta}||T_\lambda(x_{\lambda'}) - T_{\lambda'}(x_{\lambda'})|| \to 0 \quad \text{für } \lambda' \to \lambda\,.$$

Daraus folgt dann die stetige Abhängigkeit vom Parameter. □

Bemerkung. Hängt der Operator T_λ Lipschitz-stetig von λ ab, d.h.

$$||T_\lambda(x) - T_{\lambda'}(x)|| \leq L|\lambda - \lambda'| \quad \text{für alle } x \in K$$

so hängen auch die Fixpunkte Lipschitz-stetig vom Parameter ab:

$$||x_\lambda - x_{\lambda'}|| \leq \frac{L}{1-\Theta}|\lambda - \lambda'|\,.$$

1.2. **Anwendung: Ein hyperbolisches Anfangswertproblem.** Literatur zu diesem Abschnitt: [S], Kapitel XI, Paragraph 4. Zu $R > 0$ erklären wir den Quader

$$Q_R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, |x| \leq R \, , \, |y| \leq R\} \, .$$

Auf diesem studieren wir das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}
&u = u(x, y) : Q_R \to \mathbb{R} \\
(1) \qquad &u_{xy} = h(x, y, u, u_x, u_y) \quad \text{in } Q_R \\
&u(x, -x) = 0 \quad , \quad u_x(x, -x) = 0 = u_y(x, -x) \quad \text{für } x \in [-R, R] \, .
\end{aligned}$$

Bemerkungen. (*i*) Es handelt sich um eine hyperbolische, partielle Differentialgleichung in zwei Variablen. Sie ist nichtlinear, da die rechte Seite h von den Lösung u selbst aber auch den ersten Ableitungen u_x und u_y abhängt. In den partiellen Differentialgleichungen studiert man allgemeiner folgende Probleme zweiter Ordnung

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = h(x, y, u, u_x, u_y)$$

wobei die Koeffizienten a, b, c ebenfalls von (x, y, u, u_x, u_y) abhängen können. Diese nennt man hyperbolisch, wenn $ac - b^2 < 0$ im gesamten Definitionsbereich gilt. Für unser Problem sind $a = c = 0$ und $b = 1/2$, also ist insbesondere unser Problem hyperbolisch. Durch Einführen charakteristischer Parameter (vergleiche [S], Kapitel XI, Paragraph 3) kann man die allgemeine hyperbolische Gleichung stets in die Normalform (1) überführen.
(*ii*) Die Anfangswerte in (1) nennt man *Cauchysche Anfangswerte*. Allgemeiner kann man statt Null-Anfangswerten auch folgendes betrachten $u(x, -x) = f(x)$, $u_x(x, -x) = g_1(x)$ und $u_y(x, -x) = g_2(x)$, wobei f, g_1, g_2 aber nicht beliebig gewählt werden können, sondern noch eine Kompatibilitätbedingung erfüllen müssen.

Wir wollen Problem (1) in eine Fixpunktgleichung umschreiben. Dazu erklären wir für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ein Dreieck $T(x, y)$ durch die drei Eckpunkte (x, y), $(x, -x)$ und $(-y, y)$. Im folgenden betrachten wir ohne Einschränkung stets den Falls $x + y > 0$. Es gilt dann

$$T(x, y) := \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \, | \, -x \leq -s \leq t \leq y\} \, .$$

Für eine Lösung von (1) berechnen wir mittels iterierter Integration

$$\begin{aligned}
\int\limits_{T(x,y)} h(s, t, u, u_x, u_y) ds dt &= \int_T u_{xy}(s, t) ds dt = \int_{-x}^{y} \int_{-t}^{x} u_{xy}(s, t) ds dt \\
&= \int_{-x}^{y} \Big| u_y(s, t) \Big|_{s=-t}^{x} dt = \int_{-x}^{y} \Big(u_y(x, t) - u_y(-t, t) \Big) dt \\
&= \int_{-x}^{y} u_y(x, t) dt = u(x, y) - u(x, -x) = u(x, y) \, ,
\end{aligned}$$

wobei wir die Anfangswerte verwenden. Wir erklären wir nun den Operator

$$Ku(x,y) := \int_{T(x,y)} h(x,y,u,u_x,u_y)$$

welcher den Raum $C^1(Q_R,\mathbb{R})$ auf den Raum $C^1(Q_R,\mathbb{R})$ abbildet. Gesucht ist dann ein Fixpunkt des Operators K.

Lemma 2. *Erklären wir den Raum*

$$C_{xy}(Q_R,\mathbb{R}) := \Big\{u \in C^1(Q_R,\mathbb{R}) \mid u_{xy} \text{ und } u_{yx} \text{ existieren, sind stetig und gleich}\Big\}$$

so sind für eine Funktion $u : Q_R \to \mathbb{R}$ folgende Aussagen äquivalent:
(i) Es ist $u \in C_{xy}(Q_R,\mathbb{R})$ eine Lösung des Anfangswertproblemes (1).
(ii) Es ist $u \in C^1(Q_R,\mathbb{R})$ ein Fixpunkt des Operators K.

Beweis. (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*) haben wir bereits gezeigt.
(*ii*) $\Rightarrow$ (*i*): Ist $u \in C^1(Q_R,\mathbb{R})$ ein Fixpunkt von K, so folgt wie in (2) mittels iterierter Integration

$$u(x,y) = Ku(x,y) = \int\limits_{T(x,y)} h(s,t,u,u_x,u_y)dsdt = \int_{-x}^{y}\int_{-t}^{x} h(s,t,u,u_x,u_y)dsdt\ .$$

Für $y = -x$ folgt dann $u(x,-x) = 0$. Differenzieren wir die Gleichung nach y, so folgt

$$u_y(x,y) = \int_{-y}^{x} h(s,y,u(s,y),u_x(s,y),u_y(s,y))ds\ . \tag{2}$$

Für $y = -x$ erkennt man, dass $u_y(x,-x) = 0$ gilt. Zusätzlich ist u_y nach x differenzierbar mit

$$u_{yx}(x,y) = h(x,y,u(x,y),u_x(x,y),u_y(x,y))\ .$$

Analog dazu zeigt man, dass $u_x(x,-x) = 0$ ist und

$$u_{xy}(x,y) = h(x,y,u(x,y),u_x(x,y),u_y(x,y))\ ,$$

insbesondere also $u_{xy} = u_{yx}$. Damit gehört u zur Klasse $C_{xy}(Q_R,\mathbb{R})$ und ist Lösung vom Anfangswertproblems (1). □

Um den Banachschen Fixpunktsatz anzuwenden, bleibt nun zu ermitteln, unter welchen Bedingungen der Operator K eine Kontraktion darstellt. Hierzu fordern wir zunächst eine Lipschitz-Bedingung an die rechte Seite

$$\begin{aligned} &|h(x,y,z,p,q) - h(x,y,z',p',q')| \le L(|z-z'| + |p-p'| + |q-q'|) \\ &\text{für alle } (x,y) \in Q_R\ ,\ z,p,q,z',p',q' \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{3}$$

mit einer Lipschitz-Konstante $L < \infty$. Für noch zu wählendes $S > 0$ erklären wir

$$Q_{R,S} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| \le R\ , |y| \le R\ ,\ |x+y| \le S\} \subset Q_R\ .$$

Wir erklären weiter den Banachraum $B := C^1(Q_{R,S}, \mathbb{R})$ zusammen mit der Norm

$$||u|| := \sup_{(x,y)\in Q_{R,S}} \Big(|u(x,y)| + |u_x(x,y)| + |u_y(x,y)|\Big) \quad \text{für } u \in B\ .$$

Für zwei Funktionen $u, v \in B$ setzen wir $\hat{u} := Ku$ sowie $\hat{v} := Kv$ und schätzen ab

$$\begin{aligned}
|\hat{u}(x,y) - \hat{v}(x,y)| &\leq \int\limits_{T(x,y)} |h(s,t,u,u_x,u_y) - h(s,t,v,v_x,v_y)| dsdt \\
&\leq L \int\limits_{T(x,y)} \Big(|u-v| + |u_x - v_x| + |u_y - v_y|\Big) dsdt \\
&\leq L||u-v|| \int\limits_{T(x,y)} 1\, dsdt = L||u-v|| \frac{1}{2}(x+y)^2 \leq \frac{1}{2} L S^2 ||u-v||\ .
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Darstellung (2) schätzen wir die Ableitung ab

$$\begin{aligned}
|\hat{u}_y(x,y) - \hat{v}_y(x,y)| &\leq \int_{-y}^{x} |h(s,y,u,u_x,u_y) - h(s,y,v,v_x,v_y)| ds \\
&\leq L \int_{-y}^{x} \Big(|u-v| + |u_x - v_x| + |u_y - v_y|\Big) ds \\
&\leq L||u-v|| \int_{-x}^{y} 1\, ds = L||u-v||(x+y) \leq L||u-v||S\ .
\end{aligned}$$

Analog zeigt man die Abschätzung

$$|\hat{u}_x(x,y) - \hat{v}_x(x,y)| \leq LS||u-v||\ .$$

Fasst man diese drei Abschätzungen zusammen, so folgt

$$||\hat{u} - \hat{v}|| = ||Ku - Kv|| \leq \Big(\frac{1}{2}S^2 + 2S\Big) L ||u-v||\ .$$

Wählen wir nun $S > 0$ als Lösung von $\frac{1}{2}S^2 + 2S = \frac{1}{2L}$, d.h. $S := -2 + \sqrt{4 + L^{-1}}$, so ergibt sich die Kontraktionseigenschaft

$$||Ku - Kv|| \leq \frac{1}{2}||u-v|| \quad \text{für alle } u, v \in B := C^1(Q_{R,S}, \mathbb{R})$$

und wir können den Banachschen Fixpunktsatz auf $K : B \to B$ anwenden. Damit erhalten wir

Satz 3 (Hyperbolisches Anfangswertproblem).
Zu $R > 0$ sei die rechte Seite $h(x,y,z,p,q) : Q_R \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben, welche der Lipschitz-Bedingung (3) mit einer Lipschitz-Konstanten $L > 0$ genüge. Dann existiert genau eine Lösung $u = u(x,y) \in C_{xy}(Q_{R,S}, \mathbb{R})$ des hyperbolischen Anfangswertproblemes (1), wobei $S := -2 + \sqrt{4 + L^{-1}}$ und $Q_{R,S} := \{(x,y) \in Q_R : |x+y| \leq S\}$ gesetzt ist.

Bemerkungen.
(i) Wir haben nur eine lokale Existenzaussage gemacht. Die hier konstruierte Lösung existiert nur in der kleineren Menge $Q_{R,S}$ statt auf ganz Q_R. Falls die Lipschitz-Konstante L jedoch hinreichend klein ist (wie klein genau?), gilt $Q_{R,S} = Q_R$. Dann existiert die Lösung also im maximal möglichen Definitionsbereich Q_R.
(ii) Setzt man höhere Regularität von h voraus, so kann aus der Fixpunktgleichung $u = Ku$ auch höhere Regularität der Lösung u zeigen.

Wir haben bis jetzt nur den Fall von Null-Anfangswerten betrachtet. Allgemeiner betrachten wir nun das Cauchy-Problem zu vorgeschriebenen Anfangsdaten

$$\begin{aligned} &u_{xy} = h(x, y, u, u_x, u_y) \quad \text{in } Q_{R,S} \\ &u(x, -x) = f(x) \quad \text{und } u_x(x, -x) + u_y(x, -x) = g(x) \quad \text{für } x \in [-R, R] \end{aligned} \tag{4}$$

wobei $f \in C^2([-R, R], \mathbb{R})$, $g \in C^1([-R, R], \mathbb{R})$ gegebene Anfangsdaten sind. Man setzt diese zunächst geeignet fort, nämlich durch die Funktion

$$v(x, y) := \frac{1}{2}\Big(\int_{-y}^{x} g(s)ds + f(x) + f(-y)\Big)$$

mit den Eigenschaften $v_{xy} = 0$, $v(x, -x) = f(x)$ und $v_x(x, -x) + v_y(x, -x) = g(x)$. Durch "Abziehen" der fortgesetzten Anfangswerte kann man das Problem dann auf Null-Anfangswerte reduzieren. Sei dazu u eine Lösung von (4), so betrachte die Funktion $\hat{u}(x, y) := u(x, y) - v(x, y)$, welche dann das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \hat{u}_{xy}(x, y) &= \hat{h}(x, y, \hat{u}, \hat{u}_x, \hat{u}_y) \quad \text{in } Q_{R,S} \\ 0 = \hat{u}(x, -x) &= \hat{u}_x(x, -x) = \hat{u}_y(x, -x) \quad \text{für } x \in [-R, R] \end{aligned}$$

mit der rechten Seite

$$\hat{h}(x, y, z, p, q) := h(x, y, z + v(x, y), p + v_x(x, y), q + v_y(x, y)) \ .$$

Falls h die Lipschitz-Bedingung (3) mit der Konstanten L erfüllt, so ebenfalls $\hat{h}$ mit derselben Konstanten L. Wir erhalten damit

Satz 4 (Hyperbolisches Anfangswertproblem).
Zu $R > 0$ sei die rechte Seite $h(x, y, z, p, q) : Q_R \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben, welche der Lipschitz-Bedingung (3) mit einer Lipschitz-Konstanten $L > 0$ genüge. Weiter gegeben seien Anfangsdaten $f \in C^2([-R, R], \mathbb{R})$ und $g \in C^1([-R, R], \mathbb{R})$. Dann existiert genau eine Lösung $u = u(x, y) \in C_{xy}(Q_{R,S}, \mathbb{R})$ des hyperbolischen Anfangswertproblemes (4), wobei $S := -2 + \sqrt{4 + L^{-1}}$ und $Q_{R,S} := \{(x, y) \in Q_R : |x + y| \le S\}$ gesetzt ist.

Bemerkung. Wir haben hier ein rein zweidimensionales Anfangswertproblem gelöst. Es stellt sich die Frage, ob man ein entsprechendes Anfangswertproblem auch in höheren

Dimensionen lösen kann. In drei Dimensionen kann zum Beispiel die Gleichung dritter Ordnung studieren

$$u = u(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad , \quad u_{xyz}(x, y, z) = h(x, y, z, \dots)$$

und Lösungen konstruieren (als Diplomarbeit).

2. Der Brouwersche Fixpunktsatz auf der Kugel

Dieser Fixpunktsatz ist im eindimensionalen recht einfach zu beweisen.

Lemma 5 (Brouwer - eindimensional).
Es sei $I = [a, b]$ ein abgeschlossener Intervall in $\mathbb{R}$. Dann hat jede stetige Abbildung $f : I \to I$ einen Fixpunkt.

Beweis. Betrachte die Hilfsfunktion $g : I \to \mathbb{R}$, $g(x) := f(x) - x$. Diese genügt $g(a) = f(a) - a \geq 0$ und $g(b) = f(b) - b \leq 0$. Nach dem Zwischenwertsatz hat g eine Nullstelle $x_* \in [a, b]$ mit $g(x_*) = 0$. Damit ist x_* ein Fixpunkt von f. □

Bemerkungen. (i) Im Gegensatz zum Banachschen Fixpunktsatz muss der Fixpunkt nicht eindeutig sein.
(ii) Durch Anwendung des Bisektionsverfahrens (Intervallschachtelung) auf die Funktion g kann man sogar eine Konstruktionsvorschrift für den Fixpunkt von f angeben.

Wir wollen nun diesen Fixpunktsatz in höhere Dimensionen verallgemeinern. Dazu müssen wir den Intervall $[a, b]$ durch eine abgeschlossene Einheitskugel

$$B := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1^1 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$$

ersetzen.

Satz 6 (Brouwerscher Fixpunktsatz für die Kugel).
Jede stetige Abbildung $f : B \to B$ hat mindestens einen Fixpunkt.

Bemerkungen.
(i) Auch hier muss der Fixpunkt nicht eindeutig sein. Es kann sogar unendlich viele Fixpunkte geben, z.B. für die Identität $f(x) = x$.
(ii) Der Satz lässt sich leicht auf Gebiete G übertragen, welche zur Kugel B *homöomorph* sind. Allerdings gilt der Satz im Allgemeinen nicht für Gebiete, welche nicht homöomorph zur Kugel sind (Übungsaufgabe).
(iii) Es gibt viele verschiedene Beweise für den Brouwerschen Fixpunktsatz, unter anderem ein Beweis basierend auf dem Abbildungsgrad. Den Abbildungsgrad kann man analytisch erklären (siehe [G] und [S]) oder mit Mitteln der algebraischen Topologie. Unser Beweis verwendet Ideen des analytischen Abbildungsgrades [G], ist jedoch elementarer.

(iv) Sämtliche (mir bekannte) Beweise des Brouwerschen Fixpunktsatzes sind nichtkonstruktiv und basieren auf einem Widerspruchsargument. Man gibt also keine Konstruktionsvorschrift für den Fixpunkt an (schlecht für numerische Berechnung!).

Unser Beweis setzt sich aus drei Einzelschritten zusammen:
1.) Äquivalenz von Brouwerschem Fixpunktsatz zum Nullstellenlemma
2.) Beweis des Nullstellenlemmas und damit des Brouwerschen Fixpunktsatzes für glatte (zweimal stetig differenzierbare) Funktionen,
3.) Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes für stetige Funktionen mittels Approximation durch glatte Funktionen.

2.1. **Äquivalenz von Brouwerschem Fixpunktsatz und Nullstellenlemma.** Im Beweis von Lemma 5 haben wir die Existenz eines Fixpunktes auf die Existenz einer Nullstelle zurückgeführt. Ähnliches machen wir auch in höheren Dimensionen.

Satz 7. *Für jedes $k = 0, 1, 2, \dots$ sind folgende Aussagen äquivalent:*
(i) Jede Abbildung $f : B \to B \in C^k(B, B)$ hat einen Fixpunkt.
(ii) Jede Abbildung $g : B \to \mathbb{R}^n \in C^k(B, \mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft $g(x) = x$ für $x \in \partial B$ hat eine Nullstelle.

Beweis. *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*: Angenommen, *(i)* gilt aber nicht *(ii)*. Dann existiert also eine Abbildung $g : B \to \mathbb{R}^n$ der Klasse C^k mit $g(x) = x$ auf ∂B, welche keine Nullstelle hat. Nun betrachte die Hilfsfunktion $h(x) := -\frac{g(x)}{|g(x)|}$ mit $h : B \to B \in C^k(B, B)$. Wegen *(i)* hat diese einen Fixpunkt $x_* \in B$ mit $x_* = h(x_*)$. Da aber $h(x_*) \in \partial B$ folgt $x_* \in \partial B$ und damit

$$x_* = -\frac{g(x_*)}{|g(x_*)|} = -\frac{x_*}{|x_*|} = -x_* \ .$$

Damit folgt $x_* = 0$, ein Widerspruch zu $x_* \in \partial B$.

(ii) $\Rightarrow$ *(i)*: Ebenfalls indirekt, angenommen es gelte *(ii)* aber nicht *(i)*. Dann gibt es also eine Abbildung $f : B \to B \in C^k(B, B)$, welche keinen Fixpunkt besitzt. Für jedes $x \in B$ ist also $f(x) \neq x$. Für festes $x \in B$ betrachte das quadratische Polynom

$$\psi(\lambda) := |x + \lambda(f(x) - x)|^2 = \lambda^2 |x - f(x)|^2 + 2\langle x, f(x) - x\rangle \lambda + |x|^2$$

mit den Eigenschaften

$$\psi(0) = |x|^2 \leq 1 \quad , \quad \psi(1) = |f(x)|^2 \leq 1 \quad , \quad \psi(\lambda) \to \infty \quad \text{für } \lambda \to \pm\infty \ .$$

Damit existiert für jedes $x \in B$ genau eine Lösung $\lambda = \lambda(x) \leq 0$ der quadratischen Gleichung $\psi(\lambda) = 1$. Mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen gilt

$$\lambda(x) = -\frac{\langle x, f(x) - x\rangle}{|x - f(x)|^2} - \sqrt{\frac{\langle x, f(x) - x\rangle^2}{|x - f(x)|^4} + \frac{1 - |x|^2}{|x - f(x)|^2}} \ .$$

Insbesondere ist $\lambda(x)$ eine Funktion der Klasse C^k. Wegen $\psi(0) = 1$ falls $|x| = 1$ ist $\lambda(x) = 0$ für $|x| = 1$, also für $x \in \partial B$. Wir betrachten nun die Hilfsfunktion $g(x) := x+\lambda(x)(x-f(x))$ mit der Eigenschaft $|g(x)|^2 = \psi(\lambda(x)) = 1$ in B sowie $g(x) = x$ auf ∂B. Wegen (ii) müßte g eine Nullstelle haben, im Widerspruch zu $|g(x)|^2 = 1$. $\square$

Bemerkung. Wir nennen die Aussage (ii) das Nullstellenlemma. Dieses werden wir im folgenden beweisen und somit auch den Brouwerschen Fixpunktsatz zeigen.

2.2. **Das Nullstellenlemma für glatte Funktionen.** Wir zeigen zunächst das Nullstellenlemma für glatte (d.h. zweimal stetig differenzierbare) Funktionen und benötigen dazu einige Hilfsaussagen. Zunächst benötigen wir eine Regel zur Differentiation der Determinante

Lemma 8 (Leibniz-Regel)**.**
Gegeben seien n Spaltenvektoren $V_1(t), \ldots, V_n(t) \in \mathbb{R}^n$, welche differenzierbar von $t \in [a, b]$ abhängen. Dann gilt

$$\frac{d}{dt} \det \Big(V_1(t), \ldots, V_n(t) \Big) = \sum_{i=1}^{n} \det \Big(V_1(t), \ldots, V_{i-1}(t), \frac{d}{dt} V_i(t), V_{i+1}(t), \ldots, V_n(t) \Big) \, .$$

Beweis. Einfach, als Übungsaufgabe. $\square$

Wir benötigen einige, aus der Analysis bekannte Definitionen.

Definition. Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Dann nennen wir $Df(x) := (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x))_{i,j}$ die *Jacobi-Matrix*. Es bezeichne $\operatorname{div} f(x) := \operatorname{spur} Df(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x)$ die *Divergenz* von f und $J_f(x) := \det Df(x)$ die *Jakobi-Determinante*.

Lemma 9. *Gegeben seien zwei Funktionen $f, g \in C^2(B, \mathbb{R}^n)$ mit $f = g$ auf ∂B. Dann folgt*

$$\int\limits_B J_f(x) dx = \int\limits_B J_g(x) dx \, .$$

Beweis. 1.) Im ersten Schritt zeigen wir dieses Lemma falls $f = g$ gleich in einer ganzen offenen Umgebung von ∂B gilt. Zu gegebenem $f : B \to \mathbb{R}^n$ erklären wir ein Vektorfeld $a : B \to \mathbb{R}^n$ durch

$$a_k(x) := \det(f_{x_1}(x), \ldots, f_{x_{k-1}}(x), f(x), f_{x_{k+1}}(x), \ldots, f_{x_n}(x)) \quad \text{für } k = 1, \ldots, n \, .$$

Auf ähnliche Weise erklären wir ein Vektorfeld $b : B \to \mathbb{R}^n$ zur Funktion g. Mit Hilfe der Produktregel Lemma 8 berechnen wir die Divergenz von a als

$$\begin{aligned}
\mathrm{div} a(x) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \det(f_{x_1}, \dots, f_{x_{i-1}}, f, f_{x_{i+1}}, \dots, f_{x_n}) \\
&= \sum_{j<i} \det(f_{x_1}, \dots, f_{x_{j-1}}, f_{x_i x_j}, f_{x_{j+1}}, \dots, f_{x_{i-1}}, f, f_{x_{i+1}}, \dots, f_{x_n}) \\
&\quad + n \det(f_{x_1}, \dots, f_{x_n}) \\
&\quad + \sum_{j>i} \det(f_{x_1}, \dots, f_{x_{i-1}}, f, f_{x_{j+1}}, \dots, f_{x_{j-1}}, f_{x_i x_j}, f_{x_{j+1}}, \dots, f_{x_n}) \\
&= n \det(f_{x_1}, \dots, f_{x_n}) = n\, J_f(x)
\end{aligned}$$

unter Verwendung der Antisymmetrie der Determinante. Ähnlich zeigt man $\mathrm{div} b(x) = n\, J_g(x)$. Aus der Voraussetzung $f = g$ in einer offenen Umgebung von ∂B gilt ebenfalls $a = b$ in dieser offenen Umgebung von ∂B. Der Integralsatz von Gauss liefert dann

$$\int\limits_B \Big(J_f(x) - J_g(x)\Big) dx = \frac{1}{n} \int\limits_B \mathrm{div}\Big(a(x) - b(x)\Big) dx = \int_{\partial B} \Big(a(x) - b(x)\Big) \cdot \nu(x) dS = 0\ .$$

2.) Betrachten wir nun den allgemeinen Fall, also $f = g$ nur auf ∂B. Wir konstruieren eine Familie von Funktionen $f_\varepsilon \in C^2(B, \mathbb{R}^n)$ zum Parameter $\varepsilon > 0$ mit den Eigenschaften

$$f_\varepsilon(x) = f(x) \quad \text{falls } |x| < 1 - 2\varepsilon \quad , \quad f_\varepsilon(x) = g(x) \quad \text{falls } |x| > 1 - \varepsilon\ .$$

Zusätzlich nehmen wir an, dass alle ersten Ableitungen von f_ε gleichmäßig beschränkt sind. Solch eine Familie erhält man z.B. durch

$$f_\varepsilon(x) = f(x) + \varrho\Big(\frac{|x| - 1}{\varepsilon}\Big)\Big(g(x) - f(x)\Big)$$

wobei $\varrho \in C^2(\mathbb{R}, [0,1])$ eine Funktion ist mit $\varrho(t) = 0$ für $t \le -2$ und $\varrho(t) = 1$ für $t \ge -1$. Wegen 1.) ist dann

$$\int\limits_B J_{f_\varepsilon}(x) dx = \int\limits_B J_g(x) dx\ .$$

Beachten wir

$$\int\limits_B J_g(x) dx = \int\limits_{|x|<1-2\varepsilon} J_{f_\varepsilon}(x) dx + \int\limits_{1-2\varepsilon<|x|<1} J_{f_\varepsilon}(x) dx = \int\limits_{|x|<1-2\varepsilon} J_f(x) dx + \int\limits_{1-2\varepsilon<|x|<1} J_{f_\varepsilon}(x) dx$$

so erhalten wir für $\varepsilon \to 0$ die Gleichung

$$\int\limits_B J_f(x) dx = \int\limits_B J_g(x) dx\ ,$$

unter Beachtung der gleichmäßigen Beschränktheit der Ableitungen von f_ε. $\square$

Bemerkung. Der Satz besagt, dass das Integral über die Jakobi-Determinante $\int_B J_f dx$ bereits eindeutig durch die Werte von f auf dem Rand ∂B festgelegt ist. Insofern stellt er eine n-dimensionale Version des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung dar.

Satz 10 (Nullstellenlemma für glatte Funktionen)**.**
Jede Funktion $f \in C^2(B, \mathbb{R}^n)$ mit $f(x) = x$ für $x \in \partial B$ besitzt eine Nullstelle in B.

Beweis. Angenommen, f hat keine Nullstelle. Dann betrachte die Hilfsfunktion $g(x) := \frac{f(x)}{|f(x)|}$, welche dann ebenfalls zur Klasse $C^2(B, \mathbb{R}^n)$ gehört. Offensichtlich gilt $g(B) \subset \partial B$, also kann $g(B)$ keine offene, nichtleere Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ enthalten. Der Satz über die inverse Abbildung liefert dann $J_g(x) \equiv 0$, denn wäre $J_g(x_0) \neq 0$ für ein x_0 so müsste g lokal um x_0 offene Mengen auf offene Mengen abbilden. Betrachte nun weiter die Hilfsfunktion $h(x) := x$ für $x \in B$ mit $J_h(x) \equiv 1$. Aus der Voraussetzung $f(x) = x$ auf ∂B folgt nun $g(x) = x = h(x)$ auf ∂B und mit Lemma 9 ist $\int_B J_g(x)dx = \int_B J_h(x)dx$. Andererseits ist $\int_B J_g dx = 0$ und $\int_B J_h(x)dx = \int_B 1dx > 0$, also ein Widerspruch. $\square$

Zusammen mit Satz 7 folgt nun

Korollar 11. *Jede Funktion $f : B \to B \in C^2(B, B)$ hat einen Fixpunkt.*

2.3. **Approximation durch glatte Funktionen.** Um nun den Brouwerschen Fixpunktsatz auch für stetige Funktionen zu beweisen, müssen wir diese durch glatte Funktionen gleichmäßig approximieren. Eventuell bekannt aus der Analysis ist der Weierstraßsche Approximationssatz, welcher besagt, dass man stetige Funktionen sogar stets durch eine Folge von Polynomen gleichmäßig approximieren kann.

Wir betrachten hier die Approximation durch Glättung (englisch mollifier). Dazu betrachten wir folgende Funktion

$$\varrho \in C^\infty(\mathbb{R}^n, [0, +\infty)) \quad , \quad \varrho(z) := \begin{cases} c\exp(\frac{1}{|z|^2-1}) & \text{falls } |z|^2 < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ so gewählt ist, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varrho(z)dz = \int_{|z|<1} \varrho(z)dz = 1$$

gilt. Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ erklären wir ihre geglättete (oder gefaltete) Funktion

$$f_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \varrho\Big(\frac{y-x}{\varepsilon}\Big) f(y)dy$$

welche zur Regularitätsklasse $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ gehört, also beliebig oft differenzierbar ist. Mittels der Substition $z = (y - x)/\varepsilon$ bez. $y = x + \varepsilon z$ folgt dann

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varrho(z) f(x + \varepsilon z)dz \ .$$

Lemma 12 (Approximationslemma).
Zu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $f(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ gegeben. Es sei $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ die Glättung von f.

a) *Ist $f \in C^0_0(\Omega, \mathbb{R}^m)$, so gilt der Grenzwert*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f_\varepsilon(x) - f(x)| = 0 \ .$$

Die Folge f_ε konvergiert somit in $\mathbb{R}^n$ gleichmäßig gegen f.

b) *Falls $f \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$, so gilt der Grenzwert*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega |f_\varepsilon(x) - f(x)| dx = 0$$

d.h. die Folge f_ε konvergiert gegen f im Sinne der L^1-Konvergenz.

Beweis. Zu a): Jede Funktion $f \in C^0_0(\Omega, \mathbb{R}^m)$ ist in $\mathbb{R}^n$ gleichmäßig stetig. Zu vorgebenem $h > 0$ existiert also ein $\delta(h) > 0$ mit

$$|x - y| \le \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(y)| \le h$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Es folgt dann die Abschätzung

$$\begin{aligned} |f_\varepsilon(x) - f(x)| &= \Big| \int_{\mathbb{R}^n} \varrho(z) f(x + \varepsilon z) dz - f(x) \int_{\mathbb{R}^n} \varrho(z) dz \Big| \\ &\le \int_{\mathbb{R}^n} \varrho(z) |f(x + \varepsilon z) - f(x)| dz \\ &= \int_{|z|<1} \varrho(z) |f(x + \varepsilon z) - f(x)| dz \le h \int_{|z|<1} \varrho(z) dz = h \quad \text{falls } \varepsilon \le \delta(h) \ . \end{aligned}$$

Hieraus folgt nun die Konvergenz

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f_\varepsilon(x) - f(x)| = 0 \ .$$

Zu b): Der Satz von Fubini liefert zunächst die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f_\varepsilon(x)| dx &\le \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{|z|<1} \varrho(z) |f(x + \varepsilon z)| dz \Big) dx \\ &= \int_{|z|<1} \varrho(z) \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x + \varepsilon z)| dx \Big) dz = \int_{|z|<1} \varrho(z) dz \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy \ . \end{aligned}$$

Inbesondere gilt $||f_\varepsilon||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le ||f||_{L^1(\mathbb{R}^n)}$. Es sei nun $g \in C^0_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ beliebig gewählt. Dann gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} ||f - f_\varepsilon||_{L^1(\mathbb{R}^n)} &\le ||f - g||_{L^1(\mathbb{R}^n)} + ||g - g_\varepsilon||_{L^1(\mathbb{R}^n)} + ||(g - f)_\varepsilon||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\ &\le 2||f - g||_{L^1(\mathbb{R}^n)} + ||g - g_\varepsilon||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \ . \end{aligned}$$

Wegen a) (angewendet auf $\Omega = \mathbb{R}^n$) konvergiert g_ε in $\mathbb{R}^n$ gleichmäßig gegen g, insbesondere $||g - g_\varepsilon||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \to 0$. Daher gilt der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon \to 0} ||f - f_\varepsilon||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq 2||g - f||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \ .$$

Durch geeignete Wahl von $g \in C_0^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ist der Ausdruck $||g - f||_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ beliebig nahe bei Null. [2] Es gilt also der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon \to 0} ||f_\varepsilon - f||_{L^1(\Omega)} \leq \lim_{\varepsilon \to 0} ||f - f_\varepsilon||_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 0 \ .$$

□

Wir können nun den Brouwerschen Fixpunktsatz zeigen: Jede stetige Abbildung $f : B \to B$ hat einen Fixpunkt.

Beweis. Sei $f : B \to B$ stetig. Wir wählen zunächst eine stetige Fortsetzung $\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften

$$|\hat{f}(x)| \leq 1 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \quad , \quad \hat{f}(x) = f(x) \quad \text{falls } |x| \leq 1 \quad , \quad \hat{f}(x) = 0 \quad \text{falls } |x| \geq 2 \ .$$

Insbesondere gilt $\hat{f} \in C_0^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Eine solche Fortsetzung ist einfach zu finden (Übungsaufgabe). Zu $k \in \mathbb{N}$ sei nun $\hat{f}_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ die Glättung von $\hat{f}$ für $\varepsilon = 1/k$, also

$$\hat{f}_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varrho(z) \hat{f}\Big(x + \frac{1}{k} z\Big) dz \ .$$

Diese konvergieren in B für $k \to \infty$ gleichmäßig gegen $\hat{f} = f$. Weiter gilt die Abschätzung

$$|\hat{f}_k(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \varrho(z) \Big| \hat{f}\Big(x + \frac{1}{k} z\Big) \Big| dz \leq \int_{\mathbb{R}^n} \varrho(z) dz = 1 \ ,$$

insbesondere gilt $\hat{f}_k(x) \in B$ für $x \in \mathbb{R}^n$. Wegen Korollar 11 existiert ein Fixpunkt $x_k \in B$ mit $\hat{f}_k(x_k) = x_k$. Nach Auswahl einer konvergenten Teilfolge können wir $x_n \to x_*$ für $n \to \infty$ mit $x_* \in B$ erreichen. Aus der gleichmäßigen Konvergenz von $\hat{f}_k$ in B folgt dann

$$x_* = \lim_{k \to \infty} x_k = \lim_{k \to \infty} \hat{f}_k(x_k) = \hat{f}(x_*) \ .$$

Da $x_* \in B$ gilt, folgt weiter $x_* = \hat{f}(x_*) = f(x_*)$. Damit ist x_* ein Fixpunkt von f. □

[2] weil $C_0^0(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^1(\mathbb{R}^n)$ liegt

2.4. **Anwendung: Gewöhnliche Differentialgleichungen unter Randbedingungen.** Wir suchen eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung unter *nichtlinearer Randbedingung*

$$(5)\qquad y = y(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^n \quad , \quad y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{in } [a,b] \quad , \quad y(a) = g(y(b))$$

wobei $f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die rechte Seite und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist.

Um dieses Problem zu lösen, gehen wir zunächst vom entsprechenden Anfangswertproblem aus

$$y_p : [a,b] \to \mathbb{R}^n \quad , \quad y_p'(t) = f(t, y_p(t)) \quad , \quad y_p(a) = p\ .$$

Der Satz von Picard-Lindelöff liefert eine eindeutige Lösung dieses Problemes, wenn die rechte Seite der globalen Lipschitz-Bedingung

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \le L|y_1 - y_2| \quad \text{für } t \in [a,b]\ ,\ y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$$

genügt. Zusätzlich hängt die Lösung y_p stetig vom Anfangswert p ab.

Wir stellen nun noch folgende Voraussetzung an die rechte Seite

$$(6)\qquad f(t,y) = 0 \quad \text{für alle } (t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \text{ mit } |y| = 1\ .$$

Diese Voraussetzung bewirkt folgendes:
1.) Aus $|p| = 1$ folgt sofort $y_p(t) \equiv p$ für alle $t \in [a,b]$.
2.) Für $|p| < 1$ folgt ebenfalls $|y_p(t)| < 1$ für alle $t \in [a,b]$. Wäre nämlich $|y_p(t_*)| = 1$ für ein $t_* \in [a,b]$, so folgt wegen 1.) auch $|y_p(t)| \equiv 1$ für alle $t \in [a,b]$. Zusammen ergibt dies also $|y_p(t)| \le 1$ falls $|p| \le 1$.

Damit nun y_p eine Lösung vom Randwertproblem (5) ist, muss $y_p(a) = g(y_p(b))$ gelten. Wegen $y_p(a) = p$ gilt dies genau dann, wenn $p = g(y_p(b))$ ist. Wir suchen also einen Fixpunkt der stetigen Funktion $F(p) := g(y_p(b))$. Um den Brouwerschen Fixpunktsatz anwenden zu können, müssen wir noch $F(B) \subset B$ sicherstellen. Wir wissen bereits, dass $y_p(b) \in B$ für alle $p \in B$ gilt. Fordern wir zusätzlich $g(B) \subset B$, so folgt $F(B) \subset B$ und der Brouwersche Fixpunktsatz liefert

Satz 13. *Gegeben sei die rechte Seite $f(t,y)$, welcher der globalen Lipschitz-Bedingung sowie Voraussetzung (6) genüge. Weiter sei eine Funktion $g : B \to B \in C^0(B,B)$ gegeben. Dann besitzt das Randwertproblem (5) eine Lösung $y(t)$.*

Bemerkungen. (i) Die Lösung des Randwertproblemes ist, im Gegensatz zum Anfangswertproblem, im Allgemeinen nicht eindeutig (man finde ein Beispiel).
(ii) Der Satz ist speziell auf $g(z) = z$ anwendbar. Wir erhalten dann die Randbedingung $y(a) = y(b)$, durch welche man periodische Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung konstruieren kann (als Übungsaufgabe).

3. Brouwerscher Fixpunktsatz auf konvexen Mengen

Definition. Wir nennen

$$\Sigma_n := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ x_i \in [0,1] \ , \ x_1 + \cdots + x_{n+1} = 1\}$$

das *n-dimensionale Einheitssimplex.*

Somit ist Σ_n gleich der konvexen Hülle der Vektoren $e_1 = (1, 0 \dots, 0)$ bis $e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1)$. Als Vorbereitung zeigen wir

Lemma 14 (Brouwerscher Fixpunktsatz auf dem Simplex)**.**
Jede stetige Abbildung $f : \Sigma_n \to \Sigma_n$ hat einen Fixpunkt.

Beweis. Wir erklären die stetige und bijektive Abbildung

$$h : \Sigma_n \to B \quad , \quad h(x_1, \dots, x_{n+1}) := (\sqrt{x_1}, \dots, \sqrt{x_n})$$

welche die Inverse

$$h^{-1} : B \to \Sigma_n \quad , \quad h^{-1}(y_1, \dots, y_n) := (y_1^2, \dots, y_n^2, 1 - y_1^2 - \cdots - y_n^2)$$

besitzt. Zu stetigem $f : \Sigma_n \to \Sigma_n$ betrachte die stetige Hilfsfunktion $\tilde{f} : B \to B$ mit $\tilde{f}(y) := h \circ f \circ h^{-1}(y)$ für $y \in B$, welche wegen des Brouwerschen Fixpunksatzes auf der Kugel einen Fixpunkt $y_* \in B$ besitzt. Damit ist $x_* := h^{-1}(y_*)$ ein Fixpunkt von f. $\square$

Zur Erinnerung: Eine Teilmenge $K \subset V$ eines Vektorraumes heißt konvex, wenn mit $x_1, \dots, x_{n+1} \in K$ und $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \Sigma_n$ auch die *Konvexkombination*

$$x := \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \in K$$

wieder in K liegt.

Satz 15 (Brouwerscher Fixpunktsatz für konvexe Mengen)**.**
Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, konvex und nicht leer. Dann besitzt jede stetige Abbildung $f : K \to K$ einen Fixpunkt.

Beweis. 1.) Da K kompakt ist, gibt es nach dem Überdeckungssatz von Heine-Borel zu $\varepsilon > 0$ endlich viele $v_1, \dots, v_N \in K$, $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$K \subset B_{\varepsilon/2}(v_1) \cup \cdots \cup B_{\varepsilon/2}(v_N) \ .$$

Wir erklären nun stetige Funktionen

$$\psi_i : K \to [0, +\infty) \quad , \quad \psi_i(x) := \max(\varepsilon - ||x - v_i||, 0) \quad \text{für } i = 1, \dots, N$$

mit den Eigenschaften

$$\psi_i(x) = 0 \quad \text{falls } ||x - v_i|| \geq \varepsilon \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{N} \psi_i(x) \geq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für } x \in K \ .$$

Damit sind die Funktionen

$$\varphi_i : K \to [0, +\infty) \quad , \quad \varphi_i(x) := \frac{\psi_i(x)}{\psi_1(x) + \cdots + \psi_N(x)}$$

wohldefiniert, stetig in K und $\varphi_i(x) = 0$ falls $||x - v_i|| \geq \varepsilon$. Ferner ist $\varphi(x) := (\varphi_1(x), \dots, \varphi_N(x)) \in \Sigma_{N-1}$ richtig. Weiterhin gilt die Abschätzung

$$\Big|\Big|x - \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(x) v_i\Big|\Big| = \Big|\Big|\sum_{i=1}^{N} \varphi_i(x)(x - v_i)\Big|\Big| \leq \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(x) ||x - v_i|| \leq \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(x) \varepsilon = \varepsilon \ .$$

2.) Wir betrachten die Funktion

$$g = g(\lambda_1, \dots, \lambda_N) : \Sigma_{N-1} \to \Sigma_{N-1} \quad , \quad g(\lambda_1, \dots, \lambda_N) := \varphi \circ f\Big(\sum_{j=1}^{N} \lambda_j v_j\Big) \ .$$

Für die Wohldefiniertheit von g verwenden wir die Konvexität der Menge K. Wegen Lemma 14 besitzt g einen Fixpunkt $\lambda^* \in \Sigma_{N-1}$ mit $g(\lambda^*) = \lambda^*$. Erklären wir $y_\varepsilon := \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^* v_i \in K$, so folgt

$$y_\varepsilon = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^* v_i = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i \circ f\Big(\sum \lambda_j^* v_j\Big) v_i = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i \circ f(y_\varepsilon) v_i \ .$$

Wir setzen in die letzte Abschätzung aus 1.) $x = f(y_\varepsilon)$ ein und erhalten

$$||f(y_\varepsilon) - y_\varepsilon|| \leq \varepsilon \ .$$

Da $y_\varepsilon \in K$ und $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt ist, können wir durch Auswahl einer konvergenten Teilfolge $y_\varepsilon \to y_*$ für $\varepsilon \to 0$ annehmen, wobei $y_* \in K$ ist. Aus der Stetigkeit von f folgt schließlich $||f(y_*) - y_*|| = 0$, also ist y_* ein Fixpunkt von f. □

Bemerkung. Die Konvexitätsvoraussetzung an das Gebiet kann nicht weggelassen werden. Zum Beispiel betrachte man auf dem nichtkonvexen Kreisring $K = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ 1 \leq |x| \leq 2\}$ die Abbildung $f : K \to K$, $f(x) := -x$, welche in K keinen Fixpunkt besitzt.

4. Der Fixpunktsatz von Kakutani - Anwendung auf mathematische Wirtschaftstheorie

Zur Beschreibungsweise von Wirtschaftssystemen werden mengenwertige Abbildungen verwendet, sogenannte Korrespondenzen.

Definition. Seien M, N zwei Mengen. Unter einer *Korrespondenz* $f : M \Rightarrow N$ verstehen wir eine Abbildung $f : M \to P(N)$, wobei $P(N) := \{K \ : \ K \subset N\}$ die Potenzmenge von N ist. Es ist also $f(x) \subset N$ für alle $x \in M$.

Definition. Seien $M, N \subset \mathbb{R}^n$. Dann heißt die Korrespondenz $f : M \Rightarrow N$ *abgeschlossen*, wenn für je zwei Folgen $x^k \in M$, $y^k \in f(x^k)$ und $x^k \to x^*$ sowie $y^k \to y^*$ für $k \to \infty$ folgt dass $y^* \in f(x^*)$ gilt.

Bemerkung. Eine Korrespondenz $f : M \Rightarrow N$ ist genau dann abgeschlossen, wenn ihr Graph

$$\mathrm{graph}(f) := \{(x, y) \ : \ x \in M \ , \ y \in f(x)\}$$

eine abgeschlossene Teilmenge von $M \times N$ ist.

Beispiele. (i) Die "Identität" $f(x) := \{x\}$ ist abgeschlossene Korrespondenz. Allgemeiner ist für jede stetige Funktion $g : M \to N$ die Korrespondenz $f(x) := \{g(x)\}$ abgeschlossen.
(ii) Die Korrespondenz $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \{y \in \mathbb{R} \ : \ y \geq x\}$ ist abgeschlossen.
(iii) Die Korrespondenz $f : \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) := \{\lambda x + (1 - \lambda) y \ : \ \lambda \in [0, 1]\}$, welche jedem (x, y) die Strecke zwischen x und y zuordnet, ist abgeschlossen.

Satz 16 (Fixpunktsatz von Kakutani)**.**
Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, konvex und nicht leer sowie $f : K \Rightarrow K$ eine abgeschlossene Korrespondenz. Für jedes $x \in K$ sei $f(x) \subset K$ eine nicht leere, konvexe Teilmenge von K. Dann besitzt f einen "Fixpunkt", d.h. es existiert ein $z \in K$ mit $z \in f(z)$.

Beweis. 1.) Zu $\varepsilon > 0$ überdecken wir $K \subset B_{\varepsilon/2}(v_1) \cup \cdots \cup B_{\varepsilon/2}(v_N)$ mit $v_1, \ldots, v_N \in K$. Wie im Beweis von Satz 15 erklären wir stetige Funkionen

$$\varphi_i : K \to [0, 1] \quad , \quad \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(x) = 1 \quad \text{in } K \quad , \quad \varphi_i(x) = 0 \quad \text{falls } ||x - v_i|| \geq \varepsilon \ .$$

Für $i = 1, \ldots, N$ wählen wir $y_i \in f(v_i)$ und betrachten

$$g_\varepsilon : K \to \mathbb{R}^n \quad , \quad g_\varepsilon(x) := \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(x) y_i \ .$$

Aus K konvex und $v_1, \ldots, v_N \in K$ folgt dann $g_\varepsilon(K) \subset K$. Wegen Satz 15 besitzt g_ε einen Fixpunkt $z_\varepsilon \in K$ mit $g_\varepsilon(z_\varepsilon) = z_\varepsilon$. Nach Auswahl einer konvergenten Teilfolge erreichen wir $z_\varepsilon \to z$ für $\varepsilon \to 0$ mit $z \in K$. Im Folgenden zeigen wir $z \in f(z)$, d.h. z ist bereits ein Fixpunkt von f.

2.) Zu $r > 0$ setzen wir die offene Menge

$$V_r := \{y + v \in \mathbb{R}^n \mid y \in f(z) \ , \ \ v \in \mathbb{R}^n \text{ mit } ||v|| < r\}$$

mit $f(z) \subset V_r$. Da nach Voraussetzung $f(z)$ konvex ist, ist auch V_r konvex. Wir behaupten: Es gibt ein $\delta = \delta(r) > 0$ sodass gilt

$$f(x) \subset V_r \quad \text{für alle } x \in K \ , \ ||x - z|| < \delta \ .$$

Indirekter Beweis: Wenn dies nicht gilt, so gibt es eine Folge $x_k \in K$ mit $x_k \to z$ für $n \to \infty$ sowie eine Folge $w_k \in f(x_k)\backslash V_r \subset K\backslash V_r$. Nach Auswahl einer Teilfolge können wir $w_k \to w$ für $n \to \infty$ erreichen. Da $K\backslash V_r$ abgeschlossen ist, folgt $w \in K\backslash V_r$. Aus der Abgeschlossenheit von f folgt andererseits $w \in f(z) \subset V_r$, ein Widerspruch.

3.) Es sei nun $\varepsilon < \delta$ für das $\delta > 0$ aus 2.). Wir behaupten:

$$g_\varepsilon(x) \in V_r \quad \text{für alle } x \in K \text{ mit } ||x - z|| < \delta - \varepsilon\ .$$

Beweis dazu: Für $x \in K$ mit $||x - v_i|| < \varepsilon$ gilt

$$||z - v_i|| \leq ||z - x|| + ||x - v_i|| < \delta - \varepsilon + \varepsilon = \delta\ .$$

Wegen 2.) ist dann $f(v_i) \subset V_r$ und wegen $y_i \in f(v_i)$ auch $y_i \in V_r$. Nach Definition ist nun

$$g_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(x) y_i = \sum_{\substack{i=1,\dots,N \\ ||x-v_i||<\varepsilon}} \varphi_i(x) y_i\ .$$

Somit ist $g_\varepsilon(x)$ eine Konvexkombination von Elementen aus V_r. Da aber V_r konvex ist, folgt $g_\varepsilon(x) \in V_r$.

4.) Wegen der Konvergenz $z_\varepsilon \to z$ für $\varepsilon \to 0$ gilt $||z_\varepsilon - z|| < \delta - \varepsilon$ für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$. Aus 3.) folgt dann $z_\varepsilon = g_\varepsilon(z_\varepsilon) \in V_r$ und für $\varepsilon \to 0$ erhalten wir $z \in \overline{V_r}$ für jedes $r > 0$. Für $r \to 0$ folgt daraus schließlich $z \in f(z)$, da $\bigcap_{r>0} V_r = f(z)$ gilt. □

Bemerkungen. (i) Der Fixpunktsatz von Kakutani enthält als Spezialfall den Fixpunktsatz von Brouwer: Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $g : K \to K$ stetig. Dann erklären wir die abgeschlossene Korrespondenz $f : K \Rightarrow K$ durch $f(x) := \{g(x)\}$. Offensichtlich ist $f(x)$ stets nicht leer und konvex. Der Fixpunktsatz von Kakutani liefert ein $z \in K$ mit $z \in f(z) = \{g(z)\}$. Also ist $z = g(z)$ ein Fixpunkt von g.
(ii) Die Voraussetzung des Kakutani-Satzes, dass $f(z)$ eine konvexe Menge ist, kann nicht weggelassen werden: Die abgeschlossene Korrespondenz

$$f : [0,1] \Rightarrow [0,1] \quad , \quad f(x) := \begin{cases} \{1\} & \text{für } 0 \leq x < 1/2 \\ \{0,1\} & \text{für } x = 1/2 \\ \{0\} & \text{für } 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

besitzt keinen Fixpunkt.

Definition (Grundkomponenten eines Wirtschaftssystemes)**.**

a) Güter der Anzahl n: Aktion eines Beteiligten (Firma, etc)

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

mit der Bedeutung:

$x_j > 0$: produziere Gut j in der Menge x_j

$x_j < 0$: konsumiere Gut j in der Menge $|x_j|$
$x_j = 0$: Gut j wird weder produziert noch konsumiert.

b) Preissystem: $p = (p_1, \dots, p_n) \in \Sigma_n$, also $p_i \in [0,1]$ und $\sum_{i=1}^n p_i = 1$
Bedeutung: Gut j kostet p_j
$p \cdot x = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$: Wert der Aktion x unter p

c) Akteure der Anzahl m
$\emptyset \neq X^{(i)} \subset \mathbb{R}^n$ Aktionsbereich des Akteurs i,

$$\Phi^{(i)} : \Sigma_{n-1} \rightrightarrows X^{(i)} \quad \text{mit} \quad \emptyset \neq \Phi^{(i)}(p) \subset X^{(i)}$$

Bedeutung: $\Phi^{(i)}(p)$ die Menge aller für Akteur i zum Preissystem p *erwünschten* Aktionen

d) Gesamtaktion: $G = (x^{(i)}, \dots, x^{(m)}) \in X^{(1)} \times \dots \times X^{(m)}$
Zusammenfassung der Aktionen aller Akteure

Definition. Eine Gesamtaktion $G = (x^{(1)}, \dots, x^{(m)})$ heißt:

a) *zulässig*, falls für jedes $j = 1, \dots, n$

$$\sum_{i=1}^m x_j^{(i)} \geq 0 \qquad \text{d.h. Produktion} \geq \text{Konsum}$$

b) *allseits erwünscht* unter $p \in \Sigma_{n-1}$ falls $x^{(i)} \in \Phi^{(i)}(p)$ für $i = 1, \dots, m$ gilt

c) *Gleichgewicht unter* p, falls zulässig und allseits erwünscht ist

Es stellt sich die **Frage**: Existieren Gleichgewichte? Genauer: Existiert ein Preissystem $p \in \Sigma_{n-1}$ und eine Gesamtaktion G, sodass G ein Gleichgewicht unter p ist?

Beispiel. Die Güter seien:
$j = 1$: Rohstoff (Mehl)
$j = 2$: Konsumgut (Brot)
Die Akteure seien:
$i = 1$: Rohstoffproduzent (Bauer)
$i = 2$: Veredeler (Bäcker)
Das Preissystem sei $p = (p_1, p_2) = (p_1, 1 - p_1)$ mit $p_1 \in [0,1]$ Preis für Rohstoff.
Weiter sei

$$\Phi^{(1)}(p) = \{(2p_1, -\varepsilon)\} \qquad \varepsilon \in (0,1) \text{ Verbrauch des Bauers an Brot}$$
$$\Phi^{(2)}(p) = \{(p_1 - 1, 1 - p_1)\} \, .$$

Beachte: Die Mengen $\Phi^{(i)}(p)$ enthalten nur ein Element (vereinfachtes Modell). Ein Gleichgewicht existiert falls $\Phi^{(1)}(p) + \Phi^{(2)}(p) \geq 0$ gilt, also

$$\begin{array}{rcll} 2p_1 + p_1 - 1 & \geq & 0 & \text{Produktion Mehl} \geq \text{Konsum Mehl} \\ -\varepsilon + 1 - p_1 & \geq & 0 & \text{Produktion Brot} \geq \text{Konsum Brot} \end{array}$$

also falls sowohl $p_1 \geq 1/3$ also auch $p_1 \leq 1-\varepsilon$. Dafür muss $1/3 \leq 1-\varepsilon$ gelten, d.h. $\varepsilon \leq 2/3$. Ergebnis: Falls $\varepsilon \leq 2/3$, so existiert ein Gleichgewicht für das Preissystem $(p_1, p_2) = (1/3, 2/3)$. Falls $\varepsilon > 2/3$ ist, existiert kein Gleichgewicht.

Um allgemein die Existenz eines Gleichgewichtes zu zeigen, benötigen wir zunächst

Satz 17 (Gale-Nikaido-Debreu)**.**
Gegeben sei abgeschlossene Korrespondenz $f : \Sigma_{n-1} \to \mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften:

a) *Für alle $p \in \Sigma_{n-1}$ ist $f(p)$ nicht leer und konvex.*
b) *Die Korrespondenz ist beschränkt, d.h. es gibt ein R mit $|y| \leq R$ für alle $y \in f(p)$ und $p \in \Sigma_{n-1}$.*
c) *Für alle $p \in \Sigma_{n-1}$ und $y \in f(p)$ gilt $0 \leq p \cdot y$.*

Dann existiert ein $p \in \Sigma_{n-1}$ und ein $z \in f(p)$ mit $0 \leq z_j$ für $j = 1, \ldots, n$.

Beweis. Zu $B_R := \{z \in \mathbb{R}^n \ : \ ||x|| \leq R\}$ definieren wir $\Psi : B_R \rightrightarrows \Sigma_{n-1}$ durch

$$\Psi(z) := \left\{ p \in \Sigma_{n-1} \ : \ p \cdot z \leq q \cdot z \text{ für alle } q \in \Sigma_{n-1} \right\} .$$

Damit hat die Menge $\Psi(z)$ folgende Eigenschaften:
1) ist nicht leer, die stetige Funktion $q \mapsto q \cdot z$ nimmt im Kompaktum Σ_{n-1} ihr Minimum an,
2) für $p_1, p_2 \in \Psi(z)$ ist $p_1 \cdot z = p_2 \cdot z$,
3) ist kompakt, denn $\Psi(z) \subset \Sigma_{n-1}$ ist abgeschlossen und beschränkt,
4) ist konvex, denn mit $p_1, p_2 \in \Psi(z)$ ist $p_1 \cdot z = p_2 \cdot z$ und damit $(\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2) \cdot z = p_1 \cdot z$.
Wir zeigen noch, dass Ψ abgeschlossen ist: Seien $z_k \in B_R$ mit $z_k \to z_0$ für $n \to \infty$. Weiter seien $p_k \in \Psi(z_k)$ mit $p_k \to p$ für $n \to \infty$. Dann folgt

$$p_k \cdot z_k \leq q \cdot z_k \quad \text{für alle } q \in \Sigma_{n-1}$$

und für $n \to \infty$ folgt

$$p_0 \cdot z_0 \leq q \cdot p_0 \quad \text{für alle } q \in \Sigma_{n-1}$$

also $p_0 \in \Psi(z_0)$ und somit Ψ abgeschlossen. Wir erklären nun

$$F : \Sigma_{n-1} \times B_R \rightrightarrows \Sigma_{n-1} \times B_R \quad , \quad F(p,z) := \Psi(z) \times f(p) .$$

Damit ist $F(p,z)$ stets nicht leer und konvex. Schließlich ist F abgeschlossen, was aus der Abgeschlossenheit von f und Ψ folgt. Der Fixpunktsatz von Kakutani liefert einen Fixpunkt $(p,z) \in F(p,z)$. Damit folgt $p \in \Psi(z)$, $z \in f(p)$. Aus $z \in f(p)$ folgt mit Voraussetzung c)

$0 \leq p \cdot z$. Aus $p \in \Psi(z)$ folgern wir $p \cdot z \leq q \cdot z$ für $q \in \Sigma_{n-1}$ und somit $0 \leq q \cdot z$ für alle $q \in \Sigma_{n-1}$. Für $q = e_i$, $i = 1, \ldots, n$ folgt $0 \leq e_i \cdot z = z_i$. $\square$

Auf Grund der entscheidenden Voraussetzung c) dieses Satzes fordern wir nun

Definition. Ein Wirtschaftssystem heißt *global solide*, wenn für jedes Preissystem $p \in \Sigma_{n-1}$ und jede unter p allseits erwünschte Gesamtaktion $G = (x^{(1)}, \ldots, x^{(m)})$ die Bedingung

$$p \cdot \sum_{i=1}^{m} x^{(i)} = p \cdot x^{(1)} + \cdots + p \cdot x^{(m)} \geq 0 \qquad \text{Wert der Gesamtaktion}$$

erfüllt ist.

Satz 18 (Existenz von Gleichgewichten).
Ein mathematisches Wirtschaftssystem erfülle folgende Voraussetzungen:

a) *Für $i = 1, \ldots, m$ sind $X^{(i)}$ nicht leer und kompakt, $\Phi^{(i)} : \Sigma_{n-1} \Rightarrow X^{(i)}$ eine abgeschlossene Korrespondenz mit $\Phi^{(i)}(p)$ nicht leer und konvex.*
b) *Es gelte globale Solidität.*

Dann existiert ein Preissystem $p \in \Sigma_{n-1}$, unter dem ein Gleichgewicht G existiert.

Beweis. Betrachte

$$f : \Sigma_{n-1} \Rightarrow \mathbb{R}^n \quad , \quad f(p) := \Big\{ \sum_{i=1}^{n} x^{(i)} \ : \ x^{(i)} \in \Phi^{(i)}(p) \Big\} \ .$$

Satz 17 liefert ein Preissystem $p \in \Sigma_{n-1}$ und Vektoren $x^{(i)} \in \Phi^{(i)}(p)$ mit

$$\Big(\sum_{i=1}^{m} x^{(i)} \Big) \cdot e_j = \sum_{i=1}^{m} x_j^{(i)} \geq 0 \quad \text{für } j = 1, \ldots, n \ .$$

Die Gesamtaktion $G = (x^{(1)}, \ldots, x^{(m)})$ ist also zulässig und allseits erwünscht, somit ein Gleichgewicht. $\square$

Bemerkung. Der Satz liefert nur die Existenz eines Preissystemes p, für das Gleichgewicht existiert. Der Satz liefert jedoch keinen Algorithmus, um dieses Preissystem p zu ermitteln.

Beispiel. Wir setzen obiges Beispiel fort. Wann ist dieses Wirtschaftssystem global solide? Es sei $p = (p_1, 1 - p_1)$ ein Preissystem und $G = (x^{(1)}, x^{(2)})$ eine Gesamtaktion mit $x^{(1)} = (2p_1, -\varepsilon)$ und $x^{(2)} = (p_1 - 1, 1 - p_1)$. Dann ist

$$\begin{aligned} p \cdot (x^{(1)} + x^{(2)}) &= \begin{pmatrix} p_1 \\ 1 - p_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3p_1 - 1 \\ 1 - p_1 - \varepsilon \end{pmatrix} = 4p_1^2 - (3 - \varepsilon)p_1 + 1 - \varepsilon \\ &\geq 4p_1^2 - 3p_1 + 1 - \varepsilon = \Big(2p_1 - \frac{3}{4}\Big)^2 - \frac{9}{16} + 1 - \varepsilon \\ &\geq \frac{7}{17} - \varepsilon \geq 0 \quad \text{falls } \varepsilon \leq 7/16 \ . \end{aligned}$$

Dieses Wirtsschaftsystem ist also für $\varepsilon \leq 7/16$ global solide und nach obigem Satz existiert ein Gleichgewicht für jedes $\varepsilon \leq 7/16$. Wir haben allerdings bereits explizit gezeigt, dass für jedes $\varepsilon \leq 2/3$ ein Gleichgewicht existiert. Jedoch ist dieses Wirtschaftsystem für $\varepsilon = 2/3$ nicht global solide und obiger Satz nicht anwendbar.

5. Der Schaudersche Fixpunktsatz

Wir wollen den Brouwerschen Fixpunktsatz in den Banach-Raum verallgemeinern. Statt die Kompaktheit des Definitionsbereiches vorauszusetzen, werden wir nun sogenannte vollstetige (oder kompakte) Operatoren betrachten, d.h. der Kompaktheitsbegriff wird von der Menge auf den Operator übertragen.

Definition. Eine Teilmenge $M \subset V$ eines Banach-Raumes V heißt *präkompakt*, wenn jede Folge in M eine Cauchy-Teilfolge enthält.

Bemerkung. Folgende drei Aussagen sind äquivalent:
(i) Die Menge M ist präkompakt.
(ii) Der topologische Abschluss $\overline{M}$ von M ist kompakt.
(iii) Jede diskrete Teilmenge $N \subset M$ enhält nur endlich viele Elemente. Dabei heißt $N \subset M$ diskret, wenn ein $\varepsilon = \varepsilon(N) > 0$ existiert mit $||x - y|| \geq \varepsilon$ für alle $x, y \in N$ mit $x \neq y$.

Beispiele.
(i) Im $\mathbb{R}^n$ sind alle beschränkten Mengen präkompakt.
(ii) Zu einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ betrachten wir den Banach-Raum $V = C^0(K, \mathbb{R})$ der stetigen Funktionen von K nach $\mathbb{R}$ mit der Norm $||f|| := \sup_{x \in K} |f(x)|$. Eine Teilmenge $M \subset V$ besitze folgende zwei Eigenschaften:

- gleichmäßige Beschränktheit: Für ein $C > 0$ gilt $|f(x)| \leq C$ für alle $f \in M$, $x \in K$.
- gleichgradige Stetigkeit: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ mit

$$\forall\, x, y \in K \;:\; |x - y| \leq \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } f \in M\ .$$

Dann besitzt jede Folge $f_k \in M$ aus M nach dem Auswahlsatz von Arcela-Ascoli eine gleichmäßig konvergente Teilfolge und somit ist M in V präkompakt.

Lemma 19 (Überdeckungslemma)**.**
Es sei $K \subset V$ eine präkompakte, nichtleere Teilmenge eines Banach-Raumes. Dann existieren zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele Elemente $x_i \in K$, $i = 1, \ldots, N$, $N \in \mathbb{N}$ mit

$$K \subset B_\varepsilon(x_1) \cup \cdots \cup B_\varepsilon(x_N)\ .$$

Beweis. Angenommen, die Aussage ist falsch. Dann wählen wir induktiv eine Folge von Elementen $x_n \in K$, $n \in \mathbb{N}$ wie folgt:

$$x_1 \in K \quad x_2 \in K \backslash B_\varepsilon(x_1) \quad \dots \quad x_k \in K \backslash \Big(B_\varepsilon(x_1) \cup \dots \cup B_\varepsilon(x_{k-1}) \Big) \quad \text{und so weiter.}$$

Insbesondere gilt dann $||x_k - x_l|| \geq \varepsilon$ für alle $k \neq l$. Damit besitzt die Folge x^k keine Cauchy-Teilfolge, im Widerspruch zur Präkompaktheit von K. □

Definition. Es sei $E \subset V$ eine Teilmenge eines Banach-Raumes. Dann nennen wir eine stetige Abbildung $f : E \to V$ *vollstetig*, wenn $f(E)$ präkompakt ist.

Beispiele. (i) Eine stetige Abbildung $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist vollstetig, wenn sie beschränkt ist.
(ii) Falls $E \subset V$ kompakte Teilmenge ist, so ist jede stetige Abbildung $f : E \to V$ vollstetig, da das stetige Bild kompakter Mengen wieder eine kompakte Menge ist.
(iii) Typische Beispiele von vollstetigen Operatoren sind Integraloperatoren. Betrachte den Raum $V := C^0([a,b], \mathbb{R})$ mit der Norm $||x|| := \sup_{t \in [a,b]} |x(t)|$, die Teilmenge $E = \{x \in V \,:\, ||x|| \leq R\}$ sowie den stetigen Operator

$$F : E \to V \quad , \quad F(x)(t) := \int_a^b K(s,t)x(s)ds\ .$$

Dabei sei $K = K(s,t) : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $|K(s,t)| \leq M$. Dann hat die Bildmenge $F(E)$ folgende Eigenschaften

- gleichmäßig beschränkt wegen
$$|F(x)(t)| \leq \int_a^b |K(s,t)||x(s)|ds \leq (b-a)MR$$
- gleichgradig stetig denn: Da K auf $[a,b] \times [a,b]$ gleichmäßig stetig ist, existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ mit $|K(s,t) - K(s,t')| \leq \varepsilon$ falls $s, t, t' \in [a,b]$ und $|t - t'| \leq \delta$. Es folgt dann
$$|F(x)(t) - F(x)(t')| \leq \int_a^b |K(s,t) - K(s,t')||x(s)|ds \leq R(b-a)\varepsilon\ .$$

Nach dem Auswahlsatz von Arzela-Ascoli ist $F(E)$ dann präkompakt, also F vollstetig.

Satz 20 (Schauderscher Fixpunktsatz).
Sei $E \subset V$ eine konvexe Teilmenge eines Banach-Raumes V. Dann besitzt jede vollstetige Abbildung $f : E \to E$ einen Fixpunkt.

Beweis. Wegen f vollstetig, ist $f(E)$ präkompakt. Nach dem Überdeckungslemma existieren dann endlich viele $v_1, \dots, v_n \in f(E) \subset E$, $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $f(E) \subset B_{\varepsilon/2}(v_1) \cup \dots \cup B_{\varepsilon/2}(v_N)$. Es sei nun

$$S := \operatorname{conv}(v_1, \dots, v_N) = \Big\{ \sum_{i=1}^N \lambda_i v_i \,:\, \lambda_i \geq 0\ ,\ \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \Big\}$$

die konvexe Hülle der Vektoren $v_1, \dots, v_N \in E$. Man beachte, dass S in einem endlich dimensionalen Vektorraum enthalten ist, nämlich dem Vektorraum, der von $v_1, \dots, v_N$ aufgespannt wird. Aus E konvex folgern wir $S \subset E$. Wie im Beweis von Satz 15 erklären wir die stetigen Funktionen

$$\psi_i : V \to [0, +\infty) \quad , \quad \psi_i(x) := \max(\varepsilon - ||x - v_i||, 0) \quad \text{für } i = 1, \dots, N$$

und daraus die stetigen Abbildungen

$$\varphi_i : V \to [0, +\infty) \quad , \quad \varphi_i(x) := \frac{\psi_i(x)}{\psi_1(x) + \cdots + \psi_N(x)} \ .$$

Es gilt dann wieder die Abschätzung

$$\Big|\Big| x - \sum_{i=1}^N \varphi_i(x) v_i \Big|\Big| \le \varepsilon \quad \text{für alle } x \in f(E) \ .$$

Wir erklären schließlich

$$\varphi : S \to S \quad , \quad \varphi(y) := \sum_{i=1}^N \varphi_i \circ f(y) v_i \ .$$

Nach dem Brouwerschen Fixpunkt 15 (beachte S konvex) besitzt diese Abbildung einen Fixpunkt $y_\varepsilon \in S$ mit $y_\varepsilon = \varphi(y_\varepsilon)$. Setzen wir in obige Abschätzung $x = f(y_\varepsilon)$ ein, so folgt

$$||f(y_\varepsilon) - y_\varepsilon|| \le \varepsilon \ .$$

Da f vollstetig ist, ist $f(E)$ präkompakt. Daher finden wir eine Folge $\varepsilon_n \in (0, +\infty)$ mit $\varepsilon_n \to 0$ für $n \to \infty$, sodass $f(y_{\varepsilon_n}) \in E$ eine Cauchy-Folge ist und somit gegen ein $y_* \in V$ konvergiert. Aus E abgeschlossen folgt $y_* \in E$. Aus der Abschätzung

$$||y_{\varepsilon_n} - y_*|| \le ||y_{\varepsilon_n} - f(y_{\varepsilon_n})|| + ||f(y_{\varepsilon_n}) - y_*|| \le \varepsilon_n + ||f(y_{\varepsilon_n}) - y_*|| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

schließen wir, dass auch $y_{\varepsilon_n} \to y_*$ konvergiert. Aus der Stetigkeit von f folgt $||f(y_*) - y_*|| = 0$, also ist y_* ein Fixpunkt von f. □

5.1. **Anwendung I: Zwei Eigenwertprobleme.** Als erstes wollen wir die Existenz eines reellen Eigenwertes einer reellen $n \times n$-Matrix zeigen. Wir setzen nur voraus, dass alle Einträge der Matrix positiv sein müssen, insbesondere sind auch nichtsymmetrische Matrizen zugelassen.

Satz 21 (Frobenius)**.**
Jede reelle Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit positiven Einträgen $a_{ij} > 0$, $i, j = 1, \dots, n$ besitzt einen reellen, positiven Eigenwert mit dazugehörigem Eigenvektor $\xi \in \mathbb{R}^n$, welcher strikt positive Einträge $\xi_i > 0$ hat.

Beweis. Für $\delta := \min\{a_{ij} : i,j = 1,\dots,n\}$ gilt nach Voraussetzung $\delta > 0$. Für ein $x \in \Sigma_{n-1}$ und $i = 1,\dots,n$ ist dann

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq \sum_{j=1}^n \delta x_j = \delta \sum_{j=1}^n x_j = \delta > 0 \ .$$

Auf dem Simplex

$$\Sigma_{n-1} = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_i \geq 0 \ , \ x_1 + \cdots + x_n = 1\}$$

betrachten wir die Funktion

$$f : \Sigma_{n-1} \to \Sigma_{n-1} \quad , \quad f(x) := \frac{1}{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_j} Ax \ .$$

Wegen Satz 14 besitzt f einen Fixpunkt $\xi \in \Sigma_{n-1}$ mit $f(\xi) = \xi$. Setzen wir $\lambda := \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_j > 0$, so folgt $\xi = f(\xi) = \frac{1}{\lambda}A\xi$, bez. $A\xi = \lambda\xi$. Weiterhin ist

$$\lambda\xi_i = (A\xi)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j > 0$$

und somit $\xi_i > 0$. □

Als Verallgemeinerung dieses Satzes ins unendlich dimensionale zeigen wir

Satz 22 (Leraysches Eigenwertproblem)**.**
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $K = K(x,y) : \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \to (0,+\infty)$ ein stetiger, positiver Integralkern. Dann besitzt das Eigenwertproblem

$$\int_\Omega K(x,y)f(y)dy = \lambda f(x) \quad \textit{für } x \in \Omega$$

einen positiven Eigenwert $\lambda > 0$ mit dazugehöriger, stetiger und positiver Eigenfunktion $f(x) > 0$ in $\overline{\Omega}$.

Beweis. Wir betrachten den Banach-Raum $V := C^0(\overline{\Omega},\mathbb{R})$ zusammen mit der Norm $||f|| := \sup_{x\in\Omega}|f(x)|$. Als Analogon zum Simplex Σ_{n-1} aus dem Satz von Frobenius erklären wir die abgeschlossene, konvexe Teilmenge

$$E := \Big\{ f \in C^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}) \ : \ f(x) \geq 0 \text{ in } \overline{\Omega} \ , \ \int_\Omega f(y)dy = 1 \Big\} \subset V \ .$$

Wir wählen nun $M < \infty$ und $\delta > 0$ so, dass $\delta \leq K(x,y) \leq M$ in $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$ gilt. Für $f \in E$ gilt dann

$$\int_\Omega K(x,y)f(y)dy \geq \delta \int_\Omega f(y)dy = \delta > 0 \quad \text{für alle } x \in \overline{\Omega} \ .$$

Wir betrachten nun den stetigen Operator

$$T : E \to E \quad , \quad T(f)(x) := \frac{\int_\Omega K(x,y)f(y)dy}{\int_\Omega \int_\Omega K(z,y)f(y)dydz} \quad \text{für } f \in E \ .$$

Auf Grund der Abschätzung

$$|T(f)(x)| \leq \frac{M\int_\Omega f(y)dy}{\delta\int_\Omega\int_\Omega f(y)dydz} = \frac{M}{\delta|\Omega|} \quad \text{für alle } f \in E$$

ist $T(E)$ gleichmäßig beschränkt. Aus der Stetigkeit von K folgt schließlich die gleichgradige Stetigkeit der Menge $T(E)$. Nach dem Satz von Arzela-Ascoli ist $T(E)$ präkompakt und T somit vollstetig. Der Schaudersche Fixpunktsatz liefert einen Fixpunkt $\xi \in E$ mit $T(\xi) = \xi$. Setzen wir

$$\lambda := \int_\Omega\int_\Omega K(x,y)\xi(y)dydx > 0$$

so folgt die Eigenwertgleichung

$$\int_\Omega K(x,y)\xi(y)dt = \lambda\xi(x) \; .$$

Aus $\lambda > 0$ zusammen mit $\xi \in E$ folgt schließlich $\xi(x) > 0$ in $\overline{\Omega}$. □

5.2. **Hölder-Räume.**

Definition. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ auf einer Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Hölder-stetig* zum Exponenten $\alpha \in (0,1]$, falls ein $L < \infty$ existiert mit

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|^\alpha \quad \text{für alle } x, y \in \Omega \; .$$

Für eine solche Funktion erklären wir die Hölder-Halbnorm

$$[f]_\alpha := \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty \; .$$

Bemerkung. Jede Hölder-stetige Funktion ist gleichmäßig stetig, insbesondere stetig.

Beispiele. (i) Lipschitz-stetige Funktionen auf beschränkten Mengen sind Hölder-stetig für jedes $\alpha \in (0,1]$.
(ii) Auf einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist jede differenzierbare Funktion auch Hölder-stetig zu jedem $\alpha \in (0,1]$.
(iii) Die Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(t) := \sqrt{|t|}$ ist Hölder-stetig für jedes $\alpha \leq 1/2$, jedoch für $\alpha > 1/2$ nicht Hölder-stetig.

Definition. Zu $k = 0,1,2,\ldots$, $\alpha \in (0,1]$ erklären wir den Raum $C^{k,\alpha}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ als die Menge aller $C^k(\Omega,\mathbb{R}^m)$-Funktionen, deren k-te Ableitungen Hölder-stetig zum Exponenten α sind. Dieser Raum wird mit der Norm

$$||f||_{k,\alpha} := \sup_{x\in\Omega}\Big(\sum_{0\leq|\beta|\leq k}|D^\beta f(x)|\Big) + \sum_{|\beta|=k}[D^\beta f]_\alpha$$

zu einem Banach-Raum.

Mit dem Auswahlsatz von Arcela-Ascoli zeigt man leicht

Lemma 23. *Es sei $k = 0, 1, 2, \dots$, $\alpha \in (0, 1]$ ein Hölder-Exponent und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann ist für jedes $R \in [0, +\infty)$ die Menge*

$$E := \Big\{ u \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}) \ : \ ||u||_{k,\alpha} \le R \Big\}$$

eine präkompakte Teilmenge des Banach-Raumes $C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$.

5.3. **Anwendung II: Dirichlet-Problem für die nichtlineare Poisson-Gleichung.** Es sei $B := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1\}$ die offene Einheitkugel im $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$. Wir gehen aus vom linearen Dirichlet-Problem der Poisson-Gleichung

$$u \in C^2(B, \mathbb{R}) \cap C^0(\overline{B}, \mathbb{R}) \quad , \quad \triangle u(x) = f(x) \quad \text{in } B \quad , \quad u(x) = 0 \quad \text{auf } \partial B$$

wobei $\triangle := \sum_{i=1}^n \frac{d^2}{dx_i^2}$ der Laplace-Operator ist. Um eine Lösung der Poisson-Gleichung darstellen zu können, benötigt man

Definition. Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, ein Gebiet. Wir betrachten eine Funktion

$$\varphi(y; x) := \frac{1}{2\pi} \log |y - x| + h(y; x) \quad \text{für } x, y \in G \ , \ x \ne y \ , \ n = 2$$

beziehungsweise

$$\varphi(y; x) := \frac{1}{(2 - n)\omega_n} |y - x|^{2-n} + h(y; x) \quad \text{für } x, y \in G \ , \ x \ne y \ , \ n \ge 3$$

wobei $h(y; x) : \overline{G} \times G \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion sei. Dann nennen wir φ eine *Grundlösung*, falls für festes $x \in G$ die Zuordnung $y \mapsto h(y; x)$ harmonisch als Funktion von y ist, also $\triangle_y h(y; x) = 0$. Eine Grundlösung φ heißt *Greensche Funktion für das Gebiet G*, wenn

$$\varphi(y; x) = 0 \quad \text{für alle } x \in G \ , \ y \in \partial G$$

gilt.

Bemerkung. Die Greensche Funktion ist deshalb von Interesse, weil jede Lösung des Poisson-Problemes

$$u \in C^2(G, \mathbb{R}) \cap C^1(\overline{G}, \mathbb{R}) \quad , \quad \triangle u(x) = f(x) \quad \text{in } G \quad , \quad u(x) = 0 \quad \text{auf } \partial G$$

der Poissonschen Integraldarstellung genügt (vgl. [Sc], Satz 1.10.2), nämlich

$$u(x) = \int_G \varphi(y; x) f(y) dy \quad \text{für } x \in G \ .$$

Nun existiert für die Kugel B tatsächlich eine Greensche Funktion, die man sogar explizit angeben kann. In Dimension $n = 2$ lautet sie

$$\varphi(y; x) := \frac{1}{2\pi} \Big(\log |y - x| - \log \Big| y - \frac{x}{|x|^2} \Big| - \log |x| \Big) \quad \text{falls } x, y \in B \ , \ x \ne y$$

und in höheren Dimensionen $n \geq 3$ ist es

$$\varphi(y;x) := \frac{1}{(2-n)\omega_n}\left(\frac{1}{|y-x|^{n-2}} - \frac{|x|^{2-n}}{\left|y-|x|^{-2}x\right|^{n-2}}\right) \quad x, y \in B\ ,\ x \neq y\ .$$

Dann genügt jede Lösung u des Dirichlet-Problemes der Poissonschen Integraldarstellung

$$u(x) = \int_B \varphi(y;x) f(y) dy$$

(vergleiche [Sc], Kapitel 1.10 oder [S], Kap. V, Paragraph 2). Umgekehrt fragt man sich, ob durch das Poisson-Integal stets eine Lösung des Dirichlet-Problemes erklärt wird. Dazu benötigen wir

Satz 24 (Poisson-Integral)**.**
Für eine Funktion $f : \overline{B} \to \mathbb{R}$ erklären wir das Poisson-Integral

$$u(x) := \int_B \varphi(y;x) f(y) dy \quad \textit{für } x \in B\ .$$

a) *Falls $f \in C^0(\overline{B}, \mathbb{R})$ gilt, so ist $u \in C^{1,\alpha}(\overline{B}, \mathbb{R})$, $u(x) = 0$ auf ∂B und für eine Konstante $C_1 = C_1(n, \alpha)$ gilt*

$$||u||_{1,\alpha} \leq C_1 \sup_{x \in B} |f(x)|\ .$$

b) *Falls $f \in C^{0,\alpha}(\overline{B}, \mathbb{R})$, so ist $u \in C^{2,\alpha}(\overline{B}, \mathbb{R})$ und löst das Problem*

$$\triangle u(x) = f(x) \quad \textit{in } B \quad , \quad u(x) = 0 \quad \textit{auf } \partial B\ .$$

Beweis. Beweise findet z.B. in [S], Kapitel IX, Paragraph 4, Satz 1 sowie in [GT], Abschnitt 4.2. Der Beweis ist zwar nicht schwierig, jedoch relativ technisch und wird deshalb weggelassen. □

Bemerkung. Setzt man nur die Stetigkeit $f \in C^0(\overline{B}, \mathbb{R})$ voraus, so wird durch das Poisson-Integral im Allgemeinen nur eine $C^{1,\alpha}$- aber keine C^2-Funktion definiert. Erst für Hölderstetiges $f \in C^{0,\alpha}(\overline{B}, \mathbb{R})$ folgt $u \in C^2(\overline{B}, \mathbb{R})$.

Wir verallgemeinern das Dirichlet-Problem der linearen Poisson-Gleichung nun wie folgt

$$\triangle u(x) = f(x, u(x), \nabla u(x)) \quad \text{in } B \quad , \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial B\ .$$

Die rechte Seite $f \in C^{0,\alpha}(\overline{B} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ hängt nun also nicht mehr nur von x, sondern zusätzlich von $u(x)$ und $\nabla u(x)$ ab. Mit dem Poisson-Integral können wir dieses Problem äquivalent als Fixpunktproblem formulieren

$$u(x) = \int_B \varphi(y;x) f(y, u(y), \nabla u(y)) dy\ .$$

Wir erklären den Banach-Raum $V := C^1(\overline{B}, \mathbb{R})$ zusammen mit der Norm

$$||u|| := \sup_{x \in B} \Big(|u(x)| + |\nabla u(x)| \Big) .$$

Auf diesem betrachten wir den Operator

$$T : V \to V \quad , \quad T(u) := \int_B \varphi(y; x) f(y, u(y), \nabla u(y)) dy$$

und suchen einen Fixpunkt von T. Aus Satz 24 leiten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} ||T(u_1) - T(u_2)|| &\leq C_1 \sup_{x \in B} |f(x, u_1(x), \nabla u_1(x)) - f(x, u_2(x), \nabla u_2(x))| \\ &\leq \sup_{x \in B} C_1 \, L \Big(|u_1(x) - u_2(x)|^\alpha + |\nabla u_1(x) - \nabla u_2(x)|^\alpha \Big) \\ &\leq 2C_1 \, L \, ||u_1 - u_2||^\alpha \end{aligned}$$

her. Der Operator T ist also Hölder-stetig zum Exponenten α, insbesondere auch stetig. Wir stellen nun noch die Beschränktheitsvoraussetzung

$$|f(x, z, p)| \leq M \quad \text{für alle } x \in B \ , \ z \in \mathbb{R} \ , \ p \in \mathbb{R}^n \ .$$

Dann folgt für jedes $u \in V$ aus Satz 24

$$||T(u)|| \leq ||T(u)||_{1,\alpha} \leq C_1 \sup_{x \in B} |f(x, u(x), \nabla u(x))| \leq C_1 \, M$$

beziehungsweise

$$T(V) \subset \Big\{ v \in V \ : \ ||v||_{1,\alpha} \leq C_1 \, M \Big\} =: E$$

und nach Lemma 23 ist E präkompakt und damit auch $T(V) \subset E$. Also ist $T : V \to V$ vollstetig. Wir erhalten

Satz 25 (Dirichlet-Problem der nichtlinearen Poisson-Gleichung)**.**
Gegeben sei eine beschränkte, Hölder-stetige Funktion $f \in C^{0,\alpha}(\overline{B} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. *Dann besitzt das nichtlineare Dirichlet-Problem*

$$u \in C^{2,\alpha}(\overline{B}, \mathbb{R}) \quad , \quad \triangle u(x) = f(x, u(x), \nabla u(x)) \quad \textit{in } B \quad , \quad u(x) = 0 \quad \textit{auf } \partial B$$

mindestens eine Lösung.

Beweis. Der Schauderschen Fixpunktsatz (Satz 20) angewendet auf den vollstetigen Operator $T : V \to V$ liefert einen Fixpunkt $u \in V$ des Operators T, also

$$u(x) = \int_B \varphi(y; x) f(y, u(y), \nabla u(y)) dy \ .$$

Wenden wir Satz 24 Teil a) auf $\tilde{f}(x) := f(x, u(x), \nabla u(x)) \in C^0(\overline{B}, \mathbb{R})$ an, so folgt die Regularität $u \in C^{1,\alpha}(\overline{B}, \mathbb{R})$ sowie $u = 0$ auf ∂B. Danach liefert Satz 24 Teil b) weiter die Regularität $u \in C^{2,\alpha}(\overline{B}, \mathbb{R})$ und u ist Lösung des Dirichlet-Problemes. $\square$

Bemerkungen.
(i) Unter den Voraussetzungen des Satzes gilt keine Eindeutigkeit, es kann also mehrere Lösungen geben.
(ii) Die Kugel B kann durch einen anderes beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ersetzt werden, falls für dieses Gebiet eine Greensche Funktion existiert. Tatsächlich kann man für eine große Klasse von Gebieten die Existenz einer Greenschen Funktion beweisen.

6. Die Riesz-Schauder-Theorie vollstetiger Operatoren im Banach-Raum

Literatur zu diesem Abschnitt: [GT], Chapter 5.3 und Chapter 11.2.

6.1. **Der Fredholmsche Alternativsatz im Banach-Raum.** Basierend auf dem Schauderschen Fixpunktsatz entwickeln wir zunächst die Leray-Schauder-Methode. Diese ist das zentrale Hilfsmittel zur Lösbarkeit von quasilinearen elliptischen Differentialgleichungen (siehe [GT], Chapter 11).

Satz 26 (Leray-Schauder-Methode/Schäferscher Fixpunktsatz)**.**
Auf der abgeschlossenen Kugel $B_R := \{x \in V\ :\ ||x|| \leq R\}$, $R > 0$, sei ein vollstetiger Operator $T : B_R \to V$ erklärt. Es gelte die folgende Implikation

$$x = sT(x) \quad \Rightarrow \quad ||x|| < R \quad \text{für alle } x \in B_R\ ,\ s \in [0,1]\ .$$

Dann existiert für jedes $s \in [0,1]$ eine Lösung $x_s \in B_R$ von $x_s = sT(x_s)$.

Beweis. 1.) Wir zeigen die Aussage zunächst für $s = 1$, also dass $x = T(x)$ eine Lösung besitzt. Wir erklären wir den stetigen Operator

$$T^* : B_R \to B_R \quad , \quad T^*(x) := \begin{cases} T(x) & \text{falls } ||T(x)|| \leq R \\ R\frac{T(x)}{||T(x)||} & \text{falls } ||T(x)|| \geq R \end{cases} .$$

Da T vollstetig ist, ist $T(B_R)$ präkompakt und somit auch $T^*(B_R)$. Damit ist $T^* : B_R \to B_R$ vollstetig und besitzt nach dem Schauderschen Fixpunktsatz (Satz 20) einen Fixpunkt $x^* \in B_R$ mit $T^*(x^*) = x^*$. Wir zeigen $||T(x^*)|| < R$, womit x^* ebenfalls Fixpunkt von T ist. Angenommen $||T(x^*)|| \geq R$: Dann muss $||T^*(x^*)|| = R$ gelten und somit auch $||x^*|| = R$. Setzen wir nun $\sigma := \frac{R}{||T(x^*)||} \in [0,1]$, so folgt $x^* = T^*(x^*) = \sigma T(x^*)$. Nach Voraussetzung muss dann aber $||x^*|| < R$ sein, also ein Widerspruch.
2.) Um die Lösung von $x = sT(x)$ für $s \in [0,1]$ zu konstruieren, wenden wir 1.) an auf den Operator $\tilde{T}(x) := sT(x)$ an, welcher ebenfalls die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. □

Bemerkungen. (i) Für $s = 0$ ist offensichtich $x = 0$ die einzige Lösung. Für $s > 0$ kann die Gleichung $x = sT(x)$ auch mehrere oder gar unendlich viele Lösungen besitzen.
(ii) Die Lösungen können auch unstetig vom Parameter s abhängen, d.h. die Zuordnung

$s \mapsto x_s$ muss nicht stetig sein. Dies ist ein Unterschied zum Banachschen Fixpunktsatz, wo die Fixpunkte stetig vom Parameter abhängen. Im Banach-Raum gilt der Fredholmsche Alternativsatz.

Satz 27 (Fredholmscher Alternativsatz)**.**
Es sei $K : V \to V$ ein **linearer** *und vollstetiger Operator eines Banach-Raumes, d.h. ist stetig und bildet beschränkte Mengen auf präkompakte Mengen ab. Dann sind für den assoziierten Fredholm-Operator $T(x) := x - K(x)$ die folgende zwei Aussagen äquivalent:*

a) *T ist injektiv.*
b) *T ist surjektiv.*

Einen Beweis findet man zum Beispiel in [GT], Kapitel 5.3.
Im Zusammenhang mit dem Schauderschen Fixpunktsatz beweisen wir folgenden Spezialfall dieses Satzes.

Satz 28 (Fredholmscher Alternativsatz im Banach-Raum, Spezialfall)**.**
Es sei $K : V \to V$ ein **linearer** *und vollstetiger Operator eines Banach-Raumes, d.h. ist stetig und bildet beschränkte Mengen auf präkompakte Mengen ab. Dann sind für den assoziierten Fredholm-Operator $T(x,s) = T_s(x) := x - sK(x)$ folgende zwei Aussagen äquivalent:*

a) *T_s ist injektiv für alle $s \in [0,1]$.*
b) *T_s ist surjektiv für alle $s \in [0,1]$.*

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Sei T_s injektiv für alle $s \in [0,1]$. 1.) Zwischenbehauptung: Zu jedem $y \in V$ existiert ein $R \in (0,+\infty)$ mit der Eigenschaft

$$\forall\, x \in V\ ,\ s \in [0,1]\ :\ x = s\Big(y + K(x)\Big) \quad \Rightarrow \quad ||x|| < R\ .$$

Beweis indirekt: Wenn es ein solches R nicht gebe, so existiert eine Folge $x^n \in V$ sowie $s^n \in [0,1]$ mit $x^n = s^n(y + K(x^n))$ und $||x^n|| \geq n$. Nach Auswahl einer Teilfolge können wir $s^n \to s^*$ für $n \to \infty$ mit $s^* \in [0,1]$ erreichen. Wir setzen $z^n := \frac{x^n}{||x^n||}$ und beachten $||z^n|| = 1$. Wegen der Vollstetigkeit von K können wir nach Auswahl einer Teilfolge $K(z^n) \to z^*$ für $n \to \infty$ mit einem $z^* \in V$ annehmen. Aus der Linearität von K folgt dann

$$\lim_{n\to\infty} z^n = \lim_{n\to\infty} \frac{s^n}{||x^n||}\Big(y + K(x^n)\Big) = \lim_{n\to\infty} s^n\Big(\frac{y}{||x^n||} + K(z^n)\Big) = s^* z^*\ .$$

Wegen der Stetigkeit von K ist gilt weiter

$$z^* = \lim_{n\to\infty} K(z^n) = K(s^* z^*) = s^* K(z^*)\ .$$

Aus $||z^n|| = 1$ folgert man $||s^* z^*|| = 1$, insbesondere $z^* \neq 0$. Aus obiger Gleichung folgt $T_{s^*}(z^*) = z^* - s^* K(z^*) = 0$, im Widerspruch zur vorausgesetzten Injektivität von T_{s^*}.

2.) Wegen 1.) dürfen wir die Leray-Schauder-Methode (Satz 26) auf $\tilde{K}(x) := y + K(x)$ anwenden. Für alle $s \in [0,1]$ und $y \in V$ existiert ein $x \in V$ mit $x = s\tilde{K}(x) = s(K(x)+y)$ oder äquivalent $T_s(x) = x - sK(x) = \lambda y$. Da $y \in V$ beliebig ist, folgt die Surjektivität von T_s für jedes $s \in [0,1]$.

Wir zeigen nun b) $\Rightarrow$ a). Wir zeigen diese Richtung nur für $s = 1$. Der Fall $s \in [0,1)$ erfolgt analog. Wir setzen $T := T_1$ und erklären für $k \in \mathbb{N}$ die Teilräume

$$N_k := \{x \in V \ : \ T^{(k)}(x) = 0\} = \mathrm{kern}(T^{(k)}) \subset V$$

mit der Eigenschaft $N_1 \subset N_2 \subset N_3 \subset \ldots$. Aus T stetig folgt, dass jedes N_k abgeschlossen ist.

Behauptung: Es existiert ein k mit $N_k = N_{k+1}$. Beweis indirekt: Falls $N_k \neq N_{k+1}$ für jedes k ist, so existiert nach dem Rieszschen Lemma (Lemma 8 aus Teil 1) zu jedem k ein $x_k \in N_k$ mit

$$(7) \qquad ||x_k|| = 1 \quad , \quad ||x_k - y|| \geq \frac{1}{2} \quad \text{für } y \in N_{k-1} \ .$$

Für $l > k$ gilt nun

$$\begin{aligned} K(x_l) - K(x_k) &= x_l - T(x_l) - \Big(x_k - T(x_k)\Big) \\ &= x_l - \Big(T(x_l) + x_k - T(x_k)\Big) = x_l - y \ . \end{aligned}$$

Dabei gehört $y := T(x_l) + x_k - T(x_k)$ zur Menge N_{l-1}, denn wegen $l > k$ liegt jeder der drei Summanden in dieser Menge. Wegen (7) ist dann

$$||K(x_l) - K(x_k)|| = ||x_l - y|| \geq \frac{1}{2} \ .$$

Damit ist die Menge $\{K(x_k) \ : \ k \in \mathbb{N}\}$ nicht präkompakt, im Widerspruch zur Vollstetigkeit von K, und die Zwischenbehauptung ist bewiesen.

Es existiert also ein k mit $N_k = N_{k+1}$. Daraus folgt unmittelbar $N_{k+1} = N_{k+2}$, $N_{k+2} = N_{k+3}$ und so weiter, insbesondere folgt $N_k = N_l$ für alle $l \geq k$. Es sei nun $x \in N_k$ beliebig. Nach Voraussetzung ist T surjektiv und damit ebenfalls $T^{(k)}$. Inbesondere existiert zu jedem $x \in N_k$ ein $y \in V$ mit $x = T^{(k)}(y)$. Wegen $x \in N_k$ ist aber $0 = T^{(k)}(x) = T^{(2k)}(y)$ und somit $y \in N_{2k} = N_k$. Damit folgt $x = T^{(k)}(y) = 0$, also $N_k = \{0\}$. Aus $N_1 \subset N_k$ folgt dann kern(T) $= N_1 = \{0\}$ und aus der Linearität von T folgt die Injektivität. □

Bemerkung. Es gibt auch einen Fredholmschen Alternativsatz im Hilbert-Raum (Raum mit Skalarprodukt). Dieser liefert zwar eine bessere Aussage, kann dafür aber nur im Hilbert-Raum angewendet werden. Man beachte, dass es Banach-Räume gibt, die keine Hilbert-Räume sind (dazu gehört z.B. $C^0(K,\mathbb{R})$).

6.2. **Eigenwerte vollstetiger Operatoren.** Zur Erinnerung aus der Linearen Algebra

Definition. Sei V ein Vektorraum und $K : V \to V$ lineare Abbildung. Dann heißt $\lambda \in \mathbb{R}$ *Eigenwert* von K zum *Eigenvektor* $x \in V \backslash \{0\}$, falls $K(x) = \lambda x$. Die Menge

$$E(\lambda) := \{x \in V \ : \ K(x) = \lambda x\}$$

nennt man den *Eigenraum* zu λ und dessen Dimension nennt man die (geometrische) *Vielfachheit* von λ. Die Menge

$$S(K) = \{\lambda \in \mathbb{R} \ : \ \lambda \text{ ist Eigenwert von } K\}$$

aller Eigenwerte von K nennt man das *Spektrum* von K.

Definition. Für einen stetigen, linearen Operator $K : V \to V$ erklären wir dessen Norm

$$||K|| := \sup_{x \in V\,,\,||x||=1} ||K(x)|| \ .$$

Bemerkung. Man zeigt leicht (Übungsaufgabe), dass für stetiges, lineares K stets $||K|| < +\infty$ gilt.

Wir wollen nun das Spektrum eines vollstetigen Operators untersuchen. Dazu dient

Satz 29 (Spektrum vollstetiger Operatoren)**.**
Es sei $K : V \to V$ ein linearer vollstetiger Operator. Dann gilt für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ die Abschätzung $|\lambda| \le ||K||$. Weiterhin können sich die Eigenwerte von K nur bei Null häufen. Insbesondere gibt es höchstens abzählbar unendlich viele Eigenwerte und jeder von Null verschiedene Eigenwert hat endliche Vielfachheit.

Beweis. Zur ersten Aussage: Sei $y \in V$, $||y|| = 1$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ. Dann folgt $|\lambda| = ||\lambda y|| = ||K(y)|| \le ||K||$.
Zur zweiten Aussage: Es sei $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ eine konvergente Folge von Eigenwerten mit dazugehörigen, linear unabhängigen, normierten Eigenvektoren $x_1, x_2, \ldots$, also $K(x_k) = \lambda_k x_k$ und $||x_k|| = 1$. Ferner gelte $\lambda_k \to \lambda$ für $n \to \infty$. Wir zeigen nun $\lambda = 0$ indirekt. Wir nehmen also $\lambda \neq 0$ an. Dann könne wir auch (nach Auswahl eine Teilfolge) $\lambda_k \neq 0$ für alle k annehmen. Es sei nun M_k der k-dimensionale, von $x_1, \ldots, x_k$ aufgespannte Raum. Nach dem Rieszschen Lemma (Lemma 8 aus Teil 1) existiert zu jedem k ein $y_k \in M_k$ mit

$$(8) \qquad ||y_k|| = 1 \quad , \quad ||y_k - y|| \ge \frac{1}{2} \quad \text{für } y \in M_{k-1} \ .$$

Zwischenbehauptung: Für jedes $y \in M_l$ gilt

$$y - \frac{1}{\lambda_l} K(y) \in M_{l-1} \ .$$

Beweis dazu: Wegen $y \in M_l$ gilt $y = \sum_{i=1}^{l} c_i x_i$, da $x_1, \dots, x_l$ eine Basis von M_l bilden. Dann ist aber

$$\begin{aligned} y - \frac{1}{\lambda_l} K(y) &= \sum_{i=1}^{l} c_i x_i - \frac{1}{\lambda_l} \sum_{i=1}^{k} c_i K(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{l} \Big(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_l}\Big) c_i x_i = \sum_{i=1}^{l-1} \Big(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_l}\Big) c_i x_i \in M_{l-1} \end{aligned}$$

und die Zwischenbehauptung bewiesen. Zu $l > k$ betrachten wir

$$\lambda_l^{-1} K(y_l) - \lambda_k^{-1} K(y_k) = y_l - \Big(y_l - \lambda_l^{-1} K(y_l) + \lambda_k^{-1} K(y_k)\Big) =: y_l - y \; .$$

Wegen $l > k$ und der Zwischenbehauptung gilt dabei $y \in M_{l-1}$. Unter Verwendung von (8) folgt

$$||\lambda_l^{-1} K(y_l) - \lambda_k^{-1} K(y_k)|| = ||y_l - y|| \geq \frac{1}{2} \quad \text{für alle } l > k \; .$$

Somit enthält die Folge $\lambda_l^{-1} K(y_l)$ keine Cauchy-Teilfolge. Da aber λ_l^{-1} eine Cauchy-Folge ist, kann dann $K(y_l)$ keine Cauchy-Teilfolge enthalten, ein Widerspruch zur Vollstetigkeit von K. □

6.3. **Anwendung I: Lineare elliptische Differentialgleichungen.** Auf der Kugel $B = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, x_1^2 + \cdots + x_n^2 < 1\}$ suchen wir eine Lösung $u \in C^2(\overline{B}, \mathbb{R})$ der linearen, elliptischen Differentialgleichung

$$\triangle u(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) u_{x_i}(x) + c(x) u(x) = f(x) \quad \text{in } B \quad , \quad u(x) = 0 \quad \text{auf } \partial B \; . \tag{9}$$

Dabei sollen $b_i, c, f \in C^{0,\alpha}(\overline{B}, \mathbb{R})$ vorgegebene Funktionen sein. Mit Hilfe der Poisson-Formel (Satz 24) wandeln wir dieses Problem zunächst in ein äquivalentes Integralgleichungsproblem um.

Lemma 30. *Zu gegebenen $b_i, c, f \in C^{0,\alpha}(\overline{B}, \mathbb{R})$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

a) *Es ist $u \in C^{2,\alpha}(\overline{B}, \mathbb{R})$ eine Lösung von (9).*
b) *Es ist $u \in C^1(\overline{B}, \mathbb{R})$ eine Lösung der Integralgleichung*

$$u(x) + \int_B \varphi(y; x) \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i(y) u_{y_i}(y) + c(y) u(y) \Big) dy = \int_B \varphi(y; x) f(y) dy \; .$$

Dabei bezeichnet $\varphi(y; x)$ die Greensche Funktion des Laplace-Operators of der Kugel B.

Beweis. Die Äquivalenz der beiden Aussagen folgert man leicht aus Satz 24. □

Wir setzen den Banach-Raum nun $V := C^1(\overline{B},\mathbb{R})$ zusammen mit der üblichen Norm. Weiter erklären wir den Operator

$$K : V \to V \quad , \quad K(u)(x) := -\int_B \varphi(y;x)\Big(\sum_{i=1}^n b_i(y)u_{y_i}(y) + c(y)u(y)\Big)dy \; .$$

Man sieht direkt, dass K linear ist. Dass K auch vollstetig ist, zeigt man ähnlich wie in Abschnitt 5.3. Durch Anwendung des Fredholmschen Alternativsatzes erhalen wir

Satz 31 (Schauderscher Fundamentalsatz)**.**
Zu gegebenen $b_i, c \in C^{0,\alpha}(\overline{B},\mathbb{R})$ besitze die homogene Gleichung

$$\triangle u(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x)u_{x_i}(x) + c(x)u(x) = 0 \quad \textit{in } B \quad , \quad u(x) = 0 \quad \textit{auf } \partial B$$

in der Klasse $C^{2,\alpha}(\overline{B},\mathbb{R})$ nur die triviale Lösung $u \equiv 0$.
Dann besitzt für alle rechten Seiten $f \in C^{0,\alpha}(\overline{B},\mathbb{R})$ die Differentialgleichung

$$\triangle u(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x)u_{x_i}(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad \textit{in } B \quad , \quad u(x) = 0 \quad \textit{auf } \partial B$$

eine Lösung $u \in C^{2,\alpha}(\overline{B},\mathbb{R})$.

Beweis. Es sei

$$T : V \to V \quad , \quad T(u) := u - K(u)$$

mit

$$T(u)(x) = u(x) + \int_B \varphi(y;x)\Big(\sum_{i=1}^n b_i(y)u_{y_i}(y) + c(y)u(y)\Big)dy$$

der mit K assoziierte Fredholm-Operator. Wir zeigen, dass T injektiv ist. Sei dazu $u \in V = C^1(\overline{B},\mathbb{R})$ eine Lösung von

$$0 = T(u) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = u(x) + \int_B \varphi(y;x)\Big(\sum_{i=1}^n b_i(y)u_{y_i}(y) + c(y)u(y)\Big)dy \; .$$

Aus Lemma 30 folgt dann $u \in C^{2,\alpha}(\overline{B},\mathbb{R})$ sowie $\triangle u + \sum b_i u_{x_i} + cu = 0$ in B und $u = 0$ auf ∂B. Nach Voraussetzung des Satzes ist dann $u \equiv 0$ und es folgt die Injektivität von T. Nach dem Fredholmschen Alternativsatz ist T dann auch surjektiv. Also existiert für jedes $\tilde{f} \in V$ eine Lösung $u \in V$ der Gleichung $T(u) = \tilde{f}$. Insbesondere gibt es zu $\tilde{f} := \int_B \varphi(y;x)f(y)dy \in V$ ein $u \in V$ mit

$$u(x) + \int_B \varphi(y;x)\Big(\sum_{i=1}^n b_i(y)u_{y_i}(y) + c(y)u(y)\Big)dy = \int_B \varphi(y;x)f(y)dy \; .$$

Mit Lemma 30 folgt $u \in C^{2,\alpha}(\overline{B},\mathbb{R})$ und u löst das Problem (9). ☐

Es stellt sich nur noch die Frage, unter welchen Voraussetzungen die homogene Gleichung nur die triviale Lösung $u \equiv 0$ erlaubt. Eine solche Bedingung ist die Vorzeichenbedingung $c(x) < 0$ in B an den Koeffizienten c (Übungsaufgabe).

6.4. **Anwendung II: Das Weylsche Eigenwertproblem für den Laplace-Operator.** Auf der Kugel $B = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 < 1\}$ betrachten wir das Weylsche Eigenwertproblem des Laplace-Operators

$$(10) \qquad u \in C^2(\overline{B}, \mathbb{R}) \quad , \quad -\triangle u = \lambda u \quad \text{in } B \quad , \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial B \; .$$

Dabei sei $\lambda \in \mathbb{R}$ der Eigenwert und $u \not\equiv 0$ die Eigenfunktion.

Lemma 32. *Für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ des Problemes (10) gilt $\lambda > 0$.*

Beweis. Sei λ ein Eigenwert und u die dazugehörige Eigenfunktion. Dann folgt

$$0 < \int_B |\nabla u|^2 dx = -\int_B u \triangle u dx = \int_B \lambda u^2 dx \; ,$$

wobei wir partiell integriert haben und die Nullrandwerte $u = 0$ auf ∂B verwendet haben. Es folgt dann

$$\lambda = \frac{\int_B |\nabla u|^2 dx}{\int_B u^2 dx} < 0 \; .$$

□

Bemerkung. Den letzten Ausdruck im Beweis nennt man den *Rayleigh-Quotienten.* Man kann zeigen, dass durch

$$\lambda_* := \inf_{u \in C^2(\overline{B}, \mathbb{R}), u|_{\partial B} = 0} \frac{\int_B |\nabla u|^2 dx}{\int_B u^2 dx}$$

der kleinste Eigenwert des Weylschen Eigenwertproblemes definiert wird. Insbesondere existiert also mindestens ein Eigenwert. Wir können nun die Eigenwerttheorie vollstetiger Operatoren nicht direkt auf das Weylsche Eigenwertproblem anwenden, da der Laplace-Operator nicht vollstetig ist, er ist sogar noch nicht einmal stetig.

Wir erinnern uns nun an folgende, aus der linearen Algebra bekannte Tatsache: Ist $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert eine invertierbaren $n \times n$-Matrix A mit Eigenvektor $x \neq 0$, also $Ax = \lambda x$, so ist x auch ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $\frac{1}{\lambda}$, sprich $A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x$. Auf ähnliche Weise gehen wir beim Weylschen Eigenwertproblem vor. Wir gehen zur Inversen des Laplace-Operators über, den wir mittels des Poisson-Integrales angeben können.

Lemma 33. *Folgende zwei Aussagen sind äquivalent:*

a) *Es ist $u \in C^2(\overline{B}, \mathbb{R})$ eine Eigenfunktion des Problemes (10) zum Eigenwert $\lambda > 0$.*

b) *Es ist* $u \in C^0(\overline{B}, \mathbb{R})$ *eine Lösung des Integral-Eigenwertproblemes*

$$-\frac{1}{\lambda}u(x) = \int_B \varphi(y;x)u(y)dy$$

wobei $\varphi(y;x)$ *die Greensche Funktion des Laplace-Operators auf der Kugel* B *ist.*

Beweis. Diese Aussage folgt leicht auch Satz 24. □

Es genügt also die Eigenwerte des Integralopertors

$$K(u) := \int_B \varphi(y;x)u(y)dy$$

zu studieren. Erklären wir den Banach-Raum $V := C^0(\overline{B}, \mathbb{R})$ zusammen mit der üblichen Norm, so wir $K : V \to V$ zu einem linearen, vollstetigen Operator.

Satz 34 (Spektrum des Laplace-Operators)**.**
Die Eigenwerte des Weylschen Eigenwertproblemes sind sämtlich positiv und können sich nur bei $+\infty$ *häufen. Insbesondere existieren höchstens abzählbar unendlich viele Eigenwerte und sie haben alle endliche Vielfachheit.*

Beweis. Wegen Lemma 33 ist u eine Eigenfunktion von (10) zum Eigenwert $\lambda > 0$ genau dann, wenn u Lösung des Eigenwertproblemes $K(u) = \frac{1}{\lambda}u$ ist, d.h. $\frac{1}{\lambda}$ ein Eigenwert von K ist. Wegen Satz 29 können sich die Eigenwerte von K nur bei Null häufen, und damit die Eigenwerte von (10) nur bei $+\infty$. □

Bemerkungen.
(i) Die tatsächliche Existenz von abzählbar unendlich vielen Eigenwerten zeigt man mit Hilfe der Theorie der vollstetigen, symmetrischen Operatoren im Hilbert-Raum (nicht in dieser Vorlesung).
(ii) Auch in diesem Satz kann die Kugel B durch ein Gebiet G ersetzt werden, für welches eine Greensche Funktion existiert.

Teil 3. Variationsmethoden

Also Einstiegsliteratur empfehlen wir [E], Chapter 8.

In der Variationsrechnung geht es darum, Minimierer eines Funktionales zu bestimmen, oder zumindestens deren Existenz nachzuweisen.

Zur Einleitung sei an folgenden aus der Analysis-Vorlesung bekannten Satz erinnert.

Satz 1 (Minima einer Funktion)**.** *Es sei $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ eine Funktion. Besitzt f im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ein lokales Minimum, so gilt $\nabla f(x_0) = 0$ und die Hesse-Matrix $D^2 f(x_0)$ ist positiv semidefinit.*
Gilt andererseits $\nabla f(x_0) = 0$ und ist die Hesse-Matrix $D^2 f(x_0)$ positiv definit, so besitzt f in x_0 ein lokales Minimum.

In der Variationstheorie überträgt man nun diese Konzepte auf Funktionale, welche nicht auf dem $\mathbb{R}^n$, sondern einem unendlich dimensionalen Funktionenraum erklärt sind. Hierbei spielen die Begriffe der ersten und zweiten Variation eine entscheidende Rolle.

1. Grundlagen

1.1. **Erste Variation und Euler-Lagrange-Gleichung.** Zu einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit hinreichend glattem (hier C^1)-Rand sei eine Funktion

$$F = F(x, z, p) : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\ ,\ z \in \mathbb{R}\ ,\ p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$$

gegeben. Wir nehmen an, dass F stetig differenzierbar in allen Variablen sei und bezeichnen mit F_{x_i}, F_z, F_{p_i} die partiellen Ableitungen nach den entsprechenden Variablen. Wir betrachten nun folgendes *Funktional*

$$I(u) := \int_\Omega F(x, u(x), \nabla u(x))dx \quad \text{für } u \in K\ .$$

Dabei ist

$$K = K(g) := \{u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})\ :\ u(x) = g(x) \quad \text{auf } \partial\Omega\}$$

die Klasse der *zulässigen Funktionen* und $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ eine vorgegegene Randfunktion, die sogenannten *Dirichlet-Randwerte.* Wir wollen nun das Variationsproblem

$$\text{Finde} \quad u \in K \text{ mit } I(u) = \inf_{v \in K} I(v)$$

untersuchen. Damit dieses Variationsproblem wohlgestellt ist, darf die Klasse der zulässigen Funktionen K nicht leer sein! Tatsächlich ist K nicht leer, wenn wir $g \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ voraussetzen, denn dann gilt $g \in K$.

Zur Untersuchung des Funktionales auf Minima benötigt man

Definition (Erste Variation)**.**
Es sei zunächst

$$K_0 := \{u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}) \ : \ u(x) = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega\} \ .$$

Es seien $u \in K$ sowie $\varphi \in K_0$ zwei Funktionen. Dann nennen wir den Ausdruck

$$D(u, \varphi) := \frac{d}{dt} I(u + t\varphi)\Big|_{t=0}$$

die erste Variation des Funktionales I im Punkt u in Richtung von φ. Die Funktion u heißt *kritischer* oder auch *stationärer Punkt* von I, falls gilt

$$D(u, \varphi) = \frac{d}{dt} I(u + t\varphi)\Big|_{t=0} = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in K_0 \ .$$

Definition (Minimierer)**.**
Wir nennen $u \in K$ einen *Minimierer*, wenn gilt

$$I(u) \le I(v) \quad \text{für alle } v \in K$$

oder dazu äquivalent

$$I(u) \le I(u + \varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in K_0 \ .$$

Bemerkung. Jeder Minimierer ist auch ein kritischer Punkt. Jedoch muss ein kritischer Punkt nicht automatisch Minimierer sein, es kann nämlich auch ein Sattelpunkt oder ein Maximierer sein.

Wir leiten nun für kritische Punkte (also insbesondere für Minimierer) eine gewisse Differentialgleichung her, die sogenannte *Euler-Lagrange-Gleichung.* Zur Herleitung benötigen wir

Lemma 2 (Fundamentallemma der Variationsrechnung)**.**
Eine Funktion $f \in C^0(\Omega, \mathbb{R})$ genüge der Gleichung

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = 0 \quad \textit{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}) \ .$$

Dann folgt $f \equiv 0$ in Ω.

Beweis. Da der Beweis sehr einfach ist, überlassen wir ihn als Übungsaufgabe. □

Wir kommen nun zu

Satz 3 (Euler-Lagrange-Gleichung)**.**
Es sei $u \in K$ ein kritischer Punkt des Funktionales I mit zweimal stetig differenzierbarem F. Dann genügt u der Euler-Lagrange-Gleichung in schwacher Form

$$\int_\Omega \Big(F_z(x, u, \nabla u)\varphi + \sum_{i=1}^n F_{p_i}(x, u, \nabla u)\varphi_{x_i} \Big) dx = 0 \quad \textit{für alle } \varphi \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}) \ .$$

Gilt zusätzlich $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$, so genügt u der Euler-Lagrange-Gleichung in klassischer Form

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} F_{p_i}(x, u, \nabla u) = F_z(x, u, \nabla u) \quad \text{in } \Omega\ .$$

Beweis. Sei $\varphi \in K_0$ und $t \in \mathbb{R}$. Um die erste Variation zu ermitteln, berechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I(u + t\varphi) &= \int_\Omega \frac{d}{dt} F(x, u + t\varphi, \nabla u + t\nabla\varphi) dx \\ &= \int_\Omega \Big(F_z(x, u + t\varphi, \nabla u + t\nabla\varphi)\varphi + \sum_{i=1}^{n} F_{p_i}(x, u + t\varphi, \nabla u + t\nabla\varphi)\varphi_{x_i} \Big) dx\ . \end{aligned}$$

Unter Beachtung, dass u kritischer Punkt ist, ergibt sich für $t = 0$ folgendes

$$0 = D(u, \varphi) = \int_\Omega \Big(F_z(x, u, \nabla u)\varphi + \sum_{i=1}^{n} F_{p_i}(x, u, \nabla u)\varphi_{x_i} \Big) dx\ .$$

Ist nun $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$, so liefert eine partielle Integration unter Beachtung der Nullrandwerte von φ folgendes

$$0 = \int_\Omega \Big(F_z(x, u, \nabla u) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} F_{p_i}(x, u, \nabla u) \Big) \varphi dx\ .$$

Mit dem Fundamentallemma folgern wir nun die Euler-Lagrange-Gleichung

$$F_z(x, u, \nabla u) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} F_{p_i}(x, u, \nabla u) = 0 \quad \text{in } \Omega\ .$$

□

Bemerkungen. (*i*) Die Euler-Lagrange-Gleichung in schwacher Form benötigt weniger Regularität an die Lösung ($u \in C^1$) als die entsprechende Gleichung in klassischer Form (hier muss $u \in C^2$ gelten), daher die Namen.
(*ii*) Die angegebene klassische Euler-Lagrange-Gleichung liegt in *Divergenzform* vor. Setzt man abkürzend $\operatorname{div} F_p := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} F_{p_i}$, so kann man die Gleichung kürzer schreiben als

$$\operatorname{div} F_p(x, u, \nabla u) = F_z(x, u, \nabla u)\ .$$

Mit Hilfe der Kettenregel kann man den Ausdruck $\frac{\partial}{\partial x_i} F_{p_i}(x, u, \nabla u)$ ausdifferenzieren und erhält die Euler-Lagrange-Gleichung in *ausdifferenzierter Form*

$$\sum_{i=1}^{n} F_{p_i x_i}(x, u, \nabla u) + \sum_{i=1}^{n} F_{p_i z}(x, u, \nabla u) u_{x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} F_{p_i p_j}(x, u, \nabla u) u_{x_i x_j} = F_z(x, u, \nabla u)\ .$$

(*iii*) Es handelt sich um eine quasilineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Das bedeutet: Es tauchen maximal Ableitungen zweiter, aber keine höheren Ordnung von u auf. Ferner ist die Gleichung linear in den zweiten Ableitungen.

Beispiel (Dirichlet-Integral).
Für den Fall $F(x,z,p) = \frac{1}{2}|p|^2 = \frac{1}{2}(p_1^2 + \cdots + p_n^2)$ erhalten wir das *Dirichlet-Funktional*

$$I(u) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx \, .$$

Die dazugehörige Euler-Lagrange-Gleichung in schwacher Form lautet

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = 0 \quad \text{für } \varphi \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R})$$

und in klassischer Form

$$\triangle u = 0 \, .$$

Eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung $\triangle u = 0$ nennt man eine *harmonische Funktion.*

Beispiel (Poisson-Problem).
Zu stetigem $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei $h(t) := \int_0^t f(s) ds$ eine Stammfunktion von f. Wir betrachten dann $F(x,z,p) = \frac{1}{2}|p|^2 + h(z)$ mit dem Funktional

$$I(u) = \int_\Omega \Big(\frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 + h(u(x)) \Big) dx \, .$$

Die dazugehörige Euler-Lagrange-Gleichung in schwacher Form lautet

$$\int_\Omega \Big(\nabla u \cdot \nabla \varphi + f(u) \varphi \Big) dx = 0 \quad \text{für } \varphi \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R})$$

und in klassischer Form

$$\triangle u(x) = f(u(x)) \quad \text{in } \Omega \, .$$

Dies ist die *nichtlineare Poisson-Gleichung*, welche wir bereits in Teil 2, Satz 25 für $\Omega = B$ gelöst haben.

Beispiel (Flächeninhalt eines Graphen).
Wir setzen $F(x,z,p) := \sqrt{1 + |p|^2}$ und betrachen das Funktional

$$I(u) := \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2} dx \, .$$

Dieses Funktional misst den Flächeninhalt des Graphen von u. Die dazuhgehörige Euler-Lagrange-Gleichung in Divergenzform lautet

$$\sum_{i=1}^n \Big(\frac{u_{x_i}}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \Big)_{x_i} = 0 \quad \text{in } \Omega \, .$$

Lösungen dieser Gleichung werden *Minimalflächen* genannt. Falls Sie Differentialgeometrie gehört haben: Minimalflächen sind gerade die Flächen, deren differentialgeometrische mittlere Krümmung identisch Null ist.

1.2. **Zweite Variation.** Zur Untersuchung, ob ein kritischer Punkt auch ein Minimierer ist, benötigen wir

Definition (zweite Variation)**.**
Es sei $u \in K$ und $\varphi \in K_0$. Dann nennen wir

$$D^2(u,\varphi) := \frac{d^2}{dt^2} I(u+t\varphi)\Big|_{t=0}$$

die *zweite Variation* von I im Punkt u in Richtung φ.

Wir können die zweite Variation auch explizit berechnen, sie lautet nämlich

$$\begin{aligned} D^2(u,\varphi) &= \frac{d}{dt}\int_\Omega \Big(F_z(x,u+t\varphi,\nabla u + t\nabla\varphi)\varphi + \sum_{i=1}^n F_{p_i}(\dots)\varphi_{x_i}\Big) dx\Big|_{t=0} \\ &= \int_\Omega \Big(F_{zz}(x,u,\nabla u)\varphi^2 + 2\sum_{i=1}^n F_{zp_i}(x,u,\nabla u)\varphi\varphi_{x_i} + \sum_{i,j=1}^n F_{p_ip_j}\varphi_{x_i}\varphi_{x_j}\Big) dx\ . \end{aligned}$$

Wir stellen nun die Voraussetzung, dass F *polykonvex* (engl. jointy convex) in den Variablen z und p ist. Das soll heißen, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} F_{zz} & F_{zp_1} & \dots & F_{zp_n} \\ F_{zp_1} & F_{p_1p_1} & \dots & F_{p_np_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_{zp_n} & F_{p_np_1} & \dots & F_{p_np_n} \end{pmatrix}$$

positiv semidefinit ist. Dann ist nämlich die zweite Variation nichtnegativ, $D^2(u,\varphi) \geq 0$ und wir erhalten

Satz 4. *Es sei F polykonvex. Dann ist jeder kritische Punkt $u \in K$ ein Minimierer des Funktionales I.*

Beweis. Für $\varphi \in K_0$ und $t > 0$ betrachten wir die C^2-Funktion $f(t) := I(u+t\varphi)$ mit ihrer Taylor-Reihe

$$f(t) = f(0) + tf'(0) + \frac{1}{2}t^2 f''(t^*) \quad \text{für ein } t^* \in (0,t)\ .$$

Nun ist aber $f'(0) = D(u,\varphi) = 0$, da u kritischer Punkt von I ist. Weiter gilt $f''(t^*) = D^2(u+t^*\varphi,\varphi) \geq 0$. Insgesamt folgt $f(t) \geq f(0)$, beziehungsweise $I(u+t\varphi) \geq I(u)$ für alle $t > 0$, $\varphi \in K_0$. Somit ist u ein Minimierer von I. $\square$

Bis jetzt kann es mehrere Minimierer geben. Es ist sogar möglich, dass jede Funktion $u \in K$ ein Minimierer des Funktionales I ist, nämlich wenn F eine konstante Funktion ist (welche natürlich auch polykonvex ist).

1.3. Konvexität des Funktionales.

Definition. Wir nennen das Funktional I *konvex*, wenn für alle alle $u, v \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ die Ungleichung

$$I(tu + (1-t)v) \leq tI(u) + (1-t)I(v) \quad \text{für alle } 0 < t < 1$$

erfüllt ist. Das Funktional heißt ferner *strikt konvex*, wenn die Gleichheit in dieser Ungleichung

$$I(tu + (1-t)v) = tI(u) + (1-t)I(v)$$

nur für $u(x) \equiv v(x)$ möglich ist.

Bemerkung. Für ein Funktional der Form

$$I(u) := \int_\Omega F(\nabla u) dx$$

mit $F = F(p) \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ gilt: I ist konvex genau dann, wenn die Hesse-Matrix $D^2 F = (F_{p_i p_j})$ positiv semidefinit ist. Falls die Hesse-Matrix sogar positiv definit ist, so ist I strikt konvex.

Beispiele. Die beiden Funktionale, welche zu $F(p) = \frac{1}{2}|p|^2$ sowie $F(p) = \sqrt{1 + |p|^2}$ gehören, nämlich Dirichlet- und Flächeninhaltsfunktional (siehe voriger Abschnitt), sind beide strikt konvex. Dies zeigt man, indem man die Hesse-Matrix ermittelt und zeigt, dass diese positiv definit ist.

Satz 5 (Eindeutigkeit des Minimierers)**.**
Das Funktional

$$I(u) := \int_\Omega F(x, u(x), \nabla u(x)) dx$$

sei strikt konvex. Dann gibt es in der Klasse $K = K(g)$ höchstens einen Minimierer.

Beweis. Nehmen wir an, es gebe zwei verschiedene Minimiere $u_1, u_2 \in K$ in der Klasse K. Wir setzen dann $m := I(u_1) = I(u_2)$ sowie $v(x) := 1/2 u_1(x) + 1/2 u_2(x)$. Wegen $u_1, u_2 \in K = K(g)$ ist $u_1(x) = u_2(x) = g(x)$ auf $\partial\Omega$, damit auch $v(x) = g(x)$ auf $\partial\Omega$ und somit $v \in K$. Aus der strikten Konvexität folgt dann

$$I(v) = I(1/2 u_1 + 1/2 u_2) < 1/2 I(u_1) + 1/2 I(u_2) = m \leq I(v)$$

also ein Widerspruch. □

Man beachte: Wir haben damit nur einen Eindeutigkeitsatz für Minimierer, jedoch noch keinen Existenzsatz!

2. Existenz von Minimierern

Wir wollen Minimierer des speziellen Funktionales

$$I(u) := \int_\Omega F(\nabla u(x))dx$$

konstruieren. Man beachte, dass der Integrand $F = F(p) \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ jetzt nur noch von p abhängt, nicht aber von x oder z. Die Euler-Lagrange-Gleichung lautet in klassischer Form lautet nun

$$\sum_{i,j=1}^n F_{p_i p_j}(\nabla u)u_{x_i x_j} = 0 \quad \text{in } \Omega\ .$$

Insbesondere ist jede lineare Funktion $u(x) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b$, $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung, also ein kritischer Punkt. Dies werden wir später noch verwenden.

In diesem gesamten Abschnitt stellen wir
Voraussetzung (K): Die Funktion $F = F(p) \in C^2(\mathbb{R}^n)$ sei strikt konvex als Funktion von p, also die Hesse-Matrix $(F_{p_i p_j}(p))_{i,j=1,\ldots,n}$ sei positiv definit.

Insbesondere ist dann das Funktional $I(u)$ strikt konvex im Sinne der Definition aus 1.3.

Aus Gründen, die später klar werden, ersetzen wir nun den bisher verwendeten Raum $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ durch den Raum $C^{0,1}(\Omega, \mathbb{R})$ der Lipschitz-stetigen Funktionen. Nun sind Lipschitz-stetige Funktionen im Allgemeinen gar nicht klassisch differenzierbar, das heißt $\nabla u(x)$ existiert im klassischen Sinne nicht. Allerdings sind sie in einem schwachen Sinne differenzierbar.

2.1. **Der Raum der $C^{0,1}$-Funktionen.**

Definition. Wir erklären zunächst die Halbnorm

$$|u|_\Omega := \sup_{x,y\in\Omega\,,\,x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|}\ .$$

und daraus den Raum der Lipschitz-stetigen Funktionen

$$C^{0,1}(\Omega, \mathbb{R}) := \{u \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R})\ :\ |u|_\Omega < +\infty\}\ .$$

Bemerkungen. (*i*) Es ist $|\cdot|_\Omega$ keine Norm, denn für konstante Funktionen $u \equiv \text{const}$ gilt $|u|_\Omega = 0$. Allerdings ist $|\cdot|_\Omega$ eine Halbnorm, insbesondere gilt die Dreiecksungleichung $|u+v|_\Omega \leq |u|_\Omega + |v|_\Omega$. Wählt man $x_0 \in \Omega$ beliebig, so wird durch

$$||u||_\Omega := |u(x_0)| + |u|_\Omega$$

eine Norm erklärt. Mit dieser Norm wird $C^{0,1}(\Omega,\mathbb{R})$ zu einem Banach-Raum.
(ii) Falls $u \in C^{0,1}(\Omega,\mathbb{R}) \cap C^1(\Omega,\mathbb{R})$ differenzierbar ist, gilt

$$\sup_{x\in\Omega} |\nabla u(x)| \le |u|_\Omega \,.$$

Für konvexe Gebiete Ω liefert der Mittelwertsatz der Differentialrechnung sogar

$$\sup_{x\in\Omega} |\nabla u(x)| = |u|_\Omega \,.$$

Wir zeigen zunächst folgende Eigenschaft von $C^{0,1}(\Omega,\mathbb{R})$.

Lemma 6 (Ersetzungseigenschaft in $C^{0,1}$)**.**
Zu zwei Gebieten $\Theta \subset \Omega$ seien zwei Funktionen $u \in C^{0,1}(\Theta,\mathbb{R})$ und $v \in C^{0,1}(\Omega,\mathbb{R})$ gegeben. Weiter gelte $u(x) = v(x)$ für alle $x \in \partial\Theta$. Dann gehört die Funktion

$$w(x) := \begin{cases} u(x) & \text{falls } x \in \Theta \\ v(x) & \text{falls } x \in \overline{\Omega}\backslash\Theta \end{cases}$$

zur Klasse $C^{0,1}(\Omega,\mathbb{R})$ und es gilt $|w|_\Omega \le \max(|u|_\Theta, |v|_\Omega)$.

Beweis. Setzen wir $C := \max(|u|_\Theta, |v|_\Omega)$, so müssen wir die Ungleichung

$$|w(x) - w(y)| \le C|x-y|$$

für alle $x, y \in \Omega$ zeigen. Offensichtlich gilt diese Ungleichung, wenn $x, y \in \Theta$ oder $x, y \in \Omega\backslash\Theta$ sind. Es verbleibt also, die Ungleichung für $x \in \Theta$ und $y \in \Omega\backslash\Theta$ zu zeigen. Dann existiert aber ein $\lambda \in [0,1]$, sodass $z := \lambda x + (1-\lambda)y \in \partial\Theta$ richtig ist. Zum Beispiel kann man

$$\lambda := \sup\{t \in [0,1] \,:\, tx + (1-t)y \in \Theta\}$$

setzen. Nach Voraussetzung folgt dann $u(z) = v(z) = w(z)$. Die Dreiecksungleichung liefert

$$\begin{aligned} |w(x) - w(y)| &\le |w(x) - w(z)| + |w(z) - w(y)| \\ &= |u(x) - u(z)| + |v(z) - v(y)| \le C(|x-z| + |z-y|) = C|x-y| \,. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir $|x-z| + |z-y| = |x-y|$ verwendet, was direkt aus der Definition von z folgt. $\square$

Bemerkung. Im der Klasse der C^1-Funktionen ist dieses Lemma falsch: Sind u und v differenzierbar, so kann die Ersetzungsfunktion $w(x)$ auf dem Rand $\partial\Theta$ "Knicke" haben, muss also nicht mehr differenzierbar sein. Das ist einer der Gründe, warum wir vom Raum $C^1(\overline{\Omega},\mathbb{R})$ zu dem Raum $C^{0,1}(\Omega,\mathbb{R})$ übergehen.

Korollar 7 (Verbandseigenschaft in $C^{0,1}$)**.**
Mit zwei Funktionen $u, v \in C^{0,1}(\Omega, \mathbb{R})$ gehören auch die Funktionen

$$w_1(x) := \max(u(x), v(x)) \quad , \quad w_2(x) := \min(u(x), v(x)) \quad \textit{sowie} \quad w_3(x) := |u(x)|$$

zum Raum $C^{0,1}(\Omega, \mathbb{R})$ und es gilt jeweils $|w_k|_\Omega \le \max(|u|_\Omega, |v|_\Omega)$ für $k = 1, 2, 3$.

Beweis. Der Beweis erfolgt analog zum Beweis von Lemma 6. □

2.2. **Schwache Ableitungen von $C^{0,1}$-Funktionen.** Wir werden zeigen, dass $C^{0,1}$-Funktionen in einem schwachen Sinne differenzierbar ist.

Zunächst erinnern wir an die (aus der Maßtheorie bekannten?) L^p-Räume. Für $1 \le p < \infty$ erklärt man die L^p-Norm

$$||u||_{L^p(\Omega)} := \Big(\int_\Omega |u(x)|^p dx \Big)^{1/p}$$

und für $p = +\infty$ die L^∞-Norm

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} := \sup_{x \in \Omega} |u(x)| \ ,$$

wobei wir hier unter sup dass essentielle (oder wesentliche) Suppremum [3] verstehen. Damit ergeben sich für $1 \le p \le +\infty$ die L^p-Räume

$$L^p(\Omega, \mathbb{R}) := \Big\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u \text{ messbar und } ||u||_{L^p(\Omega)} < \infty \Big\} \ ,$$

welche alle Banach-Räume mit der entsprechenden Norm sind.

Definition. Es sei $u \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$. Dann nennen wir $v_i \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$ die *schwache Ableitung* von u bezüglich der Variable x_i, wenn gilt

$$\int_\Omega v_i(x) h(x) dx = - \int_\Omega u(x) \frac{\partial}{\partial x_i} h(x) dx \quad \text{für alle } h \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}) \ .$$

Wir setzen dann $D_i u(x) := v_i(x)$.

Bemerkungen. (i) Die Eindeutigkeit der schwachen Ableitung zeigt man leicht: Seien v_i, w_i zwei schwache Ableitungen von u, so folgt

$$\int_\Omega (v_i(x) - w_i(x)) h(x) dx = 0 \quad \text{für alle } h \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R})$$

und daraus $v_i(x) = w_i(x)$ für fast alle $x \in \Omega$.
(ii) Leicht überlegt man sich die Linearität der schwachen Ableitung

$$D_i(\alpha u + \beta v) = \alpha D_i u + \beta D_i v \quad , \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ .$$

(iii) Mit Hilfe partieller Integration überlegt man sich, dass jede klassisch differenzierbare Funktion u auch schwach differenzierbar ist und es gilt $D_i u(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} u(x)$, d.h. klassische

[3] erklärt als $||u||_{L^\infty} := \sup\{c \ge 0 \ : \ \{x : |u(x)| \ge c\} \text{ ist keine Nullmenge}\}$

und schwache Ableitung stimmen überein.
(iv) Ist $\Theta \subset \Omega$ offen und u konstant in Θ, so folgt $D_i u(x) = 0$ in Θ.

Definition. Es sei $1 \leq p \leq +\infty$. Dann nennen wir

$$W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}) := \Big\{ u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}) \ : \ D_i u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}) \text{ für alle } i = 1, \ldots, n \Big\}$$

den *Sobolev-Raum* der L^p-Funktionen, deren schwache Ableitungen existieren und ebenfalls in L^p liegen.

Bemerkungen. *(i)* Der Sobolev-Raum $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R})$ wird mit der Norm

$$||u||_{W^{1,p}(\Omega)} := ||u||_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} ||D_i u||_{L^p(\Omega)}$$

zu einem Banach-Raum.
(ii) Für $p = 2$ erhalten wir sogar den Hilbert-Raum $W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R})$, zusammen mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle := \int_\Omega u(x) v(x) dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega D_i u(x) D_i v(x) dx \ .$$

(iii) Für ein beschränktes Gebiet Ω gilt die Inklusion $W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}) \subset W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R})$ für alle $1 \leq p < \infty$.

Frage: Wie läßt sich der Raum $C^{0,1}(\Omega, \mathbb{R})$ in die Familie der Räume $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R})$ einordnen? Gilt etwa die Gleichheit $C^{0,1}(\Omega, \mathbb{R}) = W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R})$ für ein gewisses p?

Eine Teilantwort auf diese Frage liefert

Satz 8 (Einbettungssatz I)**.**
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $u \in C^{0,1}(\Omega, \mathbb{R})$. Dann gilt ebenfalls $u \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R})$, insbesondere besitzt u schwache Ableitungen $D_i u$ in $L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. Weiterhin gilt die Abschätzung

$$||D_i u||_{L^\infty(\Omega)} \leq |u|_\Omega \quad \text{für } i = 1, \ldots, n \ .$$

Beweis. 1.) Es sei $h \in C^1_0(\Omega, \mathbb{R})$ gewählt und $h(x) = 0$ für $x \in \Omega$, $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) < 2\varepsilon$. Zu $|s| < \varepsilon$, $s \neq 0$ und betrachten wir den Differenzenquotienten

$$D_i^s h(x) := \frac{h(x + se_i) - h(x)}{s} \ .$$

Dann gilt folgende Version der partiellen Integration

$$\begin{aligned} \int_\Omega u(x) D_i^s h(x) dx &= \frac{1}{s} \int_\Omega u(x) h(x + se_i) dx - \frac{1}{s} \int_\Omega u(x) h(x) dx \\ &= \frac{1}{s} \int_\Omega u(x - se_i) h(x) dx - \frac{1}{s} \int_\Omega u(x) h(x) dx \qquad \text{Subst. } x \mapsto x + se_i \\ &= -\int_\Omega D_i^{-s} u(x) h(x) dx \ . \end{aligned}$$

Wegen $u \in C^{0,1}(\Omega, \mathbb{R})$ sind nun die Differenzenquotienten von u gleichmäßig beschränkt, nämlich

$$|D_i^s u(x)| \leq |u|_\Omega \quad \text{für } x \in \Omega \ , \ \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \geq 2\varepsilon \ .$$

Insbesondere folgt die Abschätzung

$$\Big| \int_\Omega u(x) D_i^s h(x) dx \Big| \ \leq \ \int_\Omega |D_i^{-s} u(x)| |h(x)| dx \leq |u|_\Omega \int_\Omega |h(x)| dx = |u|_\Omega \, ||h||_{L^1(\Omega)} \ .$$

Da h klassisch differenzierbar ist, liefert der Grenzübergang $s \to 0$ die Ungleichung

$$\Big| \int_\Omega u(x) \frac{\partial}{\partial x_i} h(x) dx \Big| \leq |u|_\Omega \, ||h||_{L^1(\Omega)} \ .$$

2.) Wir betrachten das lineare Funktional

$$T : C_0^1(\Omega, \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \quad , \quad T(h) := - \int_\Omega u(x) \frac{\partial}{\partial x_i} h(x) dx \ .$$

Dieses ist wegen 1) bezüglich L^1-Norm beschränkt. Beachten wir, dass $C_0^1(\Omega, \mathbb{R})$ dicht in $L^1(\Omega, \mathbb{R})$, so können wir T zu einem linearen, beschränkten Funktional

$$T : L^1(\Omega, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

fortsetzen. Weiterhin gilt wegen 1) die Normabschätzung

$$||T|| := \sup_{h \in L^1(\Omega)} \frac{|T(h)|}{||h||_{L^1(\Omega)}} \leq |u|_\Omega \ .$$

Nach dem Darstellungssatz von Riesz [4] existiert ein Element $v_i \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ mit der Eigenschaft

$$T(h) = - \int_\Omega u(x) \frac{\partial}{\partial x_i} h(x) dx = \int_\Omega v_i(x) h(x) dx \quad \text{für alle } h \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}) \ .$$

Mit der Definition sehen wir sofort, dass $v_i(x) = D_i u(x)$ die schwache Ableitung von $u(x)$ ist und es folgt $u \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R})$. Der Satz von Riesz liefert ebenfalls die Gleichung $||v_i||_{L^\infty(\Omega)} = ||T||$ und es folgt

$$||v_i||_{L^\infty(\Omega)} = ||T|| \leq |u|_\Omega \ .$$

□

Bemerkung. Es gilt also $C^{0,1}(\Omega, \mathbb{R}) \subset W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R})$. Man sagt, der Raum $C^{0,1}(\Omega, \mathbb{R})$ ist stetig in den Raum $W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R})$ eingebettet. Für konvexe Gebiete Ω gilt sogar noch mehr.

[4] siehe Vorlesung Maßtheorie oder [S], Kap. II, Paragraph 8, Satz 6

Satz 9 (Einbettungssatz II).
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ konvex und beschränkt. Dann liegt jede Funktion $u \in W^{1,\infty}(\Omega,\mathbb{R})$ auch im Raum $C^{0,1}(\Omega,\mathbb{R})$ und es gilt die Abschätzung

$$|u|_\Omega \leq ||\nabla u||_{L^\infty(\Omega)} := \sum_{i=1}^n ||D_i u||_{L^\infty(\Omega)} \ .$$

Beweis. Wir setzen zunächst $u \in W^{1,\infty}(\Omega,\mathbb{R})$ mittels $u(x) := 0$ auf $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$ fort. Zu $\varepsilon > 0$ betrachten wir die Glättung $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ aus Teil 2, Lemma 12

$$u_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \varrho\Big(\frac{y-x}{\varepsilon}\Big) u(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \varrho(z) u(x+\varepsilon z)dz \ .$$

Aus $u \in W^{1,\infty}(\Omega,\mathbb{R})$ folgt zunächst $u \in L^\infty(\Omega,\mathbb{R})$ und wegen Ω beschränkt gilt dann auch $u \in L^1(\Omega,\mathbb{R})$. Aus Teil 2, Lemma 12 folgt dann die Konvergenz

$$u_\varepsilon \to u \quad \text{in } L^1(\Omega,\mathbb{R}) \text{ für } \varepsilon \to 0 \ .$$

Es sei nun $K \subset \Omega$ eine kompakte Teilmenge von Ω mit $\operatorname{dist}(K,\mathbb{R}^n\backslash\Omega) > 0$. Wir fordern $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(K,\mathbb{R}^n\backslash\Omega)$. Für beliebiges $x \in K$ berechnen wir zunächst

$$\begin{aligned} D_i u_\varepsilon(x) &= \varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_i} \varrho\Big(\frac{y-x}{\varepsilon}\Big) u(y)dy = -\varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial y_i} \varrho\Big(\frac{y-x}{\varepsilon}\Big) u(y)dy \\ &= \varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \varrho\Big(\frac{y-x}{\varepsilon}\Big) D_i u(y)dy = (D_i u)_\varepsilon(x) \end{aligned}$$

d.h. Differenzieren und Glättungsoperator sind vertauschbar. Weiter gilt

$$||D_i u_\varepsilon||_{L^\infty(K)} \leq ||D_i u||_{L^\infty(\Omega)}\, \varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\frac{y-x}{\varepsilon}\Big) dy = ||D_i u||_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{für } i = 1,\ldots,n \ .$$

Es sei nun K zusätzlich konvex. Dann liefert der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\begin{aligned} |u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)| &\leq \int_0^1 \Big|\frac{d}{dt} u_\varepsilon(tx + (1-t)y)\Big| dt \\ &= \int_0^1 |\nabla u_\varepsilon(tx+(1-t)y) \cdot (y-x)| dt \\ &\leq ||\nabla u_\varepsilon||_{L^\infty(K)} |y-x| \leq ||\nabla u||_{L^\infty(\Omega)} |x-y| \end{aligned}$$

für alle $x, y \in K$. Die Folge u_ε ist also in K gleichgradig stetig und wegen

$$|u_\varepsilon(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \varrho(z) |u(x+\varepsilon z)| dz \leq ||u||_{L^\infty(\Omega)} \int_{\mathbb{R}^n} \varrho(z) dz = ||u||_{L^\infty(\Omega)}$$

in K auch gleichmäßig beschränkt. Mit dem Satz von Arzela-Ascoli gilt nach Auswahl einer konvergenten Teilfolge die gleichmäßige Konvergenz $u_\varepsilon(x) \to v(x)$ für $\varepsilon \to 0$ mit einer stetigen Funktion $v : K \to \mathbb{R}$, welche der Lipschitz-Bedingung

$$|v(x) - v(y)| \leq ||\nabla u||_{L^\infty(\Omega)} |x-y| \quad \text{für } x, y \in K$$

genügt. Nun konvergiert aber auch $u_\varepsilon \to u$ bezüglich $L^1(\Omega)$-Norm. Aus der Eindeutigkeit des Grenzwertes schließen wir $u(x) = v(x)$ für fast alle $x \in K$ sowie $u \in C^{0,1}(K, \mathbb{R})$. Da dieses für jedes konvexe Teilmenge $K \subset \Omega$ mit $\operatorname{dist}(K, \mathbb{R}^n \backslash \Omega) > 0$ gilt und Ω konvex ist, folgt auch $u \in C^{0,1}(\Omega, \mathbb{R})$. □

Bemerkungen. (*i*) Funktionen $u \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R})$ sind nur bis auf Mengen vom Maß Null erklärt. Die Aussage $u \in C^{0,1}(\Omega, \mathbb{R})$ bedeutet also: Es existiert eine Funktion $\tilde{u} \in C^{0,1}(\Omega, \mathbb{R})$ mit der Eigenschaft $u(x) = \tilde{u}(x)$ für $x \in \Omega \backslash N$, wobei N eine Menge vom Maß Null ist.
(*ii*) Der hier bewiesene Einbettungssatz ist nur ein Spezialfall des viel allgemeineren Sobolevschen Einbettungssatzes. Dieses besagt, dass die Inklusion

$$W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}) \subset C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$$

für $p > n$ gilt, wobei der Hölder-Exponent $\alpha := 1 - n/p > 0$ erklärt ist. Im Spezialfall $p = +\infty$ erhalten wir den eben bewiesenen Satz.

Zusammen mit dem vorigen Satz erhalten wir insgesamt die Gleichheit

$$C^{0,1}(\Omega, \mathbb{R}) = W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R})$$

für alle beschränkten, konvexen Gebiete Ω.

Zum Abschluss zeigen wir noch

Lemma 10 (Gauss'scher Satz bei Nullrandwerten)**.**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $u \in C^{0,1}(\Omega, \mathbb{R})$ mit $u(x) = 0$ für $x \in \partial\Omega$. Dann gilt

$$\int_\Omega D_i u(x)dx = 0 \quad \textit{für alle } i = 1, \ldots, n\ .$$

Beweis. Da Ω beschränkt, existiert ein $R > 0$ mit $\Omega \subset B_R := \{x \in \mathbb{R}^n \ :\ |x| < R\}$. Wegen $u(x) = 0$ auf $\partial\Omega$ können wir u stetig auf $B_{2R} = \{x \in \mathbb{R}^n \ :\ |x| < 2R\}$ fortsetzen durch $u(x) := 0$ für $x \in B_{2R} \backslash \Omega$. Wegen Lemma 6 gilt sogar $u \in C^{0,1}(B_{2R}, \mathbb{R})$. Wir wählen nun eine beliebige Funktion

$$h \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \quad \text{mit } h(x) = 1 \text{ falls } |x| \le R \quad \text{sowie} \quad h(x) = 0 \text{ falls } |x| \ge 3/2R\ .$$

Wegen $\Omega \subset B_R$ gilt dann auch $h(x) = 1$ für $x \in \Omega$. Es folgt dann

$$\begin{aligned}
\int_\Omega D_i u(x)dx &= \int_\Omega D_i u(x)h(x)dx = \int_{B_{2R}} D_i u(x)h(x)dx \qquad \text{wegen } u = 0 \text{ in } B_{2R}\backslash\Omega \\
&= -\int_{B_{2R}} u(x)\frac{\partial}{\partial x_i}h(x)dx \qquad \text{Definition schwache Ableitung} \\
&= -\int_\Omega u(x)\frac{\partial}{\partial x_i}h(x)dx - \int_{B_{2R}\backslash\Omega} u(x)\frac{\partial}{\partial x_i}h(x)dx = 0
\end{aligned}$$

Dabei verschwindet das erste Integral wegen $h(x) = 1$ in Ω und das zweite wegen $u(x) = 0$ in $B_{2R}\backslash\Omega$. □

Bemerkungen. (*i*) Für Gebiete mit hinreichend glattem Rand folgt diese Aussage bereits aus dem Gauss'schem Satz. Auf Grund der Nullrandwerte gilt dieser Satz jedoch auch für beliebige beschränkte Gebiete Ω, die nicht der Voraussetzung des Satzes von Gauss genügen.
(*ii*) Der Satz ist auch für Funktionen $u \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}) \cap W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R})$ richtig.

2.3. **Vorgehensweise zur Konstruktion des Minimierers.** Literatur: [GT], Chapter 11.5.

Definition. Zu gegebener Funktion $\varphi \in C^{0,1}(\Omega, \mathbb{R})$ erklären wir die Menge

$$L(\Omega, \varphi) := \Big\{ u \in C^{0,1}(\Omega, \mathbb{R}) \ : \ u(x) = \varphi(x) \text{ für } x \in \partial\Omega \Big\} \, .$$

Bemerkung. Die Klasse $L(\Omega, \varphi)$ ist nicht leer, denn es gilt $\varphi \in L(\Omega, \varphi)$. Ziel der folgenden Abschnitte ist es, folgenden Existenzsatz zu beweisen.

Satz 11 (Existenz eines Minimierers)**.**
Zu einer gegebenen, strikt konvexen Funktion $F \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ betrachten wir das Funktional

$$I(u) := \int_\Omega F(\nabla u) dx \, .$$

Es sei ein $\varphi \in C^{0,1}(\Omega, \mathbb{R})$ so gewählt, dass (Ω, φ) einer gleichmäßigen Stützebenenbedingung genüge. Dann besitzt das Variationsproblem

$$I(u) = \inf_{v \in L(\Omega, \varphi)} I(v)$$

genau eine Lösung $u \in L(\Omega, \varphi)$.

Die gleichmäßige Stützebenenbedingung ist eine gewisse geometrische Bedingung an das Gebiet Ω und die Randwerte φ, die wir erst später genau definieren werden. Um diesen Satz zu beweisen, werden mehrere Teilschritte benötigt. Zunächst definieren wir

Definition. Zu $0 \leq r < +\infty$ erklären wir die Klasse

$$L_r(\Omega) := \{ u \in C^{0,1}(\Omega, \mathbb{R}) \ : \ |u|_\Omega \leq r \} \subset C^{0,1}(\Omega, \mathbb{R}) \, .$$

Für eine Funktion $\varphi \in C^{0,1}(\Omega, \mathbb{R})$ sei ferner

$$L_r(\Omega, \varphi) := \{ u \in L_r(\Omega) \ : \ u(x) = \varphi(x) \text{ für } x \in \partial\Omega \} = L_r(\Omega) \cap L(\Omega, \varphi) \, .$$

Wir nennen $u \in L_r(\Omega)$ einen *Minimierer* in der Klasse $L_r(\Omega)$, wenn

$$I(u) \leq I(v) \quad \text{für alle } v \in L_r(\Omega) \text{ mit } v(x) = u(x) \text{ für alle } x \in \partial\Omega$$

gilt oder äquivalent dazu wenn

$$I(u) \leq I(v) \quad \text{für alle } v \in L_r(\Omega, u) \, .$$

Bemerkung. Trivialerweise gilt die Inklusion $L_r(\Omega,\varphi) \subset L_{r'}(\Omega,\varphi) \subset L(\Omega,\varphi)$ für jedes $r \le r'$.

Wir suchen natürlich Minimierer des Funktionales I in der Klasse $L(\Omega,\varphi)$. Als Hilfsmittel dazu konstruieren wir aber zunächst einen Minimierer in der eingeschränkten Klasse $L_r(\Omega)$, was deutlich einfacher ist. Dazu benötigen wir

Satz 12 (Unterhalbstetigkeit des Funktionales)**.**
Zu $r < \infty$ sei $u_k \in L_r(\Omega)$ eine Folge von Funktionen, welche in Ω gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $u \in L_r(\Omega)$ konvergiere. Dann gilt

$$I(u) \le \liminf_{k\to\infty} I(u_k)\ .$$

Beweis. 1.) Zwischenbehauptung: Aus der Konvexität von F folgt für $p, q \in \mathbb{R}^n$ die Ungleichung

$$F(p) - F(q) \ge \sum_{i=1}^{n} F_{p_i}(q)(p_i - q_i)\ . \tag{1}$$

Zum Beweis entwickeln wir F in eine Taylor-Reihe um q

$$F(p) = F(q) + \sum_{i=1}^{n} F_{p_i}(q)(p_i - q_i) + \sum_{i,j=1}^{n} F_{p_ip_j}(\xi)(p_i - q_i)(p_j - q_j)$$

mit einer geeigneten Zwischenstelle $\xi \in \mathbb{R}^n$. Wegen F strikt konvex ist die Hesse-Matrix $F_{p_ip_j}$ positiv definit und damit der letzte Summand nichtnegativ, woraus die Zwischenbehauptung folgt.

2.) Für jedes feste $\psi \in C_0^1(\Omega,\mathbb{R})$ und $i = 1,\dots,n$ behaupten wir

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \psi D_i(u_k - u)dx = 0\ .$$

Zum Beweis intergrieren wir partiell

$$\int_\Omega \psi D_i(u_k - u)dx = -\int_\Omega (u_k - u)D_i\psi dx \to 0 \quad \text{für } k \to \infty$$

wobei wir die gleichmäßige Konvergenz der u_k verwenden.

3.) Wir zeigen, dass die Ungleichung aus 2.) sogar für alle $\psi \in L^1(\Omega,\mathbb{R})$ gilt. Zunächst existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $\psi_\varepsilon \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R})$ mit der Eigenschaft [5] $\int_\Omega |\psi_\varepsilon - \psi| dx \le \varepsilon$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \Big| \int_\Omega \psi D_i(u_k - u) dx \Big| &\le \Big| \int_\Omega \psi_\varepsilon D_i(u_k - u) dx \Big| + \int_\Omega |\psi_\varepsilon - \psi| |D_i(u_k - u)| dx \\ &\le \Big| \int_\Omega \psi_\varepsilon D_i(u_k - u) dx \Big| + \varepsilon \, |u_k - u|_\Omega \\ &\le \Big| \int_\Omega \psi_\varepsilon D_i(u_k - u) dx \Big| + 2r \, \varepsilon \, . \end{aligned}$$

Mit 2.) folgt dann

$$\limsup_{k \to \infty} \Big| \int_\Omega \psi D_i(u_k - u) dx \Big| \le 2r \, \varepsilon \, .$$

Da dieses für alle $\varepsilon > 0$ gilt, erhalten wir den Grenzwert

$$\lim_{k \to \infty} \int_\Omega \psi D_i(u_k - u) dx = 0 \, .$$

4.) Wir kommen nun zum Beweis der behaupteten Ungleichung

$$\begin{aligned} I(u_k) - I(u) &= \int_\Omega \Big(F(\nabla u_k) - F(\nabla u) \Big) dx \\ &\overset{1.)}{\ge} \sum_{i=1}^n \int_\Omega F_{p_i}(\nabla u)(D_i u_k - D_i u) dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_\Omega \psi_i D_i(u_k - u) dx \overset{3.)}{\to} 0 \quad \text{für } k \to \infty \, . \end{aligned}$$

Dabei haben wir 3.) auf die L^1-Funktion $\psi_i := F_{p_i}(\nabla u)$ angewendet. Es folgt also $\liminf_{k \to \infty} (I(u_k) - I(u)) \ge 0$ und damit die Behauptung. $\square$

Korollar 13. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $r < \infty$ und $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ so gewählt, dass die Klasse $L_r(\Omega, \varphi)$ nicht leer sei. Dann besitzt das Variationsproblem*

$$I(u) = \inf_{v \in L_r(\Omega, \varphi)} I(v) =: \kappa$$

eine Lösung $u \in L_r(\Omega, \varphi)$.

Beweis. Wähle eine minimierende Folge $u_k \in L_r(\Omega, \varphi)$ mit $I(u_k) \to \kappa$ für $k \to \infty$. Dann ist die Folge u_k gleichgradig stetig wegen

$$|u_k(x) - u_k(y)| \le |u_k|_\Omega \, |x - y| \le r|x - y| \quad \text{für } x, y \in \Omega \, .$$

Um die gleichmäßige Beschränktheit der Folge zu zeigen, sei ein $y \in \partial\Omega$ beliebig gewählt. Dann ist

$$\begin{aligned} |u_k(x)| &\le |u_k(x) - u_k(y)| + |u_k(y)| \\ &\le r|x - y| + |\varphi(y)| \le r \operatorname{diam}(\Omega) + |\varphi(y)| \quad \text{für alle } x \in \Omega \, . \end{aligned}$$

[5] weil $C_0^1(\Omega, \mathbb{R})$ dicht in $L^1(\Omega, \mathbb{R})$ liegt

Nach dem Auswahlsatz von Arzela-Ascoli existiert dann eine Teilfolge, welche wir weiterhin als u_k bezeichnen, sodass u_k in $\overline{\Omega}$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $u \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ konvergiert. Aus $|u_k(x) - u_k(y)| \leq r|x-y|$ ergibt sich für $k \to \infty$ ebenfalls $|u(x) - u(y)| \leq r|x-y|$. Aus $u_k(x) = \varphi(x)$ auf $\partial\Omega$ erhalten wir für $k \to \infty$ auch $u(x) = \varphi(x)$ auf $\partial\Omega$. Somit folgt $u \in L_r(\Omega, \varphi)$. Aus der Unterhalbstetigkeit von I erhalten wir schließlich

$$\kappa \leq I(u) \leq \lim_{k\to\infty} I(u_k) = \kappa \ .$$

Damit gilt tatsächlich $I(u) = \kappa$ und u ist Minimierer in $L_r(\Omega, \varphi)$. $\square$

Wir wissen nun, dass in der Klasse $L_r(\Omega, \varphi)$ ein Minimierer existiert. Um nun auch einen Minimierer in der gesamten Klasse $L(\Omega, \varphi)$ zu erhalten, benötigen wir

Lemma 14 (Reduktionslemma)**.**
Es gebe eine Konstante $c > 0$, sodass für jedes (hinreichend große) r der Minimierer $u \in L_r(\Omega, \varphi)$ in der Klasse $L_r(\Omega, \varphi)$ der Abschätzung

$$|u|_\Omega < c$$

genüge. Dann existiert auch ein Minimierer u in der gesamten Klasse $L(\Omega, \varphi)$.

Beweis. Es sei $u = u_c$ der Minimierer in der Klasse $L_c(\Omega, \varphi)$. Nach Voraussetzung gilt dann $|u|_\Omega < c$. Wir zeigen: Dieses u minimiert auch in der gesamten Klasse $L(\Omega, \varphi)$. Zu beliebigem $v \in L(\Omega, \varphi)$ und $0 < \varepsilon < 1$ betrachten wir

$$u_\varepsilon := u + \varepsilon(v - u) = (1-\varepsilon)u + \varepsilon v$$

und beachten $u_\varepsilon \in L(\Omega, \varphi)$. Wegen der Abschätzung

$$|u_\varepsilon|_\Omega \leq |u|_\Omega + \varepsilon|v - u|_\Omega \ .$$

können wir dann $\varepsilon > 0$ so klein wählen, dass auch $|u_\varepsilon|_\Omega < c$ gilt, insbesondere ist dann $u_\varepsilon \in L_c(\Omega, \varphi)$. Da nun u ein Minimierer in $L_c(\Omega, \varphi)$ ist, folgt

$$I(u) \leq I(u_\varepsilon) = I\Big((1-\varepsilon)u + \varepsilon v\Big) \leq (1-\varepsilon)I(u) + \varepsilon I(v)$$

unter Verwendung der Konvexität von I. Nach Umstellen erhalten wir $\varepsilon I(u) \leq \varepsilon I(v)$ und wegen $\varepsilon > 0$ auch $I(u) \leq I(v)$, was zu zeigen war. $\square$

Eine Abschätzung der Form

$$|u|_\Omega = \sup_{x,y\in\Omega, x\neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|} < c$$

für jeden Minimierer $u \in L_r(\Omega, \varphi)$ nennt man *a priori-Abschätzung*. Man nennt c die *a priori-Konstante*, welche nicht von r abhängen darf!

Wir wollen nun eine solche Abschätzung herleiten und zerlegen die Herleitung in zwei Schritte:

1.) Reduktion auf eine Randabschätzung (Satz 19 im nächsten Abschnitt)
$$|u|_\Omega = \sup_{x,y\in\Omega, x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|} \leq \sup_{x\in\Omega, y\in\partial\Omega} \frac{|u(x)-\varphi(y)|}{|x-y|}$$

2.) Herleitung der Randabschätzung der Lösung (Satz 21 folgenden Abschnitt 2.5)
$$\sup_{x\in\Omega, y\in\partial\Omega} \frac{|u(x)-\varphi(y)|}{|x-y|} < c$$
Dabei benötigen wir die gleichmäßige Stützebenenbedingung, die wir dort definieren werden.

2.4. **Maximumprinzip und Reduktion auf die Randabschätzung.** Wir benötigen zunächst

Lemma 15 (Eindeutigkeit)**.**
Es seien $u, v \in L_r(\Omega)$ zwei Minimierer in dieser Klasse mit $u(x) = v(x)$ auf $\partial\Omega$. Dann folgt auch $u(x) = v(x)$ für alle $x \in \Omega$.

Beweis. Angenommen, $u(x) \neq v(x)$ für ein $x \in \Omega$. Setzen wir $\varphi(x) := u(x) = v(x)$ für $x \in \partial\Omega$ so folgt $u, v \in L_r(\Omega, \varphi)$. Ist nun $\kappa := \inf_{w\in L_r(\Omega,\varphi)} I(w)$, so folgt $\kappa = I(u) = I(v)$. Also sind sowohl u als auch v zwei Mininimerer in der Klasse $L_r(\Omega, \varphi)$. Beachten wir $\frac{u+v}{2} \in L_r(\Omega, \varphi)$, so liefert die strikte Konvexität des Funktionales
$$\kappa \leq I\Big(\frac{u+v}{2}\Big) < \frac{1}{2}I(u) + \frac{1}{2}I(v) = \kappa$$
also Widerspruch. □

Lemma 16. *Es sei $u \in L_r(\Omega)$ der Minimierer in dieser Klasse Dann ist u auch ein Minimierer in der Klasse $L_r(\Theta)$ für jedes $\Theta \subset \Omega$.*

Beweis. Angenommen, u ist kein Minimierer in der Klasse $L_r(\Theta)$. Dann existiert also ein $v \in L_r(\Theta)$ mit $v(x) = u(x)$ auf $\partial\Theta$ sowie
$$\int_\Theta F(\nabla v)dx < \int_\Theta F(\nabla u)dx\ .$$
Betrachte nun die Funktion
$$w : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \quad , \quad w(x) := \begin{cases} v(x) & \text{für } x \in \Theta \\ u(x) & \text{für } x \in \overline{\Omega}\backslash\Theta \end{cases} \quad .$$

Wegen dem Ersetzungslemma 6 gehört w zur Klasse $L_r(\Omega)$. Zusätzlich gilt $w(x) = u(x)$ für alle $x \in \partial\Omega$, also $w \in L_r(\Omega, u)$. Wir beachten die Ungleichung

$$\begin{aligned} I(w) &= \int_\Omega F(\nabla w)dx = \int_\Theta F(\nabla w)dx + \int_{\Omega\setminus\Theta} F(\nabla w)dx \\ &= \int_\Theta F(\nabla v)dx + \int_{\Omega\setminus\Theta} F(\nabla u)dx < \int_\Theta F(\nabla u)dx + \int_{\Omega\setminus\Theta} F(\nabla u)dx = I(u) \end{aligned}$$

also $I(w) < I(u)$, im Widerspruch zur Voraussetzung, dass u ein Minimierer ist. □

Wir kommen nun zum entscheidenden

Satz 17 (Vergleichssatz)**.**
Es seien $u, v \in L_r(\Omega)$ zwei Minimierer in $L_r(\Omega)$ mit $u(x) \le v(x)$ für $x \in \partial\Omega$. Dann folgt

$$u(x) \le v(x) \quad \textit{für alle } x \in \Omega\ .$$

Beweis. Angenommen, die Aussage wäre falsch. Dann ist die Menge

$$\Theta := \{x \in \Omega\ :\ u(x) > v(x)\}$$

nicht leer und wegen der Stetigkeit von u und v auch offen. Zusätzlich gilt $u(x) > v(x)$ in Θ und $u(x) = v(x)$ auf $\partial\Theta$. Nach Lemma 16 sind dann sowohl u als auch v Minimierer in der Klasse $L_r(\Theta)$, im Widerspruch zum Eindeutigkeitslemma 15. □

Korollar 18 (Maximumprinzip)**.**
Es seien $u, v \in L_r(\Omega)$ zwei Minimierer in $L_r(\Omega)$. Dann folgt

$$\sup_{x\in\Omega} |u(x) - v(x)| \le \sup_{x\in\partial\Omega} |u(x) - v(x)|\ .$$

Beweis. Wir setzen $c := \sup\limits_{x\in\partial\Omega} |u(x)-v(x)|$ und betrachten die Verschiebung $v_c(x) := v(x)+c$. Dann gilt $v_c \in L_r(\Omega)$ und v_c ist ebenfalls ein Minimierer (denn das Funktional I ist invariant unter Translationen). Weiterhin gilt $u(x) \le v_c(x)$ für alle $x \in \partial\Omega$. Aus Satz 17 folgt dann $u(x) \le v_c(x)$ für alle $x \in \Omega$, beziehungsweise $u(x)-v(x) \le c$. Durch Vertauschen der Rollen von u und v folgt ebenfalls $v(x) - u(x) \le c$, also

$$|u(x) - v(x)| \le c = \sup_{y\in\partial\Omega} |u(y) - v(y)| \quad \text{für alle } x \in \Omega\ .$$

□

Bemerkung. Das Maximumprinzip besagt: Die Differenz zweier Minimierer nimmt ihr Betragsmaximum auf dem Rand an. Dies bedeutet: Wenn zwei Minimierer u, v sich auf dem Rand $\partial\Omega$ um höchstens $\varepsilon > 0$ unterscheiden, dann unterscheiden sie sich auch im Inneren auch nur um höchstens ε. Man spricht deshalb auch von einer Stabilitätsungleichung.

Satz 19 (Reduktion auf Randabschätzung).
Es sei $u \in L_r(\Omega)$ ein Minimierer in dieser Klasse. Dann gilt

$$|u|_\Omega := \sup_{x,y\in\Omega, x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|} \leq \sup_{x\in\Omega, y\in\partial\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|} .$$

Beweis. Es seien $x_1, x_2 \in \Omega$ mit $x_1 \neq x_2$. Wir setzen $\tau := x_2 - x_1$,

$$u_\tau(x) := u(x+\tau) \quad \text{für } x \in \Omega_\tau := \{z \in \mathbb{R}^n \ : \ z+\tau \in \Omega\} .$$

Da u ein Minimierer in der Klasse $L_r(\Omega)$ ist, ist dann u_τ ein Minimierer in der Klasse $L_r(\Omega_\tau)$. Nun ist $\Theta := \Omega \cap \Omega_\tau$ nicht leer (x_1 liegt drin) und offen. Wegen Lemma 16 sind sowohl u als auch u_τ Minimierer in der Klasse $L_r(\Theta)$. Nach Satz 18 existiert ein $z \in \partial\Theta = \partial(\Omega \cap \Omega_\tau)$ mit der Eigenschaft

$$|u(x_1) - u_\tau(x_1)| \leq |u(z) - u_\tau(z)| = |u(z) - u(z+\tau)| .$$

Beachten wir $u_\tau(x_1) = u(x_1+\tau) = u(x_2)$, so folgt

$$|u(x_1) - u(x_2)| \leq |u(z) - u(z+\tau)| .$$

Teilen wir auf beiden Seiten der Gleichung durch $|\tau| = |x_1 - x_2|$, so folgt

$$\frac{|u(x_1)-u(x_2)|}{|x_1-x_2|} \leq \frac{|u(z)-u(z+\tau)|}{|\tau|} .$$

Nun ist $z \in \partial(\Omega \cap \Omega_\tau)$ nur in zwei Fällen möglich, nämlich $z \in \partial\Omega$ oder $z \in \partial\Omega_\tau$. Der zweite Fall ist äquivalent zu $z + \tau \in \partial\Omega$. Von den beiden Punkten z und $z+\tau$ liegt also jeweils mindestens einer auf $\partial\Omega$. Insbesondere gilt die Ungleichung

$$\frac{|u(x_1)-u(x_2)|}{|x_1-x_2|} \leq \sup_{x\in\Omega, y\in\partial\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|}$$

und die Behauptung des Satzes folgt. □

2.5. **Herleitung der Randabschätzung mittels Randbarrieren.** Es sei u ein Minimierer des Funktionales in der Klasse

$$L_r(\Omega,\varphi) := \Big\{ u \in C^{0,1}(\Omega,\mathbb{R}) \ : \ |u|_\Omega \leq r \ , \ u(x) = \varphi(x) \text{ für } x \in \partial\Omega \Big\} .$$

Unter gewissen Voraussetzungen an das Gebiet Ω und die Randwerte φ wollen wir die Randabschätzung

$$\sup_{x\in\Omega, y\in\partial\Omega} \frac{|u(x)-\varphi(y)|}{|x-y|} \leq C$$

herleiten. Dabei ist C eine Konstante, unabhängig von r sein muss! Die Idee dabei ist, lineare Funktionen als obere und untere Barrieren zu verwenden. Dies ist möglich, da jede lineare Funktion ein Minimierer ist, was folgendes Lemma sagt.

Lemma 20. *Zu $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}$ sei $v(x) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b$ eine lineare Funktion. Dann ist v ein Minimierer in der Klasse $L_r(\Omega)$ für alle $r \geq |a|$.*

Beweis. 1.) Da v linear ist, folgt $\nabla v(x) = a$ und $|\nabla v(x)| = |a|$. Insbesondere ist $|v|_\Omega = |a|$. Für $r \geq |a|$ ist gilt also $v \in L_r(\Omega)$.
2.) Wir zeigen nun, dass v ein Minimierer in der Klasse $C^{0,1}(\Omega, \mathbb{R})$. Insbesondere ist dann v auch ein Minimierer in der Klasse $L_r(\Omega) \subset C^{0,1}(\Omega, \mathbb{R})$ ist. Für beliebiges $\varphi \in C^{0,1}(\Omega, \mathbb{R})$ mit $\varphi(x) = 0$ für $x \in \partial\Omega$ setzen wir

$$f(t) := I(v + t\varphi) = \int_\Omega F(\nabla v + t\nabla\varphi)dx = \int_\Omega F(a + t\nabla\varphi)dx$$

und berechnen unter Verwendung von Lemma 10

$$\begin{aligned} f'(0) &= \int_\Omega \frac{d}{dt} F(a + t\nabla\varphi)dx\Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \int_\Omega F_{p_i}(a + t\varphi)D_i\varphi dx\Big|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^n \int_\Omega F_{p_i}(a)D_i\varphi dx = \sum_{i=1}^n F_{p_i}(a) \int_\Omega D_i\varphi dx = 0\,. \end{aligned}$$

Es gilt also $f'(0) = 0$. Weiterhin berechnen wir die zweite Ableitung

$$f''(t) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n F_{p_ip_j}(a + t\nabla\varphi)D_i\varphi D_j\varphi dx$$

und folgern $f''(t) \geq 0$ wegen der positiven Definitheit der Hesse-Matrix $F_{p_ip_j}$ (Konvexitätsvoraussetzung an F). Zusammen mit $f'(0) = 0$ folgt $f(0) \leq f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Für $t = 1$ erhalten wir insbesondere

$$I(v) = f(0) \leq f(1) = I(v + \varphi)\,.$$

Da dieses für alle $\varphi \in C^{0,1}(\Omega, \mathbb{R})$ mit $\varphi = 0$ auf $\partial\Omega$ gilt, ist v ein Minimierer von I. $\square$

Definition. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$. Zwei lineare Funktionen $\eta^+(x) = a^+ \cdot x + b^+$ sowie $\eta^-(x) = a^- \cdot x + b^-$ mit $a^\pm \in \mathbb{R}^n$, $b^\pm \in \mathbb{R}$ heißen *obere und untere Barriere im Randpunkt* $x_0 \in \partial\Omega$, falls

$$\eta^+(x_0) = \eta^-(x_0) = \varphi(x_0) \quad \text{und} \quad \eta^-(x) \leq \varphi(x) \leq \eta^+(x) \quad \text{für } x \in \partial\Omega$$

gilt. Wir sagen, (Ω, φ) erfüllt eine *gleichmäßige Stützebenenbedingung* (engl. bounded slope condition) mit einer Konstanten $M > 0$, falls zu jedem Randpunkt $x_0 \in \partial\Omega$ eine obere und untere Barriere $\eta^\pm$ existieren mit $|\eta^\pm|_\Omega = |a^\pm| \leq M$.

Wir zeigen nun

Satz 21 (Randabschätzung)**.**
Es erfülle (Ω, φ) eine gleichmäßige Stützebenenbedingung zur Konstanten $M > 0$. Weiter sei u der Minimierer in der Klasse $L_r(\Omega, \varphi)$ für $r \geq M$. Dann genügt u der Abschätzung

$$\frac{|u(x) - \varphi(y)|}{|x - y|} \leq M \quad \textit{für alle } x \in \Omega\ ,\ y \in \partial\Omega\ .$$

Beweis. 1.) Zu $y \in \partial\Omega$ existieren nach Voraussetzung eine obere Barriere $\eta(x) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + b$ mit $\eta(y) = \varphi(y)$, $u(x) = \varphi(x) \leq \eta(x)$ für $x \in \partial\Omega$ sowie $|\eta|_\Omega \leq M$. Aus Lemma 20 zusammen mit dem Vergleichssatz 17 folgt dann

$$u(x) \leq \eta(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega\ .$$

Wir subtrahieren $\varphi(y) = \eta(y)$ und teilen durch $|x - y| > 0$ und erhalten

$$\frac{u(x) - \varphi(y)}{|x - y|} \leq \frac{\eta(x) - \varphi(y)}{|x - y|} = \frac{\eta(x) - \eta(y)}{|x - y|}\ .$$

Daraus folgt nun

$$\frac{u(x) - \varphi(y)}{|x - y|} \leq \frac{\eta(x) - \eta(y)}{|x - y|} \leq |\eta|_\Omega \leq M$$

für alle $x \in \Omega$.
2.) Analog zeigt man mit Hilfe der unteren Barriere die Abschätzung

$$\frac{-[u(x) - \varphi(y)]}{|x - y|} \leq M$$

und erhält insgesamt

$$\frac{|u(x) - \varphi(y)|}{|x - y|} \leq M$$

für alle $x \in \Omega$ und $y \in \partial\Omega$. □

Dieses war nun der letzte benötigte Schritt zum Beweis des Existenzsatzes 11, der also damit bewiesen ist.

Es bleibt nun zu beantworten, für welche Gebiete Ω und welche Randwerte φ die gleichmäßige Stützebenenbedingung gilt. Dazu benötigen wir zunächst

Lemma 22. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $F \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ eine konvexe Funktion (d.h. die Hesse-Matrix ist positiv semidefinit). Dann gilt für jedes $x_0 \in \Omega$ die Ungleichung*

$$F(x) \geq F(x_0) + \nabla F(x_0) \cdot (x - x_0) \quad \textit{für alle } x \in \Omega\ .$$

Also liegt der Graph der Funktion F vollständig oberhalb der Hyperebene $E := \{(x, z) \mid z = F(x_0) + \nabla F(x_0) \cdot (x - x_0)\}$.

Beweis. Folgt direkt aus einer Taylor-Reihenentwicklung von F um x_0 zusammen mit der positiven Semidefinitheit der Hesse-Matrix. □

Definition. Ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt strikt konvex zum Parameter $r > 0$, wenn zu jedem Randpunkt $x_0 \in \partial\Omega$ eine einschließende Kugel $B_r(x_1)$ mit Radius $r > 0$ und Mittelpunkt $x_1 \in \mathbb{R}^n$ existiert mit

$$x_0 \in \partial B_r(x_1) \quad \text{sowie} \quad \Omega \subset B_r(x_1) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x - x_1| < r\}\ .$$

Bemerkungen. (i) Jedes strikt konvexe Gebiet ist konvex.
(ii) Kugeln sind Beispiele strikt konvexer Gebiete.
Wir zeigen nun

Satz 23. *Gegeben sei ein strikt konvexes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sowie Funktion $\varphi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$. Dann erfüllt (Ω, φ) die gleichmäßige Stützebenenbedingung.*

Beweis. Sei Ω strikt konvex zum Parameter $r > 0$ und $x_0 \in \partial\Omega$.
1.) Wir konstruieren zunächst eine untere Barriere im Randpunkt x_0. Da Ω strikt konvex existiert eine Kugel $B_r(x_1)$ mit $\Omega \subset B_r(x_1)$ sowie $x_0 \in \partial B_r(x_1)$, also $|x_1 - x_0| = r$. Wir betrachten nun zu noch zu wählendem $c > 0$ die Funktion

$$\tilde{\varphi}(x) := \varphi(x) + c\Big(|x - x_1|^2 - r^2\Big) \quad \text{für } x \in \overline{\Omega}\ .$$

Es gilt dann

$$\nabla\tilde{\varphi}(x) = \nabla\varphi(x) + 2c(x - x_1) \quad , \quad \tilde{\varphi}(x_0) = \varphi(x_0) \quad \text{sowie} \quad \tilde{\varphi}(x) \leq \varphi(x) \quad \text{für } x \in \Omega\ .$$

Wir berechnen weiter die Hesse-Matrix

$$D^2\tilde{\varphi}(x) = D^2\varphi(x) + 2cE = c\Big(\frac{1}{c}D^2\tilde{\varphi}(x) + 2E\Big)$$

wobei E die $n \times n$-Einheitsmatrix ist. Wir wählen nun $c > 0$ so groß, dass die Hesse-Matrix $D^2\tilde{\varphi}(x)$ für alle $x \in \overline{\Omega}$ positiv definit ist. Unter Beachtung von Lemma 22 folgt dann

$$\varphi(x) \geq \tilde{\varphi}(x) \geq \tilde{\varphi}(x_0) + \nabla\tilde{\varphi}(x_0) \cdot (x - x_0) = \varphi(x_0) + \nabla\tilde{\varphi}(x_0) \cdot (x - x_0)\ .$$

Erklären wir also die lineare Funktion $\eta^-(x) := \nabla\tilde{\varphi}(x_0) \cdot (x - x_0) + \varphi(x_0)$, so ist η^- eine untere Barriere im Sinne der Definition. Ferner gilt die Abschätzung

$$|\nabla\tilde{\varphi}(x_0)| \leq |\nabla\varphi(x_0)| + 2c|x_1 - x_0| \leq ||\varphi||_{C^1(\Omega)} + 2c\,r =: M$$

wobei die Konstante M nicht mehr von x_0 abhängt.
2.) Eine obere Barriere zu φ im Randpunkt x_0 erhält man leicht, indem man mittels 1.) eine untere Barriere für die Funktion $-\varphi$ konstruiert. $\square$

Teil 4. Der Abbildungsgrad

Als Literatur empfiehlt sich [G] sowie [S], Kapitel III.

1. Der Brouwersche Abbildungsgrad in $\mathbb{R}^n$

Der Abbildungsgrad

$$\deg(f, \Omega) \in \mathbb{Z}$$

für stetige Funktionen $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ ist ein in der Analysis sehr wertvolles und wichtiges Hilfsmittel. Zum Beispiel kann damit die Existenz einer Nullstelle von f gezeigt werden, wenn der Abbildungsgrad nicht Null ist.

Die zwei fundamentalen Eigenschaften des Abbildungsgrades sind:

a) die Invarianz unter Homotopie;
b) die Ganzzahligkeit,

welche wir im folgenden beweisen werden.

Wir stellen die analytische Definition des Abbildungsgrades vor. Diese benötigt als Hilfsmittel zur Grundkenntnisse der Analysis, insbesondere den Satz von Gauss.

1.1. Definition und Wohlefiniertheit. Im Teil 2, Abschnitt 2.2 haben wir den Brouwerschen Fixpunktsatz bewiesen. Entscheidend haben wir dort das Integral über die Jacobi-Determinante $\int_\Omega J_f(x)dx$ verwendet. In Lemma 9, Teil 2 hatten wir gezeigt, dass der Wert dieses Integrales bereits durch die Randwerte $f|_{\partial\Omega}$ eindeutig festgelegt ist. Allerdings kann das Integral $\int_\Omega J_f(x)dx$ jede reelle Zahl annehmen und ist somit als Abbildungsgrad ungeeignet.

Um den Abbildungsgrad einer Funktion zu erklären, betrachten wir stattdessen ein gewichtetes Integral über die Jacobi-Determinanten.

Zu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt erklären wir zunächst die Klasse $A^k(\Omega) := C^k(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Mit

$$\operatorname{supp} \omega := \overline{\{x \in \mathbb{R} \,:\, \omega(x) \neq 0\}}$$

bezeichnen wir den Träger (engl. support) der Funktion $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Definition. Es sei $f \in A^2(\Omega)$ eine Funktion mit $|f(x)| > \varepsilon > 0$ für alle $x \in \partial\Omega$. Eine stetige Testfunktion $\omega \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ nennen wir *zulässig* für f, wenn sie die Eigenschaften

$$\operatorname{supp} \omega \subset (0, \varepsilon) \quad , \quad \int_{\mathbb{R}^n} \omega(|y|)dy = 1$$

besitzt. Für eine solche, zulässige Testfunktion ω erklären wir den Abbildungsgrad von f bezüglich 0 als

$$\deg(f,\Omega) = \deg(f,\Omega,0) := \int_\Omega \omega(|f(x)|)J_f(x)dx \ .$$

Bemerkungen. (i) Wir müssen noch die Wohldefiniertheit des Abbildungsgrades, d.h. die Unabhängigkeit von der gewählten Testfunktion ω beweisen.
(ii) Mit Hilfe einer radialsymmetrischen Integration kann man die Formel

$$\int_{B_R(0)} \omega(|y|)dy = \sigma_n \int_0^R s^{n-1}\omega(s)ds$$

zeigen, wobei $\sigma_n := |\partial B_1(0)|$ die Oberfläche der $n-1$-dimensionalen Einheitssphäre im $\mathbb{R}^n$ ist. Insbesondere folgt dann

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega(|y|)dy = \sigma_n \int_0^{+\infty} s^{n-1}\omega(s)ds \ .$$

(iii) Nach seiner Definition kann der Abbildungsgrad eine beliebige reelle Zahl sein. Tatsächlich ist er immer eine ganze Zahl, was wir später zeigen.

Um die Wohldefiniertheit des Abbildungsgrades einzusehen, zeigen wir

Lemma 1. *Es sei $f \in A^2(\Omega)$ mit $|f(x)| > \varepsilon > 0$ für $x \in \partial\Omega$. Ferner sei $\omega \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ eine stetige Funktion mit*

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{supp}\omega \subset (0,\varepsilon) \quad , \quad 0 = \int_{\mathbb{R}^n} \omega(|y|)dy = \int_0^\varepsilon s^{n-1}\omega(s)ds \ .$$

Dann folgt

$$\int_\Omega \omega(|f(x)|)J_f(x)dx = 0 \ .$$

Beweis. Ziel: Wir wollen den Ausdruck $\omega(|f(x)|)J_f(x)$ als Divergenz eines Vektorfeldes schreiben um den Satz von Gauss anzuwenden. Zu $f \in A^2(\Omega)$ erklären wir ein Vektorfeld $a(x) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ durch

$$a_i(x) := \det(\partial_1 f, \ldots, \partial_{i-1}f, f, \partial_{i+1}f, \ldots, \partial_n f) \ .$$

In Teil 2, Abschnitt 2.2 haben wir die Divergenz dieses Vektorfeldes berechnet, es gilt $\operatorname{div} a(x) = nJ_f(x)$. Wir beachten nun die Darstellung

$$a_i(x) = \sum_{k=1}^n f^k(x)\det(\partial_1 f, \ldots, \partial_{i-1}f, e_k, \partial_{i+1}f, \ldots, \partial_n f) =: \sum_{i=1}^n f^k(x)A_{ki}(x) \ .$$

Dabei ist die Matrix

$$A(x) = A_{ki}(x) := \det(\partial_1 f, \ldots, \partial_{i-1}f, e_k, \partial_{i+1}f, \ldots, \partial_n f)$$

gerade die zur Jacobi-Matrix $Df(x)$ adjungierte Matrix. Diese genügt dann der Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ki}(x)\partial_i f^l(x) = \delta_{kl} J_f(x) \quad \text{für } k,l = 1,\ldots,n$$

(Cramersche Regel aus der Linearen Algebra). Für eine hinreichend glatte Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ berechnen wir nun

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}[\varphi(|f(x)|)a(x)] &= \nabla[\varphi(|f(x)|)] \cdot a(x) + \varphi(|f(x)|)\operatorname{div} a(x) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \partial_i[\varphi(|f(x)|)]a_i(x) + \varphi(|f(x)|)nJ_f(x) \\
&= \sum_{i,l=1}^{n} \frac{\varphi'(|f(x)|)}{|f(x)|} f^l(x)\partial_i f^l(x)a_i(x) + \varphi(|f(x)|)nJ_f(x) \\
&= \sum_{i,k,l=1}^{n} \frac{\varphi'(|f(x)|)}{|f(x)|} f^l(x)f^k(x)\underbrace{A_{ki}(x)\partial_i f^l(x)}_{\Sigma_i = \delta_{kl}J_f} + \varphi(|f(x)|)nJ_f(x) \\
&= \varphi'(|f(x)|)|f(x)|J_f(x) + \varphi(|f(x)|)nJ_f(x) \ .
\end{aligned}$$

Damit also die Gleichung

$$\operatorname{div}[\varphi(|f(x)|)a(x)] = \omega(|f(x)|)J_f(x)$$

erfüllt ist, muss φ der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\omega(r) = r\varphi'(r) + n\varphi(r)$$

genügen. Diese besitzt auch eine Lösung, nämlich

$$\varphi(r) := r^{-n}\int_0^r s^{n-1}\omega(s)ds = \int_0^1 t^{n-1}\omega(rt)dt \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

(Nachrechnen!). Aus Voraussetzung (1) dieses Satzes folgern wir $\operatorname{supp}\varphi \subset (0,\varepsilon)$, insbesondere $\varphi(r) = 0$ für $r \geq \varepsilon$. Der Satz von Gauss liefert dann

$$\int_\Omega \omega(|f(x)|)J_f(x)dx = \int_\Omega \operatorname{div}[\varphi(|f(x)|)a(x)]dx = 0 \ ,$$

denn wegen $|f(x)| > \varepsilon$ für $x \in \partial\Omega$ verschwindet $\varphi(|f(x)|)$ und somit der gesamte Integrand in einer ganzen Umgebung von $\partial\Omega$. □

Als unmittelbare Anwendung dieses Lemmas folgt die Wohldefiniertheit des Abbildungsgrades. Seien ω_1, ω_2 zwei zuläßige Testfunktionen für ein $f \in A^2(\Omega)$, d.h.

$$\operatorname{supp}\omega_i \subset (0,\varepsilon) \quad , \quad \int_{\mathbb{R}^n} \omega_i(|y|)dy = 1$$

für $i = 1, 2$. Dann liefert obiges Lemma angewendet auf $\omega(r) := \omega_1(r) - \omega_2(r)$ die Aussage

$$\int_\Omega \Big(\omega_1(|f(x)|) - \omega_2(|f(x)|)\Big) J_f(x) dx = 0 ,$$

also die Wohldefiniertheit des Abbildungsgrades. Um die Homotopieinvarianz des Abbildungsgrades zu zeigen, benötigen wir zunächst

Lemma 2 (7ε-Lemma von Heinz)**.**
Gegeben seien zwei Funktionen $f_1, f_2 \in A^2(\Omega)$ mit $|f_1(x) - f_2(x)| < \varepsilon$ für $x \in \Omega$ sowie $|f_k(x)| > 7\varepsilon$ für $x \in \partial\Omega$, $k = 1, 2$. Dann folgt

$$\deg(f_1, \Omega) = \deg(f_2, \Omega) .$$

Beweis. Idee: Man konstruiere eine "Übergangsfunktion" f_3, welche in bestimmten Bereichen mit f_1 und f_2 übereinstimmt. Man wähle zunächst eine Funktion $\lambda \in C^2(\mathbb{R}, [0, 1])$ mit

$$\lambda(r) = 1 \quad \text{für } r \leq 3\varepsilon \quad , \quad \lambda(r) = 0 \quad \text{für } r \geq 4\varepsilon .$$

Wir erklären nun die Funktion

$$f_3(x) := f_1(x) + \lambda(|f_1(x)|)(f_2(x) - f_1(x)) \in A^2(\Omega)$$

mit der Eigenschaft

$$|f_3(x)| \geq |f_1(x)| - \lambda(|f_1(x)|)|f_2(x) - f_1(x)| > 7\varepsilon - \varepsilon = 6\varepsilon \quad \text{für } x \in \partial\Omega .$$

Zusätzlich gelten die Abschätzungen

$$|f_1(x) - f_3(x)| \leq \lambda(|f_1(x)|)|f_2(x) - f_1(x)| < \varepsilon$$
$$|f_2(x) - f_3(x)| \leq (1 - \lambda(|f_1(x)|))|f_2(x) - f_1(x)| < \varepsilon .$$

Daraus überlegt man sich leicht

$$f_3(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{falls } |f_1(x)| \geq 4\varepsilon \\ f_2(x) & \text{falls } |f_2(x)| \leq 2\varepsilon \end{cases} .$$

Man wähle nun zwei zuläßige Testfunktionen $\omega_1, \omega_2 \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit

$$\operatorname{supp} \omega_1 \subset (5\varepsilon, 6\varepsilon) \quad , \quad \operatorname{supp} \omega_2 \subset (0, \varepsilon) .$$

Insbesondere folgt dann

$$\omega_1(|f_1(x)|) J_{f_1}(x) = \omega_1(|f_3(x)|) J_{f_3}(x)$$
$$\omega_2(|f_3(x)|) J_{f_3}(x) = \omega_2(|f_2(x)|) J_{f_2(x)} .$$

Wegen $|f_k(x)| > 7\varepsilon$, $k = 1, 2$ sowie $|f_3(x)| > 6\varepsilon$ für $x \in \partial\Omega$ sind die beiden Testfunktionen ω_1 und ω_2 zulässig zur Berechnung des Abbildungsgrades von f_1, f_2 und f_3. Es folgt somit

$$\deg(f_1, \Omega) = \int_\Omega \omega_1(|f_1(x)|) J_{f_1}(x) dx = \int_\Omega \omega_1(|f_3(x)|) J_{f_3}(x) dx = \deg(f_3, \Omega)$$

und weiter

$$\deg(f_2,\Omega) = \int_\Omega \omega_2(|f_2(x)|)J_{f_2}(x)dx = \int_\Omega \omega_2(|f_3(x)|)J_{f_3}(x)dx = \deg(f_3,\Omega)\ ,$$

woraus unmittelbar die Behauptung folgt. □

Als unmittelbare Folgerung erhalten wir

Lemma 3. *Es sei $f_k \in A^2(\Omega)$ eine Folge, welche gleichmäßig gegen eine Funktion $f \in A^0(\Omega) = C^0(\overline{\Omega},\mathbb{R})$ konvergiere. Ferner gelte $|f(x)| > \varepsilon > 0$ für alle $x \in \partial\Omega$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft*

$$\deg(f_k,\Omega) = \deg(f_l,\Omega) \quad \textit{für alle } k,l \geq N\ .$$

Somit ist folgende Definition sinnvoll.

Definition. Es sei $f \in C^0(\overline{\Omega},\mathbb{R})$ eine stetige Funktion mit $|f(x)| > \varepsilon > 0$ für alle $x \in \partial\Omega$. Ferner sei $f_k \in A^2(\Omega)$ eine Folge von Funktionen, welche in $\overline{\Omega}$ gleichmäßig gegen f konvergiere. Dann erklären wir

$$\deg(f,\Omega) := \lim_{k\to\infty} \deg(f_k,\Omega)\ .$$

Bemerkung. Dies ist wohldefiniert, denn der Grenzwert ist wegen Lemma 3 unabhängig von der konkret gewählten Folge f_k. Die Existenz einer appromimierenden Folge sichert Lemma 12 aus Teil 2.

Lemma 4 (7ε-Lemma für stetige Funktionen)**.**
Gegeben seien zwei Funktionen $f_1, f_2 \in C^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$ mit $|f_1(x) - f_2(x)| < \varepsilon$ für $x \in \Omega$ sowie $|f_k(x)| > 7\varepsilon$ für $x \in \partial\Omega$. Dann folgt

$$\deg(f_1,\Omega) = \deg(f_2,\Omega)\ .$$

Beweis. Man approximiert f_1 und f_2 gleichmäßig durch zwei Folgen von Funktionen f_1^k, f_2^k in $A^2(\Omega)$ und wendet Lemma 2 an. □

1.2. **Eigenschaften des Abbildungsgrades.**

Satz 5 (Nullstellen-Lemma)**.**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $f \in C^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$ mit $|f(x)| > \varepsilon > 0$ für $x \in \partial\Omega$.
Besitzt f in Ω keine Nullstelle, so folgt $\deg(f,\Omega) = 0$. Äquivalent dazu: Gilt $\deg(f,\Omega) \neq 0$, so besitzt f in Ω eine Nullstelle.

Beweis. Wir zeigen die Aussagen nur für Funktionen f aus der Klasse A^2. Durch Approximation mittels Lemma 4 gilt die Aussage auch für Funktionen der Klasse C^0.
Besitzt f in Ω keine Nullstelle, so existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $|f(x)| > \varepsilon > 0$ für $x \in \overline{\Omega}$. Wähle nun eine zulässige Testfunktion $\omega \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp} \omega \subset (0, +\varepsilon)$. Dann folgt

$$\deg(f, \Omega) = \int_\Omega \underbrace{\omega(|f(x)|)}_{=0} J_f(x) dx = 0 \ .$$

□

Eine fundamentale Eigenschaft des Abbildungsgrades ist

Satz 6 (Invarianz unter Homotopie)**.**
Es sei $f_t(x) = f(x,t) \in C^0(\overline{\Omega} \times [a,b], \mathbb{R}^n)$ eine Familie von Funktionen zum Parameter $t \in [a,b]$. Ferner gelte $f(x,t) \neq 0$ für alle $x \in \partial\Omega$, $t \in [a,b]$. Dann gilt

$$\deg(f_s, \Omega) = \deg(f_t, \Omega) \quad \textit{für alle } s,t \in [a,b]$$

d.h. die Zuordnung $s \mapsto \deg(f_s, \Omega)$ ist konstant.

Beweis. Wir wählen zunächst ein $\varepsilon > 0$ so klein, dass $|f(x,t)| > 7\varepsilon$ für $x \in \partial\Omega$, $t \in [a,b]$ gilt. Da nun f auf der kompakten Menge $\overline{\Omega} \times [a,b]$ gleichmäßig stetig ist, existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ mit der Eigenschaft

$$|f(x,s) - f(x,t)| < \varepsilon \quad \text{für } x \in \overline{\Omega} \ , \ s,t \in [a,b] \text{ mit } |s-t| \leq \delta \ .$$

Mit Lemma 4 ist dann

$$\deg(f_s, \Omega) = \deg(f_t, \Omega) \quad \text{für } s,t \in [a,b] \ , \ |s-t| \leq \delta \ .$$

Ein Überdeckungsargument liefert dann $\deg(f_s, \Omega) = \deg(f_t, \Omega)$ für alle $s,t \in [a,b]$. □

Satz 7 (Satz von Rouché)**.**
Es seien $f, g \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ zwei Funktionen mit

$$|f(x) - g(x)| < |f(x)| \quad \textit{für } x \in \partial\Omega \ .$$

Dann folgt

$$\deg(f, \Omega) = \deg(g, \Omega) \ .$$

Beweis. Betrachte zu $t \in [0,1]$ die Homotopie $f_t(x) := f(x) + t(g(x) - f(x))$ mit der Eigenschaft

$$|f_t(x)| \geq |f(x)| - t|g(x) - f(x)| > |f(x)| - t|f(x)| \geq 0 \quad \text{für } x \in \partial\Omega \ , \ t \in [0,1] \ .$$

Satz 6 liefert dann $\deg(f_0, \Omega) = \deg(f_1, \Omega)$, bez. $\deg(f, \Omega) = \deg(g, \Omega)$. □

Bemerkung. Der Satz liefert insbesondere $\deg(f,\Omega) = \deg(g,\Omega)$, falls nur $f(x) = g(x)$ für $x \in \partial\Omega$ gilt, also f und g auf dem Rand $\partial\Omega$ übereinstimmen. Somit ist der Abbildungsgrad $\deg(f,\Omega)$ bereits eindeutig durch die Randwerte $f|_{\partial\Omega}$ festgelegt.

Satz 8 (Fixpunktsatz von Brouwer)**.**
Sei $B := \{x \in \mathbb{R}^n \;:\; x_1^2 + \cdots + x_n^2 \le 1\}$ die abgeschlossene Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$. Dann besitzt jede stetige Abbildung $f : B \to B \in C^0(B,B)$ einen Fixpunkt.

Beweis. Man setze f stetig auf $B_2 := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \le 2\}$ fort durch

$$\tilde f : B_2 \to B \quad , \quad \tilde f(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in B \\ f(x/|x|) & \text{für } x \in B_2 \backslash B \end{cases} .$$

Wir setzen $g(x) := x - \tilde f(x)$ und beachten

$$|g(x) - x| = |\tilde f(x)| \le 1 < |x| = 2 \quad \text{für } x \in \partial B_2 .$$

Der Satz von Rouché liefert $\deg(g, B_2) = \deg(\mathrm{Id}, B_2) = 1 \ne 0$. Somit liefert Satz 5 eine Lösung $x \in B_2$ von $0 = g(x) = x - \tilde f(x)$. Also ist $x = \tilde f(x)$. Dann ist aber $|x| = |\tilde f(x)| \le 1$, also $x \in B$. Es folgt $x = \tilde f(x) = f(x)$ und x ist der gesuchte Fixpunkt. □

Wir erklären zunächst

$$S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \;:\; x_1^1 + \cdots + x_n^2 = 1\}$$

die $n-1$-dimensionale Einheitssphäre im $\mathbb{R}^n$.

Satz 9 (Igelsatz von Poincaré)**.**
Falls n ungerade ist, so existiert auf S^{n-1} kein stetiges, nullstellenfreies, tangentiales Vektorfeld. Das bedeutet, es existiert kein $\varphi \in C^0(S^{n-1}, \mathbb{R}^n)$ mit $\varphi(x) \ne 0$ und $\langle x, \varphi(x)\rangle = 0$ für alle $x \in S^{n-1}$.

Beweis. Falls ein solches φ doch existiert, so setzen wir dieses stetig auf B fort durch

$$\tilde\varphi \in C^0(B, \mathbb{R}^n) \quad , \quad \tilde\varphi(x) := \begin{cases} |x|\varphi(\frac{x}{|x|}) & \text{falls } x \ne 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases} .$$

Zu $\delta \in \{-1, 1\}$ sei $g(x) := \delta x$ erklärt. Weiterhin sei $f_t(x) := t\tilde\varphi(x) + (1-t)g(x)$ für $t \in [0,1]$ eine Homotopie. Für $x \in \partial B$ folgt dann

$$|f_t(x)|^2 = t^2 \underbrace{|\varphi(x)|^2}_{>0} + 2t(1-t)\delta \underbrace{\langle \varphi(x), x\rangle}_{=0} + (1-t)^2 \underbrace{|g(x)|^2}_{=1} > 0 .$$

Nach Satz 6 gilt dann

$$\deg(\tilde\varphi, B) = \deg(f_1, B) = \deg(f_0, B) = \deg(g, B) = \delta^n .$$

Da die linke Seite der Gleichung unabhängig von $\delta \in \{-1, 1\}$ ist, muss auch die rechte Seite der Gleichung unabhängig von δ sein. Dies ist aber nur möglich, wenn $(-1)^n = 1^n$ gilt. Also muss n gerade sein, im Widerspruch zur Voraussetzung n ungerade. $\square$

Bemerkungen. (i) Die physikalische Interpretation dieses Satzes: In jedem Punkt der Erdoberfläche (also der S^2) betrachte man den Vektor der Windströmung, welcher idealerweise ein tangentialer Vektor ist (damit keine Luft ins Weltall entweicht). Dieses Vektorfeld muss dann eine Nullstelle haben. D.h. es existiert ein Punkt auf der Erdoberfläche, in dem Windstille herrscht.
(ii) In geraden Dimensionen n ist dieser Satz falsch. Für jedes gerade n findet man ein stetiges, nullstellenfreies, tangentiales Vektorfeld auf $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ (Übungsgsaufgabe).

1.3. **Zur Ganzzahligkeit des Abbildungsgrades.**

Definition. Es sei $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Ein $y \in \mathbb{R}^n$ heißt *regulärer Wert* von f, wenn alle Lösungen $x \in \Omega$ der Gleichung $y = f(x)$ die Bedingung $J_f(x) \neq 0$ erfüllen. Weiter erklären wir den Index von f in $x_0 \in \Omega$ durch

$$\operatorname{ind}(f, x_0) := \frac{J_f(x_0)}{|J_f(x_0)|} \in \{-1, 1\}$$

wobei auch hier $J_f(x_0) \neq 0$ vorausgesetzt sei.

Folgender Satz ist im Wesentlichen eine Folge aus der Transformationsformel für Mehrfachintegrale.

Satz 10 (Indexsummenformel)**.**
Für ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei $f \in A^2(\Omega)$, $f(x) \neq 0$ für $x \in \partial\Omega$. Ferner sei 0 *ein regulärer Wert von f. Dann gibt es nur endlich viele Lösungen $x \in \Omega$ von $f(x) = 0$, welche wir mit $x_1, \ldots, x_N \in \Omega$, $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ bezeichnen. Weiter gilt*

$$\deg(f, \Omega) = \sum_{i=1}^{N} \operatorname{ind}(f, x_i) \in \mathbb{Z}\ .$$

Beweis. 1.) Wir zeigen zunächst: $f(x) = 0$ erlaubt nur endlich viele Lösungen. Andernfalls gebe es eine Folge $x_k \in \Omega$, $k \in \mathbb{N}$ mit $f(x_k) = 0$. Nach Auswahl einer Teilfolge konvergiert diese gegen ein $x_* \in \Omega$ mit $f(x_*) = 0$. Nach Voraussetzung ist 0 regulärer Wert von f, also $J_f(x_*) \neq 0$. Nach dem Satz über die inverse Abbildung ist f lokal um x_* injektiv, im Widerspruch zu $f(x_k) = 0$ und $x_k \to x_*$ für $k \to \infty$.

2.) Wir beweisen die Indexsummenformel durch Induktion über die Anzahl N der Nullstellen von f. Induktionsanfang: $N = 0$, also $f(x) = 0$ hat keine Lösung. Dann folgt aus Satz 5 $\deg(f, \Omega) = 0$ und der Induktionsanfang gilt.

Induktionsschritt: Es gebe genau $N+1$ Lösungen $x_1, \dots, x_{N+1} \in \Omega$. Wegen $J_f(x_1) \neq 0$ ist f lokal um $x_1 \in \Omega$ ein Diffeomorphismus (Satz über die inverse Abbildung). Genauer gibt es eine offene Menge U mit

$$U \subset \Omega \quad , \quad x_1 \in U \quad , \quad V := f(U)$$

sodass f eingeschränkt auf $\overline{U}$ ein Diffeomorphismus auf $\overline{V}$ ist. Durch eventuelle Verkleinerung von U können wir ferner annehmen, dass entweder $J_f(x) > 0$ oder $J_f(x) < 0$ für alle $x \in U$ gilt. Wegen $0 = f(x_1) \in V$ und V offen existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_{2\varepsilon}(0) \subset V$. Wegen f Diffeomorphismus gilt $f(\partial U) = \partial V$, insbesondere gilt dann $|f(x)| \geq 2\varepsilon > \varepsilon$ für alle $x \in \partial U$. Wir setzen $\sigma := \operatorname{ind}(f, x_1)$ mit der Eigenschaft $\sigma J_f(x) > 0$ für alle $x \in U$. Es sei nun $\omega \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ eine zulässige Testfunktion, also

$$\operatorname{supp} \omega \subset (0, \varepsilon) \quad , \quad \int_{\mathbb{R}^n} \omega(|z|) dz = 1 \; .$$

Die Transformationsformel für Mehrfachintegrale liefert dann

$$\begin{aligned} \deg(f, U) &= \int_U \omega(|f(x)|) J_f(x) dx = \sigma \int_U \omega(|f(x)|) |J_f(x)| dx \\ &= \sigma \int_V \omega(|y|) dy = \sigma \int_{\mathbb{R}^n} \omega(|y|) dy = \sigma = \operatorname{ind}(f, x_1) \; . \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir $\omega(|y|) = 0$ für $z \notin V$ verwendet. Zusammen mit der Induktionsvoraussetzung ergibt sich dann

$$\deg(f, \Omega) = \deg(f, U) + \deg(f, \Omega \backslash U) = \operatorname{ind}(f, x_1) + \sum_{i=2}^{N+1} \operatorname{ind}(f, x_i) = \sum_{i=1}^{N+1} \operatorname{ind}(f, x_i) \; ,$$

womit der Induktionsschritt folgt. $\square$

Für den speziellen Fall, dass 0 ein regulärer Wert von f ist, wissen wir also nun $\deg(f, \Omega) \in \mathbb{Z}$. Was aber, wenn 0 kein regulärer Wert von f ist? Wir zeigen: Es existiert dann eine "beliebig kleine Störung" von f, für welche 0 wiederum regulärer Wert ist. Um dies zu beweisen, benötigen wir das Sardsche Lemma.

Zur Vorbereitung beweisen wir

Lemma 11. *Zu $a \in \mathbb{R}^n$ und $h > 0$ sei $W := \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, |x_i - a_i| \leq h/2\}$ ein Würfel der Kantenlänge h. Weiter sei eine C^2-Funktion $f : W \to \mathbb{R}^n$ gegeben mit*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad , \quad |Df(x) - Df(y)| \leq L|x - y| \quad \textit{für alle } x, y \in W \; .$$

Schließlich existiere ein $z \in W$ mit $J_f(z) = 0$. Dann gilt

$$|f(W)| \leq C(L, n) h^{n+1}$$

wobei $|f(W)|$ das Lebesgue-Maß der Menge $f(W)$ ist.

Beweis. Da W kompakt und f stetig ist, ist $f(W)$ kompakt und somit auch Lebesgue-messbar. Wegen $J_f(z) = 0$ existiert ein Vektor $v_1 \in \mathbb{R}^n$, $|v_1| = 1$ mit $v_1^t Df(z) = 0$. Wir ergänzen v_1 durch Vektoren $v_2, \ldots, v_n$ zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$. Zunächst gilt

$$\begin{aligned} v_1^t(f(z) - f(x)) &= v_1^t \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x + t(z-x))dt = v_1^t \int_0^1 Df(x + t(z-x))dt\,(z-x) \\ &= v_1^t \int_0^1 \Big(Df(z + t(x-z)) - Df(z) \Big) dt\,(z-x) \end{aligned}$$

woraus die Abschätzung

$$|v_1^t(f(z) - f(x))| \le L|z-x|^2 \int_0^1 t dt \le Ln^2\,h^2$$

folgt. Man beachte weiter

$$|v_i^t(f(z) - f(x))| \le L|z-x| \le Ln\,h \quad \text{für } x \in W\ ,\ i = 2, \ldots, n\ .$$

Insgesamt folgt

$$f(W) \subset \Big\{ y \in \mathbb{R}^n \ :\ |v_1^t(f(z) - y)| \le Ln^2\,h^2\ ,\ |v_i^t(f(z) - y)| \le Ln\,h \text{ für } i = 2, \ldots, n \Big\}\ .$$

Unter Verwendung der Invarianz des Lebesgue-Maßes gegenüber Rotationen ergibt sich

$$|f(W)| \le Ln^2\,h^2\,(Lnh)^{n-1} = L^n n^{n+1}\,h^{n+1} = C(L,n)h^{n+1}\ .$$

□

Wir kommen nun zu

Satz 12 (Lemma von Sard)**.**
Zu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen sei $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ gegeben. Für eine kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$ sei

$$M := \{x \in K\ :\ J_f(x) = 0\}$$

die Menge der singulären Punkte. Dann ist die Bildmenge

$$f(M) = \{f(x)\ :\ x \in K\ ,\ J_f(x) = 0\}$$

eine Nullmenge.

Bemerkung. Man beachte, dass nur die Bildmenge $f(M)$ eine Nullmenge ist. M selbst muss keine Nullmenge sein.

Beweis. 1.) Da Ω offen und $K \subset \Omega$ kompakt ist, existieren nach dem Überdeckungssatz von Borel endlich viele Würfel $W_i \subset \Omega$, $i = 1, \ldots, N$ welche K überdecken, also $K \subset W_1 \cup \cdots \cup W_N$. Es sei nun W_* einer dieser Würfel. Wir zeigen: $f(W_* \cap M)$ ist Nullmenge. Wegen

$$f(M) \subset f(W_1 \cap M) \cup \cdots \cup f(W_N \cap M)$$

ist dann auch $f(M)$ eine Nullmenge.

2.) Es sei also

$$W_* := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x_i - a_i| \le R\} \subset \Omega$$

ein solcher Würfel mit Mittelpunkt $a \in \mathbb{R}^n$ und Kantenlänge $R > 0$. Wegen $f \in C^2(W_*, \mathbb{R}^n)$ gibt es zunächst eine Konstante $L < \infty$ mit

$$|f(x) - f(y)| \le L|x - y| \quad , \quad |Df(x) - Df(y)| \le L|x - y| \quad \text{für } x, y \in W_* \ .$$

Zu gegebenem $k = 1, 2, \ldots$ überdecken wir W_* durch k^n achsenparallele Würfel $\hat{W}_i$, $i = 1, \ldots, k^n$ der Kantenlänge $h := \frac{R}{k}$. Es sei nun

$$I := \{i \in \{1, \ldots, k^n\} \ : \ \hat{W}_i \cap M \neq \emptyset\}$$

die Indexmenge aller derjeniger Würfel, welche singuläre Punkte von f enthalten. Für jedes $i \in I$ liefert Lemma 11 dann $|f(\hat{W}_i)| \le C(L, n)\,(R/k)^{n+1}$. Beachten wir

$$f(W_* \cap M) \subset \cup_{i \in I} f(\hat{W}_i) \ ,$$

so folgt dann

$$|f(W_* \cap M)| \le \sum_{i \in I} |f(\hat{W}_i)| \le C(L, n)\Big(\frac{R}{k}\Big)^{n+1} k^n = C(L, n)\frac{R^{n+1}}{k} \ .$$

Für $k \to \infty$ folgt $|f(W_* \cap M)| = 0$, also die Behauptung. $\square$

Satz 13 (Ganzzahligkeit)**.**
Für ein $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ gelte $|f(x)| > \varepsilon > 0$ für $x \in \partial\Omega$.
Dann existiert eine Funktion $f_\varepsilon \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ mit folgenden Eigenschaften:

a) *Es gilt die Abschätzung $|f_\varepsilon(x) - f(x)| < \varepsilon$ für $x \in \overline{\Omega}$.*
b) *Null ist regulärer Wert von f_ε, insbesondere also* $\deg(f_\varepsilon, \Omega) \in \mathbb{Z}$.
c) *Für die Abbildungsgrade gilt*

$$\deg(f, \Omega) = \deg(f_\varepsilon, \Omega) \in \mathbb{Z} \ .$$

Beweis. 1.) Zu gegebenem $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ und $\varepsilon > 0$ wählen wir zunächst $g \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft $|g(x) - f(x)| < \varepsilon/2$ für $x \in \overline{\Omega}$.

2.) Die Menge $K := \{x \in \Omega \ : \ |g(x)| \le \varepsilon/2\} \subset \Omega$ ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Nach dem Sardschen Lemma ist Menge

$$N := \{g(x) \ : \ x \in K \ , \ J_g(x) = 0\}$$

eine Lebesgue-Nullmenge. Folglich exististiert ein Vektor $y \in \mathbb{R}^n$ mit $|y| < \varepsilon/2$ sowie $y \notin N$. Dann setzen wir $f_\varepsilon(x) := g(x) - y$ mit

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)| \le |f_\varepsilon(x) - g(x)| + |g(x) - f(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \text{für } x \in \partial\Omega \ .$$

Es sei nun $x \in \Omega$ eine Nullstelle von f_ε, also $g(x) = y$. Wegen $y \notin N$ gilt dann $0 \neq J_g(x) = J_{f_\varepsilon}(x)$. Somit ist 0 ein regulärer Wert von f_ε und es folgt

$$\deg(f, \Omega) \underset{Satz 7}{=} \deg(f_\varepsilon, \Omega) \underset{Satz 10}{\in} \mathbb{Z} ,$$

also die Behauptung. □

1.4. **Anwendung auf Funktionen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$.** Wir identifizieren in diesem Abschnitt $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ und betrachten Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Als Vorbereitung zeigen wir

Lemma 14. *Zu $R > 0$ sei $B_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ und $f(z) := az^n$ für ein $a \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\deg(f, B_R, z_0) = n$$

für jedes $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|z_0| < |a|R^n$.

Beweis. Es sei $z_0 \neq 0$. Wegen $a \neq 0$ besitzt die Gleichung $f(z) = az^n = z_0$ genau n Lösungen $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ mit jeweils $J_f(z_k) = |f'(z_k)|^2 > 0$. Aus der Voraussetzung $|z_0| < |a|R^n$ folgert man $z_1, \dots, z_n \in B_R$. Die Indexsummenformel liefert dann

$$\deg(f, B_R) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\operatorname{ind}(f, z_i)}_{=1} = n .$$

□

Wir kommen nun zu

Satz 15 (Fundamentalsatz der Algebra, Gauss)**.**
Es sei $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ ein Polynom vom Grade $n \geq 1$ mit $a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{C}$. Dann besitzt p in $\mathbb{C}$ eine Nullstelle.

Beweis. Man setze $f(z) := z^n$ und wähle ein $R > 0$ so groß, dass

$$|a_{n-1}|R^{n-1} + \dots + |a_1|R + a_0 < R^n$$

gelte. Für alle $z \in \partial B_R$, also $|z| = R$, folgt dann nämlich

$$|f(z) - p(z)| = |a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0| < R^n = |f(z)| .$$

Der Satz 7 von Rouché liefert $\deg(p, B_R) = \deg(f, B_R) = n \neq 0$. Aus Satz 5 folgt die Existenz einer Nullstelle. □

Zur Vorbereitung auf den nächsten Satz zeigen wir zunächst

Lemma 16 (Innere-Punkt-Lemma)**.**
Zu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt sei $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ gegeben. Für ein $y \in \mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega)$ gelte $\deg(f, \Omega, y) \neq 0$. Dann ist y ein innerer Punkt der Bildmenge $f(\Omega)$.

Beweis. Zunächst existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $|f(x) - y| > \varepsilon$ für alle $x \in \partial\Omega$. Zu $y' \in \mathbb{R}^n$ mit $|y - y'| < \varepsilon$ beachten wir

$$|f(x) - y - (f(x) - y')| = |y - y'| < \varepsilon < |f(x) - y| \quad \text{für alle } x \in \partial\Omega\ .$$

Der Satz 7 von Rouché liefert dann

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(f - y, \Omega) = \deg(f - y', \Omega) = \deg(f, \Omega, y')$$

und zusammen mit der Voraussetzung dieses Lemmas $\deg(f, \Omega, y') \neq 0$. Satz 5 liefert eine Lösung $x \in \Omega$ der Gleichung $f(x) = y'$ für jedes y' mit $|y - y'| < \varepsilon$. Somit folgt $B_\varepsilon(y) \subset f(\Omega)$ und y ist innerer Punkt von $f(\Omega)$. □

Schließlich zeigen wir noch folgendes Ergebnis, was eventuell aus der Funktionentheorie bekannt ist. Eine Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ nennt man Gebiet, wenn es offen und zusammenhängend ist.

Satz 17 (Gebietstreue holomorpher Funktionen)**.**
Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine nicht konstante, holomorphe Funktion. Dann ist auch $f(\Omega)$ ein Gebiet, insbesondere also offen.

Beweis. Da Ω zusammenhängend ist, ist auch das stetige Bild $f(\Omega)$ zusammenhängend. Wir müssen noch zeigen: $f(\Omega)$ ist offen, d.h. besteht nur aus inneren Punkten. Es sei dazu $w \in f(\Omega)$, also $w = f(z_0)$ für ein $z_0 \in \Omega$. Da f holomorph ist, läßt es sich nun lokal um z_0 in eine Potenzreihe entwickeln, also

$$f(z) - f(z_0) = a_k(z - z_0)^k + \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i(z - z_0)^i\ .$$

Dabei ist $k \geq 1$ und $a_k \neq 0$, denn f ist nicht konstant. Man wähle nun ein $r > 0$ so klein, dass

$$|a_k|r^k > \sum_{i=k+1}^{\infty} |a_i|r^i = r^k \sum_{i=1}^{\infty} |a_{i+k}|r^i$$

gilt. Für alle $z \in \partial B_r(z_0)$, also $|z - z_0| = r$ folgt dann

$$|f(z) - f(z_0) - a_k(z - z_0)^k| < |a_k|r^k = |a_k(z - z_0)|^k\ .$$

Wie im Beweis vom Fundamentalsatz der Algebra folgert man $\deg(f, B_r(z_0), w) = k \neq 0$. Gemäß Lemma 16 ist dann w ein innerer Punkt von $f(B_r(z_0))$ und somit auch von $f(\Omega)$, was zu zeigen war. □

1.5. **Der Produktsatz.** In diesem Abschnitt setzen wir für die Raumdimension stets $n \geq 2$ voraus. Wir benötigen zunächst

Definition. Es sei $O \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann erklären wir eine Äquivalenzrelation: $x \sim y$ gilt genau dann, wenn ein stetiger Weg $\alpha : [0,1] \to O \in C^0([0,1], O)$ existiert mit $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = y$. Die Äquivalenzklassen $G \subset O$ nennen wir dann Zusammenhangskomponenten von O.

Bemerkungen. (i) Jede Zusammenhangskomponente ist eine offene, zusammenhängende Teilmenge von O.
(ii) Ist $G \subset O$ eine Zusammenhangskomponente, so gilt stets $\partial G \subset \partial O$.
(iii) Jedes $O \subset \mathbb{R}^n$ besitzt entweder endlich oder aber abzählbar unendlich viele Zusammenhangskomponenten. Man kann also alle Zusammenhangskomponenten in der Form $(G_j)_{j \in J}$ schreiben, wobei die Indexmenge J entweder $J = \{1, \ldots, N\}$ oder aber $J = \mathbb{N}$ ist.
(iii) Ist O zusammenhängend, so gibt es nur eine Zusammenhangskomponente, nämlich O selbst.

Beispiele. (i) Die Menge $M = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \neq 1\}$ besitzt für $n \geq 2$ genau zwei Zusammenhangskomponenten, nämlich $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ sowie $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| > 1\}$.
(ii) Die Menge $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$ besitzt abzählbar unendlich viele Zusammenhangskomponenten, nämlich die Intervalle $(k, k+1)$ für $k \in \mathbb{Z}$.

Definition. Es sei $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ mit $f(x) \neq y$ für $x \in \partial\Omega$. Dann erklären wir

$$\deg(f, \Omega, y) := \deg(f(\cdot) - y, \Omega)$$

den Abbildungsgrad von f bezüglich des Punktes $y \in \mathbb{R}^n$.

Aus der Invarianz under Homotopie erhält man nun leicht

Lemma 18. *Es sei $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ und G eine Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega)$. Dann gilt für zwei beliebige Punkte $y_1, y_2 \in G$ die Aussage*

$$\deg(f, \Omega, y_1) = \deg(f, \Omega, y_2) .$$

Dieses Lemma ermöglicht folgende

Definition. Es sei $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ und G eine Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega)$. Dann erklären wir

$$\deg(f, \Omega, G) := \deg(f, \Omega, y)$$

den Abbildungsgrad von f bezüglich G, wobei $y \in G$ beliebig gewählt ist.

Bemerkung. Da $f(\partial\Omega)$ kompakt ist, gibt es genau eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente G_∞ (an dieser Stelle wird $n \geq 2$ verwendet). Dann ist auch $\mathbb{R}^n \backslash G_\infty$ eine beschränkte Menge. Für diese Komponente gilt $\deg(f, \Omega, G_\infty) = 0$, was aus Satz 5 folgt.

Wir können nun folgenden Satz beweisen.

Satz 19 (Produktsatz von Leray)**.**
Gegeben seien $f, g \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ sowie ein offenes, beschränktes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Zu $E := f(\partial\Omega)$ bezeichne $(G_j)_{j\in J}$ die beschränkten Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^n \backslash E$. Schließlich sei ein $z \in \mathbb{R}^n \backslash g(E)$ gewählt. Dann gilt die Formel

$$\deg(g \circ f, \Omega, z) = \sum_{j\in J} \deg(f, \Omega, G_j) \cdot \deg(g, G_j, z) \ ,$$

wobei auf der rechten Seite nur endlich viele Summanden ungleich Null sind.

Beweis. 1.) Wir zeigen zunächst: $\deg(g, G_j, z) \neq 0$ gilt für höchstens endlich viele Indizes j. Damit sind dann in der Summe auch nur endlich viele Summanden von Null verschieden. Es sei G_∞ die unbeschränkte Zusammenhangskomponente. Dann ist die Menge $K := \{y \in \mathbb{R}^n \backslash G_\infty \ : \ g(y) = z\}$ abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Nun bildet $(G_j)_{j\in J}$ eine offene Überdeckung von K. Nach dem Überdeckungssatz von Borel gilt dann bereits $K \subset G_{j_1} \cup \cdots \cup G_{j_N}$. Für jedes $k \in J \backslash \{j_1, \ldots, j_N\}$ gilt $K \cap G_k = \emptyset$. Die Gleichung $g(y) = z$ besitzt dann für $y \in G_k$ keine Lösung. Nach dem Nullstellensatz 5 ist dann $\deg(g, G_k, z) = 0$. Also ist $\deg(g, G_j, z) \neq 0$ nur für die endlich vielen Indizes $j_1, \ldots, j_N$.

2.) Durch Aproximation genügt es, die Formel des Satzes nur für $f, g \in C^2$ zeigen. Auf Grund von Satz 13 können wir sogar noch annehmen, dass z ein regulärer Wert von $g \circ f$ ist.

3.) Da nun z regulärer Wert von $g \circ f$ ist, besitzt die Gleichung $g \circ f(x) = z$, $x \in \Omega$ nur endlich viele Lösung mit nichtverschwindender Jacobi-Determinanten

$$J_{g\circ f}(x) = J_g(f(x)) J_f(x) \neq 0 \ .$$

Insbesondere besitzt dann die Gleichung $g(y) = z$ für $y \in f(\overline{\Omega})$ nur endlich viele Lösungen $y_1, \ldots, y_N \in f(\overline{\Omega})$ mit jeweils $J_g(y_k) \neq 0$. Weiterhin besitzt die Gleichung $f(x) = y_k$ für $x \in \Omega$ nur endlich viele Lösungen $x_k^1, \ldots, x_k^{c_k}$ mit jeweils $J_f(x_k^i) \neq 0$.
Für den Index gilt nun folgende Regel

$$\operatorname{ind}(g \circ f, x) = \frac{J_g(f(x)) J_f(x)}{|J_g(f(x))||J_f(x)|} = \operatorname{ind}(g, f(x)) \cdot \operatorname{ind}(f, x) \ .$$

Dann besitzt die Gleichung $g \circ f(x) = z$ gerade die endlich vielen Lösungen x_k^i mit $k = 1, \dots, N$, $i = 1, \dots, c_k$. Die Indexsummenformel (Satz 10) liefert dann

$$\begin{aligned}\deg(g \circ f, \Omega, z) &= \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{c_k} \operatorname{ind}(g \circ f, x_k^i) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{c_k} \operatorname{ind}(g, y_k) \operatorname{ind}(f, x_k^i) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \operatorname{ind}(g, y_k) \sum_{i=1}^{c_k} \operatorname{ind}(f, x_k^i) = \sum_{k=1}^{N} \operatorname{ind}(g, y_k) \deg(f, \Omega, y_k) \ .\end{aligned}$$

Wir beachten nun folgendes: Für jedes $k = 1, \dots, N$ liegt y_k in genau einer der Zusammenhangskomponenten G_j. Daher folgt

$$\begin{aligned}\deg(g \circ f, \Omega, z) &= \sum_{j \in J} \sum_{k : y_k \in G_j} \operatorname{ind}(g, y_k) \deg(f, \Omega, y_k) \\ &= \sum_{j \in J} \deg(f, \Omega, G_j) \sum_{k : y_k \in G_j} \operatorname{ind}(g, y_k) \\ &= \sum_{j \in J} \deg(f, \Omega, G_j) \cdot \deg(g, G_j, z) \ ,\end{aligned}$$

also die Behauptung. □

1.6. **Die Sätze von Jordan-Brouwer.**

Definition. Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge. Dann bezeichne $N(K) \in \{0, 1, \dots\} \cup \{\infty\}$ die Anzahl der beschränkten Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^n \backslash K$.

Satz 20 (Jordan-Brouwer)**.**
Gegeben seien zwei kompakte, zueinander homöomorphe Mengen $K, K_* \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt $N(K) = N(K_*)$, d.h. die Anzahl der beschränkten Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^n \backslash K$ und $\mathbb{R}^n \backslash K_*$ ist gleich.

Beweis. Da K, K_* homöomorph sind, existiert ein Homöomorphismus $\tilde{f} : K \to K_*$, d.h. $\tilde{f}$ ist stetig und bijektiv. Dann existiert auch eine Inverse $\tilde{f}^{-1} : K_* \to K$, welche ebenfalls stetig ist (die Stetigkeit folgt aus der Kompaktheit von K). Mit dem Tietzeschen Ergänzungssatz setzen wir $\tilde{f}, \tilde{f}^{-1}$ zu stetigen Funktionen $f, g \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ fort mit der Eigenschaft $f(x) = \tilde{f}(x)$ für $x \in K$ und $\tilde{f}^{-1}(y) = g(y)$ für $y \in K_*$. Man beachte dann $g \circ f(x) = x$ für $x \in K$. Jedoch wird diese Gleichung für $x \in \mathbb{R}^n \backslash K$ im Allgemeinen nicht mehr gelten. Wir nehmen an, es gelte

$$N := N(K) \neq N(K_*) =: N_*$$

und ohne Einschränkung $N^* < N$. Dann muss $N_* \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sein. Es bezeichne $(G_i)_{i=1,\dots,N}$ und $(G_i^*)_{i=1,\dots,N_*}$ die beschränkten Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^n \backslash K$ und $\mathbb{R}^n \backslash K_*$.

Es sei nun $z \in G_k$ für ein $k \in \{1, \ldots, N_* + 1\}$ gewählt (dies ist möglich wegen $N > N_*$). Ferner sei ein $i \in \{1, \ldots, N_* + 1\}$. Der Produktsatz liefert dann

$$\begin{aligned} \delta_{ik} &= \deg(\mathrm{Id}, G_i, G_k) = \deg(\mathrm{Id}, G_i, z) \\ &\underset{g \circ f = Id \text{ auf } \partial G_i \subset K}{=} \deg(g \circ f, G_i, z) \\ &= \sum_{j=1}^{N_*} \underbrace{\deg(f, G_i, G_j^*)}_{:=a_{ij}} \cdot \underbrace{\deg(g, G_j^*, z)}_{:=b_{jk}} = AB \; . \end{aligned}$$

Es folgt also $E = AB$. Dabei ist A eine $(N_* + 1 \times N_*)$-Matrix, B eine $(N_* \times N_* + 1)$-Matrix und E die $(N_* + 1 \times N_* + 1)$-Einheitsmatrix. Aus Gründen der linearen Algebra ist dann $E = AB$ unmöglich, denn das Matrizenprodukt AB kann maximal den Rang N_* haben, aber nicht den Rang $N_* + 1$. ☐

Als unmittelbare Folgerung erhalten wir

Korollar 21. *Seien $K, K_* \in \mathbb{R}^n$ zwei kompakte, zueinander höomorphe Mengen. Dann ist $\mathbb{R}^n \backslash K$ zusammenhängend genau dann, wenn $\mathbb{R}^n \backslash K_*$ zusammenhängend ist.*

Als nächstes wenden wir den Zerlegungssatz auf die Sphäre $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, |x| = 1\}$ an. Offensichtlich zerlegt S^{n-1} den $\mathbb{R}^n$ in genau zwei Komponenten, nämlich $G_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, |x| < 1\}$ sowie $G_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, |x| > 1\}$.

Satz 22 (Zerlegungssatz von Jordan-Brouwer)**.**
Es sei $S_* \subset \mathbb{R}^n$ eine topologische Sphäre, d.h. es existiert eine stetige, bijektive Abbildung $f : S^{n-1} \to S_*$. Dann zerlegt S_* den $\mathbb{R}^n$ in genau zwei Komponenten, eine beschränkte Komponente G_1 und eine unbeschränkte Komponente G_2. Zusätzlich gilt

$$\partial G_1 = S_* = \partial G_2 \; .$$

Beweis. Wir müssen nur noch $\partial G_i = S_*$ für $i = 1, 2$ zeigen, die anderen Aussagen folgen bereits aus Satz 20. Zunächst gilt stets $\partial G_i \subset S_*$. Wir müssen noch $S_* \subset \partial G_1 \cap \partial G_2$ zeigen. Es sei dazu $y_0 \in S_*$ gewählt und $x_0 := f^{-1}(y) \in S^{n-1}$ gesetzt. Da f auf der kompakten Menge S^{n-1} gleichmäßig stetig ist, existiert zunächst zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ mit

$$x, x' \in S^{n-1} \; : \; |x - x'| \leq \delta \; \Rightarrow \; |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon \; .$$

Wir betrachten die zwei kompakten Mengen

$$E := \{x \in S^{n-1} \; : \; |x - x_0| \leq \delta\} \quad , \quad F := \{x \in S^{n-1} \; : \; |x - x_0| \geq \delta\}$$

mit $E \cup F = S^{n-1}$. Wir setzen $E_* := f(E)$, $F_* := f(F)$ und beachten

$$E_* \cup F_* = S_* \quad \text{sowie} \quad E_* \subset \{y \in S_* \; : \; |y - y_0| \leq \varepsilon\} \; . \tag{2}$$

Nun ist $\mathbb{R}^n \backslash F$ zusammenhängend und nach Korollar 21 auch $\mathbb{R}^n \backslash F_*$. Also gibt es zu jedem $a_0 \in G_1$ sowie $a_1 \in G_2$ einen stetigen Weg

$$\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^n \backslash F_* \in C^0([0,1], \mathbb{R}^n \backslash F_*) \quad , \quad \alpha(0) = a_0 \quad , \quad \alpha(1) = a_1 \ .$$

Wir setzen nun

$$\begin{aligned} t_1 &:= \sup\{t \in [0,1] \,:\, \alpha(t) \in G_1\} \ , \ t_2 := \inf\{t \in [0,1] \,:\, \alpha(t) \in G_2\} \quad \text{sowie} \\ y_1^\varepsilon &:= \alpha(t_1) \quad , \quad y_2^\varepsilon := \alpha(t_2) \ . \end{aligned}$$

Aus dieser Definition sieht man relativ schnell $y_1^\varepsilon \in \partial G_1 \backslash F_*$ sowie $y_2^\varepsilon \in \partial G_2 \backslash F_*$. Aus $\partial G_i \subset S_*$ zusammen mit (2) folgt dann $y_i^\varepsilon \in \partial G_i \cap E_*$ für $i = 1, 2$. Wiederum aus (2) schließt man $|y_i^\varepsilon - y_0| \leq \varepsilon$ für $i = 1, 2$, insbesondere gilt die Konvergenz $y_i^\varepsilon \to y_0$ für $\varepsilon \to 0$. Aus $y_i^\varepsilon \in \partial G_i$ folgt dann $y_0 \in \partial G_1 \cap \partial G_2$, was zu zeigen war. □

Schließlich wollen wir noch einen wichtigen topologischen Satz im $\mathbb{R}^n$ beweisen, den Satz von der Gebietsinvarianz. Als Vorbereitung zeigen wir

Lemma 23. *Auf der Kugel $B = B_r(x_1) := \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |x - x_1| < r\}$ sei eine stetige, injektive Funktion $f \in C^0(\overline{B}, \mathbb{R}^n)$ gegeben. Weiter sei ein $y \in f(B)$ gewählt. Dann gilt*

$$\deg(f, B, y) \in \{-1, 1\} \ .$$

Beweis. 1.) Wegen $y \in f(B)$ existiert ein $x_0 \in B$ mit $f(x_0) = y$. Aus der Injektivität von f folgt dann $f(x) \neq y$ für alle $x \in \partial B$. Insbesondere ist also der Abbildungsgrad $\deg(f, B, y)$ wohldefiniert. Nach Satz 22 zerlegt die Bildmenge $f(\partial B)$ den $\mathbb{R}^n$ in genau zwei Komponenten. Die beschränkte dieser beiden Komponenten sei G_1. Der Produktsatz 19 liefert dann die Aussage

$$1 = \deg(\mathrm{Id}, B, x_0) = \deg(f^{-1} \circ f, B, x_0) = \deg(f, B, G_1) \deg(f^{-1}, G_1, x_0) \ ,$$

also $\deg(f, B, G_1) = \pm 1$.

2.) Wir zeigen nun noch $y \in G_1$, denn dann folgt $\deg(f, B, y) = \deg(f, B, G_1) = \pm 1$. Man wähle $y' \in G_1$ beliebig. Dann existiert ein $x' \in B$ mit $f(x') = y'$. Man betrachte nun die Strecke

$$S := \{(1-t)x' + tx_0 \,:\, t \in [0,1]\} \subset B$$

mit $x_0, x' \in S$. Aus $S \cap \partial B = \emptyset$ zusammen mit der Injektivität von f schließt man $f(S) \cap f(\partial B) = \emptyset$. Wegen $f(x') = y' \in G_1$ muss dann aber $f(S) \subset G_1$ gelten, insbesondere $f(x_0) = y \in G_1$. □

Wir erhalten daraus

Satz 24 (Gebietstreue).
Gegeben sei ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sowie eine stetige, lokal injektive Abbildung $f \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Dann ist auch $f(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, insbesondere also eine offene Menge.

Beweis. Ω ist ein Gebiet, also offen und zusammenhängend. Dann ist zunächst $f(\Omega)$ wieder zusammenhängend. Wir müssen noch zeigen: $f(\Omega)$ ist offene Menge, besteht also nur aus inneren Punkten. Es sei also $y \in f(\Omega)$ beliebig. Dann existiert ein $x_1 \in \Omega$ mit $f(x_1) = y$. Man wähle zunächst $r > 0$ so klein, dass die Inklusion $B_{2r}(x_1) \subset \Omega$ gilt und f auf $B_{2r}(x_1)$ injektiv ist. Aus Lemma 23 folgt $\deg(f, B_r(x_1), y) = \pm 1$. Wegen Lemma 16 ist dann y ein innerer Punkt der Menge $f(B_r(x_1))$ und somit auch von $f(\Omega)$. □

Daraus ergibt unmittelbar

Korollar 25 (Invarianz der Dimension).
Für ein offenes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^k$ stetig und lokal injektiv. Dann folgt $k \geq n$.

1.7. **Der Satz von Borsuk und seine Anwendungen.**

Satz 26 (Satz von Borsuk).
Auf der Kugel $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ sei eine Funktion $f \in C^0(\overline{B}, \mathbb{R}^n)$ mit $f(x) \neq 0$ für $x \in \partial B$ gegeben. Ferner sei f ungerade, d.h. $f(-x) = -f(x)$. Dann ist $\deg(f, B)$ eine ungerade, ganze Zahl.

Beweis. 1.) In einer speziellen Situation läßt sich die Aussage sehr einfach zeigen: Wir nehmen zunächst an, es gelte $f \in A^2(B)$ und Null sei ein regulärer Wert von f. Da f ungerade ist, ist zunächst Null eine Nullstelle von f, also $f(0) = 0$. Die Indexsummenformel Satz 10 liefert weiter

$$\deg(f, B) = \sum_{z \in B\,,\, f(z)=0} \operatorname{ind}(f, z) = \underbrace{\operatorname{ind}(f, 0)}_{\pm 1} + \sum_{z \in B \setminus \{0\}\,,\, f(z)=0} \operatorname{ind}(f, z)\ . \tag{3}$$

In der letzten Summe tauchen Summanden paarweise doppelt auf: Ist $z \in B$ eine Nullstelle, so folgt $0 = -f(z) = f(-z)$, also ist auch $-z$ eine Nullstelle. Aus der Ungeradheit von f folgt weiter $\operatorname{ind}(f, z) = \operatorname{ind}(f, -z)$. Somit ist die letzte Summe in (3) eine gerade Zahl und $\deg(f, B)$ insgesamt eine ungerade Zahl.

2.) Es sei nun Funktion $f \in C^0(\overline{B}, \mathbb{R}^n)$ eine ungerade Funktion. Es folgt ein relativ technisches Approximationsargument. Wir zeigen: f läßt sich in C^0-Norm beliebig gut durch ungerade Funktionen $g \in A^2(B)$ approximieren, für welche Null ein regulärer Wert ist.

Zu $\varepsilon > 0$ wähle man ein $h_0 \in A^2(B)$ mit $|f(x) - h_0(x)| \leq \varepsilon$ in B. Dann ist die Funktion $h_1(x) := \frac{1}{2}(h_0(x) - h_0(-x))$ ungerade und erfüllt ebenfalls $|h_1(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ in B. Man wähle nun noch ein $\delta \in (0, \varepsilon)$ derart, dass es kein Eigenwert der Jacobi-Matrix $Dh(0)$ ist. Dann erfüllt die ungerade Funktion $h(x) := h_1(x) - \delta x$ die Bedingung $J_h(0) \neq 0$ für die Jacobi-Determinante von h in Null. Weiter gilt die Abschätzung $|f(x) - h(x)| \leq 2\varepsilon$ in B.

3.) Wir wählen nun eine Funktion $\varphi \in C^2(\mathbb{R}, [-1, 1])$ mit folgenden Eigenschaften

$$\varphi(-t) = -\varphi(t) \quad \text{für } t \in \mathbb{R} \quad , \quad \varphi(t) = 0 \ \Rightarrow \ t = 0 \quad \text{und} \quad \varphi'(0) = 0 \ .$$

Weiterhin setzen wir

$$\Omega_k := \{x \in B \ : \ x_i \neq 0 \text{ für ein } i \in \{1, \ldots, k\}\}$$

und beachten $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \cdots \subset \Omega_n$ sowie $\Omega_n = B \backslash \{0\}$. Wir konstruieren nun induktiv Vektoren $y^1, \ldots, y^n \in \mathbb{R}^n$ mit $|y^k| < \varepsilon$ sowie ungerade Funktionen

$$g_k(x) := h(x) - \varphi(x_1)y^1 - \cdots - \varphi(x_k)y^k$$

mit folgender Eigenschaft: Null ist regulärer Wert von g_k auf der Menge Ω_k. Es seien die Vektoren $y^1, \ldots, y^{k-1} \in \mathbb{R}^n$ bereits entsprechend gewählt. Wir konstruieren nun den Vektor y^k. Dazu sei

$$\tilde{g}(x) := \frac{g_{k-1}(x)}{\varphi(x_k)} \quad \text{für } x \in \tilde{\Omega} := \{x \in B \ : \ x_k \neq 0\} \ .$$

Mit Hilfe des Sardschen Lemmas findet man ein y^k, $|y^k| < \varepsilon$, sodass y^k ein regulärer Wert von $\tilde{g}$ in $\tilde{\Omega}$ ist. Alle Lösungen $x \in \tilde{\Omega}$ der Gleichung $\tilde{g}(x) = y^k$ erfüllen also $J_{\tilde{g}}(x) \neq 0$. Wir setzen nun

$$g_k(x) := g_{k-1}(x) - \varphi(x_k)y^k = \varphi(x_k)\Big(\tilde{g}(x) - y^k\Big) \ .$$

Es sei nun $x \in \tilde{\Omega}$ mit $g_k(x) = 0$. Daraus folgt $\tilde{g}(x) = y^k$ sowie $J_{\tilde{g}}(x) \neq 0$. Wir berechnen weiter

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_k(x)}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\varphi(x_k)(\tilde{g}(x) - y^k)\Big) \\
&= \delta_{ik}\varphi'(x_k)\underbrace{(\tilde{g}(x) - y^k)}_{=0} + \varphi(x_k)\frac{\partial \tilde{g}(x)}{\partial x_i} = \varphi(x_k)\frac{\partial \tilde{g}(x)}{\partial x_i} \ .
\end{aligned}$$

Insbesondere folgt $J_{g_k}(x) = \varphi(x_k)^n J_{\tilde{g}}(x) \neq 0$. Somit ist Null ein regulärer Wert von g_k in der Menge $\tilde{\Omega} = \{x \in B \ : \ x_k \neq 0\}$. Schließlich zeigen wir noch: Null ist auch regulärer Wert in der Menge $\Omega_k \backslash \tilde{\Omega}$. Ist $x \in \Omega_k \backslash \tilde{\Omega}$, so folgt jedenfalls $x \in \Omega_{k-1}$ sowie $x_k = 0$. Daraus folgt aber $J_{g_k}(x) = J_{g_{k-1}}(x)$ sowie $J_{g_{k-1}}(x) \neq 0$ nach Voraussetzung. Somit ist Null regulärer Wert von g_k in Ω_k, was zu zeigen war.

Mit $g(x) := g_n(x) = h(x) - \varphi(x_1)y^1 - \cdots - \varphi(x_n)y^n$ erhalten wir schließlich eine Funktion, für welche Null ein regulärer Wert in B ist. Es gilt die Abschätzung

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \leq 2\varepsilon + n\varepsilon = (2 + n)\varepsilon$$

d.h. g liegt beliebig nahe an f, was zu zeigen war. □

Wie üblich bezeichnet $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ die $n-1$-dimensionale Einheitssphäre im $\mathbb{R}^n$.

Korollar 27 (Borsuk-Ulam)**.**
Es sei $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion. Dann existiert ein $x \in S^{n-1}$ mit $f(x) = f(-x)$.

Beweis. Angenommen, $f(x) \neq f(-x)$ für alle $x \in S^{n-1}$. Dann erklären wir eine ungerade, stetige Funktion

$$F : B \to \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \quad , \quad F(x) = \begin{cases} |x|\Big(f(\frac{x}{|x|}) - f(-\frac{x}{|x|})\Big) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases} .$$

Wegen $f(x) \neq f(-x)$ für alle $x \in S^{n-1}$ ist dann $F(x) \neq 0$ für alle $x \in \partial B$. Somit ist der Abbildungsgrad $\deg(F, B)$ wohldefiniert und wegen dem Satz von Borsuk eine ungerade Zahl, insbesondere also $\deg(F, B) = \deg(F, B, 0) \neq 0$. Wegen Lemma 16 ist dann $0 \in F(B)$ ein innerer Punkt der Bildmenge $F(B)$. Dies ergibt jedoch einen Widerspruch, den wegen $F(B) \subset \mathbb{R}^{n-1}$ kann $F(B)$ als Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ keine inneren Punkte enthalten. □

Bemerkung. Die physikalische Interpretation: Man betrachte in jedem Punkt der Erdoberfläche (idealerweise S^2) zwei stetig verteilte physikalische Größen, z.B. Temperatur und Luftdruck. Dann existiert zwei gegenüberliegende Punkte x und $-x$ auf der Erdoberfläche, in denen sowohl Temperatur als auch Luftdruck übereinstimmen.

Satz 28. *Die Sphäre $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ werde durch n abgeschlossene Mengen $M_1, \ldots, M_n \subset S^{n-1}$ überdeckt, also $S^{n-1} = M_1 \cup \cdots \cup M_n$. Dann existiert ein $k \in \{1, \ldots, n\}$ sowie ein Punkt $x \in M_k$, für welchen auch $-x \in M_k$ gilt.*

Beweis. Für $i = 1, \ldots, n-1$ erklären wir die stetigen Funktionen

$$\varphi_i : S^{n-1} \to [0, +\infty) \quad , \quad \varphi_i(x) := \operatorname{dist}(x, E_i) .$$

Da E_i abgeschlossen sind, gilt folgende Äquivalenz

$$\varphi_i(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x \in M_i . \tag{4}$$

Man betrachte nun die stetige Funktion $\varphi(x) := (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)) : S^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$, für welche wegen Korollar 27 ein $y \in S^{n-1}$ existiert mit $\varphi(y) = \varphi(-y)$.
1. Fall: Es existiert ein $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ mit $\varphi_k(y) = 0$. Dann folgt auch $\varphi_k(-y) = \varphi_k(y) = 0$ und wegen (4) gilt sowohl $y \in M_k$ als auch $-y \in M_k$.
2. Fall: Es gilt $\varphi_i(y) \neq 0$ für alle $i = 1, \ldots, n-1$. Dann ist auch $\varphi_i(-y) = \varphi_i(y) \neq 0$ für alle $i = 1, \ldots, n-1$. Aus (4) folgert sowohl $y \notin M_i$ als auch $-y \notin M_i$ für $i = 1, \ldots, n-1$. Dann bleibt nur noch $y \in M_n$ und $-y \in M_n$ übrig. □

Bemerkung. Die Abgeschlossenheit der Mengen M_i kann nicht weggelassen werden.

Wir zeigen schließlich noch

Satz 29 (Ham-Sandwich-Satz).
Gegeben seien n beschränkte, messbare Mengen $A_1, \ldots, A_n \subset \mathbb{R}^n$. Dann existiert ein $n-1$-dimensionaler, affiner Raum $E \subset \mathbb{R}^n$, welcher jede der n Mengen in volumengleiche Teile zerlegt.

Beweis. 1. Fall: Alle A_i sind Nullmengen. Dann besitzt jeder Hyperraum im $\mathbb{R}^n$ die gesuchte Eigenschaft.
2. Fall: Es existiert ein $k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\mu(A_k) > 0$. Für einen Vektor $p \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ betrachte die Menge

$$H_p := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n + p_{n+1} \geq 0\} \subset \mathbb{R}^n \ .$$

Man beachte, dass $H_p \cup H_{-p} = \mathbb{R}^n$ gilt. Ferner ist $H_p \cap H_{-p}$ ein $n-1$-dimensionaler affiner Raum im $\mathbb{R}^n$, falls $p \in S^n$ und $p \neq \pm e_{n+1} = (0, \ldots, 0, \pm 1)$ ist. Für $i = 1, \ldots, n$ betrachte man die Abbildung

$$\varphi_i : S^n \to \mathbb{R} \quad , \quad \varphi_i(p) := \mu(H_p \cap A_i) \ ,$$

wobei $\mu(M)$ das Maß der Menge M ist. Wegen Satz 27 existiert für die stetige Funktion $\varphi(p) := (\varphi_1(p), \ldots, \varphi_n(p)) : S^n \to \mathbb{R}^n$ ein $q \in S^n$ mit $\varphi(q) = \varphi(-q)$. Aus $\mu(A_k) > 0$ folgern wir $q_k \neq 0$. Der Hyperraum $H_q \cap H_{-q}$ besitzt nun die gesuchte Eigenschaft. □

2. Der Schaudersche Abbildungsgrad im Banach-Raum

2.1. **Endlich dimensionale Banach-Räume.** Um den Begriff des Abbildungsgrades auch für endlich dimensionale Vektorräume zur Verfügung zu stellen, benötigen wir zunächst

Lemma 30 (Invarianz unter Koordinatenwechsel).
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ mit $f(x) \neq 0$ für $x \in \partial\Omega$. Für ein $\varphi \in GL(n)$, d.h. $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear und bijektiv, sei

$$g(y) := \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi(y) \quad \textit{und} \quad \Omega_* := \varphi^{-1}(\Omega) \ .$$

Dann gilt

$$\deg(f, \Omega) = \deg(g, \Omega_*) \ .$$

Beweis. Durch Approximation mittels der Funktionen f_ε aus Satz 13 reicht es aus, die Aussage für $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ zu beweisen, wobei 0 ein regulärer Wert von f ist. Die Gleichung $f(x) = 0$ besitzt also nur endlich viele Lösungen $x_1, \ldots, x_N \in \Omega$ mit $J_f(x_i) \neq 0$. Die Jacobi-Determinate von g lautet nun

$$J_g(y) = \det(\varphi^{-1}) \cdot J_f(\varphi(y)) \cdot \det \varphi = J_f(\varphi(y)) \ .$$

Wegen φ bijektiv besitzt die Gleichung $g(y) = 0$ auch nur endlich viele Lösungen, nämlich gerade $y_1, \ldots, y_N$, $y_i := \varphi^{-1}(x_i)$. Der Index dieser Nullstellen lautet

$$\mathrm{ind}(g, y_k) = \frac{J_g(y_k)}{|J_g(y_k)|} = \frac{J_f(x_k)}{|J_f(x_k)|} = \mathrm{ind}(f, x_k) \ .$$

Aus der Indexsummenformel folgt dann

$$\deg(f, \Omega) = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{ind}(f, x_i) = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{ind}(g, y_i) = \deg(g, \Omega_*) \ ,$$

also die Behauptung. □

Wir wollen den Brouwerschen Abbildungsgrad geignet verallgemeinern.

Definition. Es sei V Banach-Raum der Dimension $\dim V = n \in \mathbb{N}$. Weiter sei $\Omega \subset V$ offen, beschränkt und $f : \overline{\Omega} \to V$ stetig mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \partial\Omega$. Schließlich sei $\psi : \mathbb{R}^n \to V$ ein Vektorraum-Isomorphismus (d.h. ψ linear und bijektiv). Dann erklären wir

$$\deg(f, \Omega) := \deg(\psi^{-1} \circ f \circ \psi, \Omega_*)$$

wobei $\Omega_* := \psi^{-1}(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ gesetzt sei. Man beachte dabei, dass $\psi^{-1} \circ f \circ \psi$ eine Abbildung vom $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^n$ ist.

Bemerkungen. (i) Die Wahl des Isomorphismus ψ entspricht gerade einer Wahl der Basis des Vektorraumes V, nämlich durch $v_1 := \psi(e_1), \ldots, v_n := \psi(e_n)$.
(ii) Wir müssen uns noch die Wohldefiniertheit überlegen, d.h. die Unabhängigkeit obiger Definition von der Wahl von ψ (oder die Unabhängigkeit von der Wahl der Basis von V). Seien also $\psi_1, \psi_2 : \mathbb{R}^n \to V$ zwei Vektorraum-Isomorphismen mit $\Omega_1 := \psi_1^{-1}(\Omega)$, $\Omega_2 := \psi_2^{-1}(\Omega)$. Wir setzen dazu $\varphi := \psi_1^{-1} \circ \psi_2 : \Omega_2 \to \Omega_1$ und beachten

$$\deg(\psi_2^{-1} \circ f \circ \psi_2, \Omega_2) = \deg(\varphi^{-1} \circ \psi_1^{-1} \circ f \circ \psi_1 \circ \varphi, \Omega_2) = \deg(\psi_1^{-1} \circ f \circ \psi_1, \Omega_1) \ .$$

Es ist nun unmittelbar klar, dass sich sämtliche, im vorigen Abschnitt bewiesene Eigenschaften des Abbildungsgrades im $\mathbb{R}^n$ direkt übertragen lassen. Insbesondere ist der Abbildungsgrad wiederum nur ganzzahlig, es gilt die Invarianz unter Homotopie und aus $\deg(f, \Omega) \neq 0$ folgt wiederum, dass f in Ω eine Nullstelle hat.

2.2. **Abbildungen mit endlichdimensionalen Bild.** Im folgenden sei V ein (unendlich dimensionaler) Banach-Raum.

Definition. Es sei $\Omega \subset V$ offen und $f : \overline{\Omega} \to V$ eine stetige Funktion mit

$$x - f(x) \neq 0 \quad \text{für alle } x \in \partial\Omega \ .$$

Weiter besitze f ein endlich-dimensionales Bild, d.h. es gilt $f(\overline{\Omega}) \subset W$ für einen endlich-dimensionalen Teilraum $W \subset V$ mit $\Omega \cap W \neq \emptyset$. Dann erklären wir den Abbildungsgrad von $\mathrm{Id} - f : \overline{\Omega} \to V$, $(\mathrm{Id} - f)(x) := x - f(x)$ durch

$$\deg(\mathrm{Id} - f, \Omega) := \deg(\mathrm{Id} - f, \Omega \cap W) .$$

Bemerkung. (*i*) Man beachte, dass $\Omega \cap W$ eine offene Teilmenge des endlich dimensionalen Vektorraumes W ist. Somit ist $\deg(\mathrm{Id} - f, \Omega \cap W)$ gemäß vorigem Paragraphen erklärt.
(*ii*) Wir müssen auch an dieser Stelle die Wohldefiniertheit zeigen, d.h. die Unabhängigkeit vom konkret gewählten endlichdimensionalen Teilraum $W \subset V$. Dazu dient

Lemma 31. *Es sei $f : \overline{\Omega} \to V$ eine stetige Abbildung. Ferner seien $U, W \subset V$ zwei endlich dimensionale Teilräume mit $U \subset W$, $\Omega \cap U \neq \emptyset$ sowie $f(\overline{\Omega}) \subset U$. Dann gilt*

$$\deg(Id - f, \Omega \cap U) = \deg(Id - f, \Omega \cap W) .$$

Beweis. Man wähle eine Basis $v_1, \ldots, v_n \in U$ des Vektorraumes U und ergänze diese durch $v_{n+1}, \ldots, v_{n+p}$ zu einer Basis von W. Wir schreiben nun die Abbildung $\mathrm{Id} - f : \Omega \cap W \to U$ bezüglich der Basisvektoren $v_1, \ldots, v_{n+p}$ in der Form

$$\varphi(x_1, \ldots, x_{n+p}) = (x_1 - f_1(x_1, \ldots, x_{n+p}), \ldots, x_n - f_n(x_1, \ldots, x_{n+p}), x_{n+1}, \ldots, x_{n+p}) .$$

Durch ein Approximationsargument mittels Satz 13 können wir auch hier annehmen, dass φ zur Klasse C^2 gehört und Null ein regulärer Wert von φ ist. Die eingeschränkte Abbildung $\mathrm{Id} - f : \Omega \cap U \to U$ erscheint bezüglich dieser Basis in der Form

$$\psi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 - f_1(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0), \ldots, x_n - f(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0), 0, \ldots, 0) .$$

Offensichtlich gilt: $(x_1, \ldots, x_{n+p})$ ist Nullstelle von φ genau dann, wenn $x_{n+1} = \cdots = x_{n+p} = 0$ gilt und $(x_1, \ldots, x_n)$ eine Nullstelle von ψ ist. Weiterhin gilt für die Jacobi-Determinanten

$$J_\varphi(x_1, \ldots, x_{n+p}) = J_\psi(x_1, \ldots, x_n)$$

und folglich

$$\mathrm{ind}(\varphi, (x_1, \ldots, x_{n+p})) = \mathrm{ind}(\psi, (x_1, \ldots, x_n))$$

für alle Nullstellen $(x_1, \ldots, x_{n+p})$ von φ. Die Indexsummenformel liefert dann

$$\deg(\mathrm{Id} - f, \Omega \cap W) = \deg(\mathrm{Id} - f, \Omega \cap U) .$$

□

Bemerkung. Wir können nun die Wohldefiniertheit des Abbildungsgrades zeigen. Sei dazu $f : \overline{\Omega} \to V$ stetig. Ferner gebe es zwei endlich dimensionale Vektorräume $W_1, W_2 \subset V$ mit $f(\overline{\Omega}) \subset W_i$, $i = 1, 2$. Dann ist die Summe $W := W_1 + W_2$ ein endlich dimensionaler Vektorraum mit $W_i \subset W$, $i = 1, 2$. Obiges Lemma liefert dann

$$\deg(\mathrm{Id} - f, \Omega \cap W_1) = \deg(\mathrm{Id} - f, \Omega \cap W) = \deg(\mathrm{Id} - f, \Omega \cap W_2) .$$

also die Unabhängigkeit von der Wahl von W_1, W_2.

Auch an dieser Stelle sei wieder angemerkt, dass sich sämtliche wichtige Eigenschaften des Abbildungsgrades übertragen, insbesondere die Ganzzahligkeit, die Invarianz unter Homotopie sowie das Nullstellenlemma (wenn Abbildungsgrad ungleich 0 ist, dann hat Funktion eine Nullstelle). Insbesondere gilt ein Analogon zum 7ε-Lemma 4

Lemma 32. *Gegeben seien zwei stetige Abbildungen $f_1, f_2 : \overline{\Omega} \to V$ mit endlich dimensionalem Bild und*

$$||f_1(x) - f_2(x)|| < \varepsilon \quad \textit{für } x \in \overline{\Omega} \quad , \quad ||x - f_k(x)|| > 7\varepsilon \quad \textit{für } x \in \partial\Omega \ , \ k = 1, 2 \ .$$

Dann folgt

$$\deg(Id - f_1, \Omega) = \deg(Id - f_2, \Omega) \ .$$

2.3. **Der Abbildungsgrad für vollstetige Operatoren.** Wir wollen den Abbildungsgrad für Funktionen vom Typ $\mathrm{Id} - f : V \to V$ erklären, wobei wir f als vollstetig voraussetzen. Zur Erinnerung: $f : \overline{\Omega} \to V$ heißt vollstetig, wenn f stetig ist und die Bildmenge $f(\overline{\Omega})$ präkompakt in V ist. Wir benötigen zunächst

Lemma 33. *Es sei $f : \overline{\Omega} \to V$ vollstetig und es gelte*

$$(Id - f)(x) = x - f(x) \neq 0 \quad \textit{für alle } x \in \partial\Omega \ .$$

Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$||(Id - f)(x)|| = ||x - f(x)|| > \varepsilon \quad \textit{für alle } x \in \partial\Omega \ .$$

Beweis. Angenommen nicht. Dann existiert eine Folge $x_k \in \partial\Omega$ mit $||x_k - f(x_k)|| \to 0$ für $k \to \infty$. Da aber $f(\overline{\Omega})$ präkompakt ist, können wir nach Auswahl einer Teilfolge $f(x_k) \to y$ für $k \to \infty$ mit einem $y \in V$ annehmen. Die Dreiecksungleichung liefert

$$||x_k - y|| \leq ||x_k - f(x_k)|| + ||f(x_k) - y|| \to 0 \quad \text{für } k \to \infty \ .$$

Somit konvergiert auch x_k gegen y und es folgt $y \in \partial\Omega$. Aus der Stetigkeit von f folgt $y - f(y) = 0$, im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Weiter benötigen wir

Lemma 34 (Approximationslemma)**.**
Es sei $f : \overline{\Omega} \to V$ vollstetig. Dann existiert zu $\varepsilon > 0$ eine stetige Abbildung $f_\varepsilon : \overline{\Omega} \to V$ mit endlich dimensionalem Bild und

$$\sup_{x \in \Omega} ||f(x) - f_\varepsilon(x)|| < \varepsilon \ .$$

Beweis. Dies haben wir bereits in Aufgabe 5 vom 6. Übungsblatt gezeigt. □

Dies ermöglicht folgende

Definition. Es sei $\Omega \subset V$ offen und beschränkt und $f : \overline{\Omega} \to V$ eine vollstetige Abbildung mit

$$x - f(x) \neq 0 \quad \text{für } x \in \partial\Omega \ .$$

Weiter sei $f_k : \overline{\Omega} \to V$ eine Folge von Abbildungen mit endlich dimensionalem Bild, welche gleichmäßig gegen f konvergiert, d.h.

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in\Omega} ||f_k(x) - f(x)|| = 0 \ .$$

Dann erklären wir den Abbildungsgrad von $\mathrm{Id} - f$ durch

$$\deg(\mathrm{Id} - f, \Omega) := \lim_{k\to\infty} \deg(\mathrm{Id} - f_k, \Omega) \ .$$

Bemerkung. (i) Eine Folge f_k wie in der Definition gefordert existiert stets wegen der Lemmas 33 und 34. Der angegebene Grenzwert existiert und ist unabhängig von der gewählten Folge f_k. Dies folgert man aus Lemma 32.
(ii) Man kann zeigen, dass sich *nur* vollstetige Abbildungen f durch eine Folge f_k von von Abbildungen mit endlich dimensionalem Bild gleichmäßig approximieren lassen. Der Abbildungsgrad ist also nur für Abbildungen der Form "Identität - vollstetig" erklärt!

Zunächst zeigen wir

Satz 35 (Fixpunktlemma)**.** *Es sei $f : \overline{\Omega} \to V$ eine vollstetige Abbildung mit $x - f(x) \neq 0$ für $x \in \partial\Omega$. Weiterhin gelte $\deg(Id - f, \Omega) \neq 0$. Dann existiert eine Lösung $y \in \Omega$ von $y - f(y) = 0$, also ein Fixpunkt von f.*

Beweis. Es sei eine Folge $f_k : \overline{\Omega} \to V$ von Abbildungen mit endlich dimensionalem Bild gewählt, welche gleichmäßig gegen f konvergieren. Dann gilt $\deg(\mathrm{Id} - f_k, \Omega) = \deg(\mathrm{Id} - f, \Omega) \neq 0$ für alle $k \geq k_0$. Mit dem Nullstellenlemma 5 existieren dann $x_k \in \Omega$ mit $x_k - f_k(x_k) = 0$. Da nun f vollstetig ist, können wir nach Auswahl einer Teilfolge die Konvergenz $f(x_k) \to y$ für $k \to \infty$ annehmen, wobei $y \in V$ ist. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von f_k gegen f gilt

$$0 = \lim_{k\to\infty} ||f_k(x_k) - f(x_k)|| = \lim_{k\to\infty} ||x_k - f(x_k)|| \ .$$

Somit gilt die Konvergenz $x_k \to y$ für $k \to \infty$ und weiter $y \in \overline{\Omega}$. Aus der Stetigkeit von f folgt $f(x_k) \to f(y)$ und schließlich $f(y) = y$. □

Für den Abbildungsgrad im Banach-Raum gilt auch wieder die Invarianz unter Homotopie. Allerdings muss man "gleichmäßig stetige" Homotopien betrachten.

Satz 36 (Invarianz unter Homotopie).
Es sei $f_t(x) = f(x,t) : \overline{\Omega} \times [a,b] \to V$ *eine Familie von vollstetigen Abbildungen mit* $x - f_t(x) \neq 0$ *für alle* $x \in \partial\Omega$, $t \in [a,b]$. *Ferner hänge* $f_t(x)$ *gleichmäßig stetig vom Parameter* $t \in [a,b]$ *ab, d.h. zu* $\varepsilon > 0$ *existiert ein* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *mit*

$$|s-t| \leq \delta \;\Rightarrow\; ||f_s(x) - f_t(x)|| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } s,t \in [a,b]\,,\; x \in \overline{\Omega}\,.$$

Dann ist die Zuordnung $s \mapsto \deg(Id - f_s, \Omega)$ *für* $s \in [a,b]$ *konstant.*

Beweis. Der Beweis ist wortwörtlich gleich dem von Satz 6. □

Bemerkung. Die Homotopie durch Konvexkombination $f_t(x) := (1-t)f_0(x) + tf_1(x)$ mit vollstetigen f_0, f_1 ist gleichmäßig stetig, denn hier gilt

$$||f_t(x) - f_s(x)|| = |s-t|\,||f_1(x) - f_0(x)|| \leq C|s-t|$$

wobei $C := \sup_{x\in\Omega} ||f_1(x) - f_0(x)|| < +\infty$ gesetzt ist.

Wie im endlich dimensionalen erhält man daraus

Lemma 37 (Rouché).
Gegeben sei $\Omega \subset V$ *offen, beschränkt mit* $0 \in \Omega$. *Weiter sei eine vollstetige Abbildungen* $f : \overline{\Omega} \to V$ *gegeben mit*

$$||f(x)|| < ||x|| \quad \text{für } x \in \partial\Omega\,.$$

Dann folgt $\deg(Id - f, \Omega) = 1$.

Beweis. Betrachte die Homotopie $f_t(x) := tf(x)$ mit

$$||x - f_t(x)|| \geq ||x|| - t||f(x)|| > 0 \quad , \; x \in \partial\Omega\,,\; t \in [0,1]\,.$$

Die Homotopie-Invarianz liefert $\deg(\mathrm{Id} - f_1, \Omega) = \deg(\mathrm{Id} - f_0, \Omega) = \deg(\mathrm{Id}, \Omega) = 1$ wegen $0 \in \Omega$ □

Satz 38 (Verallgemeinerter Schauderscher Fixpunktsatz).
Es sei $\Omega \subset V$ *offen, beschränkt mit* $0 \in \Omega$. *Weiter sei* $f : \overline{\Omega} \to V$ *vollstetig mit*

$$||f(x)|| < ||x|| \quad \text{für alle } x \in \partial\Omega\,.$$

Dann besitzt f *einen Fixpunkt in* Ω.

Beweis. Folgt aus Lemma 37 zusammen mit dem Fixpunktlemma 35. □

Bemerkung. (*i*) Die Voraussetzung $0 \in \Omega$ wird benötigt. Betrachte beispielsweise $V = \mathbb{R}^n$, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \;:\; 1 < |x| < 2\}$ sowie $f(x) := \frac{1}{2}x$. Dann besitzt f keinen Fixpunkt in Ω.
(*ii*) Im Gegensatz zum klassischen Schauderschen Fixpunktsatz muss das Gebiet Ω nicht konvex sein!

Wir zeigen noch

Satz 39 (Leray-Schauderscher Fundamentalsatz)**.**
Auf der Kugel $B_R = \{x \in V \ : \ ||x|| \leq R\}$ *sei eine Familie* $f_t(x) : B_R \times [0,1] \to V$ *von Operatoren gegeben mit*

a) *Für festes* $t \in [0,1]$ *ist* $f_t : B_R \to V$ *vollstetig. Weiterhin gelte die Bedingung*
$$x - f_t(x) \neq 0 \quad \textit{für alle } x \in \partial B_R \ .$$
b) *Die Familie* f_t *hänge gleichmäßig stetig vom Parameter* $t \in [0,1]$ *ab.*
c) *Es gelte* $f_0(x) = 0$ *für alle* $x \in B_R$*.*

Dann existiert für alle $t \in [0,1]$ *ein Fixpunkt* $x_t \in B_R$ *von* f_t*.*

Beweis. Wegen Voraussetzung a) sind die Abbildungsgrade $\deg(\mathrm{Id}-f_t, B_R)$ für alle $t \in [0,1]$ definiert. Wegen Voraussetzung c) ist $\deg(\mathrm{Id} - f_0, B_R) = \deg(\mathrm{Id}, B_R) = 1$. Die Homotopie-Invarianz liefert dann $\deg(f_t, B_R) = 1$ für alle $t \in [0,1]$ und das Fixpunktlemma liefert für alle $t \in [0,1]$ einen Fixpunkt von f_t. □

Zum Abschluss bemerken wir, dass sich die Sätze von Jordan-Brouwer aus Abschnitt 1.6 auch auf die Situation im Banach-Raum verallgemeinern lassen. Dazu muss man zunächst den Produktsatz 19 für den Abildungsgrad im Banach-Raum geeignet verallgemeinern (vergleiche hierzu [G], Kapitel III), wobei an dieser Stelle noch einiges zu tun ist! Inbesondere gilt wiederum

Satz 40 (Jordan-Brouwer)**.**
Gegeben seien zwei beschränkte, abgeschlossene Teilmengen $K, K_* \subset V$ *eines Banach-Raumes* V*. Für ein vollstetiges* $f : K \to V$ *sei weiter* $Id - f : K \to K_*$ *ein Homöomorphismus (stetig, bijektiv mit stetiger Inverser). Dann stimmt die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von* $V\backslash K$ *sowie* $V\backslash K_*$ *überein.*

Bemerkung. Es reicht an dieser Stelle nicht aus, nur zu fordern, dass K und K_* zueinander homöomorph sind. Der Homöomorphismus muss vom Typ "Identität - vollstetig" sein!

Daraus leitet man nun, ebenfalls wie im Abschnitt 1.7 den Satz von der Gebietsinvarianz her.

Satz 41 (Gebietsinvarianz)**.**
Sei $\Omega \subset V$ *ein Gebiet (offen und zusammenhängend). Weiter sei* $f : \Omega \to V$ *eine vollstetige Abbildung, sodass* $Id - f : \Omega \to V$ *lokal injektiv sei. Dann ist auch die Bildmenge*
$$(Id - f)(\Omega) := \{x - f(x) \ : \ x \in \Omega\}$$
wiederum ein Gebiet, insbesondere offen.

Mit Hilfe dieses Satzes können wir schließlich den allgemeinen Fredholmschen Alternativsatz beweisen, den wir in Teil 2 Satz 27 bereits formuliert hatten. Zur Erinnerung: Ein linearer Operator $K : V \to V$ heißt vollstetig, wenn das Bild jeder beschränkten Menge präkompakt ist oder äquivalent: K ist vollstetig auf jeder beschränkten Teilmenge von V.

Satz 42 (Fredholmscher Alternativsatz im Banach-Raum)**.**
Es sei $K : V \to V$ ein **linearer** *vollstetiger Operator und $T(x) := (Id - K)(x) = x - K(x)$ der assoziierte Fredholm-Operator. Dann gilt:*
Wenn T injektiv ist, so ist T auch surjektiv.

Beweis. Es sei $B = \{x \in V \,:\, ||x|| < 1\}$ die offene Einheitskugel in V. Wegen Satz 41 ist dann auch die Bildmenge $T(B) = (\mathrm{Id} - K)(B)$ eine offene Teilmenge von V, welche die Null enthält. Somit existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(0) = \{x \in V \,:\, ||x|| < \varepsilon\} \subset T(B)$. Aus der Linearität folgt dann $T(V) = V$, also ist T auch surjektiv. □

Bemerkung. K muss nicht wirklich linear sein, es genügt, dass K homogen ist, d.h. $K(tx) = tK(x)$ für alle $x \in V$, $t > 0$.