Übungsband Analysis 1

Prof. Dr. Friedmar Schulz

Sommersemester 2002

Vorwort

Der erste Teil des vorliegenden Bandes enthält Übungsaufgaben zur Analysis 1. Die Gliederung entspricht dem Lehrbuch. Im zweiten Teil finden sich Lösungen zu einigen wenigen ausgesuchten Aufgaben sowie Lösungshinweise zu einigen weiteren. Das Lösen von Übungsaufgaben ist ein wesentlicher Bestandteil des Grundstudiums, der Leser sollte deshalb möglichst viele Aufgaben selbständig lösen. Dabei wünsche ich viel Spaß. Außerdem bitte ich, mir durch Zusendung von Verbesserungsvorschlägen, Korrekturen und von ganz besonders schönen Lösungen bei der Verbesserung des Bandes zu helfen.

Ulm, Juni 2002 Friedmar Schulz

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Aufgaben

Kapitel 0

Mengen, Relationen und Abbildungen

0.1 Sei A eine Teilmenge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Man formuliere die Negation zu folgenden Aussagen:

(i) Jedes Element $a \in A$ ist eine gerade Zahl.

(ii) Jedes Element $a \in A$ ist durch 4 oder durch 5 teilbar.

(iii) Jedes Element $a \in A$ ist durch 4 und durch 5 teilbar.

(iv) Es gibt ein Element $a \in A$, das durch 5 teilbar ist.

0.2 Die Aussage „Jede natürliche Zahl n von der Form $n = 4 \cdot k$, $k \in \mathbb{N}$, ist gerade“ schreibe man folgendermaßen

(i) Falls n ... , dann ist n ... .

(ii) Höchstens dann, wenn n ... , dann ist n ... .

(iii) n ... ist notwendig dafür, daß n ... .

(iv) n ... ist hinreichend dafür, daß n ... .

0.3 X, Y seien Mengen. Man beweise:

(i) $$X \cup Y = Y \Leftrightarrow X \subset Y .$$

(ii) $$X \cap Y = Y \Leftrightarrow Y \subset X .$$

0.4 Für Mengen X, Y, Z beweise man die Distributivgesetze und deMorganschen Regeln:

(i) $$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z) .$$

(ii) $$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z) .$$

(iii) $$Z \setminus (X \cup Y) = (Z \setminus X) \cap (Z \setminus Y) .$$

(iv) $$Z \setminus (X \cap Y) = (Z \setminus X) \cup (Z \setminus Y) .$$

0.5 Für Mengen X, Y, Z beweise man die Formeln

(i) $$X \setminus (X \setminus Y) = X \cap Y .$$

(ii) $$(X \cup Y) \setminus Z = (X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z) .$$

0.6 Für jedes $n \in \mathbb{N}$ bezeichne X_n eine Menge. Gilt dann für die Mengen

$$X := \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} X_k \right) , \quad Y := \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} X_k \right)$$

eine Beziehung der Form $X \subset Y$, $Y \subset X$ oder $X = Y$? Dabei ist

$\bigcup_{k=n}^{\infty} X_k := \{x \mid x \in X_k \text{ für ein } k \geq n\} = \{x \mid \text{ es gibt ein } k \geq n \text{ mit } x \in X_k\}$,

$\bigcap_{k=n}^{\infty} X_k := \{x \mid x \in X_k \text{ für alle } k \geq n\} = \{x \mid \text{ für alle } k \geq n \text{ gilt } x \in X_k\}$.

0.7 Es seien X_n, Y_m für $n, m \in \mathbb{N}$ Mengen. Man zeige:

(i) $$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \right) \setminus \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} Y_m \right) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n \setminus Y_m) \right) .$$

(ii) $$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \right) \setminus \left(\bigcap_{m=1}^{\infty} Y_m \right) = \bigcup_{m,n=1}^{\infty} (X_n \setminus Y_m) .$$

0.8 Es seien X_{nm} für $n, m \in \mathbb{N}$ Mengen. Man zeige:

(i) $$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} X_{nm} \right) = \bigcup_{m_1, m_2, m_3, \ldots} \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} X_{n\,m_n} \right) .$$

(ii) $$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{m=1}^{\infty} X_{nm} \right) = \bigcap_{m_1, m_2, m_3, \ldots} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_{n\,m_n} \right) .$$

0.9

(i) Für Mengen X, Y, Z beweise man:

$$(X \cap Y) \times Z = (X \times Z) \cap (Y \times Z) .$$

Kapitel 1

Grundlagen der Analysis

1.1 Man beweise durch vollständige Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

(i)
$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad .$$

(ii)
$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 \quad .$$

(iii)
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \,.$$

(iv)
$$1 - \frac{1}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \,.$$

(v)
$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1 \quad .$$

(vi)
$$n < 2^n \leq (n+1)! \quad .$$

1.2

(i) Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$n^2 < 2^n \ ?$$

Man beweise die Behauptung durch vollständige Induktion.

(ii) Man zeige: Für alle $p \in \mathbb{N}$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $n^p < 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$.

1.3 Man stelle $\sum\limits_{k=1}^{n} k^4$ durch einen rationalen Ausdruck in n dar.

1.4 Man suche den Fehler bei folgender Schlußweise: Behauptung: Je endlich viele Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sind einander gleich. Beweis durch vollständige Induktion: Induktionsanfang: $n = 1$. Es gilt $a_1 = a_1$, da jede Zahl sich selbst gleich ist. Nun sei die Behauptung für je n Zahlen richtig. Dann zeigen wir, daß sie auch für $n+1$ Zahlen richtig ist. Nach Induktionvoraussetzung gilt nämlich $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ und $a_2 = \ldots = a_n = a_{n+1}$. Daraus folgt $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n+1}$, w.z.b.w.

1.5 Sei $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$ eine bijektive Abbildung. Man zeige, daß dann $n = m$ folgt.

1.6 Seien X und Y endliche Mengen. Man zeige, daß dann

(i) $$|X| + |Y| = |X \cup Y| - |X \cap Y| \ ,$$

(ii) $$|X \triangle Y| = |X| + |Y| - 2|X \cap Y| \ ,$$

dabei ist

$$X \triangle Y := (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$$

die symmetrische Differenz von X und Y.

1.7 Sei M eine Menge mit n Elementen.

(i) Man bestimme den Anzahl der Teilmengen von M.

(ii) Man zeige, daß die Anzahl der bijektiven Abbildungen $f : M \to M$ gleich $n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ ist.

(iii) Für $0 \leq k \leq n$ ist die Anzahl der verschiedenen k-elementigen Teilmengen von M gleich

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \ ,$$

dabei setzen wir $0! := 1$.

(iv) Man zeige und interpretiere die Formel

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \ .$$

Kapitel 2

Das System der reellen Zahlen

2.1 Man zeige, daß $\sqrt{10}$ und $\sqrt{15}$ irrational sind.

2.2 Sind a, b, c rationale Zahlen, die der Gleichung

$$a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{5} \;=\; 0$$

genügen, so gilt $a = b = c = 0$.

2.3 Sei a eine irrationale Zahl. Dann gibt es zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine ganze Zahl $m \in \mathbb{N}$, so daß die Ungleichung

$$\left| a - \frac{m}{n} \right| \;<\; \frac{1}{2n}$$

besteht. Für welche reellen Zahlen a gilt diese Behauptung?

2.4 Für die reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ und die natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ bestehe die Ungleichung $0 < a < \frac{1}{N}$. Dann gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$, so daß

$$\left| a - \frac{1}{n} \right| \;<\; \frac{1}{n^2}$$

gilt.

2.5 Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geq 2)$ reelle Zahlen aus dem Intervall $[a, b]$, $a < b$.

(i) Man zeige: Es gibt zwei ganze Zahlen $k, \ell \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $k \neq \ell$ und

$$|a_k - a_\ell| \;\leq\; \lambda(n) \;:=\; \frac{b - a}{n - 1} \; .$$

(ii) Man zeige, daß die Aussage von Teil (i) falsch wird, wenn $\lambda(n)$ durch eine positive Zahl $\lambda'(n) < \lambda(n)$ ersetzt wird.

2.6 Es sei a irrational, $a > 0$. Man zeige, daß es zu jedem $N \in \mathbb{N}$ eine rationale Zahl $\frac{m}{n}$ mit $1 \leq n \leq N$ gibt, so daß

$$\left| a - \frac{m}{n} \right| < \frac{1}{n(N+1)} .$$

2.7 Es seien $a_1, \ldots . a_n$ reelle Zahlen und $[a, b]$, $a < b$, ein vorgegebenes Intervall. Dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$|\xi - a_k| \geq \frac{b-a}{2(n+1)} \quad \text{für } k = 1, \ldots, n .$$

2.8 Sei a irrational. Dann gibt es eine Folge von rationalen Zahlen $\left(\frac{p_k}{q_k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $q_k \to +\infty$ für $k \to \infty$ und

$$\left| a - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k^2} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} .$$

2.9 Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Man untersuche, ob die Folge $(\sqrt[n]{a})_{n \in \mathbb{N}}$ monoton ist. Dann vergleiche man $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a}$ und $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[2n]{a}$. So zeige man: $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

2.10 Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen mit $a_n \to a > 0$ für $n \to \infty$. Man zeige, daß dann

$$\sqrt[n]{a_n} \to 1 \quad \text{für } n \to \infty .$$

2.11 Es seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Folgen nicht-negativer reeller Zahlen. Sei

$$A_n := \frac{a_n + b_n}{2} , \quad G_n := \sqrt{a_n b_n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N} .$$

Man zeige: Ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so auch $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Gilt auch die Umkehrung?

2.12 Man zeige durch vollständige Induktion nach m: Ist $n = 2^m$, $m \in \mathbb{N}$, und sind $a_1, \ldots, a_n \geq 0$, so gilt die Ungleichung

$$G_n := \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \leq A_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

Kapitel 3

Unendliche Reihen

3.1 Man berechne den Wert der folgenden Reihen:

(i)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \quad .$$

(ii)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \quad .$$

(iii)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} \quad .$$

(iv)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \quad .$$

(v)
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} \quad .$$

(vi)
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{3}\right)^k \quad .$$

3.2 Für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ zeige man:

(i)
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(a+k)(a+k+1)} = \frac{1}{a} \quad .$$

(ii)
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(a+k)(a+k+1)(a+k+2)} = \frac{1}{2a(a+1)} \quad .$$

(iii)
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(n+k+1)!} = \frac{1}{n \cdot n!} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \, .$$

3.3 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Dann gibt es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$\left|a_{n_k} - a_{n_{k+1}}\right| < \frac{1}{10^k}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Sei $b_k := a_{n_k}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(b_{k+1} - b_k)$, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b_1 + \sum_{k=1}^{\infty}(b_{k+1} - b_k) .$$

3.4

(i) Eine Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent, wenn $\big(n^2(a_{n+1} - a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

(ii) Man konstruiere eine divergente, beschränkte Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, für die $(\sqrt[3]{n}(a_{n+1} - a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

3.5 Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(i)
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) .$$

(ii)
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} .$$

(iii)
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{2k+1} .$$

(iv)
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k^2 - 1}{k^2 - 3k + 4} .$$

3.6 Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei

$$a_n := \sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{k} .$$

(i) Man zeige: Dann ist $a_{n+1} < a_n$ und $\frac{1}{2} < a_n < 1$ für alle $n \geq 2$.

(ii) Hieraus folgere man, daß

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = +\infty .$$

(iii) Man gebe ein $N \in \mathbb{N}$ an, so daß $\sum\limits_{k=1}^{N}\frac{1}{k} \geq 10^3$ ist.

Kapitel 4

Stetige Funktionen einer Variablen

4.1 Man zeige, daß die Funktion $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$, $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ bijektiv ist, und bestimme ihre Umkehrabbildung.

4.2 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine für alle $x \in \mathbb{R}$ definierte monotone Funktion, welche der Cauchyschen Funktionalgleichung

$$f(x + x') = f(x) + f(x') \quad \text{für alle } x, x' \in \mathbb{R}$$

genügt. Man zeige, daß es eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ gibt, so daß

$$f(x) = cx \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} .$$

4.3 Man bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) > 0$ für $x > 0$ und

$$f(x + x') = f(x) + f(x') \quad \text{für alle } x, x' \in \mathbb{R} .$$

4.4 Für $x \geq 0$ sei

$$f(x) := \sqrt{x} - x .$$

Man bestimme ein $x^+ \geq 0$, so daß

$$f(x) \leq f(x^+) \quad \text{für alle } x \geq 0 .$$

4.5 Man beweise, daß das Polynom

$$P(x) := x^n + ax + b$$

für gerades n höchstens zwei und für ungerades n höchstens drei verschiedene (reelle) Nullstellen besitzt.

4.6 Man berechne die Partialbruchzerlegungen von

(i)
$$\frac{x^6+1}{x^4-x^2-2x+2} \; .$$

(ii)
$$\frac{1}{x^4-2x^2+1} \; .$$

(iii)
$$\frac{1}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1} \; .$$

4.7 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Dann heißt die Menge

$$\Omega \;=\; \Omega(f) \;:=\; \{\omega \in \mathbb{R} \mid \omega \;\text{ ist Periode von }\; f\}$$

der **Periodenmodul** von f . Man zeige:

(i)
$$\omega, \omega' \in \Omega \;\Rightarrow\; \omega + \omega' \in \Omega \, ,$$
$$\omega \in \Omega \, , \; k \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow\; k\omega \in \Omega \, .$$

(ii) Ist 0 ein Häufungspunkt von Ω , so ist jede reelle Zahl Häufungspunkt von Ω .

(ii) Sei 0 ein Häufungspunkt von Ω , und sei f stetig. Dann ist f eine Konstante.

(iv) Sei $\Omega \neq \emptyset$, und sei 0 kein Häufungspunkt von Ω . Dann ist

$$\omega_0 \;:=\; \inf\{\omega \in \Omega \mid \omega > 0\} \in \Omega \, ,$$

und es gilt

$$\Omega \;=\; \{k\omega_0 \mid k \in \mathbb{Z}\} \, .$$

4.8

(i) Man zeige: Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\max\{a, b\} \;=\; \frac{1}{2}\,(a + b + |a - b|) \; .$$

(ii) Man zeige: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ ist stetig.

(iii) Seien $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Man zeige: Die Funktion $\max\{f_1, \ldots, f_n\} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\max\{f_1, \ldots, f_n\}(x) = \max\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$ ist stetig.

(iv) Ist die Funktion $\left(\sup\limits_{k \in \mathbb{N}} f_k\right)(x) \;=\; \sup\{f_k(x) \mid k \in \mathbb{N}\}$ stetig, wenn $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N}$ stetige Funktionen sind?

Kapitel 5

Differentialrechnung einer Variablen

5.1 Unter Benutzung der Reihendarstellungen der Exponentialfunktion, von Cosinus und Sinus zeige man:

(i)
$$\lim_{x \to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1 .$$

(ii)
$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0 .$$

(iii)
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1 .$$

(iv) Unter Benutzung von (i), (ii), (iii) bestimme man die Ableitungen der Funktionen $\exp x$, $\cos x$, $\sin x$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

5.2 Sei $f(x) := x^2 + 7x + 2$. Man berechne $f'(a)$ für alle $a \in \mathbb{R}$ nur unter Benutzung der Definition der Ableitung.

5.3 Sei $f(x) = x^3$ für $x \in \mathbb{R}$.

(i) Man bestimme die Gleichung der Tangente im Punkt $(a, f(a))$ für beliebiges $a \in \mathbb{R}$.

(ii) Auf dem Graphen von f finde man den Punkt $(a, f(a))$, in dem die Tangente parallel zu der Sekante ist, die die Punkte $(-1, -1)$ und $(2, 8)$ verbindet.

5.4 Es sei
$$f(x) := \begin{cases} \max\limits_{0 \le t \le x} |t^2 - t - 2| & \text{für } x \ge 0 \\ \max\limits_{x \le t \le 0} |t^2 - t - 2| & \text{für } x < 0. \end{cases}$$
Man zeichne den Verlauf von f und berechne die Ableitung von f , sofern diese existiert.

5.5 Sei $f(x) := \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ für $x \neq 0$. Ist f in 0 differenzierbar? Man untersuche die Ableitung f' ggf. auf Stetigkeit.

5.6 Sei $b > 1$. Man beweise die folgenden Aussagen:

(i) Die Folge $(a_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$a_n^+ \; := \; \frac{b^{\frac{1}{2^n}} - 1}{\frac{1}{2^n}}$$

wächst streng monoton.

(ii) Die Folge $(a_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$a_n^- \; := \; \frac{b^{-\frac{1}{2^n}} - 1}{-\frac{1}{2^n}}$$

fällt streng monoton.

(iii) Die Folgen $(a_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren in $\mathbb{R}$, und es gilt die Gleichheit der Grenzwerte:

$$\lim_{n\to\infty} a_n^+ \; = \; \lim_{n\to\infty} a_n^- \; .$$

(iv) Man folgere hieraus, daß der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{b^h - 1}{h}$$

existiert.

5.7 Sei $I = (0,1)$, und sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar in I . Sei außerdem $|f'(x)| \leq M$ für alle $x \in I$. Man zeige, daß f dann gleichmäßig stetig in I ist, und es existieren $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

5.8 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) \; := \; \begin{cases} 0 & \text{für } -\infty < x \leq 0 \\ x^2 & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ \sqrt{1-(x-1)^2} & \text{für } 1 < x \leq +\infty. \end{cases}$$

Man gebe an, in welchen Punkten f differenzierbar ist.

Kapitel 6

Die elementaren transzendenten Funktionen

6.1 Man löse die folgenden Anfangswertprobleme durch Potenzreihenansatz:

(i) $$y'' + xy = 0\,, \qquad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 0\,.$$

(ii) $$y'' + y' - xy^2 = 0\,, \quad y(0) = 2\,, \quad y'(0) = 1\,.$$

(iii) $$y'' + e^x y = 0\,, \qquad y(0) = 2\,, \quad y'(0) = 1\,.$$

6.2

(i) Man verifiziere: Die Potenzreihe

$$y(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{k!\,(k+1)!\,2^{2k+1}}$$

genügt der Differentialgleichung

(∗) $$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - 1)\,y = 0\,.$$

(ii) Man gewinne umgekehrt eine Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung (∗) durch Potenzreihenansatz $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, d.h., man gehe mit diesem Ansatz in die Differentialgleichung ein und gewinne durch Koeffizientenvergleich eine Rekursionsformel.

6.3

(i) Man bestimme die Potenzreihenentwicklungen von $\cosh x$ und $\sinh x$ um 0 .

(ii) Man löse die Differentialgleichung $y'' = y$ durch Potenzreihenansatz und bestimme die Lösungen zu den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 1\,,\ y'(0) = 0 \quad \text{und} \quad y(0) = 0\,,\ y'(0) = 1\,.$$

6.4

(i) Man nehme an, daß die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

in eine Potenzreihe um 0 entwickelbar ist und leite eine Rekursionsformel für ihre Koeffizienten her.

(ii) Mit Hilfe von (i) leite man eine Potenzreihenentwicklung für die Funktion

$$f(x) := x \coth x = x \, \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

in einer Umgebung von 0 her.

6.5 Für die hyperbolischen Funktionen $\cosh x$ und $\sinh x$ stelle man Additionstheoreme auf und untersuche, wo sich diese Funktionen umkehren lassen. Berechne diese Umkehrfunktionen.

6.6 Für welche $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ konvergiert

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{\mu} \log^{\nu} k} \ ?$$

6.7 Für alle $x \in \mathbb{R}$ zeige man die Identitäten

(i) $$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \ ,$$

(ii) $$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \ ,$$

und beweise

(iii) $$\cos \frac{\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

6.8 Man beweise die Formeln

(i) $$\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x \ , \quad x \in \mathbb{R} \ .$$

(ii) $$\cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{2 \cdot 2\pi}{n} + \ldots + \cos \frac{(n-1)2\pi}{n} = -1 \ , \quad n \in \mathbb{N} \ , \quad n \geq 2 \ .$$

Kapitel 7

Integralrechnung

7.1 Man bestimme Stammfunktionen zu

(i) $$x^2 \cos x \quad .$$

(ii) $$x^n\, e^{ax} \quad , \quad a \in \mathbb{R} \quad , \quad n \in \mathbb{N} \quad .$$

(iii) $$e^{-x} \cos(5x) \quad .$$

(iv) $$x^n \log x \quad , \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad .$$

(v) $$\arctan x \quad .$$

(vi) $$\frac{1}{x \log^{\mu} x} \quad , \quad \mu \in \mathbb{R} \quad .$$

(vii) $$\frac{1}{x \log x \cdot \log(\log x)} \quad .$$

(viii) $$x^2 \sqrt{a^2 - x^2} \quad , \quad a > 0 \quad .$$

(ix) $$\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \quad .$$

(x) $$\frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} \quad .$$

(xi) $$\frac{x \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} \quad .$$

(xii) $$\frac{x}{x^4 + 4} \quad .$$

(xiii) $$\frac{2x^3 - 3x}{x^6 + 1} \quad .$$

(xiv) $$\frac{1}{\cos^2 x - \cos x - 6} \; .$$

(xv) $$\frac{x}{\sin^2 x} \; .$$

7.2 Man integriere die in Aufgabe 4.6 angegebenen rationalen Funktionen.

7.3 Sei $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ein Polynom vom Grad n, und sei $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(i) Man zeige, daß es ein Polynom $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ vom Grad n gibt mit

$$\int P(x) e^{\mu x}\, dx \; = \; Q(x)\, e^{\mu x} \qquad \text{für alle } \; x \in \mathbb{R} \; .$$

(ii) Man bestimme eine Rekursionsformel zur Berechnung der b_k aus den a_k.

(iii) Hieraus berechne man das Integral

$$\int (13x^4 + 5x - 3)\, e^{2x}\, dx \; .$$

Kapitel 8

Das Riemannsche Integral

8.1 Sei $I := [0, 1 + a] \subset \mathbb{R}$, $a > 0$. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} ax & \text{für } 0 \le x \le 1 \\ a - (x-1) & \text{für } 1 \le x \le a+1. \end{cases}$$

Für eine geeignete Folge von Partitionen $(\pi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von I berechne man $s(f)$ und $S(f)$. (Elementargeometrisch: $\int\limits_I f(x)dx = \dfrac{a(a+1)}{2}$)

8.2 Man berechne das Integral $\int_a^b \cos x \, dx$, indem man das Intervall $[a, b]$, $a < b$, in n gleiche Teile einteilt, und dann zur Grenze übergeht.

8.3 Sei $0 < a < b$, und sei $\mu \in \mathbb{R}$. Man berechne das Integral $\int_a^b x^\mu \, dx$, indem man das Intervall $[a, b]$ in geometrischer Progression in n Teile einteilt, und dann zur Grenze übergeht.

8.4 Man berechne das Integral $\int_a^b x^p \, dx$, indem man das Intervall $[a, b]$, $a < b$, in n gleiche Teile einteilt, und dann zur Grenze übergeht. Man behandle wenigstens die Fälle $p = 3, 4$.

8.5 Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(0) := 0$ und

$$f(x) := \frac{1}{n+2} \quad \text{für alle } \frac{1}{n+1} < x \le \frac{1}{n}, \; n \in \mathbb{N}.$$

(i) Man zeige mit Hilfe von geeigneten Ober- und Untersummen, daß f Riemann-integrierbar ist.

(ii) Mit Hilfe der Formel

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(a+k)(a+k+1)(a+k+2)} = \frac{1}{2a(a+1)}$$

für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ berechne man $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{4}$.

8.6 Für alle $n \in \mathbb{N}$ berechne man das Integral $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{x}\,dx$ näherungsweise mit einem Fehler ≤ 1 und zeige, daß $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = +\infty$.

8.7 Sei $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig und monoton, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig. Für eine Partition $\pi : 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ von $[0,1]$ sei

$$\begin{aligned} S(\pi, \alpha, f) &:= \sum_{k=1}^{n} M_k \left(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})\right) \ , \\ s(\pi, \alpha, f) &:= \sum_{k=1}^{n} m_k \left(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})\right) \ , \end{aligned}$$

dabei ist

$$M_k := \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) \quad , \quad m_k := \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) \ .$$

Man zeige: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es eine Partition π von $[0,1]$, so daß

$$|S(\pi, \alpha, \varphi) - s(\pi, \alpha, \varphi)| < \varepsilon \ .$$

Zusatzfrage: Wie muß man das „Riemann-Stieltjes-Integral" $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,d\alpha(x)$ erklären, damit für $\alpha(x) = x$ das Riemann-Integral $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ herauskommt?

8.8 Man untersuche, ob die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} \frac{q-1}{q} & \text{für } x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}, \text{ teilerfremd} \\ 1 & \text{für } x \text{ irrational} \end{cases}$$

über das Intervall $[0,1]$ Riemann-integrierbar ist.

Anhang A

Mengensysteme, Relationen und Partitionen

A.1

(i) A, B seien folgende Teilmengen der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$:

$$A := \{x \in \mathbb{N} \mid x = 1\} , \quad B := \{x \in \mathbb{N} \mid x = 1, 2 \text{ oder } 3\} .$$

Man gebe sämtliche Elemente der Potenzmengen $\mathcal{P}(B)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ an.

(ii) Für zwei Mengen X, Y beweise man:

$$X \subset Y \Leftrightarrow \mathcal{P}(X) \subset \mathcal{P}(Y) .$$

A.2 Sei f eine Abbildung von X in Y , und sei $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie von Teilmengen von X . Dann gilt:

(i) $$f\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda) \ .$$

(ii) $$f\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda) \ .$$

A.3 Sei f eine Abbildung von X in Y , und sei $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie von Teilmengen von X . Dann gilt:

(i) $$f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A'_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(A'_\lambda) \ .$$

(ii) $$f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A'_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(A'_\lambda) \ .$$

A.4 Man prüfe nach, welche der folgenden Relationen R in $\mathbb{Z}$ reflexiv, transitiv oder symmetrisch sind $(k, \ell \in \mathbb{Z})$: $kR\ell$ genau dann, wenn

(i) $$k \leq \ell \ ,$$

(ii) $$k - \ell \ \text{ ist ein Vielfaches von } 3 \ ,$$

(iii) $$k \cdot \ell > 0 \ .$$

Man gebe gegebenenfalls die Äquivalenzklassen an.

A.5 $p \neq 1$ sei eine feste natürliche Zahl. Für $r \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ sei

$$A_r := \{n \in \mathbb{Z} \mid \text{ es gibt ein } q \in Z\mathbb{Z} \text{ mit } n = p \cdot q + r\} \ .$$

(i) Man zeige:

$$\mathbb{Z}_p := \{A_r \mid r = 0, 1, \ldots, p-1\}$$

ist eine Partition von $\mathbb{Z}$.

(ii) Ist folgende Relation R auf $\mathbb{Z}$ eine Äquivalenzrelation:

$$nRm :\Leftrightarrow n - m \ \text{ ist ein Vielfaches von } p \ ?$$

Welche Partition liefert R gegebenenfalls?

(iii) Man prüfe, ob folgende Relation R auf $\mathbb{Z}$ eine Äquivalenzrelation ist:

$$nRm :\Leftrightarrow n + m \ \text{ ist ein Vielfaches von } p \ .$$

A.6 Es sei

$$R := \{((m,n),(k,\ell)) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{N}) \mid m\ell = nk\} \ .$$

Man zeige, daß R eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ ist.
Die Menge $\boldsymbol{Q}$ der Äquivalenzklassen nennt man die Menge der rationalen Zahlen. Statt $[(m,n)]$ schreibt man auch $\frac{m}{n}$.

A.7 X, Y seien Mengen mit $X \subset Y$. Man beweise: Durch

$$A \sim B :\Leftrightarrow A \cap X = B \cap X \ , \quad A, B \in \mathcal{P}(Y) \ ,$$

wird auf $\mathcal{P}(Y)$ eine Äquivalenzrelation gegeben.

Anhang C

Elementare komplexe Analysis

C.1 Man bestimme den Real- und Imaginärteil der Zahlen

(i) $$z^3 \ .$$

(ii) $$\overline{z}^{-1} \ \text{für} \ \overline{z} \neq 0 \ .$$

(iii) $$(1+i)^n + (1-i)^n \ , \ n \in \mathbb{N} \ .$$

(iv) $$\frac{z+1}{z-1} \ , \ z \neq 1 \ .$$

C.2 Man beweise für zwei komplexe Zahlen z, z' die Gleichung

$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 \ = \ 2|z|^2 + 2|z'|^2$$

und gebe eine geometrische Interpretation.

C.3 Sei $d(z,z') := \frac{|z-z'|}{1+|z-z'|}$ für $z, z' \in \mathbb{C}$. Man zeige: d definiert eine Metrik auf $\mathbb{C}$. Man gebe die Kreisscheiben

$$K_r(a) \ := \ \{z \in \mathbb{C} \mid d(z,a) < r\}$$

für $a \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ an.

C.4 Man betrachte die Menge aller Punkte $z \in \mathbb{C}$, so daß

(i) $$\left|\frac{1}{z}\right| > 1 \ ,$$

(ii) $$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 1 \ ,$$

(iii) $$\operatorname{Re}(z^2) \le 3 \ ,$$

(iv) $$\operatorname{Im}(z^2) < 2 \ ,$$

(v) $$|z-a| + |z-b| \le 1 \ , \quad a, b \in \mathbb{C} \ ,$$

(vi) $$\left|\frac{z-1}{z+1}\right| < 1 \ ,$$

(vii) $$\left|\frac{z-i}{z+i}\right| < 1 \ ,$$

(viii) $$\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = c \ , \quad a, b \in \mathbb{C} \ , \ 0 < c < 1 \ ,$$

(vix) $$\left|\frac{z-a}{z \cdot \overline{a} - 1}\right| < 1 \qquad \text{für } |a| < 1 \ ,$$

(x) $$|z| = 4\,|z-1| \ ,$$

(xi) $$|z| = 1 + |z-2| \ .$$

Man schreibe diese Gleichungen oder Ungleichungen in reellen Koordinaten und zeichne die Mengen.

C.5 Seien

$$A := \{z \in \mathbb{C} \mid |z|^2 + \operatorname{Im} z < 1\} \ ,$$

$$B := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z - 3 \operatorname{Im} z < -6\} \ .$$

Man bestimme $\operatorname{dist}(A, B)$.

C.6 Seien $a_{k\ell} \in \mathbb{C}$ mit $a_{k\ell} = \overline{a_{\ell k}}$, $k, \ell = 1, 2$. Dann gilt

$$\sum_{k,\ell=1}^{n} a_{k\ell} z_k \overline{z}_\ell \ \ge \ 0$$

genau dann, wenn $a_{11}, a_{22} \ge 0$ und $a_{11}a_{22} - |a_{12}|^2 \ge 0$.

C.7 Für $a_1, \ldots, a_4, b_1, \ldots, b_4 \in \mathbb{R}$ gilt die Identität

$$\left(a_1^2 + \ldots + a_4^2\right)\left(b_1^2 + \ldots + b_4^2\right) = c_1^2 + \ldots + c_4^2$$

mit

$$\begin{aligned}
c_1 &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 \ , \\
c_2 &= a_1b_2 - a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3 \ , \\
c_3 &= a_1b_3 - a_2b_4 - a_3b_1 + a_4b_2 \ , \\
c_4 &= a_1b_4 + a_2b_3 - a_3b_2 - a_4b_1 \ .
\end{aligned}$$