Vorlesungsmanuskript zu

Analysis I

Werner Balser
Institut für Angewandte Analysis

Wintersemester 2008/09

Literaturverzeichnis

[1] **T. Apostol**, *Mathematical Analysis*, Addison & Wesley, Reading, 1979.

[2] **E. Behrends**, *Analysis. Vol. 1. A study book for a smooth transition from school to university. (Analysis. Band 1. Ein Lernbuch für den sanften Wechsel von der Schule zur Uni.) 3rd corrected ed.*, Wiesbaden: Vieweg. xiv, 359 p. EUR 24.90 , 2007.

[3] **I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, G. Musiol, und H. Mühlig**, *Taschenbuch der Mathematik*, Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1995. 96

[4] **K. Endl und W. Luh**, *Analysis I*, Aula Verlag, Wiesbaden, 1989.

[5] **F. Erwe**, *Differential- und Integralrechnung I*, BI Hochschultaschenbücher, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1973.

[6] **O. Forster**, *Analysis 1*, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 2004.

[7] **H. Grauert und I. Lieb**, *Differential- und Integralrechnung I*, Heidelberger Taschenbücher, Springer, Berlin, 1967.

[8] **H. Heuser**, *Lehrbuch der Analysis 1*, Teubner, Stuttgart, 1988.

[9] **W. Luh und M. Wiesner**, *Aufgabensammlung Analysis*, Aula Verlag, Wiesbaden, 1991.

[10] **G. Merziger und T. Wirth**, *Repetitorium der Höheren Mathematik*, Binomi Verlag, 1999.

[11] **K. Meyberg und P. Vachenauer**, *Höhere Mathematik 1*, Springer, Berlin, 1999.

[12] ——, *Höhere Mathematik 2*, Springer, Berlin, 1999.

[13] **W. Rudin**, *Analysis*, R. Oldenbourg Verlag, München, 2002.

[14] **F. Schulz**, *Analysis 1*, R. Oldenbourg Verlag, München, 2002.

[15] **W. Walter**, *Analysis 1*, Springer, Berlin, 1985. 77, 81

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Reelle und komplexe Zahlen

1.1 Mengen, Relationen und Funktionen

Wir stellen im Folgenden einige Bezeichnungen für Aussagen und Mengenoperationen zusammen, die wohl überwiegend so oder ähnlich auch im Schulunterricht benutzt wurden:

- Wenn $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ zwei beliebige Aussagen sind, schreiben wir
$$\mathcal{A}_1 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A}_2\,,$$
falls aus der Richtigkeit von $\mathcal{A}_1$ immer die Richtigkeit von $\mathcal{A}_2$ folgt. Wir lesen dies auch als *aus* $\mathcal{A}_1$ *folgt* $\mathcal{A}_2$, oder $\mathcal{A}_1$ *impliziert* $\mathcal{A}_2$. Falls umgekehrt auch $\mathcal{A}_1$ aus $\mathcal{A}_2$ folgt, nennen wir beide Aussagen *äquivalent* und schreiben
$$\mathcal{A}_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{A}_2\,.$$
Wir sagen dann auch, dass $\mathcal{A}_1$ genau dann richtig ist, wenn $\mathcal{A}_2$ richtig ist. Es gilt also, dass $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ genau dann äquivalent sind, wenn gilt
$$\mathcal{A}_1 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A}_2 \quad \text{und} \quad \mathcal{A}_2 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A}_1\,.$$
- Das Symbol $\forall$ steht für die Worte *für alle*, und $\exists$ bedeutet *es existiert*. Wir schreiben $\exists_1\ x$, wenn es ein x gibt (mit einer gewissen Eigenschaft), und wenn dieses x (innerhalb einer gewissen Menge X) eindeutig bestimmt ist. Wir sagen dann auch in Worten: *es existiert genau ein* $x \in X$.
- $x \in A$ bedeutet: x ist Element von A (gehört zu A, ist in A enthalten).
- Zwei Mengen A und B sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten, d. h., wenn gilt
$$x \in A \quad \Longleftrightarrow \quad x \in B\,.$$
- $A \subset B$ bedeutet: A ist Teilmenge von B, d. h., $x \in A \Longrightarrow x \in B$. Insbesondere ist $A \subset B$ auch wenn $A = B$ ist, und es gilt
$$A = B \quad \Longleftrightarrow \quad (A \subset B \quad \text{und} \quad B \subset A)\,.$$
- $A \cup B = \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\}$ ist die Vereinigungsmenge von A und B. Allgemeiner: Sind A_j, für $j \in J$, beliebig viele Mengen, so ist deren Vereinigung gleich
$$\cup_{j \in J} A_j \ = \ \{x :\ \exists\, j \in J \text{ mit } x \in A_j\}\,.$$

- $A \cap B = \{x : x \in A \text{ und } x \in B\}$ ist der Durchschnitt von A und B. Allgemeiner: Sind A_j, für $j \in J$, beliebig viele Mengen, wobei aber J nicht leer sein soll, so ist deren Durchschnitt gleich

$$\cap_{j \in J} A_j \;=\; \{x : \; x \in A_j \;\forall\, j \in J\}\,.$$

- $A \setminus B = \{x : \; x \in A \text{ und } x \notin B\}$ ist die (mengentheoretische) Differenz von A und B, oder das Komplement von B relativ zu A.
- $\emptyset$ bezeichnet die leere Menge, welche kein einziges Element besitzt.
- $\mathcal{P}(A)$ bezeichnet die Familie aller Teilmengen einer Menge A und wird *Potenzmenge von A* genannt. Man nennt $\emptyset$ und A auch die *trivialen Teilmengen* von A.
- $A \times B = \{(a, b) : a \in A,\, b \in B\}$ ist das kartesische Produkt von A und B. Beachte, dass es bei den Paaren (a, b) auf die Reihenfolge ankommt, so dass $(a, b) \neq (b, a)$ ist, außer für $a = b$. Vergleiche Abschnitt 2.4 für kartesische Produkte von beliebig vielen Mengen.

Beispiel 1.1.1 *Ist $A = \{1, 2, 3\}$, so ist die Potenzmenge von A die Menge $\{A_j : 1 \leq j \leq 8\}$, mit $A_1 = \emptyset$, $A_2 = \{1\}$, $A_3 = \{2\}$, $A_4 = \{3\}$, $A_5 = \{1, 2\}$, $A_6 = \{1, 3\}$, $A_7 = \{2, 3\}$, $A_8 = \{1, 2, 3\}$.*

Aufgabe 1.1.2 *Finde diejenige Menge A, deren Potenzmenge sowenig Elemente enthält wie nur möglich.*

Aufgabe 1.1.3 *Charakterisiere alle Mengen A, deren Potenzmenge genau zwei Elemente hat.*

Aufgabe 1.1.4 *Charakterisiere alle Mengen A, deren Potenzmenge nur endlich viele Elemente hat.*

Proposition 1.1.5 (de Morgansche Regeln) *Sind A_j, für $j \in J$, eine beliebige Anzahl von Teilmengen einer festen Grundmenge X, so gelten:*

$$X \setminus (\cup_{j \in J} A_j) \;=\; \cap_{j \in J}\, (X \setminus A_j)\,, \quad X \setminus (\cap_{j \in J} A_j) \;=\; \cup_{j \in J}\, (X \setminus A_j)\,.$$

In Worten ausgedrückt heißen die Aussagen: Das Komplement einer Vereinigung ist der Durchschnitt der Komplemente der einzelnen Mengen, das Komplement eines Durchschnitts ist die Vereinigung der Komplemente der einzelnen Mengen.

Beweis: Sei $x \notin X \setminus (\cup_{j \in J} A_j)$, d. h., $x \in A_j$ für mindestens ein $j \in J$. Das ist gleichbedeutend mit $x \notin X \setminus A_j$ für dieses j, also $x \notin \cap_{j \in J}(X \setminus A_j)$, und somit ist $X \setminus (\cup_{j \in J} A_j) = \cap_{j \in J}(X \setminus A_j)$. Der zweite Teil der Behauptung wird analog bewiesen. Vergleiche auch die nächste Aufgabe. □

Aufgabe 1.1.6 *Unter den Voraussetzungen von* Proposition 1.1.5*, setze $B_j = X \setminus A_j$ für alle $j \in J$, und führe die zweite der de Morganschen Regeln auf die erste zurück.*

Lösung: Da die erste Regel für beliebige Teilmengen von X richtig ist, gilt sie auch, wenn wir A_j durch B_j ersetzen. Also ist

$$X \setminus (\cup_{j \in J} B_j) \;=\; \cap_{j \in J}\, (X \setminus B_j) \;=\; \cap_{j \in J} A_j\,.$$

Da zwei Teilmengen von X genau dann gleich sind, wenn sie dieselben Komplemente haben, folgt

$$X \setminus (\cap_{j \in J} A_j) \;=\; \cup_{j \in J} B_j \;=\; \cup_{j \in J}(X \setminus A_j)\,,$$

und das war zu zeigen. □

Definition 1.1.7 *Seien X und Y beliebige nichtleere Mengen. Eine nichtleere Teilmenge $R \subset X \times Y$ heißt* eine Relation *zwischen X und Y. Falls $Y = X$ ist, sprechen wir auch von einer Relation* auf X. *Wir schreiben auch*

$$x \; R \; y \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x, y) \in R\,,$$

und lesen die linke Seite als "x steht in Relation zu y".

Eine Relation R zwischen X und Y heißt eine Funktion *oder* eine Abbildung *von X in Y, wenn gilt:*

$$\forall \; x \in X \quad \exists_1 \; y \in Y \;\; : \qquad x \; R \; y.$$

Dieses eindeutig durch x festgelegte y bezeichnen wir dann auch mit $f(x)$ oder ähnlich. Eine Veranschaulichung des Funktionsbegriffes ist, sich f als eine Vorschrift zu denken, welche jedem $x \in X$ ein eindeutig bestimmtes $y \in Y$ zuweist. Wir schreiben auch

$$f : X \longrightarrow Y, \qquad x \mapsto y = f(x)$$

und nennen dabei X den Definitionsbereich *und Y den* Wertebereich *der Funktion. Die Menge*

$$R \;=\; \text{graph } f \;=\; \{(x, f(x)) : x \in X\} \quad \subset X \times Y$$

bezeichnen wir dann auch als Graphen *der Funktion. Auf Grund der Definition sind zwei Funktionen genau dann gleich, wenn ihre Graphen gleich sind. Das heißt, dass zwei gleiche Funktionen immer denselben Definitionsbereich haben müssen, dass aber der Wertebereich Y unterschiedlich sein kann. Anders ausgedrückt sind zwei Funktionen per Definition verschieden, wenn sie zwar durch dieselbe Vorschrift beschrieben werden, aber unterschiedlichen Definitionsbereich haben. Zum Beispiel können wir die Vorschrift $x \mapsto x^2$ auf der Menge aller reellen Zahlen oder auch nur auf der Menge der positiven Zahlen studieren und erhalten so zwei verschiedene Funktionen.*

Für $A \subset X$ bzw. $B \subset Y$ bilden wir die Mengen aller Urbilder bzw. Bilder von Elementen aus A bzw. B, d. h.

$$f(A) = \{f(x) \in Y : \; x \in A\}, \qquad f^{-1}(B) = \{x \in X : \; f(x) \in B\}.$$

Falls B nur ein Element, etwa b, hat, schreiben wir auch $f^{-1}(b)$ anstatt $f^{-1}(B)$. Beachte aber, dass $f^{-1}(b)$ leer sein oder mehrere, evtl. sogar unendlich viele, Elemente haben kann. Die Menge $f(X)$ heißt die Wertemenge *der Funktion f.*

Die Funktion f heißt

(a) injektiv *oder* eineindeutig, *falls gilt*

$$\forall \; x_1, x_2 \in X : \quad f(x_1) \;=\; f(x_2) \quad \Longrightarrow \quad x_1 \;=\; x_2.$$

(b) surjektiv *oder* Abbildung auf Y, *falls $f(X) = Y$ ist, oder anders ausgedrückt: falls gilt*

$$\forall \; y \in Y \quad \exists \; x \in X : \quad y \;=\; f(x).$$

(c) bijektiv, *falls sie gleichzeitig injektiv und surjektiv ist.*

Ist eine Funktion $f : X \longrightarrow Y$ bijektiv, so gibt es zu jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Die Funktion, welche jedem y dieses x zuordnet, heißt dann die Umkehrfunktion von f *und wird mit $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ bezeichnet.*

Sind $f : X \longrightarrow Y$ und $g : Y \longrightarrow Z$ zwei Funktionen, so kann man für jedes $x \in X$ immer $g(f(x))$ bilden. Auf diese Weise erhält man eine Funktion h von X in Z, welche wir die Hintereinanderausführung *oder* Komposition *von f und g nennen, und wir schreiben auch $h = g \circ f$.*

Mit $id : X \longrightarrow X$, oder auch mit id_X, bezeichnen wir die identische Abbildung $x \mapsto x$, *welche jedes $x \in X$ auf sich selber abbildet.*

Für eine Funktion $f : X \longrightarrow Y$ und eine nichtleere Teilmenge $A \subset X$ bezeichne $f_{|A}$ diejenige Abbildung von A in Y, welche dort mit f übereinstimmt. Eine solche Funktion heißt Einschränkung *oder* Restriktion *von f. Umgekehrt, ist $X \subset \tilde{X}$, so heißt jede Abbildung $g : \tilde{X} \longrightarrow Y$, welche auf X mit f übereinstimmt,* eine Fortsetzung von f *auf die Menge $\tilde{X}$.*

Aufgabe 1.1.8 *In dieser und der folgenden Aufgabe sei eine Funktion $f : X \longrightarrow Y$ gegeben. Zeige, dass immer gilt $f \circ id_X = f$ und $id_Y \circ f = f$.*

Lösung: Nach Definition von id gilt $(f \circ id_X)(x) = f(id(x)) = f(x)$ für alle $x \in X$, was $f \circ id_X = f$ bedeutet. Genauso folgt $id_Y \circ f = f$ aus $(id_Y \circ f)(x) = id(f(x)) = f(x)$ für alle $x \in X$. □

Aufgabe 1.1.9 *Sei jetzt f bijektiv, und sei f^{-1} die Umkehrfunktion. Zeige $f \circ f^{-1} = id_Y$, $f^{-1} \circ f = id_X$.*

Aufgabe 1.1.10 *Sei angenommen, dass eine Funktion $g : Y \longmapsto X$ existiert, so dass $f \circ g = id_Y$, $g \circ f = id_X$. Zeige, dass dann f bijektiv und $g = f^{-1}$ ist. Was kann man schließen, wenn nur $f \circ g = id_Y$ oder $g \circ f = id_X$ gilt?*

1.2 Körper

Definition 1.2.1 *Eine Menge K, zusammen mit zwei Abbildungen*

$$\begin{aligned} + &: K \times K \longrightarrow K, \qquad (a,b) \longmapsto a+b, \\ \cdot &: K \times K \longrightarrow K, \qquad (a,b) \longmapsto a \cdot b \quad (= a\,b), \end{aligned}$$

heißt ein Körper*, falls folgende Axiome gelten:*

(A1) $\forall\, a,b,c \in K : (a+b)+c = a+(b+c)$ (Assoziativgesetz der Addition)

(A2) $\exists\, 0 \in K \;\; \forall\, a \in K : a + 0 = a$ (Ex. e. neutralen El. bzgl. der Add.)

(A3) $\forall\, a \in K \;\; \exists\, -a \in K : a + (-a) = 0$ (Ex. e. inv. El. bzgl. der Add.)

(A4) $\forall\, a,b \in K : a+b = b+a$ (Kommutativgesetz der Addition)

(M1) $\forall\, a,b,c \in K : (a\,b)\,c = a\,(b\,c)$ (Assoziativgesetz der Multiplikation)

(M2) $\exists\, 1 \in K \setminus \{0\} \;\; \forall\, a \in K : a\,1 = a$ (Ex. e. neutr. El. bzgl. der Mult.)

(M3) $\forall\, a \in K \setminus \{0\} \;\; \exists\, a^{-1} \in K : a\,a^{-1} = 1$ (Ex. e. inv. El. bzgl. der Mult.)

(M4) $\forall\, a,b \in K : a\,b = b\,a$ (Kommutativgesetz der Multiplikation)

(D) $\forall\, a,b,c \in K : a\,(b+c) = a\,b + a\,c$ (Distributivgesetz)

Die Elemente von K sind dann per Definition Zahlen*, die beiden Abbildungen $+$ und $\cdot$ heißen* Addition *und* Multiplikation *in K. Beachte, dass das Ergebnis einer Addition oder Multiplikation per Definition wieder zu K gehören muss. Wir sagen auch:* ein Körper K ist immer abgeschlossen bzgl. Addition und Multiplikation.

Jeder Körper K enthält mindestens zwei Zahlen, nämlich 0 und 1, und es gibt einen Körper, der genau aus diesen Zahlen besteht:

Beispiel 1.2.2 *Sei* $K = \{0,1\}$, *mit*

$$0+0=0,\ 0+1=1+0=1,\ 1+1=0,$$

$$0\,0=0,\ 0\,1=1\,0=0,\ 1\,1=1.$$

Dann kann man mit einiger Geduld überprüfen, dass alle der oben stehenden Axiome gelten, dass also K *mit dieser Definition einer Addition und Multiplikation ein Körper ist.*

Bemerkung 1.2.3 *Eine naheliegende Definition von* 2 *in einem Körper* K *ist zu sagen, dass* $1+1=2$ *sein soll. Daher muss in dem Körper mit zwei Elementen die Gleichung* $2=0$ *gelten.*

Wenn nichts anderes gesagt wurde, sei im Rest dieses Kapitels K stets ein Körper. Da Addition und Multiplikation in einem Körper kommutativ sind, sagen wir statt *rechtsneutral* bzw. *rechtsinvers* auch kurz *neutral* bzw. *invers*. Sind $a, b \in K$, und ist $-b$ additives Inverses von b, so schreiben wir statt $a + (-b)$ auch kürzer $a - b$. Ist $b \neq 0$ und b^{-1} multiplikatives Inverses zu b, so schreiben wir auch a/b statt $a\,b^{-1}$. Also gibt es in jedem Körper K die vier *Grundrechenarten* der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division.

Aufgabe 1.2.4 *Zeige, dass die beiden neutralen Elemente in einem Körper* K *eindeutig bestimmt sind.*

Lösung: Seien 0 und $\tilde{0}$ so, dass gilt $a+0=a$ und $a+\tilde{0}=a$ für alle $a \in K$. Einsetzen von $\tilde{0}$ für a in die erste Gleichung zeigt dann $\tilde{0}+0=\tilde{0}$. Aus der zweiten Gleichung folgt durch Einsetzen von 0 für a, dass $0+\tilde{0}=0$ gilt. Nach (A4) ist aber $\tilde{0}+0=0+\tilde{0}$, und daraus folgt $0=\tilde{0}$. Genauso zeigt man die Eindeutigkeit der Eins. □

Aufgabe 1.2.5 *Zeige:*

(a) $\forall\ a \in K: \quad a\,0 = 0.$

(b) *Das additive Inverse* $-a$ *zu einem* $a \in K$ *ist eindeutig bestimmt, und es gilt* $-a = (-1)\,a$, *wobei* -1 *das additive Inverse der Zahl* 1 *bedeutet.*

(c) *Das multiplikative Inverse* a^{-1} *zu einem* $a \in K \setminus \{0\}$ *ist eindeutig bestimmt.*

Lösung: Zu (a): Sei $b = a\,0$ gesetzt. Dann ist $b = a\,(0+0) = b+b$, und daraus folgt $0 = b-b = (b+b)-b = b+(b-b) = b+0 = b$.

Zu (b): Gelte $a+b=0$ und $a+c=0$. Mit den Axiomen folgt dann $b = b+0 = b+(a+c) = (b+a)+c = (a+b)+c = 0+c = c$, also $b=c$. Weiter ist $a+(-1)\,a = a\,(1+(-1)) = a\,0$, und nach (a) ist $a\,0=0$. Also ist $(-1)\,a$ additives Inverses zu a.

Zu (c): Gelte $a\,b = 1 = a\,c$, dann folgt $c = c\,(a\,b) = (c\,a)\,b = (a\,c)\,b = 1\,b = b$, also die Behauptung. □

Aufgabe 1.2.6 *Zeige, dass aus den Axiomen eines Körpers weitere Rechenregeln folgen, nämlich:*

1. $\forall\ a \in K$: $\quad -(-a) = a$. In Worten bedeutet das: Das additive Inverse zu $-a$ ist gleich a.
2. $\forall\ a, b \in K$: $-(a+b) = -a+(-b)$, $a\,(-b) = (-a)\,b = -(a\,b)$, $(-a)\,(-b) = a\,b$. Sprich jede der Gleichungen auch in Worten aus.

3. $\forall\, a,b \in K$: $a\,b = 0 \Longrightarrow a = 0$ oder $b = 0$ oder beides.

Aufgabe 1.2.7 *Zeige, dass für $a \in K \setminus \{0\}$, $b \in K$ die Gleichung $a\,x = b$ stets eindeutig lösbar ist. Formal aufgeschrieben bedeutet das*

$$\forall\ a \in K \setminus \{0\},\ b \in K \quad \exists_1\ x \in K: \quad a\,x = b.$$

Wie steht es mit der Lösungsmenge dieser Gleichung, falls $a = 0$ ist?

Aufgabe 1.2.8 *Zeige dass $(-1)^2 = (-1)\,(-1) = 1$ gilt. Allgemeiner, zeige $(-a)^2 = a^2$ für alle $a \in K$.*

Lösung: Nach Definition ist -1 das additive Inverse zu 1, also ist $1+(-1) = 0$. Daher folgt $0 = (-1)\,0 = (-1)\,(1+(-1)) = (-1)\,1+(-1)\,(-1) = -1+(-1)\,(-1)$. Daher ist $(-1)^2$ additives Inverses zu -1, woraus die erste Behauptung folgt. Wegen $-a = (-1)\,a$ folgt aber auch die zweite. □

1.3 Ordnungsaxiome

Definition 1.3.1 *Ein Körper K heißt* geordnet*, wenn es eine Teilmenge $K_+ \subset K$ gibt, welche folgende Eigenschaften besitzt:*

(O1) $\forall\ a \in K$ gilt genau eine der Aussagen $a \in K_+$ oder $-a \in K_+$ oder $a = 0$.

(O2) $\forall\ a,b \in K_+ : \qquad a+b \in K_+$.

(O3) $\forall\ a,b \in K_+ : \qquad a\,b \in K_+$.

Die Menge K_+ heißt auch positiver Kegel von K*, und jedes $a \in K_+$ heißt* positiv*. Ist $-a \in K_+$, so heißt* a negativ*. Wir können also die Axiome* (O1) – (O3) *wie folgt in Worte fassen:* Ein beliebiges $a \in K$ ist entweder positiv oder negativ oder $= 0$, und Summe und Produkt von positiven Zahlen sind wieder positiv*. Weiter setzen wir noch:*

- $a < b \quad \Longleftrightarrow \quad b > a \quad \Longleftrightarrow \quad b - a \in K_+$.
- $a \le b \quad \Longleftrightarrow \quad b \ge a \quad \Longleftrightarrow \quad a = b$ *oder* $a < b$.

Mit diesen Bezeichnungen folgt direkt aus (O1)*, angewandt auf $b-a$: Für alle $a,b \in K$ gilt genau eine der drei Aussagen $a < b$ oder $a > b$ oder $a = b$.*

Proposition 1.3.2 (Rechenregeln für Ungleichungen) *Sei K ein geordneter Körper K, und seien $a,b,c,d \in K$. Dann gelten folgende Aussagen:*

(a) $a < b$ *und* $b < c \Longrightarrow a < c$.

(b) $a < b \Longrightarrow a + c < b + c$.

(c) $a < b \Longrightarrow -a > -b$.

(d) $a < b$ *und* $c > 0 \Longrightarrow a\,c < b\,c, \qquad a < b$ *und* $c < 0 \Longrightarrow a\,c > b\,c$.

(e) $a \neq 0 \Longrightarrow a^2 > 0, \qquad$ *insbesondere ist* $1 > 0$.

(f) $a > 0 \Longrightarrow 1/a > 0, \qquad a < 0 \Longrightarrow 1/a < 0.$

(g) $0 < a < b \Longrightarrow a/b < 1,\ b/a > 1,\ 1/a > 1/b.$

(h) $a < b$ *und* $c < d \Longrightarrow a + c < b + d.$

(i) $0 < a < b$ *und* $0 < c < d \Longrightarrow a\,c < b\,d.$

(j) $a < b$ *und* $0 < c < 1 \Longrightarrow a < c\,a + (1 - c)\,b < b.$

Beweis: (a) bis (d) folgen aus der Definition der Ungleichungen. Zu (e): Ist $a > 0$, so folgt $a^2 > 0$ aus (O3), und nach Aufgabe 1.2.8 gilt $(-a)^2 = a^2$. Zu (f): Folgt aus (d), weil $a\,a^{-1} = 1 > 0$ ist. Die übrigen Regeln sind als Aufgaben zu beweisen. □

Aufgabe 1.3.3 *Zeige dass ein geordneter Körper unendlich viele Elemente haben muss. Das hat zur Konsequenz, dass man den Körper mit zwei Elementen nicht zu einem geordneten Körper machen kann.*

Aufgabe 1.3.4 *Zeige: Aus $a < b$ folgt $a < (a + b)/2 < b$.*

Aufgabe 1.3.5 *Zeige: Ist $a \geq 0$, und gilt $\forall\ \varepsilon > 0\ :\ a\ \leq\ \varepsilon$, so folgt $a = 0$.*

Lösung: Die Alternative zu $a = 0$ ist $a > 0$, da ja $a \geq 0$ vorausgesetzt ist. In diesem Fall folgt für $\varepsilon = a/2$ aus der vorigen Aufgabe $0 < (0 + a)/2 < a$, also $\varepsilon < a$. □

1.4 Obere und untere Schranken, Supremum und Infimum

Im Folgenden sei K immer ein geordneter Körper.

Definition 1.4.1 *Sei A eine beliebige nichtleere Teilmenge von K. Jedes ξ mit*

$$a \leq \xi \qquad \forall\ a \in A$$

heißt obere Schranke für A*, jedes ξ mit*

$$a \geq \xi \qquad \forall\ a \in A$$

heißt untere Schranke für A*. Falls A eine obere bzw. untere Schranke besitzt, dann heißt A* nach oben beschränkt *bzw.* nach unten beschränkt*. Falls A nach oben und unten beschränkt ist, nennen wir A kurz* beschränkt*.*

Ein $a \in A$, welches gleichzeitig obere bzw. untere Schranke von A ist, heißt maximales Element *bzw.* minimales Element *oder kürzer* Maximum *bzw.* Minimum *von A, und wir schreiben auch $a = \max A$ bzw. $a = \min A$.*

Behauptung 1.4.2 *Falls* $\max A$ *oder* $\min A$ *existieren, sind sie eindeutig bestimmt.*

Beweis: Seien $a_1, a_2 \in A$ beide obere Schranken für A. Dann folgt $a_2 \leq a_1$ und $a_1 \leq a_2$, also $a_1 = a_2$. Analog für untere Schranken. □

Definition 1.4.3 *Sei $A \subset K$ nicht leer, und sei ξ eine obere Schranke von A. Falls jede andere obere Schranke für A mindestens so groß wie ξ ist, dann heißt ξ* kleinste obere Schranke *oder* Supremum *von A, und wir schreiben $\xi = \sup A$. Analog definieren wir $\xi = \inf A$ als* größte untere Schranke *oder* Infimum *von A, falls ξ untere Schranke von A ist, und falls jede andere untere Schranke für A höchstens so groß wie ξ ist. Für eine äquivalente Charakterisierung von Supremum und Infimum, vergleiche auch* Aufgabe 1.4.8.

Behauptung 1.4.4

(a) *Falls $\max A$ existiert, existiert auch $\sup A$, und es gilt $\max A = \sup A$. Die analoge Aussage gilt auch für das Minimum resp. Infimum von A.*

(b) *Falls $\sup A$ existiert und zu A gehört, existiert auch $\max A$, und es gilt $\max A = \sup A$. Die analoge Aussage gilt auch für das Infimum resp. Minimum von A.*

Beweis: Zu (a): $\max A$ ist per Definition obere Schranke von A und Element von A. Daher gilt für eine beliebige obere Schranke ξ von A, dass $\max A \leq \xi$ ist. Nach Definition des Supremums ist deshalb $\max A = \sup A$. Zu (b): Folgt aus der Definition des Maximums. □

Beispiel 1.4.5 *Die Menge K_+ der positiven Zahlen ist nach unten beschränkt durch $\xi = 0$. Ist $\eta \in K_+$, so ist $\eta/2 \in K_+$ und $\eta/2 < \eta$. Also kann kein Element von K_+ gleichzeitig untere Schranke von K_+ sein, und deshalb ist 0 die größte untere Schranke von K_+, also $0 = \inf K_+$. Aber 0 gehört selbst nicht zu K_+, und deshalb besitzt K_+ kein Minimum. Weiter ist K_+ nicht nach oben beschränkt, denn gäbe es eine obere Schranke für K_+, etwa ξ, so wäre $\xi \in K_+$, also auch $\xi + 1 \in K_+$, und wegen $\xi + 1 > \xi$ ergibt sich ein Widerspruch.*

Beispiel 1.4.6 *Seien $x > 0$ und $A_x = \{a > 0 : a^2 \leq x\}$. Falls $x \geq 1$ ist, folgt $1 \in A$, und x ist obere Schranke von A_x, denn aus $a > x$ folgt $a^2 > x^2 \geq x$, also $a \notin A_x$. Falls $x < 1$ ist, ist $x^2 < x$ und somit $x \in A_x$, und 1 ist obere Schranke für A_x. Also gilt in beiden Fällen:* Die Menge A_x ist nicht leer und nach oben beschränkt. *Die Frage, ob diese Menge ein Supremum oder gar ein Maximum hat, ist nicht trivial und hängt mit dem Vollständigkeitsaxiom zusammen, welches in* Abschnitt 1.5 *behandelt werden wird. Es gilt aber:*

Behauptung 1.4.7 *Seien x und A_x wie in* Beispiel 1.4.6. *Falls $\xi = \sup A_x$ existiert, dann gilt $\xi^2 = x$.*

Beweis: Angenommen, dass $\xi^2 > x$ wäre. Sei $\varepsilon = (\xi^2 - x)/(2\xi)$, dann gilt $0 < \varepsilon < \xi/2$. Nach Definition des Supremums gibt es dann ein $a \in A_x$ mit $a > \xi - \varepsilon$. Daraus folgt

$$x \geq a^2 > (\xi - \varepsilon)^2 > \xi^2 - 2\,\xi\,\varepsilon = x,$$

was nicht sein kann.

Sei jetzt $\xi^2 < x$ angenommen. Für $\varepsilon = \min\{\xi, (x/\xi - \xi)/3\}$ gilt dann $\varepsilon/\xi \leq 1$, also $(\varepsilon/\xi)^2 \leq \varepsilon/\xi$. Daraus folgt für $a = \xi + \varepsilon$:

$$a^2 \;=\; \xi^2\,(1 + \varepsilon/\xi)^2 \;\leq\; \xi^2\,(1 + 3\,\varepsilon/\xi) \;\leq x.$$

Demzufolge wäre $a = \xi + \varepsilon \in A_x$, also ξ keine obere Schranke für A_x, was der Definition von ξ widerspricht. Also ist $\xi^2 = x$. □

Aufgabe 1.4.8

(a) *Zeige: Ist $A \subset K$ nach oben bzw. unten beschränkt, und ist B eine nichtleere Teilmenge von A, so ist B ebenfalls nach oben bzw. unten beschränkt.*

(b) *Sei* $A \subset K$ *nicht leer, und sei* $B = -A = \{-a : a \in A\}$. *Zeige:*

- *Genau dann ist* A *nach oben beschränkt, wenn* B *nach unten beschränkt ist.*
- *Genau dann besitzt* A *ein Supremum, wenn* B *ein Infimum besitzt, und es gilt* $\sup A = -\inf B$.

(c) *Zeige:* K *selber ist nach oben und nach unten nicht beschränkt.*

(d) *Zeige: Genau dann ist* ξ *Supremum einer Menge* $A \subset K$, *wenn folgendes gilt:*

$$\forall\, a \in A: \; a \leq \xi; \qquad \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, a \in A: \; a > \xi - \varepsilon.$$

Finde selber eine analoge Charakterisierung für das Infimum von A.

1.5 Das Vollständigkeitsaxiom

Definition 1.5.1 *Ein geordneter Körper* K *heißt* vollständig, *falls gilt:*

(V) Jede nichtleere und nach oben beschränkte Teilmenge von K besitzt ein Supremum.

Mit $\mathbb{R}$ *bezeichnen wir im Folgenden einen vollständigen geordneten Körper. Jedes seiner Elemente heißt* eine reelle Zahl, *und* $\mathbb{R}$ *selber heißt* Körper der reellen Zahlen *oder* der reelle Zahlkörper. *Für den positiven Kegel* K_+ *schreiben wir künftig auch* $\mathbb{R}_+$, *d. h.* $x \in \mathbb{R}_+$ *ist gleichbedeutend mit* $x > 0$.

Bemerkung 1.5.2 *Dass ein solcher vollständig geordneter Körper existiert, lässt sich aus anderen, in gewissem Sinne einfacheren Axiomen ableiten, wird hier aber nicht gezeigt. Man kann weiter zeigen, dass es* bis auf Isomorphie *nur einen Körper* $\mathbb{R}$ *gibt - was das genau bedeutet, soll hier ebenfalls nicht besprochen werden. Ungefähr heißt dies jedenfalls, dass sich jede wahre Aussage über die Menge der reellen Zahlen aus den Axiomen* (A1) – (A4), (M1) – (M4), (D), (O1) – (O3) *und* (V) *ableiten lässt.*

Definition 1.5.3 *Für jedes* $x \in \mathbb{R}_+$ *haben wir in* Beispiel 1.4.6 *gezeigt, dass die Menge* $A_x = \{a \in \mathbb{R} : a^2 \leq x\}$ *nichtleer und nach oben beschränkt ist. Also existiert nach dem Vollständigkeitsaxiom* $\xi = \sup A_x$. *Aus* Behauptung 1.4.7 *folgt, dass* $\xi^2 = x$ *ist. Dieses* ξ *nennen wir die* (positive) Quadratwurzel von x *und schreiben* $\xi = \sqrt{x}$. *Wir setzen zusätzlich noch* $\sqrt{0} = 0$. *Dies bedeutet, dass die Funktion* $x \mapsto x^2$ *die Menge* $\mathbb{R}_+$ *bijektiv auf sich abbildet, und dass* $x \mapsto \sqrt{x}$ *gerade die Umkehrfunktion ist.*

Aufgabe 1.5.4 *Finde heraus, für welche* $x \in \mathbb{R}$ *die Gleichung* $x = \sqrt{x^2}$ *richtig bzw. falsch ist.*

Aufgabe 1.5.5 *Zeige, dass das Vollständigkeitsaxiom zu folgenden Aussagen äquivalent ist:*

1. *Jede nichtleere und nach unten beschränkte Teilmenge von* K *besitzt ein Infimum.*
2. *Jede nichtleere und beschränkte Teilmenge von* K *besitzt sowohl ein Infimum als auch ein Supremum.*
3. *Jede nichtleere und beschränkte Teilmenge von* K *besitzt ein Supremum.*

1.6 Vorzeichen und Betrag reeller Zahlen

Definition 1.6.1 *Für $a \in \mathbb{R}$ heißt*

$$\operatorname{sgn} a \;=\; \begin{cases} 1 & \text{für } a > 0, \\ 0 & \text{für } a = 0, \\ -1 & \text{für } a < 0, \end{cases}$$

das Vorzeichen *oder* das Signum *von a, und*

$$|a| \;=\; a \operatorname{sgn} a \;=\; \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0, \\ -a & \text{für } a < 0, \end{cases}$$

der Betrag *von a*

Behauptung 1.6.2 *Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gelten die Aussagen:*

(a) $|a| \geq 0$, *und* $|a| = 0 \iff a = 0$.

(b) $a = b \iff |a| = |b|$ *und* $\operatorname{sgn} a = \operatorname{sgn} b$.

(c) $\operatorname{sgn}(a\,b) = (\operatorname{sgn} a)\,(\operatorname{sgn} b), \quad |a\,b| = |a|\,|b|$.

(d) $b \neq 0 \Longrightarrow (\operatorname{sgn} a)/(\operatorname{sgn} b) = \operatorname{sgn}(a/b),\ |a/b| = |a|/|b|$.

(e) $\Big|\, |a| - |b| \,\Big| \;\leq\; |a \pm b| \;\leq\; |a| + |b|$.

Der zweite Teil der Ungleichung (e) *heißt auch* die Dreiecksungleichung, *der erste heißt* die Dreiecksungleichung nach unten.

Beweis: (a) bis (d) sind einfache Konsequenzen der Definitionen. Zu (e): Es ist $\pm a \leq |a|$, $\pm b \leq |b|$, also $\pm(a \pm b) \leq |a| + |b|$, und deshalb auch $|a \pm b| \leq |a| + |b|$. Weiter ist $|a| = |a \pm b \mp b| \leq |a \pm b| + |b|$, und genauso ist $|b| \leq |a \pm b| + |a|$, und daraus folgt $\pm(|a| - |b|) \leq |a \pm b|$. $\square$

Aufgabe 1.6.3 *Zeige: Für $a < b < 0$ ist $|a| > |b| > 0$.*

Aufgabe 1.6.4 *Zeige: Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $|a| = \sqrt{a^2}$.*

1.7 Intervalle reeller Zahlen

Definition 1.7.1 *Es ist üblich, die Menge $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ mit $\overline{\mathbb{R}}$ zu bezeichnen und für die Symbole $\pm\infty$ folgende Rechenregeln zu vereinbaren:*

- $\forall\, x \in \mathbb{R}: \quad -\infty < x < \infty.$
- $-\infty = (-1)\,\infty.$
- $\forall\, x \in \mathbb{R}: \quad \infty + x = \infty.$

- $\forall\, x \in \mathbb{R}_+ : \quad x\,\infty = \infty.$
- $\infty + \infty = \infty, \;\; \infty\,\infty = \infty.$

Außerdem soll stets das Kommutativgesetz gelten. Das Distributiv- sowie die Assoziativgesetze sollen ebenfalls gelten, soweit bei der Anwendung keine Ausdrücke entstehen, die undefiniert sind. Beachte aber unbedingt, dass $\infty + (-\infty)$ *und* $0\,\infty$ *hier nicht definiert sind.*

Ist $A \subset \mathbb{R}$ *nicht leer und nicht nach oben bzw. unten beschränkt, so setzt man auch manchmal* $\sup A = \infty$ *bzw.* $\inf A = -\infty$. *Es ist auch üblich,* $\sup \emptyset = -\infty$ *und* $\inf \emptyset = \infty$ *zu setzen.*

Aufgabe 1.7.2 *Zeige, dass die folgenden zusätzlichen Rechenregeln gelten:*

1. $\forall\, x \in \mathbb{R}_+ : \quad -\infty + x = -\infty.$
2. $\forall\, x \in \mathbb{R}_+ : \quad x\,(-\infty) = -\infty,\ (-x)\,\infty = -\infty,\ (-x)\,(-\infty) = \infty.$
3. $-\infty + (-\infty) = -\infty,\ (-\infty)\,\infty = -\infty,\ (-\infty)\,(-\infty) = \infty.$

Aufgabe 1.7.3 *Zeige, dass es nicht möglich ist, die Ausdrücke* $\infty + (-\infty)$ *und* $0\,\infty$ *so zu definieren, dass* $\overline{\mathbb{R}}$ *zu einem Körper wird.*

Definition 1.7.4 *Für* $a, b \in \mathbb{R}$ *setzen wir:*

- $[a, b\,] = \{x \in \mathbb{R} : \; a \le x \le b\}$, falls $a \le b$ ist (abgeschlossenes Intervall von a bis b).
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \; a < x < b\}$, falls $a < b$ ist (offenes Intervall von a bis b).
- $(a, b\,] = \{x \in \mathbb{R} : \; a < x \le b\}$, falls $a < b$ ist (links offenes, oder halboffenes Intervall von a bis b).
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \; a \le x < b\}$, falls $a < b$ ist (rechts offenes, oder halboffenes Intervall von a bis b).
- $(-\infty, b\,] = \{x \in \mathbb{R} : \; x \le b\}$, $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : \; x < b\}$.
- $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : \; a \le x\}$, $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : \; a < x\}$.

Der Vollständigkeit halber sei $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ *gesetzt.*

Es sei noch gesagt, dass aus dem Zusammenhang klar sein muss, ob (a, b) das offene Intervall von a bis b oder das Paar der Zahlen a und b meint.

Aufgabe 1.7.5 *Untersuche, welche der oben eingeführten Intervalle nach oben bzw. unten beschränkt sind, und bestimme das Supremum bzw. Infimum sowie Maximum bzw. Minimum, soweit diese existieren.*

1.8 Der Körper der komplexen Zahlen

Definition 1.8.1 *Die Menge aller Paare* $z = (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, *zusammen mit den Verknüpfungen*

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \\ (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &= (x_1\,x_2 - y_1\,y_2\,,\, x_1\,y_2 + x_2\,y_1), \end{aligned}$$

heißt die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$, *oder* die komplexe Zahlenebene. *Mit diesen Operationen ist* $\mathbb{C}$ ein Körper, *d. h., es gelten die gleichen Rechenregeln bzgl.* $+$ *und* $\cdot$ *wie in* $\mathbb{R}$. *Wir identifizieren* $x \longleftrightarrow (x,0)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$*; damit ist* $\mathbb{R}$ *ein* Unterkörper *von* $\mathbb{C}$. *Die Zahl* 1 *entspricht also dem Paar* $(1,0)$*, und wir setzen* $(0,1) = i$*; dann folgt offenbar* $i^2 = -1$ *und*

$$z \;=\; (x,y) \;=\; x + i\,y \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Wir nennen für $z = x + i\,y$

- $x \;=\; \mathrm{Re}\,z$ den Realteil von z,
- $y \;=\; \mathrm{Im}\,z$ den Imaginärteil von z,
- $\overline{z} \;=\; x - i\,y$ die zu z konjugiert komplexe Zahl,
- $|z| \;=\; \sqrt{z\,\overline{z}} \;=\; \sqrt{x^2 \;+\; y^2}$ den Betrag von z.

Beachte, dass die obige Definition des Betrages einer komplexen Zahl $z = x + i\,y$ *im Falle* $y = 0$*, also* $z \in \mathbb{R}$*, mit der früher gegebenen Definition des Betrages einer reellen Zahl übereinstimmt. Die oben definierten Operationen lassen sich jetzt auch folgendermaßen ausdrücken:*

$$(x_1 \;+\; i\,y_1) + (x_2 \;+\; i\,y_2) \;=\; (x_1 + x_2) \;+\; i\,(y_1 + y_2),$$

$$(x_1 + i\,y_1)\cdot(x_2 + i\,y_2) \;=\; (x_1\,x_2 - y_1\,y_2) \;+\; i\,(x_1\,y_2 + x_2\,y_1)\,.$$

Das bedeutet, dass wir im Prinzip mit komplexen Zahlen genauso rechnen dürfen wie mit den reellen, wenn wir noch zusätzlich beachten, dass $i^2 = -1$ *ist.*

Man kann $\mathbb{C}$ *nicht* zu einem geordneten Körper machen; vergleiche dazu eine der nächsten Aufgaben. Deshalb ist es sinnlos, Ungleichungen zwischen komplexen Zahlen zu betrachten – allerdings *kann man Ungleichungen untersuchen, in denen nur Beträge komplexer Zahlen auftreten*. Z. B. gilt die Dreiecksungleichung (auch die nach unten) auch für komplexe Zahlen - vergleiche dazu Aufgabe 1.8.8.

Für eine spätere Anwendung zeigen wir noch folgende Ungleichung:

Behauptung 1.8.2 *Für* $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$ *gilt immer*

$$\max\{|x|,|y|\} \;\le |z| \;\le\; \sqrt{2}\,\max\{|x|,|y|\} \;\le\; \sqrt{2}\,(|x| + |y|)\,. \tag{1.8.1}$$

Beweis: Offenbar ist $|z|^2 = x^2 + y^2 \ge x^2$, also $|z| \ge |x|$, und genauso $|z| \ge |y|$. Daraus folgt die linke Ungleichung. Wegen $(\max\{|x|,|y|\})^2 = \max\{x^2,y^2\}$ gelten auch die anderen Ungleichungen. □

Bemerkung 1.8.3 *Viele der folgenden Begriffe und Ergebnisse sind im Körper* $\mathbb{C}$ *genauso sinnvoll bzw. richtig wie in* $\mathbb{R}$*, weil sie sich nur auf die Rechenregeln bzgl.* $+$ *und* $\cdot$ *beziehen. Um nicht immer beide Fälle getrennt betrachten zu müssen, werden wir in den folgenden Kapiteln das Symbol* $\mathbb{K}$ *benutzen, wenn wir sagen wollen, dass eine Definition oder ein Satz sowohl für* $\mathbb{R}$ *als auch für* $\mathbb{C}$ *gilt. Insbesondere kann daher* $x \in \mathbb{K}$ *auch eine komplexe Zahl - und nicht ihren Realteil - bezeichnen, falls nämlich* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *ist.*

Aufgabe 1.8.4 *Zeige* $\forall\; z_1, z_2 \in \mathbb{C}: \qquad \overline{z_1\,z_2} = \overline{z_1}\;\overline{z_2}\,, \quad |z_1\,z_2| = |z_1|\,|z_2|\,.$

Aufgabe 1.8.5 *Berechne Betrag, Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen für solche* $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$*, für welches der Nenner nicht verschwindet:*

$$z^2, \qquad \frac{1}{z}\,, \qquad \frac{1+z}{1-z}\,.$$

Aufgabe 1.8.6 *Zeige: Für $K = \mathbb{C}$ kann es keine Teilmenge K_+ geben, welche die Axiome* (O1) – (O3) *erfüllt. In anderen Worten: $\mathbb{C}$ kann nicht zu einem geordneten Körper gemacht werden!*

Lösung: Wenn es eine solche Teilmenge gäbe, müsste entweder i oder $-i$ zu K_+ gehören. Daraus würde aber $-1 = (\pm i)^2 \in K_+$ folgen, was nicht sein kann. □

Aufgabe 1.8.7 *Zeige für beliebige reelle Zahlen x_1, x_2, y_1, y_2 die Aussage*

$$\begin{aligned} (x_1 x_2 + y_1 y_2)^2 &= (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) - (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \\ &\leq (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 1.8.8 *Benutze die vorausgegangene Aufgabe, um zu zeigen dass*

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \qquad \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}\,.$$

Das heißt also, dass die Dreiecksungleichung auch für komplexe Zahlen gilt!

Kapitel 2

Natürliche, ganze und rationale Zahlen

2.1 Die natürlichen Zahlen

Definition 2.1.1 *Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt* induktiv*, falls $1 \in M$, und falls gilt $x \in M \Longrightarrow x+1 \in M$. Es ist leicht zu sehen, dass der Durchschnitt von induktiven Mengen ebenfalls induktiv ist, und wir definieren die Menge $\mathbb{N}$ der* natürlichen Zahlen *als den Durchschnitt aller induktiven Teilmengen von $\mathbb{R}$. Mit anderen Worten:* Die Menge der natürlichen Zahlen ist die kleinste induktive Menge.

Aus der Definition der natürlichen Zahlen ergibt sich sofort das sogenannte

Induktionsprinzip: *Sei $A \subset \mathbb{N}$ so, dass $1 \in A$ und der Schluss $x \in A \Longrightarrow x+1 \in A$ richtig sind. Mit anderen Worten: A ist induktiv. Dann folgt bereits $A = \mathbb{N}$.*

Behauptung 2.1.2 (a) $x < 1 \Longrightarrow x \notin \mathbb{N}$. (b) $n \in \mathbb{N}$, $n < x < n+1 \Longrightarrow x \notin \mathbb{N}$.

Beweis: Zu (a): Das Intervall $M = [1, \infty)$ ist offenbar induktiv, und deshalb ist $\mathbb{N} \subset M$.

Zu (b): Die Menge $M_n = \{1, 2, \ldots, n\} \cup [n+1, \infty)$ ist induktiv, und somit gilt $\mathbb{N} \subset M_n$. □

Bemerkung 2.1.3 *Sei im folgenden $a \in \mathbb{R}$ festgehalten. Wir wollen ein $M \subset \mathbb{R}$ a-induktiv nennen, wenn $a \in M$ und $x \in M \Longrightarrow x+1 \in M$ immer gelten. Es gibt dann genau eine kleinste a-induktive Menge N_a, nämlich den Durchschnitt aller a-induktiven Mengen. Für $a = 1$ ist $N_a = \mathbb{N}$.*

Aufgabe 2.1.4 *Finde für jedes N_a wie oben eine bijektive Abbildung von N_a auf $\mathbb{N}$.*

Aufgabe 2.1.5 (Wohlordnungssatz) *Zeige: Jede nicht-leere Teilmenge der natürlichen Zahlen besitzt ein Minimum.*

2.2 Beweisen mit vollständiger Induktion

Gegeben sei eine Aussage $\mathcal{A}(n)$, welche für alle natürlichen Zahlen n sinnvoll ist. Wir sagen, dass wir $\mathcal{A}(n)$ *durch vollständige Induktion beweisen*, wenn wir nach folgendem Schema vorgehen:

(a) Wir zeigen die Richtigkeit von $\mathcal{A}(1)$ (Induktionsanfang).

(b) Sei jetzt $n \in \mathbb{N}$ beliebig gegeben. Unter der *Induktionshypothese*, d. i. die Annahme der Richtigkeit von $\mathcal{A}(n)$, oder auch die Annahme der Richtigkeit von $\mathcal{A}(m)$ für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$, zeigen wir die Richtigkeit von $\mathcal{A}(n+1)$ (Schluss von n auf $n+1$, oder *Induktionsschritt*).

Ist dies gelungen, so ist die Menge der $n \in \mathbb{N}$, für die $\mathcal{A}(n)$ richtig ist, eine induktive Menge, und aus dem Induktionsprinzip folgt deshalb, *dass* $\mathcal{A}(n)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *richtig ist.* Beachte aber, dass ein Beweis durch vollständige Induktion nur dann möglich ist, wenn die zu zeigende Aussage schon bekannt ist.

Aufgabe 2.2.1 *Zeige* $1+3+\ldots+(2n+1) = (n+1)^2$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2.2.2 *Zeige* $1+2+\ldots+n = n(n+1)/2 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung 2.2.3 *Beachte noch, dass beim Beweisen durch vollständige Induktion der Induktionsanfang nicht unbedingt* $n=1$ *sein muss, sondern im Allgemeinen sogar eine beliebige reelle Zahl* a *sein kann. Dies ergibt sich durch Betrachten der* a*-induktiven Mengen; vergl.* Bemerkung 2.1.3.

Aufgabe 2.2.4 *Zeige* $n^2 < 2^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ *mit* $n \geq 5$.

Proposition 2.2.5 *Für beliebige* $n, m \in \mathbb{N}$ *gilt:*

(a) $n+m \in \mathbb{N}$, $n\,m \in \mathbb{N}$, *d.h.,* $\mathbb{N}$ *ist abgeschlossen bezüglich Addition und Multiplikation.*

(b) $m < n \Longrightarrow n - m \in \mathbb{N}$.

(c) *Jede nichtleere Teilmenge von* $\mathbb{N}$ *besitzt ein minimales Element.*

Beweis: Zu (a): Richtig für $n=1$ und beliebiges $m \in \mathbb{N}$. Unter der Annahme der Richtigkeit *für ein* n und beliebiges $m \in \mathbb{N}$ folgt $n+1+m = 1+(n+m) \in \mathbb{N}$, also ist $\mathbb{N}$ abgeschlossen bzgl. der Addition. Weiter ist $(n+1)\,m = n\,m + m \in \mathbb{N}$, und daher folgt auch Abgeschlossenheit bzgl. der Multiplikation.

Zu (b): Folgt mit Induktion über n und Induktionsanfang für $n = m+1$.

Zu (c): Sei M eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ ohne kleinstes Element. Dann gilt sicher $1 \notin M$. Falls schon gezeigt ist, dass $M \cap \{1, \ldots, n\} = \emptyset$, dann folgt auch $n+1 \notin M$, weil sonst $n+1$ kleinstes Element wäre. Also gilt

$$\forall\, n \in \mathbb{N}: \qquad M \cap \{1, \ldots, n\} = \emptyset,$$

und daher ist M eine Teilmenge von $\mathbb{N}$, welche kein einziges Element $n \in \mathbb{N}$ enthält. Daraus folgt $M = \emptyset$. $\square$

Satz 2.2.6 (Satz von Archimedes) *Die Menge* $\mathbb{N}$ *ist nicht nach oben beschränkt.*

Beweis: Sei angenommen, dass $\eta = \sup \mathbb{N} < \infty$ ist. Dann kann $\eta - 1$ keine obere Schranke für $\mathbb{N}$ sein, und daher gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \eta - 1$, oder $n+1 > \eta$. Da $n+1 \in \mathbb{N}$ ist, folgt ein Widerspruch. Also muss $\eta = \infty$ sein. $\square$

Korollar zu Satz 2.2.6 $\quad \forall\, a, b > 0 \quad \exists\, n \in \mathbb{N}: \qquad n\,a > b.$

Beweis: Aus $n\,a \leq b$ folgt $n \leq b/a$, was nicht für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten kann. $\square$

Aufgabe 2.2.7 *Zeige:* $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geq n_0: \quad 1/n < \varepsilon.$

2.3 Ganze und rationale Zahlen

Definition 2.3.1 *Wir nennen*

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : \ n \in \mathbb{N}\}$$

die Menge der ganzen Zahlen*, und*

$$\mathbb{Q} = \{p/q : \ p \in \mathbb{Z}, \ q \in \mathbb{N}\}$$

die Menge der rationalen Zahlen. *Alle Zahlen aus* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *heißen* irrational.

Behauptung 2.3.2 *Die Mengen* $\mathbb{Z}$ *und* $\mathbb{Q}$ *sind abgeschlossen bzgl. Addition und Multiplikation, d.h. für* $a, b \in \mathbb{Z}$ $(\in \mathbb{Q})$ *sind auch* $a + b, a\,b \in \mathbb{Z}$ $(\in \mathbb{Q})$. *Ferner gelten in* $\mathbb{Z}$ *die Axiome* (A1) – (A4) *sowie* (M1), (M2), (M4), (D), *und man nennt deshalb* $\mathbb{Z}$ *einen kommutativen Ring mit Einselement. In* $\mathbb{Q}$ *gelten alle Axiome eines Körpers. Man nennt* $\mathbb{Q}$ *auch den Quotientenkörper von* $\mathbb{Z}$.

Beweis: Die Abgeschlossenheit ergibt sich direkt aus der Definition und den Rechenregeln für Brüche; z. B.

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1\, q_2 + p_2\, q_1}{q_1\, q_2}.$$

Die Gültigkeit der Axiome ergibt sich, da für $a \in \mathbb{Z}$ auch $-a \in \mathbb{Z}$ ist (genauso für $\mathbb{Q}$), und da für $a = p/q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ auch $a^{-1} = q/p \in \mathbb{Q}$ ist. □

Aufgabe 2.3.3 *Zeige: Es gibt keine rationale Zahl* r *mit* $r^2 = 2$.

Aufgabe 2.3.4 *Zeige: Die Menge der rationalen Zahlen* r *mit* $0 < r^2 \le 2$ *ist nicht leer, nach oben beschränkt, und besitzt in* $\mathbb{Q}$ *kein Supremum. Schließe hieraus:*

1. Der Körper $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig.
2. Es gibt mindestens eine positive irrationale Zahl.

Lemma 2.3.5 *Jede nach oben beschränkte nichtleere Menge ganzer Zahlen besitzt ein maximales Element.*

Beweis: Sei M eine solche Menge, und sei o. B. d. A.[1] mindestens eine positive Zahl in M enthalten; falls nicht, können wir nämlich M durch $M + m_0 = \{m + m_0 : \ m \in M\}$ ersetzen. Sei dann $\tilde{M} = \{n \in \mathbb{N} : M \le n\}$. Aus dem Satz von Archimedes folgt, dass $\tilde{M} \ne \emptyset$. Deshalb besitzt $\tilde{M}$ ein minimales Element n_0. Nach Definition von $\tilde{M}$ ist n_0 obere Schranke von M, aber $n_0 - 1$ ist keine obere Schranke. Daher muss $n_0 \in M$ sein, und dies bedeutet wiederum, dass n_0 maximales Element von M ist. □

Definition 2.3.6 *Für* $x \in \mathbb{R}$ *ist* $\{g \in \mathbb{Z} : \ \ g \le x\}$ *nicht leer und nach oben beschränkt, und enthält deshalb nach obigem Lemma ein maximales Element, welches wir mit* $[x]$ *bezeichnen wollen. In anderen Worten:* $[x]$ *bezeichnet die größte ganze Zahl* $\le x$. *Offenbar gilt stets*

$$x = [x] + \xi, \qquad \text{mit } 0 \le \xi < 1.$$

[1] ausgeschrieben: ohne Beschränkung der Allgemeinheit

Proposition 2.3.7 *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, gegeben. Dann enthält das offene Intervall (a, b) immer eine rationale, aber auch eine irrationale Zahl. Mit anderen Worten:*

(a) *Zwischen zwei beliebigen reellen Zahlen liegt immer eine rationale Zahl.*

(b) *Zwischen zwei beliebigen rationalen Zahlen liegt immer eine irrationale Zahl.*

Beweis: Zu (a): Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Nach Aufgabe 2.2.7 gibt es ein $q \in \mathbb{N}$ mit $1/q < b - a$. Betrachte die rationalen Zahlen $r_j = [a] + j/q$, für $j \in \mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$. Die Ungleichung $r_j \leq a$ gilt sicher für $j = 0$, aber nicht für $j \geq q$, und deshalb existiert ein maximales j_0 mit $r_{j_0} \leq a$. Daraus folgt $r_{j_0+1} > a$, aber $r_{j_0+1} < b$ nach Definition von q.

Zu (b): Seien $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $a < b$. Wegen Aufgabe 2.3.4 gibt es mindestens eine positive irrationale Zahl ε. Nach dem Satz von Archimedes existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \varepsilon/(b - a)$, also $\varepsilon/n < b - a$. Da $a + \varepsilon/n$ irrational sein muss (warum?), folgt die Behauptung. □

Aufgabe 2.3.8 *Schließe aus* Proposition 2.3.7, *dass jedes offene Intervall in $\mathbb{R}$ unendlich viele rationale, aber auch unendlich viele irrationale Zahlen enthält.*

2.4 Folgen und allgemeine kartesische Produkte

Definition 2.4.1 *Sei A eine nicht leere Menge, etwa: eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $f: \mathbb{N} \longrightarrow A$ heißt* eine Folge (in A). *Statt $f(n)$ schreiben wir meist f_n, statt f auch $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ oder einfach $(f_n) = (f_1, f_2, f_3, \ldots)$. Etwas allgemeiner kann man die Menge $\mathbb{N}$ auch durch einen* Abschnitt $\mathbb{N}_g = \{m \in \mathbb{Z} : m \geq g\}$ *von ganzen Zahlen ersetzen, und wir schreiben dann auch $(f_n)_{n=g}^{\infty}$ für die Folge.*

Sei J eine beliebige nichtleere Menge, die wir hier Indexmenge *nennen wollen, und seien $A_j \neq \emptyset$, für alle $j \in J$, sowie $A = \cup_{j \in J} A_j$. Die Menge aller Abbildungen $f: J \longrightarrow A$, mit $f(j) \in A_j$ für alle $j \in J$, heißt das* kartesische Produkt *der Mengen A_j, und wir schreiben hierfür $\times_{j \in J} A_j$. Statt $f(j)$ schreiben wir meist f_j, statt f auch $(f_j)_{j \in J}$ oder einfach (f_j). Ist speziell $J = \{1, \ldots, n\}$, so schreiben wir auch $A_1 \times \ldots \times A_n$, und falls $A_1 = \ldots = A_n = A$ ist, auch A^n für das kartesische Produkt.*

Bemerkung 2.4.2 *Das* Auswahlaxiom *der Mengenlehre besagt, dass das kartesische Produkt nichtleerer Mengen selber nicht leer ist.*

Aufgabe 2.4.3 *Seien A_j Mengen mit n_j Elementen, für $1 \leq j \leq m$. Zeige, dass $A_1 \times \ldots \times A_m$ genau $n_1 \cdot \ldots \cdot n_m$ Elemente besitzt.*

2.5 Abzählbare Mengen

Definition 2.5.1 *Eine nichtleere Menge M heißt* endlich, *falls es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine bijektive Abbildung $f: \{1, \ldots, n\} \longrightarrow M$ gibt. In diesem Fall ist n die Anzahl der Elemente von M. Wir wollen auch die leere Menge endlich nennen; die Anzahl ihrer Elemente ist gleich 0. Eine nicht endliche Menge heißt* unendlich.

Eine Menge M heißt abzählbar unendlich, *falls es eine bijektive Abbildung $f: \mathbb{N} \longrightarrow M$ gibt.*

Eine Menge M heißt höchstens abzählbar, *wenn sie endlich oder abzählbar unendlich ist. Jede andere Menge heißt* überabzählbar.

Aufgabe 2.5.2 *Zeige: Jede nach oben beschränkte Teilmenge der natürlichen Zahlen, ebenso wie jede beschränkte Teilmenge der ganzen Zahlen, ist immer endlich.*

Behauptung 2.5.3

(a) *Teilmengen von abzählbar unendlichen Mengen sind höchstens abzählbar.*

(b) *Eine unendliche Menge besitzt eine abzählbar unendliche Teilmenge.*

(c) *Das kartesische Produkt zweier abzählbar unendlicher Mengen ist wieder abzählbar unendlich.*

(d) *Seien A_n höchstens abzählbare Mengen, für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Vereinigung $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ höchstens abzählbar.*

Beweis: Zu (a): Sei A abzählbar unendlich, und sei $B \subset A$. Wir nehmen o. B. d. A. an, dass B nicht endlich ist. Sei $f: \mathbb{N} \longrightarrow A$ eine bijektive Abbildung, und sei $M = \{n \in \mathbb{N}: f(n) \in B\}$. Dann ist M eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ und hat deshalb ein minimales Element n_1. Genauso hat die Menge $M_1 = M \setminus \{n_1\}$ ein minimales Element $n_2 (> n_1)$. Allgemein: Sind $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$ Elemente aus M, so besitzt $M_n = M \setminus \{n_1, \ldots, n_m\}$ ein kleinstes Element, welches wir n_{m+1} nennen. Die Abbildung $g: \mathbb{N} \longrightarrow M$, $m \mapsto g(m) = n_m$, ist sicher injektiv. Sie ist aber auch surjektiv, denn sonst müsste ein Element in M existieren, welches größer als unendlich viele natürliche Zahlen wäre, was nach Aufgabe 2.5.2 nicht sein kann. Also ist $f \circ g$ eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf B, und deshalb gilt die Behauptung.

Zu (b): Sei A unendlich. Dann ist A sicher nicht leer, und wir bezeichnen eines der Elemente mit a_1. Sind bereits $a_1, \ldots, a_n$ aus A ausgewählt (alle verschieden), dann ist $A \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ nicht leer, und wir bezeichnen ein Element mit a_{n+1}. In dieser Weise bekommen wir eine Folge in A, und die Menge der Folgenglieder ist abzählbar unendlich.

Zu (c): Seien A, B abzählbar unendlich, und seien $f: \mathbb{N} \longrightarrow A$ sowie $g: \mathbb{N} \longrightarrow B$ bijektive Abbildungen. Dann ist die Abbildung $h: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow A \times B$, $(n, m) \mapsto (f(n), g(m))$ bijektiv. Eine natürliche Zahl k kann eindeutig zerlegt werden als

$$k = \mu\,(\mu - 1)/2 + \nu, \qquad \mu, \nu \in \mathbb{N},\ 1 \le \nu \le \mu,$$

und $k \mapsto (\nu, \mu) \mapsto (\nu, \mu - \nu + 1)$ ist eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Zu (d): Wegen (a) können wir alle A_n als abzählbar unendlich und paarweise disjunkt annehmen. Das bedeutet $A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \ldots\}$ mit verschiedenen Elementen a_{nm}, und deshalb ist die Abbildung $(n, m) \mapsto a_{nm}$ bijektiv von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ auf A. Daraus folgt die Behauptung mit Hilfe von (b). □

Aufgabe 2.5.4 *Zeige: Ist $f: \mathbb{N} \longrightarrow A$ surjektiv, so ist A höchstens abzählbar.*

Lösung: Zu $a \in A$ ist $f^{-1}(a)$ nicht leer, und wir können ein Element $n_a \in f^{-1}(a)$ auswählen. Für ein anderes $\tilde{a} \in A$ ist nach Definition einer Funktion immer $f^{-1}(a) \cap f^{-1}(\tilde{a}) = \emptyset$. Deshalb erhalten wir durch $a \mapsto n_a$ eine bijektive Abbildung von A auf eine Teilmenge $B \subset \mathbb{N}$. Diese Teilmenge ist höchstens abzählbar, und deshalb folgt dasselbe für A. □

Satz 2.5.5 *Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar unendlich.*

Beweis: Aus den vorstehenden Behauptungen folgt, dass die Menge $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist. Die Abbildung $(p, q) \mapsto p/q$ ist eine surjektive Abbildung von $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ auf $\mathbb{Q}$, und deshalb folgt mit Aufgabe 2.5.4 die Behauptung. □

Satz 2.5.6 *Falls A mindestens zwei Elemente hat, also etwa $A = \{0, 1\}$, dann ist die Menge aller Folgen in A überabzählbar.*

Beweis: Sei $F = \{f_1, f_2, \ldots\}$ eine (abzählbar unendliche) Menge von Folgen in A. Dann ist $f_k = (f_{k1}, f_{k2}, f_{k3}, \ldots)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Da A mindestens zwei Elemente hat, existiert ein $g = (g_1, g_2, g_3, \ldots)$ aus A, für die $g_n \neq f_{nn}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$. Das bedeutet, dass $g \neq f_k$ für alle k ist, also $g \notin F$. Somit kann eine abzählbar unendliche Menge von Folgen aus A niemals alle diese Folgen umfassen, woraus die Behauptung folgt. □

Bemerkung 2.5.7 *Wie wir später sehen werden, folgt aus obigem Satz, dass die Menge der reellen Zahlen in einem beliebig kleinen Intervall $[a, b]$ mit $a < b$ immer überabzählbar ist. Da ein solches Intervall nur abzählbar viele rationale Zahlen enthält, ist sogar die Menge der irrationalen Zahlen in $[a, b]$ überabzählbar.*

2.6 Einige Bezeichnungen und Identitäten

Definition 2.6.1 *Sind n reelle oder komplexe Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ gegeben, so bezeichnet im Folgenden $\sum_{j=1}^n a_j$ immer ihre Summe, und $\prod_{j=1}^n a_j$ ihr Produkt. Sinngemäß schreiben wir Summen und Produkte von Zahlen, deren Numerierung nicht bei 1, sondern z. B. bei 0 beginnt. Falls $n \leq 0$ ist, soll immer $\sum_{j=1}^n a_j = 0$ und $\prod_{j=1}^n a_j = 1$ gelten. Man sagt in Worten:* Eine leere Summe ist gleich 0, ein leeres Produkt gleich 1. *Allgemeiner: Ist J eine endliche Indexmenge, und ist $f : J \longrightarrow \mathbb{K}$, $j \mapsto f(j) = f_j$, eine beliebige Abbildung, so schreiben wir $\sum_{j \in J} f_j$ für die Summe der Zahlen f_j, und analog für das Produkt. Wegen der Kommutativität der Addition ist es dabei unerheblich, in welcher Reihenfolge wir die Zahlen addieren. Ist etwa $J = \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\}$, so ist ein $j \in J$ ein Zahlenpaar (i, k), und wir schreiben f_{ik} statt $f_{(i,k)}$. Die Summe dieser Zahlen ist dann eine sogenannte Doppelsumme, und wegen des Kommutativ- und des Assoziativgesetzes der Addition gilt*

$$\sum_{(i,k) \in J} f_{ik} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^m f_{ik} \right) = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^n f_{ik} \right).$$

Entsprechendes gilt auch für Produkte. Wir setzen weiter

$$n! = \prod_{j=1}^n j\,, \qquad \binom{\alpha}{n} = \frac{\prod_{j=0}^{n-1} (\alpha - j)}{n!} \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}_0,\ \alpha \in \mathbb{C}.$$

Wir lesen $n!$ als n-Fakultät und nennen $\binom{\alpha}{n}$ den Binomialkoeffizienten *von α über n. Es folgt speziell, dass $0! = 1$ ist, weil ein leeres Produkt den Wert 1 haben soll. Aus dem gleichen Grund hat der Binomialkoeffizient von α über 0 immer den Wert 1.*

Aufgabe 2.6.2 *Zeige für $n, m \in \mathbb{N}$ und $n \leq m$, dass*

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}.$$

Behauptung 2.6.3 *Für alle $a \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist $(1 - a) \sum_{j=0}^n a^j = 1 - a^{n+1}$.*

Beweis: $(1 - a) \sum_{j=0}^n a^j = \sum_{j=0}^n a^j - \sum_{j=0}^n a^{j+1} = \sum_{j=0}^n a^j - \sum_{j=1}^{n+1} a^j = 1 - a^{n+1}$. □

Behauptung 2.6.4 *Für alle $a, b \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt immer $b^{n+1} - a^{n+1} = (b-a) \sum_{j=0}^{n} a^j\, b^{n-j}$. Speziell ist $a^2 - b^2 = (a-b)\,(a+b)$.*

Beweis: Analog wie oben. □

Behauptung 2.6.5 (Allgemeine Dreiecksungleichung)
Für alle $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ gilt $|\sum_{j=1}^{n} a_j\,| \le \sum_{j=1}^{n} |a_j|$.

Beweis: Sicher richtig für $n = 1$. Mit der Dreiecksungleichung und der Induktionshypothese ergibt sich $|\sum_{j=1}^{n+1} a_j\,| \le |\sum_{j=1}^{n} a_j\,| + |a_{n+1}| \le \sum_{j=1}^{n} |a_j| + |a_{n+1}|$, also folgt die Behauptung mit Induktion über n. □

Behauptung 2.6.6 (Bernoullische Ungleichung) *Für alle reellen $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $(1+x)^n \ge 1 + n\,x$. Gleichheit gilt genau dann, wenn $x = 0$ oder $n = 0$ oder $n = 1$ ist.*

Beweis: Die Fälle $x = 0$ oder $n = 0$ oder $n = 1$ sind offensichtlich. In jedem anderen Fall folgt unter Benutzung der Induktionshypothese dass $(1+x)^{n+1} \ge (1+x)\,(1+n\,x) = 1+(n+1)\,x+n\,x^2 > 1+(n+1)\,x$, woraus die Behauptung folgt. □

Behauptung 2.6.7 *Für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ und $j \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\binom{\alpha}{j} + \binom{\alpha}{j-1} = \binom{\alpha+1}{j}.$$

Beweis: Folgt direkt aus der Definition der Binomialkoeffizienten. □

Behauptung 2.6.8 (Binomischer Lehrsatz) *Für alle $a, b \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j}\, b^j,$$

wenn man $a^0 = b^0 = (a+b)^0 = 1$ setzt.

Beweis: Die Formel ist richtig für $n = 0$, und unter Benutzung der Induktionshypothese sowie der vorhergehenden Behauptung folgt

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b) \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j}\, b^j \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{1+n-j}\, b^j + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j}\, b^{1+j} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{1+n-j}\, b^j + \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^{n-j+1}\, b^j, \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^{n+1-j}\, b^j.
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.6.9 (Division mit Rest) *Für alle $p \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $q \in \mathbb{Z}$ und $r \in \{0, \ldots, n-1\}$ mit*

$$p \;=\; n\,q \;+\; r.$$

Beweis: Wenn die behauptete Gleichung gilt, folgt $p/n = q + r/n$ und $0 \leq r/n < 1$. Also muss $q = [p/n]$ gelten, woraus die Eindeutigkeit von q, und dann auch von r, folgt. Umgekehrt, sei $q = [p/n]$, also $p/n = q + \xi$ mit $0 \leq \xi < 1$. Dann ist $p = n\,q + r$ mit $r = n\,\xi = p - n\,q \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq r < n$, woraus die Existenz der q und r folgt. □

Satz 2.6.10 (g-adische Zahldarstellung) *Sei $g \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Dann gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ eindeutig bestimmte Zahlen $p \in \mathbb{N}_0$ und $z_k \in \{0, 1, \ldots, g-1\}$, mit $0 \leq k \leq p$, so dass*

$$n \;=\; z_0 \;+\; z_1\,g \;+\; \ldots \;+\; z_p\,g^p \;=\; \sum_{j=0}^{p} z_j\,g^j \qquad z_p \neq 0.$$

Beweis: Die Behauptung ist richtig für $n \leq g-1$ (mit $p = 0$ und $z_0 = n$). Ist $n \geq g$, so existieren nach der vorhergehenden Proposition eindeutig bestimmte Zahlen $z_0 \in \{0, \ldots, g-1\}$ und $m \in \mathbb{Z}$ mit $n = m\,g + z_0$. Offenbar ist sogar $0 < m < n$. Eine Anwendung der Induktionshypothese auf die Zahl m ergibt dann die gewünschte Zerlegung für n. □

Kapitel 3

Polynome und Wurzelfunktionen

3.1 Funktionenräume

Definition 3.1.1 *Sei D eine beliebige nichtleere Menge. Für Abbildungen $f, g : D \longrightarrow \mathbb{K}$ seien $f+g, f\cdot g : D \longrightarrow \mathbb{K}$ definiert durch*

$$\forall\, x \in D : \begin{cases} (f+g)(x) &= f(x) + g(x), \\ (f\cdot g)(x) &= f(x)\, g(x). \end{cases}$$

Es liegt dabei nahe, eine Zahl α mit der konstanten Funktion *$f(x) = \alpha\ \forall\ x \in D$ zu identifizieren, so dass auch $\alpha \cdot g$ definiert ist. Ein $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$ heißt* gerade *bzw.* ungerade*, falls $D \subset \mathbb{K}$ ist mit $x \in D \Longrightarrow -x \in D$, und falls $f(x) = f(-x)$ bzw. $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in D$ gilt. Für $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$ sei $|f| : D \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $|f|(x) = |f(x)|$ für alle $x \in D$. Wir nennen f* beschränkt*, falls ein $K \in \mathbb{R}_+$ existiert mit $|f(x)| \le K$ für alle $x \in D$.*

Wir führen im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ noch folgende Bezeichnungen ein:

Definition 3.1.2 *Für $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ seien f^+, f^- definiert als*

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}\,, \qquad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\} \qquad \forall x \in D\,.$$

Für $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ schreiben wir $f \le g$ falls $f(x) \le g(x)$ für alle $x \in D$ gilt. Wir nennen f nach oben beschränkt*, falls ein $K \in \mathbb{R}$ existiert so dass $f(x) \le K$ für alle $x \in D$. Analog heißt f* nach unten beschränkt*, falls $-f$ nach oben beschränkt ist. Falls beides gilt, ist f offenbar beschränkt im oben definierten Sinn. Wir schreiben auch $\sup_{x\in D} f(x)$ statt $\sup f(D)$, und entsprechend $\inf_{x\in D} f(x)$, $\max_{x\in D} f(x)$, $\min_{x\in D} f(x)$, falls letztere existieren.*

Aufgabe 3.1.3 *Zeige für ein $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ die Gleichungen $|f| = f^+ + f^-$, $f = f^+ - f^-$.*

Aufgabe 3.1.4 *Sei $D \subset \mathbb{R}$, und sei $-D = \{-x : x \in D\}$, sowie $A = D \cap (-D)$; also ist A möglicherweise die leere Menge. Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ so, dass $f(x) = f(-x)\ \forall\ x \in A$. Zeige: Dann gibt es eine gerade Funktion $g : D \cup (-D) \longrightarrow \mathbb{R}$, welche auf D mit f übereinstimmt. Dieses g heißt* die gerade Fortsetzung *von f. Wann gibt es eine ungerade Fortsetzung von f? Finde heraus, wann die gerade bzw. ungerade Fortsetzung von f gleich f ist.*

Aufgabe 3.1.5 *Zeige: Die Summe zweier gerader bzw. ungerader Funktionen ist wieder gerade bzw. ungerade; das Produkt zweier gerader, aber auch zweier ungerader Funktionen ist gerade; das Produkt aus einer geraden und einer ungeraden Funktion ist ungerade.*

3.2 Polynome und rationale Funktionen

Definition 3.2.1 *Eine Funktion* $p : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ *heißt* ein Polynom, *falls es Zahlen* $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ *gibt mit*

$$\forall\, x \in \mathbb{K}: \quad p(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k,$$

wobei stets $x^0 = 1$ *gelten soll, und zwar auch für* $x = 0$. *Wir nennen dabei die* a_k Koeffizienten *von* p. *Falls alle* $a_k = 0$ *sind, folgt* $p(x) \equiv 0$, *und wir nennen dieses Polynom* das Nullpolynom *oder* die Nullfunktion. *Im anderen Fall können wir o. B. d. A. annehmen, dass* $a_n \neq 0$ *ist, und dann nennen wir* n den Grad *des Polynoms* p *und schreiben* $n = \deg p$. *Wir vereinbaren noch, dass der Grad des Nullpolynoms gleich* $-\infty$ *gesetzt sei. Polynome vom Grade* $n = 0$ *sind konstant, aber nicht identisch gleich* 0, *solche vom Grade* $n = 1$ *bzw.* $n = 2$ *heißen* lineare *bzw.* quadratische *Funktionen. Die Menge aller Polynome in der* Variablen *oder* Unbestimmten x *mit Koeffizienten in* $\mathbb{K}$ *wird mit* $\mathbb{K}[x]$ *bezeichnet, die Teilmenge der Polynome vom Grade höchstens gleich* n *sei* $\mathbb{K}_n[x]$, *für* $n \in \mathbb{N}_0$. *Sind* $p, q \in \mathbb{K}[x]$, *und ist* q *nicht das Nullpolynom, so ist der Quotient* p/q *überall dort definiert, wo* $q(x) \neq 0$ *ist. Wir nennen* p/q *eine* rationale Funktion, *und die Menge der* x *mit* $q(x) \neq 0$ *heißt ihr* natürlicher Definitionsbereich. *Die Menge der rationalen Funktionen sei mit* $\mathbb{K}(x)$ *bezeichnet. Beachte, dass die Bezeichnung der Unbestimmten völlig willkürlich ist. Wir werden daher im Fall* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *oft* $\mathbb{C}[z]$ *bzw.* $\mathbb{C}(z)$ *für die Menge der Polynome bzw. rationalen Funktionen mit Koeffizienten in* $\mathbb{C}$ *schreiben.*

Aufgabe 3.2.2 *Zeige:* $\mathbb{K}[x]$ *ist ein unendlich-dimensionaler Vektorraum über* $\mathbb{K}$, *ja sogar eine Algebra.*

Aufgabe 3.2.3 *Sei* $n \in \mathbb{N}_0$. *Zeige:* $\mathbb{K}_n[x]$ *ist ein Vektorraum über* $\mathbb{K}$ *der Dimension* $n + 1$.

Proposition 3.2.4 *Für ein* $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k \in \mathbb{K}[x]$ *und beliebiges* $x_0 \in \mathbb{K}$ *ist* $p(x + x_0) = \sum_{j=0}^{n} b_j\, x^j$, *mit*

$$b_j \;=\; \sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} a_k\, x_0^{k-j} \qquad \forall\, j = 0, \ldots, n;$$

also ist $p(x + x_0)$ *wieder in* $\mathbb{K}[x]$ *und hat den gleichen Grad wie* p.

Beweis: Es ist nach der binomischen Formel

$$(x + x_0)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x_0^{k-j}\, x^j, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}_0,$$

also folgt durch Vertauschung der Summationsreihenfolge

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\, (x + x_0)^k = \sum_{j=0}^{n} x^j \sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} a_k\, x_0^{k-j},$$

und daraus ergibt sich die Behauptung. □

Aufgabe 3.2.5 *Zeige: Jedes* $p \in \mathbb{K}[x]$ *läßt sich als* $p(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k\, (x - x_0)^k$ *schreiben, mit beliebig gegebenem* $x_0 \in \mathbb{K}$ *und eindeutig bestimmten Koeffizienten* $b_k = b_k(x_0) \in \mathbb{K}$.

Definition 3.2.6 *Sei $p \in \mathbb{K}[x]$. Wir nennen $x_0 \in \mathbb{K}$* Nullstelle von p, *wenn $p(x_0) = 0$ ist. Wir nennen x_0* eine Nullstelle m-ter Ordnung, *oder* Nullstelle der Vielfachheit m *von p, wenn es ein $q \in \mathbb{K}[x]$ gibt, so dass $p(x) = (x - x_0)^m\, q(x)$ für alle $x \in \mathbb{K}$ gilt, und $q(x_0) \neq 0$.*

Bemerkung 3.2.7 *Das Polynom $x^2 + 1$ hat offenbar in $\mathbb{R}$ keine Nullstelle, in $\mathbb{C}$ dagegen besitzt es zwei Nullstellen, nämlich i und $-i$. Wir werden in* Satz 8.5.1 *sehen, dass* jedes nicht konstante Polynom mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ besitzt.

Behauptung 3.2.8 *Sei $p \in \mathbb{K}[x]$ mit $\deg p = n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann hat jede Nullstelle x_0 von p eine eindeutig bestimmte Ordnung m, und $m \leq n$.*

Beweis: Wir können p nach Aufgabe 3.2.5 auch in der Form

$$p(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} b_k\, (x - x_0)^k$$

schreiben, mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $b_k = b_k(x_0) \in \mathbb{K}$. Ist x_0 Nullstelle, so ist $m = \min\{k : b_k \neq 0\} \geq 1$, und $p(x) = (x - x_0)^m\, q(x)$ mit $q(x_0) \neq 0$. Das bedeutet, dass x_0 Nullstelle der Ordnung $m \leq n$ ist. Die Eindeutigkeit der Nullstellenordnung ist leicht zu zeigen. □

Definition 3.2.9 *Sei $p \in \mathbb{K}_n[x]$ für ein $n \in \mathbb{N}$, und seien $x_1, \ldots, x_\mu \in \mathbb{K}$ verschiedene Nullstellen von p mit Vielfachheiten $m_1, \ldots, m_\mu$. Dann sagen wir: p* hat $m = \sum_1^\mu m_j$ Nullstellen in $\mathbb{K}$, *wenn wir entsprechend der Vielfachheit zählen, was normalerweise der Fall ist. Die Aussage, dass p höchstens n Nullstellen haben kann, ist also zu interpretieren als $\sum_1^\mu m_j \leq n$.*

Satz 3.2.10 (Nullstellen- und Identitätssatz für Polynome)
Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

(a) *Ein $p \in \mathbb{K}_n[x]$ hat höchstens n Nullstellen, außer wenn es das Nullpolynom ist.*

(b) *Zwei $p, q \in \mathbb{K}_n[x]$ mit $p(x_j) = q(x_j)$ für $n + 1$ verschiedene $x_j \in \mathbb{K}$, $0 \leq j \leq n$, haben dieselben Koeffizienten.*

Beweis: Zu (a): Die Behauptung ist sicher richtig für $n = 0$. Sei jetzt $n \geq 1$, sei p nicht das Nullpolynom, und sei x_0 eine Nullstelle von p der Ordnung m. Dann ist $p(x) = (x - x_0)^m\, q(x)$ mit einem Polynom q vom Grade höchstens gleich $n - m$ und $q(x_0) \neq 0$, und jede weitere Nullstelle von p ist auch Nullstelle von q. Daraus folgt die Behauptung mit vollständiger Induktion. Zu (b): Das Polynom $h = p - q \in \mathbb{K}_n[x]$ hat nach Voraussetzung $n + 1$ Nullstellen und muss deshalb wegen (a) das Nullpolynom sein. □

Bemerkung 3.2.11 *Sei $r \in \mathbb{K}(x)$, also eine rationale Funktion, gegeben. Nach dem Nullstellensatz kann das Nennerpolynom von r nur endlich viele Nullstellen haben. Also ist der natürliche Definitionsbereich von r gleich $\mathbb{K} \setminus N$, wobei N eine endliche, evtl. sogar leere, Teilmenge von $\mathbb{K}$ ist.*

Aufgabe 3.2.12 *Zeige für $p, q, \nu \in \mathbb{N}_0$ die Formel*

$$\binom{p+q}{\nu} \;=\; \sum_{j=0}^{\nu} \binom{p}{j} \binom{q}{\nu - j}.$$

Lösung: Es gilt offenbar $(1+x)^p\,(1+x)^q = (1+x)^{p+q}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und

$$\begin{aligned}(1+x)^p\,(1+x)^q &= \left[\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}x^j\right]\left[\sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}x^k\right]\\ &= \sum_{\nu=0}^{p+q}x^\nu\sum_{j=0}^{\nu}\binom{p}{j}\binom{q}{\nu-j}.\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung mit Koeffizientenvergleich. □

Aufgabe 3.2.13 (Polynomdivision) *Seien* $p, q \in \mathbb{K}[x]$, *und sei* $\deg q \geq 1$. *Zeige: Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome* q_1 *und* r, *sodass*

$$p = q_1\,q + r\,,$$

und r *ist entweder das Nullpolynom, oder* $\deg r < \deg q$. *Vergleiche dies mit* Proposition 2.6.9.

Aufgabe 3.2.14 *Zeige, dass die Menge* $\mathbb{K}(x)$ *der rationalen Funktionen mit Koeffizienten in* $\mathbb{K}$ *ein Körper ist.*

Aufgabe 3.2.15 *Zeige: Sind* $p, q \in \mathbb{K}[x]$, *so ist* $p\,q \in \mathbb{K}[x]$, *und es gilt*

$$\deg(p\,q) = \deg p + \deg q,$$

auch falls eines der Polynome das Nullpolynom ist.

3.3 Interpolation mit Polynomen

In diesem Abschnitt seien $n+1$ verschiedene Zahlen $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ (die *Stützstellen*) und ebenso viele (nicht unbedingt verschiedene) Werte $p_0, \ldots, p_n \in \mathbb{K}$ fest gegeben. Unter dem Problem der *Polynominterpolation* versteht man die Aufgabe, ein Polynom möglichst kleinen Grades zu finden, welches an den Stellen x_k die gegebenen Werte p_k annimmt.

Satz 3.3.1 (Hauptsatz der Polynominterpolation) *Zu* $n+1$ *verschiedenen Stützstellen* $x_0, \ldots, x_n$ *und beliebigen Werten* $p_0, \ldots, p_n$ *gibt es genau ein* $p \in \mathbb{K}_n[x]$ *mit* $p(x_k) = p_k$, *für* $0 \leq k \leq n$.

Beweis: Setze

$$L_k(x) = \prod_{j \neq k}\frac{x - x_j}{x_k - x_j}\,, \qquad 0 \leq k \leq n.$$

Dann ist offenbar $L_k \in \mathbb{K}_n[x]$ und

$$L_k(x_\nu) = \delta_{k\nu} = \begin{cases} 1 & (k = \nu),\\ 0 & (k \neq \nu).\end{cases}$$

Daraus folgt, dass $p(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k\,L_k(x)$ ein Polynom mit den gewünschten Eigenschaften ist. Die Eindeutigkeit folgt mit Satz 3.2.10. □

Definition 3.3.2 *Die Formel $p(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k \, L_k(x)$ heißt* Lagrangesche Darstellung des Interpolationspolynoms. *Sie ist für die konkrete Berechnung von p weniger geeignet als die in den folgenden Aufgaben untersuchte* Newtonsche Darstellung.

Aufgabe 3.3.3 *Seien x_k und p_k wie oben, und sei p das zugehörige Interpolationspolynom. Zeige: Es gibt eindeutig bestimmte Zahlen $b_k \in \mathbb{K}$ so, dass für alle $x \in \mathbb{K}$ gilt*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j),$$

wobei die übliche Konvention zu beachten ist, dass ein leeres Produkt den Wert 1 haben soll. Diskutiere insbesondere, wieweit sich die b_k (nicht) ändern, wenn man eine weitere Stützstelle hinzunimmt. Diese Formel heißt Newtonsche Darstellung des Interpolationspolynoms.

Aufgabe 3.3.4 *Berechne das Interpolationspolynom zu den Daten $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ sowie $p_0 = 0$, $p_1 = 1$, $p_2 = 2$.*

3.4 Monotone Funktionen

Im Folgenden sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$.

Definition 3.4.1 *Die Funktion f heißt auf D* monoton wachsend *bzw.* monoton fallend, *falls*

$$x, y \in D, \; x < y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \; \leq \; f(y) \quad \text{bzw.} \quad f(x) \geq f(y).$$

Falls sogar immer $f(x) < f(y)$ bzw. $f(x) > f(y)$ gilt, heißt f streng monoton *wachsend bzw. fallend. Beachte, dass streng monotone Funktionen immer injektiv sind.*

Aufgabe 3.4.2 *Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f(x) = x^n$ auf dem Intervall $[0, \infty)$ streng monoton wächst.*

Lösung: Es gilt $y^n - x^n = (y - x) \sum_0^{n-1} x^{n-1-k} \, y^k$, und für $0 \leq x < y$ ist die rechtsstehende Summe positiv. Daher folgt die Behauptung. $\square$

Aufgabe 3.4.3 *Zeige, dass f genau dann monoton wächst, wenn $-f$ monoton fällt. Gilt Gleiches auch für strenge Monotonie?*

Aufgabe 3.4.4 *Zeige: Ist $f(x) > 0$ für alle $x \in D$, so ist f genau dann monoton wachsend, wenn $1/f$ monoton fällt. Gilt Gleiches auch für strenge Monotonie?*

Aufgabe 3.4.5 *Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f(x) = x^{-n}$ auf dem Intervall $(0, \infty)$ streng monoton fällt.*

3.5 Wurzelfunktionen

Der Inhalt der folgenden Proposition wurde für $n = 2$ bereits in Kapitel 1 bewiesen; vergleiche dazu Beispiel 1.4.6, Behauptung 1.4.7 und die Definition der Quadratwurzel auf Seite 14.

Proposition 3.5.1 *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ bildet die Abbildung $x \mapsto x^n$ das Intervall $[0, \infty)$ bijektiv auf sich selbst ab.*

Beweis: Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen, deshalb sei jetzt $n \geq 2$ angenommen. Da wir schon gezeigt haben, dass die Abbildung streng monoton wachsend ist, folgt sofort die Injektivität. Um die Surjektivität zu zeigen, sei ein $y_0 \in [0, \infty)$ gegeben. Wegen $0^n = 0$ können wir annehmen, dass $y_0 > 0$ ist. Die Menge $M = \{x : \; x^n \leq y_0\}$ ist sicher nicht leer und nach oben beschränkt (entweder durch 1 oder y_0). Aus dem Vollständigkeitsaxiom schließen wir, dass M ein Supremum x_0 besitzt, und wir wollen $x_0^n = y_0$ zeigen. Dazu sei $\varepsilon > 0$ (klein) gegeben. Dann muss $(x_0 + \varepsilon)^n > y_0$ sein, denn sonst wäre x_0 keine obere Schranke für M. Aber wir haben für $\varepsilon \leq 1$:

$$\begin{aligned}(x_0 + \varepsilon)^n &= x_0^n + \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m} x_0^{n-m}\, \varepsilon^m \\ &\leq x_0^n + \varepsilon \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m} x_0^{n-m} = x_0^n + \varepsilon[(x_0+1)^n - x_0^n].\end{aligned}$$

Wäre jetzt $x_0^n < y_0$, so könnten wir ε so klein wählen, dass auch $(x_0 + \varepsilon)^n < y_0$ wäre, was nicht sein kann. Deshalb folgt $x_0^n \geq y_0$. Andererseits ist nach der Bernoullischen Ungleichung

$$(x_0 - \varepsilon)^n \;=\; x_0^n (1 - \varepsilon/x_0)^n \;>\; x_0^n (1 - n\,\varepsilon/x_0) \;=\; x_0^n - n\,\varepsilon\, x_0^{n-1}.$$

Daraus sehen wir, dass bei Annahme von $x_0^n > y_0$ ein $\varepsilon > 0$ existieren würde, für welches $(x_0 - \varepsilon)^n > y_0$ wäre, was der Tatsache widerspricht, dass x_0 kleinste obere Schranke für M ist. Deshalb ist in der Tat $x_0^n = y_0$. □

Definition 3.5.2 *Sei eine natürliche Zahl $n \geq 2$ gegeben. Nach der vorstehenden Proposition schließen wir, dass die Umkehrfunktion von $x \mapsto x^n$ auf $[0, \infty)$ definiert ist. Wir nennen sie* die n-te Wurzelfunktion *und schreiben auch $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ für die n-te Wurzel einer Zahl $x \geq 0$. Diese Definition stimmt für $n = 2$ mit der früheren Definition der Quadratwurzel überein.*

Aufgabe 3.5.3 *Finde heraus, für welche $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung $x \mapsto x^n$ auf ganz $\mathbb{R}$ bijektiv ist, sodass sich die n-te Wurzelfunktion auch für negative x definieren läßt.*

3.6 Arithmetisches und geometrisches Mittel

Definition 3.6.1 *Für $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ heißt*

$$A(x_1, \ldots, x_n) \;=\; \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j$$

das arithmetische Mittel *der Zahlen x_j. Falls alle $x_j \geq 0$ sind, heißt*

$$G(x_1, \ldots, x_n) \;=\; \sqrt[n]{\prod\nolimits_{j=1}^{n} x_j}$$

das geometrische Mittel *der Zahlen x_j.*

Offenbar gilt immer

$$\min\{x_1,\ldots,x_n\} \;\le\; \left\{ \begin{array}{c} A(x_1,\ldots,x_n) \\ G(x_1,\ldots,x_n) \end{array} \right\} \;\le \max\{x_1,\ldots,x_n\}.$$

Der nächste Satz zeigt, dass das arithmetische Mittel immer der größere der beiden Mittelwerte ist, und er gibt an, wann beide gleich sind. Für $n=2$ folgt aus diesem Satz, dass der Flächeninhalt eines Rechtecks mit festem Umfang dann am größten ist, wenn es ein Quadrat ist.

Satz 3.6.2 (AGM-Ungleichung) *Für $x_1,\ldots,x_n \ge 0$ ist immer*

$$G(x_1,\ldots,x_n) \;\le\; A(x_1,\ldots,x_n)$$

und Gleichheit tritt genau dann ein, wenn alle x_j gleich sind.

Beweis: Der Satz ist trivialerweise richtig für $n=1$, und wir zeigen jetzt induktiv die Richtigkeit für ein $n \ge 2$. Offenbar ist die Behauptung stets richtig, wenn alle $x_j = 0$ sind, und deshalb sei angenommen dass $A(x_1,\ldots,x_n) > 0$ ist. Für $\lambda \ge 0$ ist immer

$$A(\lambda\, x_1,\ldots,\lambda\, x_n) \;= \lambda\, A(x_1,\ldots,x_n), \quad G(\lambda\, x_1,\ldots,\lambda\, x_n) \;= \lambda\, G(x_1,\ldots,x_n),$$

und deshalb können wir o. B. d. A. $A(x_1,\ldots,x_n)=1$ voraussetzen. Falls alle $x_j = 1$ sind, ist nichts mehr zu zeigen, und deshalb sei jetzt angenommen, dass $x_{n-1} = 1-\alpha$ sowie $x_n = 1+\beta$ gilt, mit $\alpha,\beta > 0$. Wegen $n = \sum_{j=1}^n x_j$ folgt daraus mit $x'_{n-1} = 1+\beta-\alpha = x_{n-1}+x_n-1$ dass $\sum_{j=1}^{n-2} x_j + x'_{n-1} = n-1$ ist (wobei die Summe für $n=2$ leer ist, also den Wert 0 hat). Aus der Induktionshypothese, angewandt auf die Zahlen $x_1,\ldots,x_{n-2},x'_{n-1}$, schließen wir dann dass

$$x'_{n-1} \prod_{j=1}^{n-2} x_j \;\le\; 1\,.$$

Es ist aber $x_{n-1}\, x_n = 1+\beta-\alpha-\alpha\,\beta < 1+\beta-\alpha = x'_{n-1}$, woraus die Behauptung für n folgt. □

Korollar zu Satz 3.6.2 *Für $a \ge 0$, $a \ne 1$, $n,p \in \mathbb{N}$ und $1 \le p < n$ gilt immer*

$$\sqrt[n]{a^p} \;<\; 1 \;+\; \frac{p}{n}(a-1) \;=\; \frac{n-p}{n} \;+\; \frac{p\,a}{n}\,.$$

Beweis: Folgt aus der AGM-Ungleichung, angewandt auf die Zahlen $x_j = a$, bzw. $=1$, für $1 \le j \le p$, bzw. $p+1 \le j \le n$. □

Aufgabe 3.6.3 *Zeige mit Hilfe der AGM-Ungleichung für $n,p \in \mathbb{N}$ mit $n \ge 2p$, dass*

$$\sqrt[n]{n^p} \;< 1 \;+\; \frac{2p}{\sqrt{n}}\,.$$

Aufgabe 3.6.4 *Für $x_1,\ldots,x_n > 0$ heißt*

$$H(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{A(1/x_1,\ldots,1/x_n)}$$

das harmonische Mittel *der Zahlen x_j. Zeige mit der AGM-Ungleichung $H(x_1,\ldots,x_n) \le G(x_1,\ldots,x_n)$, mit Gleichheitszeichen genau dann, wenn alle x_j gleich sind.*

Kapitel 4

Zahlenfolgen

Wie schon in den vorherigen Kapiteln, steht im Folgenden das Symbol $\mathbb{K}$ immer für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Für diese Vorlesung ist es meistens ausreichend, sich den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vorzustellen. Konvergenz komplexer Zahlenfolgen und -reihen spielt aber in den Vorlesungen über *Funktionentheorie* eine zentrale Rolle und ist formal genauso definiert wie im reellen Fall. Deshalb wollen wir diesen Fall hier gleich mitbehandeln.

4.1 Nullfolgen

Definition 4.1.1 *Eine Folge (x_n) in $\mathbb{K}$ heißt* eine Nullfolge, *falls gilt*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{R}_+ \quad \forall\, n \in \mathbb{N}: \quad n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |x_n| < \varepsilon\,. \tag{4.1.1}$$

Ist dies der Fall, so sagen wir auch, dass (x_n) gegen 0 strebt *oder* gegen 0 konvergiert, *und wir schreiben*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \;=\; 0 \qquad \text{oder} \qquad x_n \;\longrightarrow\; 0 \quad (n \to \infty).$$

Wir nennen die Folge (x_n) beschränkt, *falls es ein $K \in \mathbb{R}_+$ gibt mit $|x_n| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Behauptung 4.1.2

(a) *Die Folge $(x_n = 1/n)$ ist eine Nullfolge.*

(b) *Für jedes $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < 1$ ist (x^n) eine Nullfolge.*

Beweis: Zu (a): Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert nach dem Satz von Archimedes ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > 1/\varepsilon$, und dann gilt für alle $n \geq n_0$, dass $n > 1/\varepsilon$ und somit $1/n < \varepsilon$ ist. Zu (b): Setze $1/|x| = 1 + h$, dann ist $h > 0$, und mit der Bernoullischen Ungleichung folgt $1/|x|^n > 1 + n\,h$. Also ist $|x|^n < 1/(1 + n\,h) < \varepsilon$, und für $\varepsilon > 0$ ist $1/(1 + n\,h) < \varepsilon$ genau dann richtig, wenn $n > (1/\varepsilon - 1)/h$ ist, woraus wie oben die Behauptung folgt. □

Lemma 4.1.3 *Gegeben seien Folgen (x_n) und (y_n) in $\mathbb{K}$. Dann gilt:*

(a) *Ist (x_n) Nullfolge, und gibt es $C \in \mathbb{R}_+$und $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt $|y_n| \leq C\,|x_n|$, dann ist auch (y_n) eine Nullfolge.*

(b) *Ist (x_n) eine Nullfolge, und ist (y_n) beschränkt, so ist $(x_n\, y_n)$ ebenfalls eine Nullfolge.*

(c) *Sind beide Folgen Nullfolgen, so ist auch* $(x_n + y_n)$ *eine Nullfolge.*

(d) *Ist* (x_n) *Nullfolge, und ist* $m \in \mathbb{N}$*, so ist auch* $\sqrt[m]{|x_n|}$ *Nullfolge.*

Beweis: Zu (a): Zu $\varepsilon > 0$ gibt es nach Definition ein $N \in \mathbb{R}_+$, so dass für alle $n \geq N$ gilt $|x_n| < \varepsilon/C$, und dann gilt auch $|y_n| < \varepsilon$, wenn nur $n \geq \max\{N, n_0\}$ ist. Zu (b): Ist $|y_n| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $|x_n\, y_n| \leq K\,|x_n|$ für alle n, und mit (a) folgt die Behauptung. Zu (c): Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung gibt es $N_x, N_y \in \mathbb{R}_+$, für die $|x_n| < \varepsilon/2$, bzw. $|y_n| < \varepsilon/2$ gilt, falls nur $n \geq N_x$, bzw. $n \geq N_y$ ist. Nach der Dreiecksungleichung ist $|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| < \varepsilon$, falls $n \geq \max\{N_x, N_y\}$ ist, woraus die Behauptung folgt. Zu (d): Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung gibt es ein $N \in \mathbb{R}_+$, so dass $|x_n| < \varepsilon^m$ ist, falls nur $n \geq N$ gilt. Daraus folgt die Behauptung. □

Behauptung 4.1.4 *Für jedes* $p \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$x_n \;=\; \sqrt[n]{n^p} \;-\; 1 \quad\longrightarrow\; 0 \quad (n \to \infty).$$

Beweis: Nach Aufgabe 3.6.3 ist $0 < x_n < 2p/\sqrt{n}$, woraus die Behauptung folgt. □

Behauptung 4.1.5 *Für jedes* $x \in \mathbb{K}$ *mit* $|x| < 1$ *und jedes* $p \in \mathbb{N}$ *ist* $(n^p\, x^n)$ *eine Nullfolge.*

Beweis: Wir setzen $1/|x| = 1 + \varepsilon$. Aus der vorhergehenden Behauptung folgt $\sqrt[n]{n^p} < 1 + \varepsilon/2$ für alle $n \geq n_0$. Daraus ergibt sich $n^p\,|x|^n < (1+\varepsilon/2)^n/(1+\varepsilon)^n = y^n$ mit $y = (1+\varepsilon/2)/(1+\varepsilon) < 1$. Daraus aber folgt die Behauptung. □

Aufgabe 4.1.6 *Zeige: Für beliebiges* $a \in \mathbb{R}$ *und* $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *ist* $(x_n = (a + n\,b)^{-1})$ *eine Nullfolge, außer wenn* $-a/b \in \mathbb{N}$ *ist, denn dann ist* x_n *nicht für alle* $n \in \mathbb{N}$ *definiert!*

Aufgabe 4.1.7 *Zeige: Für beliebiges* $x \in \mathbb{R}$ *ist* $(x^n/n!)$ *eine Nullfolge.*

4.2 Konvergente Folgen

Definition 4.2.1 *Eine Folge* (x_n) *in* $\mathbb{K}$ *heißt* konvergent*, wenn ein* $x \in \mathbb{K}$ *existiert, für welches die Folge* $(x_n - x)$ *eine Nullfolge ist. Ein solches* x *heißt dann* Grenzwert *oder* limes *der Folge. Wir schreiben dann auch* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *oder* $x_n \longrightarrow x$ $(n \to \infty)$*, oder gelegentlich auch kürzer aber ungenau* $\lim x_n = x$ *oder* $x_n \longrightarrow x$*. Eine Folge* (x_n) *in* $\mathbb{K}$ *heißt* divergent*, wenn sie nicht konvergiert.*

Satz 4.2.2

(a) *Eine Folge hat höchstens einen Grenzwert.*

(b) *Eine Nullfolge ist konvergent; ihr Grenzwert ist gleich* 0.

(c) *Eine konvergente Folge ist beschränkt.*

(d) *Eine Folge komplexer Zahlen konvergiert genau dann, wenn die Folgen der Real- und Imaginärteile beide konvergieren.*

Beweis: Zu (a): Seien x und $\tilde{x}$ Grenzwerte einer Folge (x_n). Dann gilt

$$|x - \tilde{x}| = |x - x_n + x_n - \tilde{x}| \leq |x - x_n| + |x_n - \tilde{x}|.$$

Nach Voraussetzung gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{R}_+$, so dass für alle $n \geq N$ gilt $|x - x_n| < \varepsilon/2$ und auch $|x_n - \tilde{x}| < \varepsilon/2$. Also folgt $|x - \tilde{x}| < \varepsilon$, und da ε beliebig klein sein kann, folgt hieraus $x = \tilde{x}$. Zu (b): Ist klar nach Definition der Konvergenz. Zu (c): Sei (x_n) konvergent, und sei x der Grenzwert. Dann gibt es ein n_0 derart, dass für alle $n \geq n_0$ gilt $|x_n - x| < 1$, also $|x_n| \leq |x| + |x_n - x| < |x| + 1$ für diese n. Daraus folgt dass $|x_n| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wenn wir $K = \max\{|x| + 1, |x_1|, \ldots, |x_{n_0-1}|\}$ setzen. Zu (d): Seien $z_n = x_n + i\, y_n \in \mathbb{C}$ für $n \geq 1$. Sei angenommen, dass (z_n) gegen $z = x + i\, y$ konvergiert, also $(z_n - z)$ eine Nullfolge ist. Wegen (1.8.1) folgt daraus, dass auch $(x_n - x)$ und $(y_n - y)$ Nullfolgen sind. Umgekehrt folgt aus der Konvergenz von (x_n) und (y_n) gegen x bzw. y, dass $(x_n - x)$ und $(y_n - y)$ Nullfolgen sind, und dann folgt mit (1.8.1) dass $(z_n - z)$ ebenfalls Nullfolge ist, d. h. dass (z_n) gegen z konvergiert. □

Die folgenden *Rechenregeln für Grenzwerte* sind so zu lesen, dass die Existenz der links stehenden Grenzwerte die Existenz der auf der rechten Seite impliziert, und dass die angegebene Gleichung gilt.

Behauptung 4.2.3 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x, \quad \lambda \in \mathbb{K} \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} (\lambda\, x_n) = \lambda\, x.$

Beweis: Folgt, weil $\lambda\, x_n - \lambda\, x = \lambda\, (x_n - x)$ ist, und weil die rechte Seite eine Nullfolge ist. □

Behauptung 4.2.4 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x, \quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y.$

Beweis: Folgt aus $|x_n + y_n - (x + y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y|$. □

Behauptung 4.2.5 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x, \quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} (x_n\, y_n) = x\, y.$

Beweis: Folgt aus $|x_n\, y_n - x\, y| \leq |x_n - x||y| + |x_n||y_n - y|$ und der Tatsache, dass konvergente Folgen beschränkt sind. □

Behauptung 4.2.6 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geq n_0 : \; x_n \neq 0.$

Beweis: Sei $\varepsilon = |x|$, dann existiert ein n_0, so dass für $n \geq n_0$ gilt $|x_n - x| < \varepsilon/2$, und wegen $|x_n| \geq |x| - |x_n - x| \geq \varepsilon/2 = |x|/2$ folgt die Behauptung. □

Behauptung 4.2.7 *Seien alle $x_n \neq 0$, und gelte $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$. Dann ist auch die Folge der Kehrwerte $(1/x_n)$ konvergent, und $\lim\limits_{n\to\infty} 1/x_n = 1/x$.*

Beweis: Aus dem Beweis der vorhergehenden Behauptung folgt, dass $|x_n| \geq |x|/2$ für alle $n \geq n_0$ ist. Daraus aber folgt die Beschränktheit von $(1/x_n)$. Die Konvergenz gegen $1/x$ folgt dann wegen $1/x_n - 1/x = (x - x_n)/(x\, x_n)$ und Lemma 4.1.3 (b). □

Behauptung 4.2.8 *Seien jetzt $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y, \quad x_n \le y_n \quad \forall\, n \ge n_0 \qquad \Longrightarrow \qquad x \le y.$$

Beweis: Wir zeigen folgende Aussage: Ist $x > y$, so folgt $x_n > y_n$ für alle großen n. Dazu sei $\varepsilon = x - y$ gesetzt. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{R}_+$ so, dass für alle $n \ge N$ gilt $|x - x_n| < \varepsilon/2$ und $|y - y_n| < \varepsilon/2$. Daraus folgt $x_n - y_n \ge x - y - (|x_n - x| + |y_n - y|) > 0$, für alle $n \ge N$. □

Satz 4.2.9 (Sandwich-Satz) *Seien (x_n^+), (x_n^-) und (y_n) Folgen in $\mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} x_n^+ = \lim_{n\to\infty} x_n^- = x, \quad x_n^- \le y_n \le x_n^+ \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = x.$$

Beweis: Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{R}_+$ so, dass $|x_n^\pm - x| < \varepsilon$ für alle $n \ge N$ gilt. Dann gilt aber auch $|y_n - x| < \varepsilon$, und daher folgt die Behauptung. □

Aufgabe 4.2.10 *Zeige die Konvergenz und berechne den Grenzwert der Folge (x_n) definiert durch $x_n = (n-1)/(n+1)$.*

Aufgabe 4.2.11 *Seien p und q Polynome, und sei $q(n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Untersuche die Konvergenz der Folge $(x_n = p(n)/q(n))$ und berechne gegebenenfalls ihren Grenzwert.*

Aufgabe 4.2.12 *Zeige, dass aus dem Beweis von* Behauptung 4.2.8 *die folgende bessere Aussage folgt:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \ \lim_{n\to\infty} y_n = y, \ x_n \le y_n \quad \text{für unendlich viele } n \qquad \Longrightarrow \qquad x \le y\,.$$

Aufgabe 4.2.13 *Schließe aus* Behauptung 4.1.4, *dass $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ gilt.*

4.3 Teilfolgen, Umordnungen und triviale Abänderungen

Definition 4.3.1 *Sei (x_n) eine beliebige Folge aus $\mathbb{K}$.*

Sei $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ streng monoton wachsend. Dann heißt die Folge $(x_{\phi(n)})$ eine Teilfolge *von (x_n).*

Sei $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ bijektiv. Dann heißt die Folge $(x_{\phi(n)})$ eine Umordnung *von (x_n).*

Sei (y_n) eine Folge aus $\mathbb{K}$ mit $y_n = x_n$ für alle $n \ge n_0$. Dann heißt (y_n) eine triviale Abänderung von *(x_n).*

Satz 4.3.2 *Sei (x_n) konvergent zum Grenzwert x. Dann ist auch jede Teilfolge, jede Umordnung und jede triviale Abänderung von (x_n) konvergent und hat den gleichen Grenzwert x.*

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$, und sei $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \ge n_0$ gilt $|x_n - x| < \varepsilon$. Sei $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ entweder streng monoton oder bijektiv. Dann kann $\phi(n) < n_0$ nur für endlich viele n richtig sein. Daher muss es ein $n_1 \in \mathbb{N}$ geben, für welches $\phi(n) \ge n_0$ ist für alle $n \ge n_1$, und für solche n folgt $|x_{\phi(n)} - x| < \varepsilon$. Also ist $\lim x_{\phi(n)} = x$. Sei jetzt (y_n) eine triviale Abänderung von (x_n), also $y_n = x_n$ für alle $n \ge n_1$, und seien ε und n_0 wie oben. Dann ist offenbar $|y_n - x| < \varepsilon$ für alle $n \ge \max\{n_0, n_1\}$, woraus die Behauptung folgt. □

Aufgabe 4.3.3 *Zeige: Ist* (x_n) *eine beliebige Folge in* $\mathbb{K}$*, so sind* (x_{2n}) *und* (x_{2n+1}) *Teilfolgen.*

Aufgabe 4.3.4 *Zeige: Ist* (x_n) *eine beliebige Folge in* $\mathbb{K}$*, so ist* (y_n) *mit*

$$y_n = \begin{cases} x_{n-1} & \text{für } n \text{ gerade,} \\ x_{n+1} & \text{für } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

eine Umordnung von (x_n)*.*

Aufgabe 4.3.5 *Sei* $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *beliebig. Finde eine genaue Bedingung, unter welcher der Schluss*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_{\phi(n)} = x$$

für alle Folgen in $\mathbb{K}$ *richtig ist. Hinweis: Analysiere den Beweis des vorstehenden Satzes, um diese Bedingung zu finden.*

4.4 Bestimmt divergente und monotone Folgen

In diesem Abschnitt betrachten wir stets reelle Zahlenfolgen.

Definition 4.4.1 *Eine Folge* (x_n) *in* $\mathbb{R}$ *heißt* bestimmt divergent*, oder auch* uneigentlich konvergent*, gegen* ∞*, wenn gilt*

$$\forall\, K \in \mathbb{R}_+ \;\exists\, N \in \mathbb{R}_+ \;\forall\, n \in \mathbb{N} : n \geq N \implies x_n \geq K.$$

Wir schreiben dann auch $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ *oder* $x_n \longrightarrow \infty$ $(n \to \infty)$*. Wenn* $\lim\limits_{n\to\infty} -x_n = \infty$ *ist, sagen wir auch sinngemäß, dass die Folge* (x_n) *gegen* $-\infty$ *bestimmt divergiert.*

Aufgabe 4.4.2 *Zeige: Die Folge* $(x_n = n)$ *ist bestimmt divergent gegen* ∞*. Finde ein Beispiel einer Folge, welche divergent aber nicht bestimmt divergent ist.*

Da Folgen spezielle Funktionen sind (mit Definitionsbereich $\mathbb{N}$), ist nach Abschnitt 3.4 klar, was wir unter monotonen Folgen verstehen – allerdings sei betont, dass Monotonie nur für reelle Folgen sinnvoll ist!

Satz 4.4.3 (Konvergenzkriterium für monotone Folgen)
Eine monotone Folge (x_n) *in* $\mathbb{R}$ *ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist. Ist dies der Fall, so ist ihr Grenzwert gleich* $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$*, falls die Folge wachsend ist, bzw. gleich* $\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$*, falls sie fallend ist. Ist die Folge monoton und unbeschränkt, so ist sie bestimmt divergent, und zwar gegen* ∞ *bzw.* $-\infty$*, wenn sie wächst bzw. fällt.*

Beweis: O. B. d. A. sei die Folge wachsend (sonst betrachte die Folge $(-x_n)$), und sei $\xi = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

1. Fall: $\xi = \infty$. Sei $K \in \mathbb{R}_+$, dann gibt es nach der Definition des Supremums ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_{n_0} \geq K$. Wegen der Monotonie folgt dann aber $x_n \geq K$ für alle $n \geq n_0$, und daher ist die Folge bestimmt divergent gegen ∞.

2. Fall: $\xi \in \mathbb{R}$. Sei $\varepsilon > 0$, dann gibt es nach der Definition des Supremums ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_{n_0} > \xi - \varepsilon$. Wieder folgt mit der Monotonie $x_n > \xi - \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$, aber $x_n \leq \xi$ aufgrund der Definition von ξ. Daraus folgt die Konvergenz der Folge gegen ξ.

Da die Fallunterscheidung vollständig ist, folgt die Behauptung. $\square$

Proposition 4.4.4 (Quadratwurzeliteration) *Seien $x_0, a \in \mathbb{R}_+$, und sei*

$$x_{n+1} \;=\; \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2} \qquad \forall\, n \geq 0.$$

Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

Beweis: Offenbar ist x_{n+1} das arithmetische Mittel von x_n und a/x_n und deshalb nach der AGM-Ungleichung nicht kleiner als das geometrische Mittel, und dieses ist $\sqrt{a}$. Also folgt $x_n \geq \sqrt{a}$ für $n \geq 1$. Das bedeutet aber $x_n^2 \geq a$ oder $x_n \geq a/x_n$, woraus $x_{n+1} \leq x_n$ folgt, jedenfalls für $n \geq 1$. Darum ist die Folge (x_n) nach Satz 4.4.3 konvergent. Sei b der Grenzwert der Folge, dann ist $b \geq \sqrt{a}$, also sicher nicht gleich 0. Aus der Rekursion folgt für $n \to \infty$ die Gleichung $2b = b + a/b$, und daraus folgt $b^2 = a$. □

Aufgabe 4.4.5 *Sei $x_n = \sqrt[n]{x}$, für ein $x \in \mathbb{R}_+$. Zeige: Für $x > 1$ ist die Folge (x_n) ist streng monoton fallend und es gilt immer $x_n > 1$, für $x < 1$ ist sie streng monoton wachsend und erfüllt $x_n < 1$, und für $x = 1$ ist die Folge konstant. Insbesondere ist die Folge in jedem Fall monoton und beschränkt, also konvergent. Benutze* Aufgabe 4.2.13 *zusammen mit dem Sandwich-Satz um zu zeigen, dass immer $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ ist.*

4.5 Die Exponentialfunktion im Reellen

Proposition 4.5.1 *Für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ ist die Folge (x_n) mit*

$$x_n \;=\; (1 \;+\; x/n)^n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

beschränkt. Für $x \neq 0$ und $n > -x$ ist sie streng monoton wachsend.

Beweis: Für $x = 0$ ist nicht zu zeigen, und deshalb sei jetzt $x \neq 0$ angenommen. Für $n > -x$ ist $1+x/n > 0$, und dann ist $\sqrt[n+1]{x_n}$ gleich dem geometrischen Mittel der $n+1$ Zahlen $a_k = 1 + x/n$, $1 \leq k \leq n$, und $a_{n+1} = 1$. Dieses Mittel ist nach der AGM-Ungleichung echt kleiner als das entsprechende arithmetische Mittel, und dieses ist gleich $(n + 1 + x)/(n + 1)$. Diese Zahl ist aber wiederum das arithmetische Mittel der $n + 1$ *gleichen* Zahlen $b_k = 1 + x/(n + 1)$, $1 \leq k \leq n + 1$, und das *ist gleich* dem geometrische Mittel. Letzteres ist aber gleich $\sqrt[n+1]{x_{n+1}}$. Dies ist gleichbedeutend mit der strengen Monotonie der x_n für $n > -x$. Zur Beschränktheit: Falls $x \leq 0$ und n groß ist, ist $0 < 1 + x/n \leq 1$, und somit $x_n \leq 1$ für alle n. Falls $x > 0$ ist, ist $(1 + x/n)^n\,(1 - x/n)^n = (1 - x^2/n^2)^n < 1$ für große n. Da $(1 - x/n)^n$ für $n \geq n_0 > x$ streng monoton wächst, folgt für diese n dass $(1 - x/n)^n > (1 - x/n_0)^{n_0}$ ist. Daraus folgt die Beschränktheit von $(1 + x/n)^n$. □

Definition 4.5.2 *Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir* die Exponentialfunktion *durch*

$$\exp(x) \;=\; \lim_{n\to\infty} (1 + x/n)^n.$$

Beachte, dass der Grenzwert nach obiger Proposition und Satz 4.5.1 *existiert. Speziell sei noch* $\mathrm{e} = \exp(1) = \lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n$ *gesetzt.*

Satz 4.5.3 (Eigenschaften der Exponentialfunktion)

(a) *Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist* $\exp(x) > 0$, *und* $\exp(0) = 1$.

(b) *Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt die* Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

$$\exp(x)\,\exp(y) \;=\; \exp(x+y).$$

Beweis: Zu (a): Folgt aus der Monotonie von $(1+x/n)^n$ und der Definition der Exponentialfunktion.

Zu (b): Wir setzen

$$a_n(x,y) \;=\; \frac{(1+x/n)^n\,(1+y/n)^n}{(1+(x+y)/n)^n} \;=\; \left(1+\frac{x\,y}{n^2\,(1+(x+y)/n)}\right)^n.$$

Für $x\,y > 0$ ist $1 < a_n(x,y) \leq (1+2\,x\,y/n^2)^n$, falls n so groß ist, dass $1+(x+y)/n \geq 1/2$ gilt (was immer richtig ist, falls $x+y \geq 0$ ist). Nach Aufgabe 4.5.5 geht die rechte Seite gegen 1 für $n \to \infty$, also gilt die Behauptung in diesem Fall. Für $x\,y \leq 0$ gilt nach der Bernoullischen Ungleichung

$$1 \;\geq\; a_n(x,y) \;\geq\; 1+\frac{n\,x\,y}{n^2\,(1+(x+y)/n)} \;=\; 1+\frac{x\,y}{n\,(1+(x+y)/n)}$$

für große n, und die rechte Seite strebt gegen 1 für $n \to \infty$. □

Proposition 4.5.4 *Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gilt immer*

$$\mathrm{e}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \;<\; n! \;<\; n\,\mathrm{e}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

Beweis: Seien

$$d_n \;=\; \frac{n^n}{\mathrm{e}^n\,n!}, \qquad e_n \;=\; n\,d_n \;=\; \frac{n^{n+1}}{\mathrm{e}^n\,n!},$$

dann ist $d_{n+1}/d_n = (1+1/n)^n\,\mathrm{e}^{-1}$, und die rechte Seite geht streng monoton wachsend gegen 1, ist also insbesondere < 1. Also ist d_n streng monoton fallend. Weiter ist $e_n/e_{n+1} = \mathrm{e}\,(1-\frac{1}{n+1})^{n+1}$ ebenfalls streng monoton wachsend mit Grenzwert 1, und deshalb ist e_n selber streng monoton wachsend. Daraus folgt $d_n < d_1 = e_1 < e_n$ für $n \geq 2$, und daraus ergibt sich die Behauptung. □

Aufgabe 4.5.5 *Zeige: Für beliebiges $c \in \mathbb{R}_+$ ist*

$$1 \;\leq\; (1+c/n^2)^n \;=\; \sqrt[n]{(1+c/n^2)^{n^2}} \leq \sqrt[n]{\exp(c)}.$$

Benutze dies und den Sandwich-Satz um zu zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty}(1+c/n^2)^n \;=\; 1.$$

Aufgabe 4.5.6 *Zeige*

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} \;=\; \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \qquad \forall\; n \in \mathbb{N}$$

und schließe daraus, dass die Folge $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ monoton fallend gegen e *strebt.*

Aufgabe 4.5.7 *Zeige, dass die Exponentialfunktion streng monoton wachsend ist.*

4.6 Häufungspunkte

Definition 4.6.1 *Ein $x \in \mathbb{K}$ heißt* Häufungspunkt *einer Folge (x_n) aus $\mathbb{K}$, wenn gilt:*

$$\forall\, \varepsilon > 0 : |x_n - x| < \varepsilon \quad \textit{für unendlich viele } n.$$

Lemma 4.6.2 *Genau dann ist $x \in \mathbb{K}$ Häufungspunkt einer Folge (x_n) aus $\mathbb{K}$, wenn eine Teilfolge von (x_n) gegen x konvergiert.*

Beweis: Sei x ein Häufungspunkt. Zu $\varepsilon = 1/n$, mit $n \in \mathbb{N}$, wählen wir ein $\phi(n) \in \mathbb{N}$, für welches $|x_{\phi(n)} - x| < 1/n$ ist, und wir können o. B. d. A. annehmen, dass ϕ streng monoton wächst. Dann ist aber $(x_{\phi(n)})$ die gewünschte Teilfolge. Die Umkehrung ist klar nach Definition der Konvergenz. □

Satz 4.6.3 (Satz von Bolzano und Weierstraß) *Beschränkte Folgen haben mindestens einen Häufungspunkt.*

Beweis: Sei zunächst $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Sei (x_n) eine beschränkte Folge, und seien a, b so dass $a \le x_n \le b$ für alle n gilt. Wir wählen jetzt zwei Folgen (a_n) und (b_n) so, dass immer gilt $a_n \le x_n \le b_n$ für unendlich viele n. Dazu seien $a_0 = a$, $b_0 = b$ gesetzt. Wenn a_n, b_n bereits gewählt sind, enthält die linke oder die rechte Hälfte des Intervalles $[a_n, b_n]$ unendlich viele Folgenglieder, und wir wählen dann im ersten Fall $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = (a_n + b_n)/2$, und im anderen Fall $a_{n+1} = (a_n + b_n)/2$, $b_{n+1} = b_n$. Jetzt sei eine streng monoton wchsende Funktion ϕ gewählt mit $a_n \le x_{\phi(n)} \le b_n$, was möglich ist, weil unendlich viele x_m in jedem der Intervalle $[a_n, b_n]$ liegen. Offenbar sind die Folgen (a_n) und (b_n) monoton (wachsend bzw. fallend), also beide konvergent, und wegen $0 < b_n - a_n = (b - a)/2^n$ sind die Grenzwerte gleich. Nach dem Sandwich-Satz folgt deshalb die Konvergenz der Teilfolge $(x_{\phi(n)})$ gegen ein $x \in \mathbb{R}$, und dieses x ist Häufungspunkt der Folge (x_n).

Sei jetzt $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sei eine beschränkte Folge gegeben, welche wir jetzt besser mit (z_n) bezeichen, und seien (x_n) bzw. (y_n) die Folgen der Real- bzw. Imaginärteile der komplexen Zahlen z_n. Wegen $|z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \ge |x_n|$ ist (x_n) beschränkt. Also existiert eine Teilfolge $(x_{\phi(n)})$, welche gegen ein $x \in \mathbb{R}$ konvergiert. Die Teilfolge $(z_{\phi(n)})$ ist aber wieder beschränkt, und daraus folgt die Beschränktheit von $(y_{\phi(n)})$. Deshalb existiert eine konvergente Teilfolge dieser Teilfolge, welche wir mit $(y_{\psi(n)})$ bezeichnen wollen, und auch die Teilfolge $(x_{\psi(n)})$ der Folge $(x_{\phi(n)})$ konvergiert nach Satz 4.3.2. Daraus folgt mit Satz 4.2.2 die Konvergenz von $(z_{\psi(n)})$. Also hat (z_n) einen Häufungspunkt. □

Aufgabe 4.6.4 *Analysiere den Beweis von* Satz 4.6.3 *für den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und zeige, dass der gefundene Häufungspunkt x der kleinste ist, dass also unter den $y < x$* kein *Häufungspunkt sein kann.*

Aufgabe 4.6.5 *Finde alle Häufungspunkte der Folge $(x_n = (-1)^n)$.*

Aufgabe 4.6.6 *Finde eine Folge mit unendlich vielen Häufungspunkten.*

Aufgabe 4.6.7 *Zeige: Eine beschränkte Folge ist genau dann konvergent, wenn sie nur einen Häufungspunkt hat, und dieser ist dann gleich dem Grenzwert.*

4.7 Das Cauchy-Kriterium

Definition 4.7.1 *Eine Folge (x_n) in $\mathbb{K}$ heißt* Cauchy-Folge*, wenn gilt*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{R}_+\ \forall\, n, m \in \mathbb{N} : n, m \geq N \implies |x_n - x_m| < \varepsilon. \tag{4.7.1}$$

Satz 4.7.2 (Cauchy-Kriterium) *Eine Folge in $\mathbb{K}$ ist genau dann konvergent, wenn sie Cauchy-Folge ist.*

Beweis: Sei (x_n) konvergent gegen x, also $(x_n - x)$ Nullfolge. Dann gilt (4.1.1), und daraus folgt wegen $|x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x_m - x|$ die Bedingung (4.7.1), allerdings für 2ε anstelle von ε, was aber nichts bedeutet. Umgekehrt, sei jetzt (x_n) eine Cauchy-Folge. Für $\varepsilon = 1$ und ein festes $m \geq N$ folgt mit (4.7.1) dass $|x_n| \leq |x_m| + |x_n - x_m| < 1 + |x_m|$ gilt für alle $n \geq N$. Daraus folgt die Beschränktheit von (x_n). Nach dem Satz von Bolzano und Weierstraß existiert ein Häufungspunkt x, und wir zeigen jetzt, dass dieses x Grenzwert der Folge sein muss. Dazu sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben, und N sei wie in (4.7.1). Dann gibt es nach Definition eines Häufungspunktes ein $m \geq N$ so, dass $|x_m - x| < \varepsilon$ ist. Aus (4.7.1) folgt dann aber $|x_n - x| \leq |x_n - x_m| + |x_m - x| < 2\,\varepsilon$ für alle $n \geq N$. Daraus folgt aber Konvergenz von (x_n) gegen x. □

Beachte, dass das Cauchy-Kriterium eine Bedingung für die Konvergenz einer Folge liefert, in die der Grenzwert der Folge nicht explizit eingeht. Dieser Umstand ist sehr wichtig, denn er erlaubt die Konvergenz von Folgen zu zeigen, deren Grenzwert nicht bekannt ist.

Aufgabe 4.7.3 *Sei $x_n = \sum_{j=1}^{n} 1/j$, $n \in \mathbb{N}$. Benutze die Monotonie von $(1/j)$ um zu zeigen dass $x_{2n} - x_n > n/(2n) = 1/2$ ist. Zeige dass (x_n) keine Cauchy-Folge ist. Schließe daraus $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.*

4.8 Limes inferior und limes superior

In diesem Abschnitt beschränken wir uns wieder auf *reelle* Zahlenfolgen.

Definition 4.8.1 *Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Eine Zahl x^* heißt* der größte Häufungspunkt *oder* limes superior *der Folge (x_n), wenn gilt*

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \qquad \begin{cases} x_n \geq x^* + \varepsilon & \text{höchstens für endlich viele } n, \\ x_n > x^* - \varepsilon & \text{für unendlich viele } n. \end{cases}$$

Wir schreiben dann auch

$$x^* \;=\; \limsup_{n\to\infty} x_n \;=\; \overline{\lim_{n\to\infty}}\; x_n.$$

Offenbar ist x^* ein Häufungspunkt von (x_n), und ein $x > x^*$ ist kein *Häufungspunkt von (x_n). Insbesondere folgt aus der Existenz eines limes superior, dass die Folge nach oben beschränkt sein muss. Eine Zahl x_* heißt entsprechend* der kleinste Häufungspunkt *oder* limes inferior *der Folge (x_n), wenn gilt*

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \begin{cases} x_n \leq x_* - \varepsilon & \text{höchstens für endlich viele } n, \\ x_n < x_* + \varepsilon & \text{für unendlich viele } n. \end{cases}$$

Wir schreiben dann auch

$$x_* \;=\; \liminf_{n\to\infty} x_n \;=\; \underline{\lim_{n\to\infty}}\; x_n.$$

Auch x_* ist ein Häufungspunkt, und jedes $x < x_*$ ist kein *Häufungspunkt von (x_n). Der limes inferior kann nur dann existieren, wenn die Folge nach unten beschränkt ist. Wir setzen noch*

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \;=\; \begin{cases} \infty & \text{wenn } (x_n) \text{ nach oben unbeschränkt ist,} \\ -\infty & \text{wenn } (x_n) \text{ uneigentlich gegen } -\infty \text{ konvergiert,} \end{cases}$$

und analog

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \;=\; \begin{cases} -\infty & \text{wenn } (x_n) \text{ nach unten unbeschränkt ist,} \\ \infty & \text{wenn } (x_n) \text{ uneigentlich gegen } \infty \text{ konvergiert.} \end{cases}$$

In diesen Fällen bezeichnet man $\pm\infty$ auch als uneigentliche Häufungspunkte *der Folge.*

Proposition 4.8.2 *Eine Folge (x_n) aus $\mathbb{R}$ besitzt immer einen eigentlichen oder uneigentlichen größten bzw. kleinsten Häufungspunkt, und beide sind eindeutig bestimmt. Es gilt immer*

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \;\le\; \limsup_{n\to\infty} x_n \;,$$

und das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn die Folge konvergiert oder bestimmt divergiert. In diesem Fall ist dieser gemeinsame Wert gleich dem Grenzwert der Folge.

Beweis: Betrachte die Menge A aller $x \in \mathbb{R}$, für die die Ungleichung $x_n > x$ höchstens für endlich viele n richtig ist. Falls diese Menge leer ist, muss die Folge (x_n) nach oben unbeschränkt sein, und dann existiert limes superior und ist gleich ∞. Falls $A = \mathbb{R}$ ist, muss die Folge bestimmt divergieren gegen $-\infty$, was dann per Definition gleich limes superior ist. In jedem anderen Fall ist A nach unten beschränkt, und aus der Definition des limes superior folgt $\inf A = \limsup x_n$. Also gibt es immer einen limes superior. Genauso zeigt man die Existenz des limes inferior. Die Eindeutigkeit folgt direkt aus der Definition. Falls beide gleich ∞ oder $-\infty$ sind, schließt man aus der Definition auf die bestimmte Divergenz, und falls beide gleich derselben endlichen Zahl sind, folgt die Konvergenz gegen diesen Wert. Die Umkehrung dieser Aussage folgt ebenfalls leicht mit der Definition. $\square$

Aufgabe 4.8.3 (a) *Berechne limes superior und inferior der Folge $(x_n = [2 + (-1)^n]^{-n})$.*

(b) *Zeige*

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \;=\; -\limsup_{n\to\infty}(-x_n)\ .$$

(c) *Zeige: Falls die rechte Seite definiert ist, gilt immer*

$$\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \;\le\; \limsup_{n\to\infty} x_n \;+\; \limsup_{n\to\infty} y_n\, .$$

Finde ein Beispiel zweier Folgen, für die das Kleinerzeichen gilt.

Kapitel 5

Unendliche Reihen

Die Theorie der unendlichen Reihen ermöglicht die Definition einer Summe von abzählbar unendlich vielen reellen oder komplexen Zahlen. In gewissem Sinn ist diese Theorie aber nur eine andere Formulierung der Folgentheorie.

5.1 Grundlegendes

Definition 5.1.1 *Gegeben sei eine Folge* $(a_k)_{k=p}^{\infty}$ *aus* $\mathbb{K}$. *Wir nennen eine zweite Folge* $(s_n)_{n=p}^{\infty}$ die zugehörige Partialsummenfolge, *wenn*

$$s_n \;=\; \sum_{k=p}^{n} a_k \qquad \forall\, n \geq p\,.$$

Für diese Folge der Partialsummen schreiben wir auch kürzer $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$ *und sprechen von einer* unendlichen Reihe *oder kürzer einer* Reihe *in* $\mathbb{K}$. *Die Zahlen* a_k *nennen wir dann auch* die Glieder *der Reihe. Eine Reihe* $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$ *in* $\mathbb{K}$ *heißt* konvergent *bzw.* divergent, *wenn die Partialsummenfolge konvergiert oder divergiert. Bei Konvergenz nennen wir den Grenzwert* $a \in \mathbb{K}$ *der Partialsummenfolge auch* den Wert *der Reihe und schreiben*

$$\sum_{k=p}^{\infty} a_k \;=\; a.$$

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, *und ist die Partialsummenfolge bestimmt divergent gegen* ∞ *oder* $-\infty$, *so heißt auch die Reihe* $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$ *bestimmt divergent oder auch uneigentlich konvergent, und wir nennen dann auch* ∞ *bzw.* $-\infty$ *den Wert einer solchen Reihe.*

Aufgabe 5.1.2 *Zeige: Zu einer beliebigen Folge* $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ *existiert genau eine Folge* $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ *mit* $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $n \geq 1$.

Aus den entsprechenden Regeln für konvergente Folgen ergeben sich unmittelbar die folgenden *Rechenregeln für Reihen*:

- Sind $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=p}^{\infty} b_k$ beide konvergent, so ist auch $\sum_{k=p}^{\infty}(a_k + b_k)$ konvergent, und es gilt

$$\sum_{k=p}^{\infty}(a_k + b_k) \;=\; \sum_{k=p}^{\infty} a_k \;+\; \sum_{k=p}^{\infty} b_k\,.$$

- Ist $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$ konvergent, und ist $\lambda \in \mathbb{K}$ beliebig, so ist auch $\sum_{k=p}^{\infty} \lambda\, a_k$ konvergent, und es gilt

$$\sum_{k=p}^{\infty} \lambda\, a_k \;=\; \lambda \sum_{k=p}^{\infty} a_k\,.$$

Auf das Produkt zweier unendlicher Reihen gehen wir später genauer ein.

Definition 5.1.3 *Für ein $x \in \mathbb{K}$ heißt $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$* die geometrische Reihe.

Behauptung 5.1.4 *Die geometrische Reihe ist divergent für jedes $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| > 1$. Sie konvergiert für alle x mit $|x| < 1$, und es gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \;=\; \frac{1}{1-x} \qquad \forall \;\; |x| < 1.$$

Beweis: Es ist $s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = (1-x^{n+1})/(1-x)$ für $x \neq 1$. Für $|x| > 1$ folgt deswegen $|s_n| \to \infty$, also Divergenz der Reihe. Für $|x| < 1$ ist x^n eine Nullfolge, und daraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1-x} \;=\; \frac{1}{1-x}\,,$$

also die Konvergenz der Reihe gegen den Wert $1/(1-x)$. □

Dass die geometrische Reihe auch für $|x| = 1$ divergiert, folgt am leichtesten aus der nächsten Proposition und der Tatsache, dass x^n in diesem Fall sicher keine Nullfolge ist.

Eine einfache Umformulierung von Satz 4.7.2 ergibt das folgende Resultat:

Satz 5.1.5 (Cauchy-Kriterium für Reihen) *Eine Reihe $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$ in $\mathbb{K}$ ist genau dann konvergent, wenn*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{R}_+ \quad \forall\, n, q \in \mathbb{N} : \qquad n \geq \max\{N, p-1\} \quad \Longrightarrow \quad \Big|\sum_{k=n+1}^{n+q} a_k\Big| \;<\; \varepsilon\,. \tag{5.1.1}$$

Beweis: Ersetze in (4.7.1) die Zahl m durch $n+q$ und die Folge (x_n) durch die Partialsummenfolge (s_n), und wende Satz 4.7.2 an. □

Proposition 5.1.6 *Falls eine Reihe $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$ in $\mathbb{K}$ konvergiert, folgt auch die Konvergenz von $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$, für alle $m \geq p$, und es gilt*

$$\lim_{k\to\infty} a_k \;=\; 0\,, \qquad \lim_{m\to\infty} \sum_{k=m}^{\infty} a_k \;=\; 0\,.$$

Beweis: Wir definieren s_n wie oben. Die Konvergenz von $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ ist klar, da die zugehörige Partialsummenfolge sich von der Folge (s_n) nur um eine additive Konstante unterscheidet. Setzt man $q = 1$ in (5.1.1), so folgt dass (a_k) Nullfolge sein muss. Läßt man hingegen $q \to \infty$ gehen, so folgt $|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k| \leq \varepsilon$ für $n \geq N$, und daher ist $(\sum_{k=m}^{\infty} a_k)$ eine Nullfolge. □

Definition 5.1.7 *Eine Summe der Form*

$$\sum_{k=p}^{q}(b_k - b_{k+1})$$

heißt eine Teleskopsumme*, eine Reihe derselben Form, also mit $q = \infty$, heißt* eine Teleskopreihe*.*

Behauptung 5.1.8 *Eine Teleskopreihe $\sum_{k=p}^{\infty}(b_k - b_{k+1})$ konvergiert genau dann, wenn die Folge (b_k) konvergiert, und in diesem Fall ist ihr Wert gleich $b_p - \lim\limits_{k\to\infty} b_k$.*

Beweis: Durch Induktion, oder durch Indexverschiebung, folgt $\sum_{k=p}^{q}(b_k - b_{k+1}) \;=\; b_p \; - b_{q+1}$, $\forall\, p \leq q$, und daraus folgt die Behauptung. $\square$

Aufgabe 5.1.9 *Verwandle die Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,(k+1)}$$

in eine Teleskopreihe. Zeige dadurch ihre Konvergenz und berechne ihren Wert.

5.2 Alternierende Reihen

Definition 5.2.1 *Eine Reihe $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$ mit Gliedern in $\mathbb{R}$ heißt* alternierend*, falls $a_k = (-1)^k\,|a_k|$ für alle $k \geq p$.*

Satz 5.2.2 (Leibniz-Kriterium) *Ist die Reihe $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$ alternierend, und ist für irgend ein $q \geq p$ die Folge $(|a_k|)_{k=q}^{\infty}$ eine monoton fallende Nullfolge, so ist die Reihe konvergent. Bezeichnet a den Wert der Reihe, so gilt immer*

$$s_{2n+1} \;\leq a \;\leq s_{2n} \qquad \forall\; n \geq q/2\,.$$

Beweis: O. B. d. A. sei $p = 0$ angenommen (sonst: setze die ersten Glieder der Reihe gleich 0). Es sei $b_k = |a_k|$. Dann gilt für alle $n \geq 0$, dass

$$s_{2n+1} = \sum_{j=0}^{n} a_{2j} + \sum_{j=0}^{n} a_{2j+1} = \sum_{j=0}^{n}(b_{2j} - b_{2j+1}),$$

und wegen der Monotonie folgt $b_{2j} - b_{2j+1} \geq 0$ für $2j \geq q$. Also ist $s_{2n+1} \geq s_{2n-1}$ für $2n \geq q$. Analog folgt aus $s_{2n} = b_0 - \sum_{j=1}^{n}(b_{2j-1} - b_{2j})$ dass $s_{2n} \leq s_{2n-2}$ für $2n-1 \geq q$. Außerdem ist $s_{2n+1} \leq s_{2n}$. Daraus folgt mit Satz 4.4.3 die Konvergenz von (s_{2n}) (gegen $a = \inf s_{2n}$) und (s_{2n+1}) (gegen $b = \sup s_{2n+1}$), und aus Behauptung 4.2.8 folgt $b \leq a$. Wegen $s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$ folgt aber $b = a$. $\square$

Der obige Satz bedeutet, dass alternierende Reihen relativ leicht auf Konvergenz getestet werden können, und dass man bei der Berechnung des Grenzwertes eine *Fehlerabschätzung* bekommt: Aus der Ungleichung im Leibnizkriterium folgt nämlich, dass $0 \leq a - s_{2n+1} \leq s_{2n} - s_{2n+1} = -a_{2n+1}$ ist, jedenfalls für $n \geq q/2$. Andererseits folgt aus dem Beweis des Satzes dass $s_{2n-1} \leq a \leq s_{2n}$ ist, woraus $0 \leq s_{2n} - a \leq a_{2n}$ folgt, für die gleichen n. Also ergibt sich insgesamt

$$|a - s_n| \;\leq\; |a_{n+1}| \qquad \forall\; n \geq q\,. \tag{5.2.1}$$

Diese Ungleichung erlaubt festzustellen, wo man die Reihe abbrechen kann, wenn man den Wert a mit einer gewissen Genauigkeit berechnen will. Andererseits ist die *numerische Berechnung* des Wertes der Partialsummen s_n oft kritisch wegen des Phänomens der *Auslöschung führender Stellen*. Dies wird in der Vorlesung *Numerik* genauer besprochen.

Beispiel 5.2.3 *In* Abschnitt 5.8 *werden wir die Sinus- und Cosinusfunktion durch folgende Reihen definieren:*

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, x^{2k}}{(2k)!} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Sei im Folgenden $x > 0$ angenommen. Dann sind beide Reihen offenbar alternierend. Für $b_k = x^k/k!$ ist $b_k/b_{k+1} = (k+1)/x \geq 1$ falls nur $k \geq x-1$ ist. Daraus folgt, dass man den Leibnizschen Satz mit großem q anwenden kann, um Konvergenz der Reihen zu zeigen.[1] *Wenn $x \leq 3$ ist, kann man im Leibnizschen Satz $q = 2$ setzen und erhält folgende Abschätzungen:*

$$\left.\begin{aligned} x - \frac{x^3}{6} &\leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \\ 1 - \frac{x^2}{2} &\leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \end{aligned}\right\} \quad 0 < x \leq 3. \tag{5.2.2}$$

Diese Abschätzungen werden später noch eine Rolle spielen.

Aufgabe 5.2.4 *Zeige die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k/k$. Diese Reihe heißt auch* alternierende harmonische Reihe.

Aufgabe 5.2.5 *Sei $a = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k/(k+1)$. Wie groß muss n sein, damit durch* (5.2.1) *die Genauigkeit $|a - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k/(k+1)| < 10^{-6}$ gesichert ist?*

5.3 Reihen mit nicht-negativen Gliedern, absolute Konvergenz

Proposition 5.3.1 *Seien $a_k \geq 0$ für alle $k \geq p$. Dann ist die Reihe $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$ entweder konvergent oder bestimmt divergent, und der erste Fall tritt genau dann ein, wenn die Partialsummenfolge beschränkt ist.*

Beweis: Folgt mit Satz 4.4.3, da die Partialsummenfolge monoton wachsend ist. □

Definition 5.3.2 *Eine Reihe $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$ in $\mathbb{K}$ heißt* absolut konvergent*, falls die Reihe $\sum_{k=p}^{\infty} |a_k|$ konvergiert. Wegen* Proposition 5.3.1 *schreiben wir dafür auch manchmal $\sum_{k=p}^{\infty} |a_k| < \infty$.*

Aufgabe 5.3.3 *Zeige mit Hilfe der Aufgaben auf Seite* 42*, dass*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty\,.$$

Die links stehende Reihe heißt auch die harmonische Reihe.

[1] Wir werden später sehen, dass die Theorie der Potenzreihen sogar die Konvergenz liefert, wenn man x durch eine beliebige komplexe Zahl z ersetzt.

Aufgabe 5.3.4 *Zeige: Die alternierende harmonische Reihe ist konvergent, jedoch nicht absolut konvergent.*

Behauptung 5.3.5 (Verallgemeinerte Dreiecksungleichung)
Eine absolut konvergente Reihe $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$ ist auch konvergent, und es gilt

$$\Big| \sum_{k=p}^{\infty} a_k \Big| \quad \le \quad \sum_{k=p}^{\infty} |a_k| \,.$$

Beweis: Folgt aus dem Cauchy-Kriterium für Reihen und der allgemeinen Dreiecksungleichung in Behauptung 2.6.5. □

Satz 5.3.6 (Majoranten- und Minorantenkriterium)

(a) *Aus $|a_k| \le b_k$ für alle $k \ge p$ und $\sum_{k=p}^{\infty} b_k < \infty$ folgt die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$.*

(b) *Aus $a_k \ge c_k \ge 0$ für alle $k \ge p$ und $\sum_{k=p}^{\infty} c_k = \infty$ folgt $\sum_{k=p}^{\infty} a_k = \infty$.*

Beweis: Zu (a): Folgt aus $\sum_{k=p}^{n} |a_k| \le \sum_{k=p}^{n} b_k \le \sum_{k=p}^{\infty} b_k$. Zu (b): Folgt aus(a), wenn man $|a_k|$ durch c_k und b_k durch a_k ersetzt. □

Satz 5.3.7 (Wurzel- und Quotientenkriterium)

(a) *Falls eine Zahl $q \in (0,1)$ existiert mit $\sqrt[k]{|a_k|} \le q$ für alle $k \ge p \ge 1$, dann ist die Reihe $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.*

(b) *Falls alle $a_k \ne 0$ sind, und falls eine Zahl $q \in (0,1)$ existiert für welche gilt $|a_{k+1}|/|a_k| \le q$ für alle $k \ge p$, dann ist die Reihe $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.*

Beweis: Zu (a): Aus der Voraussetzung folgt $|a_k| \le q^k$ für alle $k \ge p$, und deshalb folgt die Behauptung mit dem Majorantenkriterium und der Konvergenz der geometrischen Reihe $\sum q^k$. Zu (b): Durch Induktion folgt $|a_k| \le q^{k-p}\,|a_p|$, und daraus folgt die Behauptung (wie in (a)). □

Satz 5.3.8 (Cauchyscher Verdichtungssatz)
Sei $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ eine monoton fallende Nullfolge in $\mathbb{R}$, und sei $b_k = 2^k\ a_{2^k}$ für $k \ge 0$. Dann sind $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ entweder beide konvergent oder beide bestimmt divergent.

Beweis: Setze $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $t_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$. Für $n < 2^{m+1}$ folgt dann

$$s_n \le \sum_{k=1}^{2^{m+1}-1} a_k = \sum_{\nu=0}^{m} \sum_{k=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} a_k \le \sum_{\nu=0}^{m} 2^\nu\ a_{2^\nu} = t_m.$$

Umgekehrt, ist $n \ge 2^{m+1}$, so gilt

$$s_n \ge \sum_{k=1}^{2^{m+1}} a_k = a_1 + \sum_{\nu=1}^{m+1} \sum_{k=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} a_k \ge a_1 + \sum_{\nu=1}^{m+1} 2^{\nu-1}\ a_{2^\nu} = (a_1 + t_{m+1})/2.$$

Deshalb folgt aus der Beschränktheit von (t_m) die von (s_n) und umgekehrt, und daher gilt die Behauptung. □

Proposition 5.3.9 (Vertauschung von Grenzwerten) *Seien Zahlen $a_{nk} \in \mathbb{K}$ für alle $n, k \geq 0$ gegeben, derart dass folgendes gilt:*

(a) *Es gebe Zahlen $b_k \in \mathbb{R}_+$, für die gilt*

$$|a_{nk}| \;\leq\; b_k \quad \forall\, n, k \geq 0, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} b_k \;<\; \infty.$$

(b) *Für jedes feste $k \geq 0$ sei die Folge $(a_{nk})_{n=0}^{\infty}$ konvergent, und der Grenzwert sei mit a_k bezeichnet.*

Dann sind die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}$, für jedes $n \geq 0$, und die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ alle absolut konvergent, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,. \tag{5.3.1}$$

Beweis: Aus $|a_{nk}| \;\leq\; b_k$ folgt für $n \to \infty$ die Ungleichung $|a_k| \;\leq\; b_k$, jeweils für alle $k \geq 0$, und deshalb folgt die absolute Konvergenz der Reihen aus dem Majorantenkriterium. Zum Beweis von (5.3.1): Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, und sei $m \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\sum_{k=m}^{\infty} b_k < \varepsilon$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{k=0}^{\infty}(a_{nk} - a_k)\Big| \quad &\leq \quad \Big|\sum_{k=0}^{m-1}(a_{nk} - a_k)\Big| \;+\; \sum_{k=m}^{\infty}(|a_{nk}| + |a_k|) \\
&\leq \quad \Big|\sum_{k=0}^{m-1}(a_{nk} - a_k)\Big| \;+\; 2\,\sum_{k=m}^{\infty} b_k\,.
\end{aligned}$$

Der zweite Term auf der rechten Seite ist höchstens gleich $2\,\varepsilon$, und zwar für alle $n \geq 0$, während der erste Term eine Summe von endlich vielen Nullfolgen (für $n \to \infty$), also selber eine Nullfolge ist. Deshalb gibt es ein N derart, dass für alle $n \geq N$ die rechte Seite kleiner als $3\,\varepsilon$ ausfällt. Daher muss auch die linke Seite für $n \to \infty$ eine Nullfolge sein. □

Als eine Anwendung dieses Satzes beweisen wir folgende Reihendarstellung für die Exponentialfunktion einer reellen Veränderlichen:

Proposition 5.3.10 (Die Exponentialreihe) *Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ ist für alle $x \in \mathbb{C}$ absolut konvergent. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt weiter*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \;=\; \exp(x) \;=\; \lim_{n\to\infty}\Big(1 \;+\; \frac{x}{n}\Big)^n. \tag{5.3.2}$$

Beweis: Die absolute Konvergenz der Reihe, für alle $x \in \mathbb{C}$, folgt leicht mit dem Quotientenkriterium; siehe auch die untenstehende Aufgabe 5.3.12. Um (5.3.2) zu zeigen, schließen wir aus der binomischen Formel $(1 + x/n)^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}$, mit $a_{nk} = 0$ für $k > n$ bzw.

$$a_{nk} \;=\; \binom{n}{k}\Big(\frac{x}{n}\Big)^k \;=\; \frac{x^k}{k!}\;\frac{n\,(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k} \qquad (0 \leq k \leq n).$$

Dann gilt offenbar $|a_{nk}| \leq |x|^k/k!$ $(= b_k)$, und die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |x|^k/k!$ konvergiert absolut. Außerdem ist $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = x^k/k!$ für jedes feste $k \in \mathbb{N}_0$. Deshalb folgt die Behauptung aus Proposition 5.3.9. □

Wir nehmen die Gleichung (5.3.2) zum Anlass und definieren die Exponentialfunktion auch für komplexe Zahlen z:

Definition 5.3.11
$$\exp(z) \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Aufgabe 5.3.12 *Zeige die absolute Konvergenz der Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 5.3.13 *Zeige die absolute Konvergenz von* $\sum_{k=1}^{\infty} k^n\, z^k$ *für beliebiges* $n \in \mathbb{Z}$ *und alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| < 1$.

Aufgabe 5.3.14 *Bisher haben wir die Potenz* n^α *nur für rationale Exponenten* α *definiert, deshalb sei im Folgenden* $\alpha \in \mathbb{Q}$ *vorausgesetzt; die Behauptung kann aber genauso gezeigt werden, wenn* α *irrational ist! Zeige mit Hilfe des Cauchyschen Verdichtungssatzes, dass die* allgemeine harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha}$ *für* $\alpha > 1$ *konvergiert, aber für* $\alpha \leq 1$ *divergiert.*

5.4 Unbedingte Konvergenz und Umordnungen

Definition 5.4.1 *Für jede bijektive Abbildung* $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *heißt* $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\phi(k)}$ eine Umordnung *der Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. *Eine Reihe heißt* unbedingt konvergent, *falls jede ihrer Umordnungen konvergiert.*

Proposition 5.4.2 *Eine absolut konvergente Reihe in* $\mathbb{K}$ *ist auch unbedingt konvergent, und jede ihrer Umordnungen hat denselben Wert.*

Beweis: Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, und sei a der Wert der Reihe. Sei weiter $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ bijektiv. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein $N \in \mathbb{R}_+$ so, dass für alle $n \geq N$ gilt $|a - \sum_{k=1}^{n} a_k| < \varepsilon$. Dann ist also für diese n:
$$\Big|a - \sum_{k=1}^{n} a_{\phi(k)}\Big| \leq \Big|a - \sum_{k=1}^{n} a_k\Big| + \Big|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_{\phi(k)}\Big| < \varepsilon + \sum_{j \in J_n} |a_j|,$$
wobei J_n die Menge der Indizes j bezeichnet, welche entweder in $\{1, 2, \ldots, n\}$ oder in $\{\phi(1), \phi(2), \ldots, \phi(n)\}$ (aber nicht in beiden gleichzeitig) enthalten sind. Falls diese Menge nicht zufällig leer ist, hat sie ein Minimum $m(n)$, und in diesem Fall ist
$$\sum_{j \in J_n} |a_j| \;\leq\; \sum_{k=m(n)}^{\infty} |a_k|\,.$$
Falls J_n leer sein sollte, setzen wir der Einfachheit halber $m(n) = n$ und sehen, dass dieselbe Abschätzung trivialerweise gilt, weil die linke Summe dann leer ist, also den Wert 0 hat. Aus der Bijektivität von ϕ folgt dass $m(n) \to \infty$ für $n \to \infty$ gilt. Daher können wir immer ein $N_1 \in \mathbb{R}_+$ finden, so dass aus $n \geq N_1$ folgt
$$\sum_{j \in J_n} |a_j| \;\leq\; \sum_{k=m(n)}^{\infty} |a_k| \;\leq\; \varepsilon\,.$$
Daher ist $|a - \sum_{k=1}^{n} a_{\phi(k)}| < 2\varepsilon$ für alle $n \geq \max\{N, N_1\}$, und deshalb gilt die Behauptung. □

Für reelle Reihen zeigen wir jetzt, dass absolute und unbedingte Konvergenz äquivalent sind. Genauer zeigen wir, dass bei einer konvergenten aber nicht absolut konvergenten Reihe in $\mathbb{R}$ durch Umordnung jeder Wert in $\overline{\mathbb{R}}$ als Grenzwert erhalten wird – insbesondere gibt es auch divergente Umordnungen.

Satz 5.4.3 *Sei eine Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *in* $\mathbb{R}$ *gegeben, welche konvergent aber nicht absolut konvergent ist. Sei weiter* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *beliebig vorgegeben. Dann existiert eine Umordnung* $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\phi(k)}$*, welche konvergiert bzw. bestimmt divergiert und den Wert* a *hat.*

Beweis: Wir beschränken uns auf den Fall $a \in \mathbb{R}$; die Fälle $a = \pm\infty$ werden ähnlich behandelt – siehe dazu auch die untenstehenden Aufgaben.

Da $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nicht absolut konvergiert, müssen unendlich viele der Glieder positiv bzw. negativ sein. Daher können wir die Folge (a_k) in zwei Teilfolgen $(a_{f(k)})$ bzw. $(a_{g(k)})$ zerlegen, so dass $a_{f(k)} \geq 0$ bzw. $a_{g(k)} < 0$ für alle $k \geq 1$ ist. Der Einfachheit halber schreiben wir

$$b_k \;=\; a_{f(k)}, \qquad c_k \;=\; -\,a_{g(k)} \qquad \forall\, k \geq 1.$$

Wir sehen dann, dass zu jedem $n \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen $m_n^{\pm} \leq n$ existieren, für welche

$$s_n \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_k \;=\; \sum_{k=1}^{m_n^+} b_k \;-\; \sum_{k=1}^{m_n^-} c_k$$

gilt. Daraus folgt wegen der Konvergenz der Partialsummenfolge (s_n): Wäre eine der Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ bzw. $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergent, so müsste auch die zweite konvergieren, und dann wäre $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sogar absolut konvergent, was ausgeschlossen ist. Daher folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} c_k \;=\; \infty. \tag{5.4.1}$$

Wir definieren nun eine Umordnung der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ auf folgende Weise: Wir bestimmen das minimale k_1^+ derart, dass

$$\sum_{k=1}^{k_1^+} b_k \;>\; a.$$

Danach bestimmen wir das minimale k_1^- so, dass

$$\sum_{k=1}^{k_1^+} b_k \;-\; \sum_{k=1}^{k_1^-} c_k \;<\; a.$$

Anschließend suchen wir das minimale $k_2^+ > k_1$, für welches

$$\sum_{k=1}^{k_1^+} b_k \;-\; \sum_{k=1}^{k_1^-} c_k \;+\; \sum_{k=k_1+1}^{k_2^+} b_k \;>\; a,$$

u. s. w. Wegen (5.4.1) ist es tatsächlich möglich, die $k_j^{\pm}$ wie angegeben zu bestimmen. Die Zahlen

$$b_1, \ldots, b_{k_1^+}, -c_1, \ldots, -c_{k_1^-}, b_{k_1^+ +1}, \ldots, b_{k_2^+}, \ldots$$

sind aber nichts anderes als die Zahlen a_k in anderer Reihenfolge. Deshalb entsteht bei dieser Konstruktion eine Umordnung der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Da wir die Zahlen $k_j^{\pm}$ jeweils minimal bestimmen, unterscheiden sich die Partialsumme dieser Umordnung von dem Wert a um weniger als ein entsprechendes Glied der Folge (a_k). Da dies die Glieder einer konvergenten Reihe sind, müssen sie gegen 0 konvergieren, und daraus folgt die Konvergenz der umgeordneten Reihe gegen den Wert a. □

Aufgabe 5.4.4 *Führe den Beweis von* Satz 5.4.3 *für den Fall* $a = \infty$.

Aufgabe 5.4.5 *Zeige, dass unter den Voraussetzungen von* Satz 5.4.3 *auch eine Umordnung existiert, welche weder konvergiert noch bestimmt divergiert.*

5.5 Doppelreihen und der große Umordnungssatz

Definition 5.5.1 *Sei J eine abzählbar unendliche Menge, und sei jedem $j \in J$ eine Zahl $a_j \in \mathbb{K}$ zugeordnet. Sei ferner $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow J$ bijektiv. Falls die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\phi(k)}$ absolut konvergiert, hängt ihr Wert a nach* Proposition 5.4.2 *nicht von der* Abzählung *ϕ ab, denn jedes andere bijektive $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow J$ entspricht genau einer Umordnung der Reihe. Deshalb schreiben wir auch kurz*

$$a \;=\; \sum_{j\in J} a_j$$

und sagen auch, dass $\sum_{j\in J} a_j$ absolut konvergiert. Seien J_k paarweise disjunkte Teilmengen von J, deren Vereinigung gleich J ist. Dann nennen wir die J_k auch kurz eine Zerlegung *von J. Da J abzählbar unendlich ist, können höchstens abzählbar viele J_k nicht leer sein, und jedes J_k ist höchstens abzählbar. Falls $J = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist, ist jedes einzelne $j \in J$ ein Paar (k, ν) von natürlichen Zahlen. In diesem Fall schreiben wir auch*

$$\sum_{j\in J} a_j \;=\; \sum_{k,\nu\in\mathbb{N}} a_{k\nu} \;=\; \sum_{k,\nu=1}^{\infty} a_{k\nu}$$

oder ähnlich, und nennen diesen Ausdruck eine Doppelreihe. *Die beiden Ausdrücke*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k\nu}\Big) \qquad \text{bzw.} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{k\nu}\Big)$$

heißen die beiden zu der Doppelreihe gehörigen iterierten Reihen.

Satz 5.5.2 (Großer Umordnungssatz) *Sei J abzählbar unendlich, und seien J_k, $k \in \mathbb{N}$, eine Zerlegung von J. Sei ferner $j \mapsto a_j$ eine Abbildung von J in $\mathbb{K}$, so dass $\sum_{j\in J} a_j$ absolut konvergiert. Dann konvergieren auch alle $\sum_{j\in J_k} a_j$ absolut, und es gilt*

$$\sum_{j\in J} a_j \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{j\in J_k} a_j\Big). \tag{5.5.1}$$

Beweis: Die absolute Konvergenz der $\sum_{j\in J_k} a_j$ folgt, da (bei einer beliebigen Wahl einer Abzählung von J_k) die Partialsummen von $\sum_{j\in J_k} |a_j|$ niemals größer als $\sum_{j\in J} |a_j|$ sein kann. Falls einige der Mengen J_k endlich sind, können wir sie vergrößern und die entsprechenden $a_j = 0$ setzen. Deshalb sei für den Beweis angenommen, dass alle J_k abzählbar unendlich sind, und dann können wir o. B. d. A. annehmen, dass $J_k = \{(k,\nu) : \nu \in \mathbb{N}\}$, also $J = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist. Wir schreiben dann besser $a_{k,\nu}$ statt a_j, so dass auf der linken Seite von (5.5.1) eine Doppelreihe steht, während $\sum_{j\in J_k} a_j = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{k,\nu}$ ist. Sei

$$a \;=\; \sum_{j\in J} a_j \;=\; \sum_{k,\nu\in\mathbb{N}} a_{k,\nu}\,, \qquad c_k \;=\; \sum_{j\in J_k} a_j \;=\; \sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_{k,\nu}, \qquad b = \sum_{k=1}^{\infty} c_k$$

gesetzt, dann ist zu zeigen dass $b = a$ ist. Dazu betrachten wir für irgendeine streng monoton wachsende Folge $(m(n))$ natürlicher Zahlen die Summen $s(n) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{m(n)} a_{k\nu}$. Aus der absoluten Konvergenz der Doppelreihe folgt $s(n) \to a$ für $n \to \infty$. Bei festem n gilt

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m} a_{k\nu} \;\to\; \sum_{k=1}^{n} c_k \qquad (m \to \infty)\,,$$

und daher können wir $m(n)$ so wählen, dass $|s(n) - \sum_{k=1}^{n} c_k| < 1/n$ ist – und dies gelingt auch mit einer streng monoton wachsenden Folge $(m(n))$. Daraus folgt aber $a = b$. $\square$

Zwei einfache, aber sehr wichtige Folgerungen aus dem großen Umordnungssatz sind in dem nächsten Korollar enthalten.

Korollar zu Satz 5.5.2

(a) *Ist* $\sum_{n=0}^\infty a_n$ *absolut konvergent, so sind es auch die Reihen* $\sum_{n=0}^\infty a_{2n}$ *und* $\sum_{n=0}^\infty a_{2n+1}$*, und es gilt*

$$\sum_{n=0}^\infty a_n \;=\; \sum_{n=0}^\infty a_{2n} \;+\; \sum_{n=0}^\infty a_{2n+1}\,.$$

(b) *Ist eine Doppelreihe* $\sum_{k,\nu=1}^\infty a_{k\nu}$ *absolut konvergent, so konvergieren auch beide iterierte Reihen absolut, und es gilt*

$$\sum_{k,\nu=1}^\infty a_{k\nu} \;=\; \sum_{\nu=1}^\infty \Big(\sum_{k=1}^\infty a_{k\nu}\Big) \;=\; \sum_{k=1}^\infty \Big(\sum_{\nu=1}^\infty a_{k\nu}\Big)$$

Beweis: Zu (a): Wende den großen Umordnungssatz an mit $J_1 = \{2n : n \ge 0\}$, $J_2 = \{2n{+}1 : n \ge 0\}$, und $J_k = \emptyset$ sonst. Zu (b): Für $J_k = \mathbb{N}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ folgt die linke Gleichung aus dem großen Umordnungssatz, und durch Vertauschen von k und ν ergibt sich die andere. □

Definition 5.5.3 *Für Reihen* $\sum_{k=0}^\infty a_k$ *und* $\sum_{k=0}^\infty b_k$ *in* $\mathbb{K}$ *heißt die neue Reihe* $\sum_{k=0}^\infty c_k$ *mit*

$$c_k \;=\; \sum_{j=0}^k a_{k-j}\, b_j \;=\; \sum_{j=0}^k b_{k-j}\, a_j \quad \forall\ k \ge 0 \tag{5.5.2}$$

das Cauchy-Produkt *der Ausgangsreihen.*

Satz 5.5.4 *Sind die Reihen* $\sum_{k=0}^\infty a_k$ *und* $\sum_{k=0}^\infty b_k$ *beide absolut konvergent, und gilt* (5.5.2)*, so folgt die absolute Konvergenz von* $\sum_{k=0}^\infty c_k$*, und es gilt*

$$\sum_{k=0}^\infty c_k \;=\; \Big(\sum_{k=0}^\infty a_k\Big)\,\Big(\sum_{k=0}^\infty b_k\Big)\,.$$

Beweis: Die Doppelreihe $\sum_{n,m=0}^\infty a_n\, b_m$ ist wegen

$$\sum_{n,m=0}^N |a_n\, b_m| \;\le\; \Big(\sum_{n=0}^\infty |a_n|\Big)\,\Big(\sum_{m=0}^\infty |b_m|\Big)$$

absolut konvergent. Wendet man den großen Umordnungssatz auf die Mengen $J_k = \{(n,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : n+m = k\}$ an, so sieht man dass der Wert der Doppelreihe gleich $\sum_{k=0}^\infty c_k$ ist. Andererseits folgt für $J_k = \{(k,m) : m \in \mathbb{N}\}$, dass der Wert auch gleich dem Produkt der beiden Reihen $\sum_{k=0}^\infty a_k$ und $\sum_{k=0}^\infty b_k$ ist. □

Aufgabe 5.5.5 *Gib ein einfaches Beispiel einer konvergenten Reihe* $\sum_{k=0}^\infty a_k$*, für welche die Reihen* $\sum_{k=0}^\infty a_{2k}$ *und* $\sum_{k=0}^\infty a_{2k+1}$ *beide divergieren. Vergleiche dies mit obigem Korollar zum großen Umordnungssatz.*

Aufgabe 5.5.6 *Zeige mit dem großen Umordnungssatz: Ist* $\sum_{k=p}^{\infty} \sum_{j=p}^{k} |a_{kj}| < \infty$, *so gilt*

$$\sum_{k=p}^{\infty} \sum_{j=p}^{k} a_{kj} = \sum_{j=p}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} a_{kj} .$$

Aufgabe 5.5.7 *Zeige für alle* $x \in \mathbb{C}$ *mit* $|x| < 1$ *die Gleichung*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\, x^k = \frac{x}{(1-x)^2} .$$

Anleitung: Beachte $k = \sum_{j=1}^{k} 1$ *und verwende die vorherige Aufgabe.*

5.6 Dual- und Dezimalzahlen

Im Folgenden sei $g \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ fest gegeben.

Definition 5.6.1 *Die Zahl* g *heiße im Weiteren* die Basis *für die* g*-adische Zahldarstellung. Die ganzen Zahlen* $0, 1, \ldots, g-1$ *heißen* die Ziffern der Darstellung. *Eine Reihe der Form*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{g^k}$$

heißt eine g-adische Reihe, *falls die* z_k *Ziffern sind, falls also* $z_k \in \{0, 1, \ldots, g-1\}$ *für alle* k *ist, und falls* $z_k < g-1$ *für unendlich viele* k *gilt. Offenbar ist jede* g*-adische Reihe konvergent, denn* $\sum_{k=1}^{\infty} (g-1)/g^k$ *ist eine konvergente Majorante. Im Fall* $g = 10$ *sprechen wir auch von* Dezimalreihen, *für* $g = 2$ *von* Dualreihen, *und für* $g = 16$ *von* Hexadezimalreihen.

Eine beliebige reelle Zahl x läßt sich eindeutig zerlegen als $x = p + \xi$, mit $p = [x] \in \mathbb{Z}$ und $0 \le \xi < 1$. Nach Satz 2.6.10 besitzt p eine g-adische Zahldarstellung, und wir wollen jetzt zeigen, dass ξ sich als g-adische Reihe schreiben läßt:

Satz 5.6.2 (g-adische Zahldarstellung reeller Zahlen)
Eine Zahl $\xi \in [0, 1)$ *besitzt eine eindeutige Darstellung als* g*-adische Reihe, d. h., es gibt eindeutig bestimmte* $z_k \in \{0, 1, \ldots, g-1\}$ *mit* $z_k < g-1$ *für unendlich viele* $k \in \mathbb{N}$, *so dass*

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{g^k} . \tag{5.6.1}$$

Beweis: Sei angenommen, dass (5.6.1) schon gezeigt wäre. Die Partialsummen $\xi_n = \sum_{k=1}^{n} z_k/g^k$ sind offensichtlich monoton wachsend, und für $r_n = \xi - \xi_n$ gilt dann

$$0 \le r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} z_k/g^k < (g-1) \sum_{k=n+1}^{\infty} 1/g^k = 1/g^n,$$

denn für mindestens ein $k \ge n+1$ ist $z_k < g-1$. Daraus folgt aber

$$0 \le g^n\, r_n = g^n\, r_{n-1} - z_n < 1,$$

und daher muss $z_n = [g^n\, r_{n-1}]$ sein. Dies zeigt, dass die Ziffer z_n eindeutig festliegt (wenn man vorher schon $z_1, \ldots, z_{n-1}$ gefunden hat). Definiert man umgekehrt die Folgen (z_n) und (r_n) durch die Vorschrift $r_0 = \xi$ und

$$z_n \;=\; [g^n\, r_{n-1}]\,, \qquad r_n \;=\; \xi - \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{g^k} \;=\; r_{n-1} - \frac{z_n}{g^n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \tag{5.6.2}$$

so folgt induktiv $z_n \in \{0, 1, \ldots, g-1\}$ und $0 \le r_n < 1/g^n$, also $r_n \to 0$ für $n \to \infty$. □

Korollar zu Satz 5.6.2 *Das Intervall* $[0, 1)$ *ist überabzählbar.*

Beweis: Aus Satz 2.5.6 folgt, dass die Menge aller Ziffernfolgen (z_k) überabzählbar ist. Die Menge der Folgen, für die alle z_k ab einer Stelle gleich $g-1$ sind, ist abzählbar unendlich. Folglich ist die Menge aller g-adischen Reihen überabzählbar, und daraus folgt die Behauptung. □

Definition 5.6.3 *Wir nennen manchmal eine g-adische Reihe auch* g-adische Entwicklung einer Zahl *und schreiben*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{g^k} \;=\; 0, z_1\, z_2\, z_3 \ldots$$

Für $g = 10$ bzw. $g = 2$ bzw. $g = 16$ sprechen wir auch von einer dezimalen *bzw.* dualen *bzw.* hexadezimalen *Darstellung einer Zahl.*

Eine solche Entwicklung heißt periodisch*, falls es $k_0, p \in \mathbb{N}$ gibt, für welche*

$$z_{k+p} \;=\; z_k \qquad \forall\; k \ge k_0.$$

Das kleinste p mit dieser Eigenschaft heißt auch die Periodenlänge *der Entwicklung.*

Behauptung 5.6.4 *Die g-adische Entwicklung einer Zahl $\xi \in [0, 1)$ ist genau dann periodisch, wenn $\xi \in \mathbb{Q}$ ist.*

Beweis: Sei $\xi = \sum_{k=0}^{\infty} z_k/g^k$ periodisch. Für k_0 und p wie in der Definition gilt dann $z_{np+j+k_0} = \tilde{z}_j$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $0 \le j \le p-1$. Also folgt

$$\xi \;=\; \sum_{k=1}^{k_0-1} \frac{z_k}{g^k} \;+\; \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{p-1} \frac{\tilde{z}_j}{g^{np+j+k_0}} \;=\; r_1 \;+\; r_2\, \frac{g^p}{g^p - 1}\;,$$

mit $r_1 = \sum_{k=1}^{k_0-1} z_k/g^k$, $r_2 = \sum_{j=0}^{p-1} \tilde{z}_j/g^{j+k_0}$. Dies zeigt, dass ξ rational ist.

Sei umgekehrt $\xi \in \mathbb{Q}$, also $\xi = \nu/\mu$ mit $\nu \in \mathbb{N}_0$, $\mu \in \mathbb{N}$ und $\nu < \mu$. Mit den Bezeichnungen aus (5.6.2) sei $R_n = g^n\, r_n$. Dann folgt induktiv, dass $\mu\, R_n \in \{0, 1, \ldots, \mu - 1\}$ ist, und somit kann R_n nur endlich viele verschiedene Werte annehmen. Wegen (5.6.2) gelten die Rekursionen

$$z_n \;=\; [g\, R_{n-1}], \quad R_n \;=\; g\, R_{n-1} \;-\; z_n \qquad \forall\; n \in \mathbb{N},$$

und deshalb ist klar, dass sich die Werte der Ziffern z_n wiederholen, sobald R_{n-1} einen Wert annimmt, der schon vorher von einem R_j angenommen wurde. Dies muss aber eintreten, da der Wertevorrat für die R_n eine endliche Menge ist. □

Aufgabe 5.6.5 *Finde die dezimalen, dualen und hexadezimalen Darstellungen folgender rationaler Zahlen:*

$$1/2, \qquad 1/7, \qquad 1/9, \qquad 1/3.$$

5.7 Gleichmäßige Konvergenz

Definition 5.7.1 *Gegeben sei eine beliebige Menge D und Funktionen $f_n, g_k : D \longrightarrow \mathbb{K}$ für alle $n, k \in \mathbb{N}$. Dann nennen wir (f_n) eine* Funktionenfolge *auf D, und $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ eine* Funktionenreihe *auf D. Die Funktionenfolge (f_n) heißt* auf D punktweise konvergent, *falls für jedes $x \in D$ die Folge $(f_n(x))$ konvergent ist. Ist dies der Fall, so heißt $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$, mit $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in D$,* die Grenzfunktion *der Folge. Analog heißt die Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$* auf D punktweise konvergent, *falls für jedes $x \in D$ die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ konvergent ist, und die Grenzfunktion f ist dann durch $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ für alle $x \in D$ gegeben. Die Funktionenfolge (f_n) heißt* auf D gleichmäßig konvergent, *falls sie punktweise konvergiert (gegen die Grenzfunktion f), und falls weiter gilt:*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{R}_+\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ \forall\ x \in D : n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Analog heißt die Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ auf D gleichmäßig konvergent, *falls sie punktweise konvergiert (gegen die Grenzfunktion f), und falls weiter gilt:*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{R}_+\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ \forall\ x \in D : n \geq N \implies \Big| f(x) - \sum_{k=1}^{n} g_k(x) \Big| < \varepsilon.$$

Also ist die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ äquivalent mit der gleichmäßigen Konvergenz der Folge ihrer Partialsummenfolge.

Satz 5.7.2 (Cauchy-Kriterium für gleichm. Konv.) *Mit den Bezeichnungen wie in obiger Definition gilt:*

Die Funktionenfolge (f_n) ist genau dann auf D gleichmäßig konvergent, wenn

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{R}_+\ \forall\ n, m \in \mathbb{N}\ \forall x \in D : n, m \geq N \implies |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Die Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ ist genau dann auf D gleichmäßig konvergent, wenn

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{R}_+\ \forall\ n, p \in \mathbb{N}\ \forall x \in D : n \geq N \implies \Big| \sum_{k=n+1}^{n+p} g_k(x) \Big| < \varepsilon.$$

Beweis: Wird analog wie im Fall von Zahlenfolgen und -reihen gezeigt. □

Satz 5.7.3 (Majorantenkriterium für gleichm. Konv.) *Mit den Bezeichnungen wie in obiger Definition gilt:*

Falls Zahlen $a_k \in \mathbb{R}_+$ existieren, für welche gilt

$$|g_k(x)| \ \leq\ a_k\ \forall\ x \in D, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \ <\ \infty,$$

dann ist die Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ auf D gleichmäßig konvergent.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ impliziert die Existenz von $N \in \mathbb{R}_+$ mit $\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Wegen $|\sum_{k=n+1}^{n+p} g_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k$ folgt daher die Behauptung mit dem Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz. □

Aufgabe 5.7.4 *Zeige: Die Funktionenfolge* (f_n) *mit* $f_n(x) = x^n$ *ist auf dem abgeschlossenen Intervall* $[0, 1]$ nicht *gleichmäßig konvergent.*

Aufgabe 5.7.5 *Zeige: Die Funktionenfolge* (f_n) *mit* $f_n(x) = (1 - x)\, x^n$ *ist gleichmäßig konvergent auf dem abgeschlossenen Intervall* $[0, 1]$.

Aufgabe 5.7.6 *Zeige: Die Funktionenreihe* $\sum_{k=1}^{\infty} x^k/k^2$ *ist gleichmäßig konvergent auf dem abgeschlossenen Intervall* $[0, 1]$.

5.8 Potenzreihen

In diesem Abschnitt ist es naheliegend, die Theorie der Potenzreihen mit komplexen Koeffizienten und einer komplexen Veränderlichen zu untersuchen. Allerdings sind in fast allen interessanten Beispielen die Koeffizienten reell.

Definition 5.8.1 *Eine Reihe der Form* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, (z - z_0)^k$, *mit* $a_k, z_0, z \in \mathbb{C}$, *heißt* eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt z_0 und Koeffizienten a_k.

Beispiel 5.8.2 *Die geometrische Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ *ist eine, man kann sogar sagen: die wichtigste, Potenzreihe mit Entwicklungspunkt* $z_0 = 0$ *und Koeffizienten* $a_k = 1$. *Eine zweite wichtige Potenzreihe, die schon eine Rolle gespielt hat, ist die Exponentialreihe* $\sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$

Proposition 5.8.3 *Gegeben sei eine Potenzreihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, (z - z_0)^k$. *Dann gilt:*

(a) *Die Reihe konvergiert trivialerweise für* $z = z_0$, *und ihr Wert ist gleich* a_0.

(b) *Ist die Reihe für ein* $z = z_1 \neq z_0$ *konvergent, so ist sie absolut konvergent für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$.

Beweis: Teil (a) ist klar. Zu (b): Aus der Konvergenz für $z = z_1$ folgt, dass $(a_k\, (z_1 - z_0)^k)$ eine Nullfolge, also insbesondere beschränkt ist. Daher gibt es ein $K \in \mathbb{R}_+$ mit $|a_k| \le K\, |z_1 - z_0|^{-k}$ für alle $k \ge 0$. Für $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ folgt deshalb

$$\sqrt[k]{|a_k\, (z - z_0)^k|} \;=\; |z - z_0|\, \sqrt[k]{|a_k|} \;\le\; \frac{|z - z_0|}{|z_1 - z_0|}\, \sqrt[k]{K} \quad \forall\, k \ge 0.$$

Wegen $\sqrt[k]{K} \to 1$ für $k \to \infty$ ist die rechte Seite kleiner als $1 - \varepsilon$ für ein genügend kleines $\varepsilon > 0$ und jedes $k \ge k_0$. Mit dem Wurzelkriterium folgt deshalb die Behauptung. □

Definition 5.8.4 *Gegeben sei eine Potenzreihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, (z - z_0)^k$. *Die Zahl* $R \ge 0$ *mit*

$$1/R \;=\; \limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

heißt der Konvergenzradius *der Potenzreihe; hierbei gilt die Vereinbarung dass ausnahmsweise* $1/0 = \infty$, *und natürlich* $1/\infty = 0$, *sein soll.*

Satz 5.8.5 *Sei eine Potenzreihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, (z - z_0)^k$ *gegeben, und sei* R *ihr Konvergenzradius. Dann ist die Reihe absolut konvergent für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z - z_0| < R$, *und divergent für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z - z_0| > R$, *wobei für* $R = 0$ *die erste und für* $R = \infty$ *die zweite Menge leer ist.*

Beweis: Falls $R > 0$ ist, sei ein z mit $R^{-1}|z - z_0| < 1$ betrachtet. Dann gibt es ein $\rho > 1/R$ so, dass $\rho\,|z - z_0| < 1$, und nach Definition von limes superior gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[k]{|a_k|} \leq \rho$ für alle $k \geq k_0$. Daraus folgt die Existenz von $c > 0$ mit $|a_k| \leq c\,\rho^k$ für alle $k \geq 0$, und deshalb ist die Potenzreihe absolut konvergent für dieses z. Daraus folgt der erste Teil der Behauptung.

Falls $R < \infty$ ist, sei ein z mit $R^{-1}|z - z_0| > 1$ betrachtet. Dann gibt es ein $\rho < 1/R$ so, dass $\rho\,|z - z_0| \geq 1$, und nach Definition von limes superior gilt dann $\sqrt[k]{|a_k|} \geq \rho$ für unendlich viele $k \geq 0$. Für diese k ist dann $|a_k\,(z - z_0)^k| \geq 1$, und somit kann die Reihe nicht konvergieren. □

Potenzreihen sind Spezialfälle von Funktionenreihen, und deshalb ist es sinnvoll, die Frage nach der gleichmäßigen Konvergenz zu stellen:

Satz 5.8.6 (Gleichmäßige Konvergenz von Potenzreihen) *Sei eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z - z_0)^k$ mit einem Konvergenzradius $R > 0$ gegeben, und sei $0 < r < R$. Dann konvergiert die Potenzreihe gleichmäßig für alle z mit $|z - z_0| \leq r$.*

Beweis: Sei $0 < \delta < 1/r - 1/R$. Nach Definition des limes superior gilt $\sqrt[k]{|a_k|} \leq \delta + 1/R < 1/r$ für alle $k \geq k_0$, woraus für $|z - z_0| \leq r$ folgt dass

$$|z - z_0|^k\,|a_k| \;\leq r^k\,(\delta + 1/R)^k \qquad \forall\ k \geq k_0.$$

Wegen $r(\delta + 1/R) < 1$ folgt die Behauptung mit dem Majorantenkriterium für gleichmäßige Konvergenz. □

Behauptung 5.8.7 *Sei eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z - z_0)^k$ gegeben, und sei R ihr Konvergenzradius. Falls $a_k \neq 0$ ist für alle $k \geq k_0$ ist, dann gilt*

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} \;\leq R\; \leq \limsup_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}\ .$$

Falls die Folge $(|a_k|/|a_{k+1}|)_{k=k_0}^{\infty}$ konvergiert oder bestimmt divergiert, ergibt sich hieraus

$$R \;=\; \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}\ .$$

Beweis: Für $b_k = a_k\,(z - z_0)^k$ folgt

$$\frac{|b_{k+1}|}{|b_k|} \;=\; \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}\,(z - z_0)\,.$$

Setzt man $\rho_+ = \limsup |a_k|/|a_{k+1}|$ und $\rho_- = \liminf |a_k|/|a_{k+1}|$, so folgt für jedes $\varepsilon > 0$ die Existenz von K, so dass

$$\frac{|z - z_0|}{\rho_+} \;-\; \varepsilon \;<\; \frac{|b_{k+1}|}{|b_k|} \;<\; \frac{|z - z_0|}{\rho_-} \;+\; \varepsilon \quad \forall\ k \geq K\,.$$

Mit dem Quotientenkriterium folgt die Konvergenz von $\sum b_k = \sum a_k(z - z_0)^k$ für $|z - z_0| < \rho_-$, und deshalb ist $\rho_- \leq R$. Für $|z - z_0| > \rho_+$ folgt dagegen, dass (b_k) keine Nullfolge sein kann, und deshalb muss $R \leq \rho_+$ sein. □

Behauptung 5.8.8 (Produkt von Potenzreihen) *Wenn die zwei Potenzreihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z - z_0)^k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k\,(z - z_0)^k$ für $|z - z_0| < \rho$ absolut konvergieren, und zwar gegen die Funktionen $a(z)$ bzw. $b(z)$, so gilt für das Produkt*

$$a(z)\,b(z) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(z - z_0)^k\,, \quad |z - z_0| < \rho,$$

mit Koeffizienten $c_k = \sum_{j=0}^{k} a_{k-j}\,b_j$, für $k \geq 0$.

Beweis: Folgt aus Satz 5.5.4. □

Jede Potenzreihe mit Entwicklungspunkt z_0 und einem positiven Konvergenzradius R definiert eine Funktion der Variablen z auf der Kreisscheibe um z_0 mit Radius R. Auf diese Weise erhält man viele wichtige Beispiele von Funktionen; z. B. die folgenden:

Definition 5.8.9 *Wir bezeichnen*

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}$$

als die Sinus- *bzw.* Cosinusfunktion, *und*

$$\sinh z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \cosh z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

als die Funktionen sinus hyperbolicus *bzw.* cosinus hyperbolicus*. Alle diese Reihen konvergieren absolut für alle $z \in \mathbb{C}$. Die ersten beiden Funktionen heißen auch* trigonometrische*, die anderen* hyperbolische Funktionen*. Beachte, dass für $z = x \in \mathbb{R}$ alle diese Funktionen auch reelle Werte haben, während für allgemeines z die Werte komplex sind.*

Weiter sei noch definiert:

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}.$$

Diese Funktionen sind natürlich nur dort definiert, wo die jeweilige Nennerfunktion nicht verschwindet; vergleiche dazu Satz 7.5.3.

Aufgabe 5.8.10 *Berechne den Konvergenzradius von $\sum_{k=0}^{\infty} k^m z^k$, für beliebiges $m \in \mathbb{N}$, mit Hilfe von* Behauptung 5.8.7.

Aufgabe 5.8.11 *Zeige, dass alle Potenzreihen in obigem Beispiel den Konvergenzradius $R = \infty$ haben.*

5.9 Einige wichtige Identitäten

Mit Hilfe der Potenzreihen für die Exponentialfunktion sowie die trigonometrischen Funktionen lassen sich folgende Identitäten beweisen:

Behauptung 5.9.1 (Funktionalgl. der e-funktion im Komplexen)

$$\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}: \ \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\ \exp(z_2).$$

Beweis: Unter Verwendung der binomischen Formel folgt

$$\begin{aligned} \exp(z_1 + z_2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} z_1^j\, z_2^{k-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z_1^j}{j!} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{z_2^{k-j}}{(k-j)!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z_1^j}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_2^k}{k!} = \exp(z_1)\ \exp(z_2), \end{aligned}$$

also gilt die Behauptung. □

Behauptung 5.9.2 *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ ist*

$$\exp(nx) \;=\; \Big[\exp(x)\Big]^n, \qquad \exp(x/n) \;=\; \sqrt[n]{\exp(x)}\,.$$

Beweis: Die erste Gleichung folgt induktiv aus der Funktionalgleichung, die zweite folgt dann aus der ersten und der Definition der n-ten Wurzel. □

Definition 5.9.3 *Auf Grund der vorstehenden Behauptung schreiben wir jetzt auch*

$$\exp(z) \;=\; \mathrm{e}^z \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Behauptung 5.9.4 (Eulersche Gleichung) *Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\mathrm{e}^{iz} \;=\; \cos z \;+\; i \sin z\,.$$

Beweis: Wegen $i^2 = -1$ folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} \;+\; i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}\,,$$

also die Behauptung auf Grund der Definition der trigonometrischen Funktionen. □

Behauptung 5.9.5 (Additionstheoreme) *Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gelten*

(a) $\sin(z_1 + z_2) \;=\; \sin z_1\; \cos z_2 \;+\; \cos z_1\; \sin z_2,$

(b) $\cos(z_1 + z_2) \;=\; \cos z_1\; \cos z_2 \;-\; \sin z_1\; \sin z_2.$

Beweis: Wegen der Eulerschen Gleichung und der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion ist

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\pm i\,(z_1+z_2)} \;&=\; \cos(z_1+z_2) \;\pm\; i\,\sin(z_1+z_2) \\ &=\; (\cos z_1 \;\pm\; i\,\sin z_1)\,(\cos z_2 \;\pm\; i\,\sin z_2) \\ &=\; \cos z_1\; \cos z_2 - \sin z_1\; \sin z_2 \;\pm i\,(\sin z_1\; \cos z_2 + \cos z_1\; \sin z_2). \end{aligned}$$

Durch Addition bzw. Subtraktion dieser beiden Gleichungen folgt die Behauptung. □

Behauptung 5.9.6 *Für alle $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\cos^2 z \;+\; \sin^2 z \;=\; 1\,, \qquad \left|\mathrm{e}^z\right| = \mathrm{e}^x\,.$$

Beweis: Wegen der Eulerschen Gleichung und der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion ist $\cos^2 z + \sin^2 z = (\cos z + i\,\sin z)\,(\cos z - i\,\sin z) = \mathrm{e}^{iz}\,\mathrm{e}^{-iz} = \mathrm{e}^0 = 1$. Daher gilt die erste Gleichung. Die zweite folgt aus der ersten und der Funktionalgleichung. □

Weitere sehr wichtige Identitäten sind in der folgenden Aufgabe enthalten – zum Beweis kann man teilweise Formeln benutzen, die schon vorher gezeigt wurden, aber man kann auch direkt mit den Potenzreihen der trigonometrischen bzw. hyperbolischen Funktionen arbeiten.

Aufgabe 5.9.7 *Zeige folgende weitere Identitäten, jeweils für alle* $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$:

- $\cos z = \dfrac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}\,, \qquad \sin z = \dfrac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}.$
- $\mathrm{e}^z \;=\; \cosh z + \sinh z.$
- $\cosh z = \dfrac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}\,, \qquad \sinh z = \dfrac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}.$
- $\cosh(iz) = \cos z, \qquad \sinh(iz) = i\,\sin z.$
- $\sin z = \sin x\,\cosh y + i\,\cos x\,\sinh y,$
- $\cos z = \cos x\,\cosh y - i\,\sin x\,\sinh y,$
- $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1.$

Zeige weiter $|\cos z|^2 = \cosh^2 y - \sin^2 x$*, und finde eine analoge Gleichung für* $|\sin z|$*. Schließe hieraus, dass* $\sin z$ *und* $\cos z$*, anders als im Reellen, in* $\mathbb{C}$ *unbeschränkt sind.*

Kapitel 6

Stetige Funktionen

6.1 Definition der Stetigkeit

Im Folgenden betrachten wir Funktionen auf einem meist fest gewählten Definitionsbereich $D \subset \mathbb{K}$, sowie einen weiteren Punkt $x_0 \in D$. Der für uns wichtigste Fall ist der, wenn D ein Intervall in $\mathbb{R}$ und x_0 ein Punkt im Inneren des Intervalls oder einer der Randpunkte ist, aber meistens spielt die genaue Art von D und x_0 keine Rolle.

Definition 6.1.1 *Sei eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$ gegeben. Wir sagen, dass f* in einem Punkt $x_0 \in D$ stetig ist, *wenn folgendes gilt:*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D: \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{6.1.1}$$

Falls f in jedem Punkt von D stetig ist, sagen wir kurz: f ist auf D stetig.

Wir sagen, dass f auf D einer Lipschitzbedingung genügt, *oder dass f* auf D Lipschitz-stetig ist, *falls eine Konstante $L \in \mathbb{R}_+$ existiert, so dass*

$$|f(x_0) - f(x_1)| \leq L\,|x_0 - x_1| \qquad \forall\, x_0, x_1 \in D.$$

Jedes solche L heißt auch Lipschitzkonstante für f (auf D)*.*

Bemerkung 6.1.2 *Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$ stetig in $x_0 \in D$. Beachte, dass* (6.1.1) *trivialerweise richtig bleibt, wenn wir δ verkleinern; insofern ist δ durch ε nie eindeutig festgelegt. Es genügt aber zum Nachweis der Stetigkeit für jedes $\varepsilon > 0$* ein (möglicherweise sehr kleines) $\delta > 0$ *zu finden, für welches* (6.1.1) *gilt. Wir nennen manchmal ein solches δ auch* ein zu ε gehöriges δ*.*

Wir nennen $x_0 \in D$ manchmal einen isolierten Punkt von D*, falls es ein $\rho > 0$ gibt derart, dass für alle anderen Punkte $x \in D \setminus \{x_0\}$ gilt $|x - x_0| \geq \rho$. Beachte: Ist x_0 ein solcher isolierter Punkt von D, so gilt* (6.1.1) *trivialerweise, sofern nur $\delta \leq \rho$ ist. D. h.,* jede auf D definierte Funktion ist stetig in allen isolierten Punkten von D.

Beispiel 6.1.3 *Konstante Funktionen und die identische Abbildung sind immer stetig, denn sie erfüllen die Definition für beliebiges δ bzw. für $\delta = \varepsilon$. Weiter folgt aus der Gültigkeit einer Lipschitzbedingung immer die Stetigkeit auf D, denn dann gilt* (6.1.1) *für $\delta = \varepsilon/L$. Weitere Beispiele erhalten wir aus dem folgenden Satz:*

Satz 6.1.4 *Gegeben sei eine beliebige Menge $D \subset \mathbb{K}$, sowie Funktionen $f_n, g_k : D \longrightarrow \mathbb{K}$ für alle $n, k \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

(a) *Sind alle f_n in einem Punkt $x_0 \in D$ stetig, und ist die Funktionenfolge (f_n) auf D gleichmäßig konvergent, so ist die Grenzfunktion f ebenfalls stetig in x_0.*

(b) *Sind alle g_k in einem Punkt $x_0 \in D$ stetig, und ist die Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ auf D gleichmäßig konvergent, so ist die Grenzfunktion f ebenfalls stetig in x_0.*

Beweis: Zu (a): Mit der Dreiecksungleichung folgt für $x \in D$:

$$|f(x) - f(x_0)| \;\le\; |f(x) - f_n(x)| \;+\; |f_n(x) - f_n(x_0)| \;+\; |f_n(x_0) - f(x_0)|.$$

Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz die Existenz von $N \in \mathbb{R}_+$, für welches der erste und der dritte Term auf der rechten Seite beide kleiner als $\varepsilon/3$ sind, falls nur $n \ge N$ ist (unabhängig von der Wahl von $x \in D$). Für festes n folgt aus der Stetigkeit von f_n die Existenz eines $\delta > 0$, für welches der mittlere Term ebenfalls kleiner als $\varepsilon/3$ ist, sobald nur $|x - x_0| < \delta$ ist. Also folgt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für $|x - x_0| < \delta$. Das ist aber die Stetigkeit von f im Punkt x_0.

Zu (b): Folgt aus (a) für $f_n = \sum_{k=1}^{n} g_k$. □

Behauptung 6.1.5 *Die Exponentialfunktion, die trigonometrischen und die hyperbolischen Funktionen sind stetig auf ganz $\mathbb{C}$.*

Beweis: Folgt aus Satz 5.8.6 und Satz 6.1.4. □

Proposition 6.1.6 (Folgenstetigkeit) *Genau dann ist $f : D \to \mathbb{K}$ stetig in $x_0 \in D$, wenn für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \longrightarrow x_0$ auch $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$ gilt für $n \to \infty$.*

Beweis: Sei f stetig in x_0, und sei (x_n) eine Folge in D mit $x_n \longrightarrow x_0$ für $n \to \infty$. Seien ferner $\varepsilon > 0$ beliebig und $\delta > 0$ wie in (6.1.1). Dann gibt es ein N derart, dass $|x_n - x_0| < \delta$ ist, wenn $n \ge N$, und daher folgt mit (6.1.1), dass $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ für diese n. Daraus folgt die Konvergenz von $(f(x_n))$ gegen $f(x_0)$. Sei jetzt f *nicht* stetig in x_0. Dann folgt:

$$\exists\, \varepsilon > 0\ \forall\, \delta > 0\ \exists\, x \in D : \ |x - x_0| < \delta\,,\ |f(x) - f(x_0)| \ge \varepsilon.$$

Wenn wir $\delta = 1/n$ setzen (für $n \in \mathbb{N}$ genügend groß) und das zugeörige x mit x_n bezeichnen, dann erhalten wir eine Folge (x_n), welche gegen x_0 konvergiert, während die Folge $(f(x_n))$ sicher nicht gegen $f(x_0)$ geht. Das ist die umgekehrte Richtung der Behauptung. □

Mit dieser äquivalenten Charakterisierung der Stetigkeit und den Rechenregeln für konvergente Folgen zeigen wir jetzt entprechende Regeln für stetige Funktionen:

Proposition 6.1.7 (Rechenregeln für Stetigkeit)

(a) *Sind $f, g : D \longrightarrow \mathbb{K}$ beide stetig in $x_0 \in D$, so sind auch $f + g$ und $f\,g$ stetig in x_0.*

(b) *Sind $f : D \longrightarrow D_1$ und $g : D_1 \longrightarrow \mathbb{K}$ stetig in $x_0 \in D$ bzw. $f(x_0) \in D_1$, so ist die Hintereinanderausführung $g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{K}$ stetig in x_0.*

(c) *Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$ stetig in $x_0 \in D$, und ist $f(x_0) \ne 0$, so gibt es ein $r > 0$ derart, dass $f(x) \ne 0$ ist auf $D_1 = D \cap \{x : |x - x_0| < r\}$, und $1/f : D_1 \to \mathbb{K}$ ist wieder stetig in x_0.*

Beweis: Die Aussagen (a) und (b) folgen sofort aus den Rechenregeln für Folgen und der vorhergehenden Proposition. Für (c) genügt es, die erste Teilaussage zu zeigen. Dazu sei $\varepsilon = |f(x_0)|$ gesetzt. Wegen der Stetigkeit gibt es dann ein zugehöriges $\delta > 0$, und für dieses folgt mit der Dreiecksungleichung nach unten $|f(x)| \geq |f(x_0)| - |f(x) - f(x_0)| = \varepsilon - |f(x) - f(x_0)| > 0$ falls nur $x \in D$ und $|x - x_0| < \delta$ ist. Daher gilt die Behauptung mit $r = \delta$. □

Aufgabe 6.1.8 *Zeige: Jedes Polynom ist stetig in $\mathbb{C}$, jede rationale Funktion ist auf ihrem natürlichen Definitionsbereich stetig. Zeige weiter die Stetigkeit der Abbildung $z \mapsto |z|$ auf $\mathbb{C}$.*

6.2 Eigenschaften stetiger Funktionen

In diesem Abschnitt sei ein festes abgeschlossenes Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ betrachtet, wobei $a < b$ sei.

Satz 6.2.1 (Existenz von Maximum und Minimum) *Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f ein Maximum und ein Minimum an. Das heißt genauer: Es gibt Punkte $x_*, x^* \in [a, b]$ mit*

$$f(x_*) \ \leq \ f(x) \ \leq \ f(x^*) \qquad \forall\, x \in [a, b]\,.$$

Insbesondere ist f auf $[a, b]$ beschränkt.

Beweis: Sei $y = \sup\{f(x) : a \leq x \leq b\}$ (also evtl. $y = \infty$, was wir aber ausschließen wollen). Dann gibt es eine Folge (x_n) in $[a, b]$ derart, dass $f(x_n) \to y$ für $n \to \infty$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt diese Folge eine konvergente Teilfolge; diese Teilfolge sei o. B. d. A. wieder mit (x_n) bezeichnet, und ihr Grenzwert sei x^*. Wegen der Stetigkeit von f folgt $f(x_n) \longrightarrow f(x^*) = y$. Also ist $y \in \mathbb{R}$, und $f(x) \leq f(x^*)$ für alle $x \in [a, b]$. Analog zeigt man die Existenz von x_*. □

Bemerkung 6.2.2 *Der letzte Satz bleibt richtig, wenn der Definitionsbereich von f eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge D von $\mathbb{R}$ oder sogar von $\mathbb{C}$ ist, da dann auch sein Beweis genauso geführt werden kann. Dabei soll D* abgeschlossen *genannt werden, wenn für jede konvergente Folge in D auch der Grenzwert der Folge zu D gehört. Dies wird auch im zweiten Teil der Vorlesung eine Rolle spielen.*

Satz 6.2.3 (Zwischenwertsatz) *Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Sei ferner y eine beliebige Zahl mit $f(a) \leq y \leq f(b)$ oder $f(b) \leq y \leq f(a)$. Dann gibt es ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$.*

Beweis: Sei $f(a) \leq y \leq f(b)$ angenommen (sonst: betrachte $-f$). Sei $x = \sup\{\xi \in [a, b] : f(\xi) \leq y\}$. Wäre $f(x) < y$, so würde aus der Stetigkeit von f folgen, dass $f(x+h) < y$ wäre für genügend kleine $h > 0$, was der Definition von x widerspricht. Wäre $f(x) > y$, so wäre wegen der Stetigkeit auch $f(x - h) > y$ für hinreichend kleine $h > 0$, was ebenfalls nicht sein kann. Also folgt $f(x) = y$. □

Korollar zu Satz 6.2.3 *Sei I ein beliebiges Intervall, und sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(I)$ ebenfalls ein Intervall.*

Beweis: Wenn $y_1, y_2 \in f(I)$ gegeben sind, dann folgt mit Satz 6.2.3, dass jeder Wert zwischen y_1 und y_2 auch zur Wertemenge $f(I)$ gehört, und deshalb folgt die Behauptung mit der nächsten Aufgabe. □

Aufgabe 6.2.4 *Sei $A \in \mathbb{R}$ eine nichtleere Menge mit der* Zwischenwerteigenschaft*, d. h., $\forall\, a, b \in A,\ a < b : [a, b] \subset A$. Zeige: Dann ist A ein Intervall.*

Definition 6.2.5 *Sei $D \subset \mathbb{K}$, und sei $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$. Ein Punkt $x_0 \in D$ heißt* Nullstelle von f*, falls $f(x_0) = 0$ ist.*

Aufgabe 6.2.6 *Zeige, dass ein Polynom $p \in \mathbb{R}[x]$ von ungeradem Grad immer mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{R}$ hat. Gib ein Beispiel dafür, dass dies nicht so ist für Polynome mit geradem Grad.*

Bemerkung 6.2.7 *Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, und seien $f(a) \geq 0$ und $f(b) \leq 0$, oder umgekehrt. Dann hat f mindestens eine Nullstelle auf $[a, b]$, und eine dieser Nullstellen kann mit einem der folgenden zwei Verfahren näherungsweise berechnet werden:*

1. **(Bisektionsmethode)** Falls $f(a) = 0$ oder $f(b) = 0$ ist, ist nichts mehr zu tun. Andernfalls seien $a_0 = a$, $b_0 = b$. Dann haben $f(a_0)$ und $f(b_0)$ unterschiedliche Vorzeichen, und somit ist $f(a_0)\, f(b_0) < 0$. Sei jetzt $x = (a_0 + b_0)/2$. Falls $f(x) = 0$ ist, haben wir eine Nullstelle gefunden. Falls nicht, kann $f(a_0)\, f(x) < 0$ gelten, und in diesem Fall seien $a_1 = a_0$, $b_1 = x$ gesetzt. Im anderen Fall gilt $f(b_0)\, f(x) < 0$, und wir setzen $a_1 = x$, $b_1 = b_0$. In beiden Fällen ist $a_1 < b_1$, und $f(a_1)\, f(b_1) < 0$.

   Sind allgemein schon Zahlen a_n, b_n mit $a_n < b_n$ und $f(a_n)\, f(b_n) < 0$ gegeben, so sei jetzt $x = (a_n + b_n)/2$. Wenn $f(x) = 0$ ist, stoppen wir das Verfahren. Wenn $f(a_n)\, f(x) < 0$ ist, seien $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = x$ gesetzt. Wenn dagegen $f(b_n)\, f(x) < 0$ ist, seien $a_{n+1} = x$, $b_{n+1} = b_n$ gesetzt. Insgesamt sehen wir, dass dieser Algorithmus entweder nach endlich vielen Schritten eine Nullstelle von f findet, oder aber zwei Zahlenfolgen (a_n), (b_n) liefert, für die immer $a_n < b_n$ und $f(a_n)\, f(b_n) < 0$ ist, so dass nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle von f im Intervall (a_n, b_n) liegen muss. Nach Konstruktion ist (a_n) wachsend und (b_n) fallend, und $b_n - a_n = (b - a)\, 2^{-n}$. Also folgt Konvergenz beider Folgen gegen denselben Grenzwert a, und dieser muss dann Nullstelle von f sein (Beweis?).

2. **(regula falsi)** Wir gehen genau wie bei der Bisektionsmethode vor, nur setzen wir in jedem Schritt x gleich der Schnittstelle der Geraden durch $(a_n, f(a_n))$ und $(b_n, f(b_n))$ mit der x-Achse, d. h.,

$$x \;=\; \frac{a_n\, f(b_n) \;-\; b_n\, f(a_n)}{f(b_n) \;-\; f(a_n)} \,.$$

Beide Verfahren konvergieren nicht besonders schnell gegen die gesuchte Nullstelle. Deshalb wird meist das Newton-Verfahren *besser geeignet sein; siehe hierzu* Bemerkung 7.2.6.

Behauptung 6.2.8 *Mit $x_0 = \sqrt{2}$ $(> 1{,}41)$, $x_1 = \sqrt{6 - 2\sqrt{3}}$ $(< 1{,}6)$ gilt: Die Funktion $\cos x$ ist positiv für $x \in [0, x_0)$ und hat mindestens eine Nullstelle auf dem Intervall $[x_0, x_1]$.*

Beweis: Aus (5.2.2) und der Tatsache, dass $1 - x^2/2 + x^4/24 = 0$ ist für $x = x_1$ folgt $\cos x_1 \leq 0$. Daraus folgt die Behauptung mit dem Zwischenwertsatz. □

Satz 6.2.9 (Stetigkeit der Umkehrfunktion) *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall, und sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ streng monoton und stetig auf I, also $J = f(I)$ ebenfalls ein Intervall. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : J \longrightarrow I$ stetig auf J.*

Beweis: Sei o. B. d. A. f streng monoton wachsend (sonst: betrachte $-f$). Sei $y \in J$ beliebig, und sei $x \in I$ so, dass $f(x) = y$ gilt. Sei zunächst x kein Randpunkt von I. Dann gilt für jedes genügend kleine $\varepsilon > 0$, dass $x_\pm = x \pm \varepsilon \in I$ ist. Also ist $y_- = f(x_-) < y < y_+ = f(x_+)$. Für $\delta = \min\{y - y_-, y_+ - y\}$ gilt dann $x_- < f^{-1}(\eta) < x_+$ für alle $\eta \in (y - \delta, y + \delta)$. Also ist f^{-1} stetig im Punkt y. Falls x ein Randpunkt von I (also y ein solcher von J) ist, schließt man ganz ähnlich. □

6.3 Der Logarithmus im Reellen

Satz 6.3.1 *Für $x \in \mathbb{R}$ ist die Exponentialfunktion e^x streng monoton wachsend und nimmt jedes $y \in \mathbb{R}_+$ als Wert an.*

Beweis: Für $x \in \mathbb{R}$ und $h > 0$ ist $\mathrm{e}^h = \sum_{k=0}^{\infty} h^k/k! > 1$, also $\mathrm{e}^{x+h} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^h > \mathrm{e}^x$. Also ist e^x streng mononton wachsend. Sei jetzt $y_0 \in \mathbb{R}_+$ gegeben. Aus $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k! \geq 1 + x$ für $x \geq 0$ folgt dass es ein $x \in \mathbb{R}$ gibt mit $\mathrm{e}^x \geq y_0$, und wegen $\mathrm{e}^{-x} = 1/\mathrm{e}^x$ folgt auch die Existenz eines (anderen) $x \in \mathbb{R}$ mit $\mathrm{e}^x \leq y_0$. Mit dem Zwischenwertsatz folgt dann, dass $\mathrm{e}^{x_0} = y_0$ gilt für ein $x_0 \in R$. □

Definition 6.3.2 *Nach dem vorstehenden Satz ist* $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *bijektiv. Die Umkehrfunktion heißt* der (natürliche) Logarithmus, *und wir schreiben* $\log : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \log x$. *Klar ist dass* $\log$ *ebenfalls streng monoton wachsend ist, und die Gleichung $y = \log x$ ist per Definition äquivalent mit $x = \mathrm{e}^y$. Für $a \in \mathbb{R}_+$ und $b \in \mathbb{C}$ setzen wir noch*

$$a^b \;=\; \mathrm{e}^{b \log a} \,. \tag{6.3.1}$$

Aus dieser Definition folgt unmittelbar dass im Fall $b \in \mathbb{R}$ gilt $a^b \in \mathbb{R}_+$ und

$$\log a^b = b \log a \qquad \forall\, a \in \mathbb{R}_+,\ b \in \mathbb{R}.$$

Beachte aber, dass im Allgemeinen a^b eine komplexe Zahl ist, und dass deshalb $\log a^b$ *nicht definiert ist.*

Aufgabe 6.3.3 (Funktionalgleichung des Logarithmus) *Zeige*

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}_+ : \qquad \log(x\,y) \;=\; \log x \;+\; \log y\,.$$

Aufgabe 6.3.4 (Rechenregeln für allgemeine Potenzen) *Zeige:*

$$\forall\, a \in \mathbb{R}_+ \quad \forall\, b, c \in \mathbb{C} : \qquad a^b\, a^c \;=\; a^{b+c}\,,$$

$$\forall\, a \in \mathbb{R}_+ \quad \forall\, b \in \mathbb{R} \quad \forall\, c \in \mathbb{C} : \qquad \left(a^b\right)^c \;=\; a^{bc}\,.$$

6.4 Gleichmäßige Stetigkeit

Definition 6.4.1 *Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$ heißt* auf D gleichmäßig stetig, *falls folgendes gilt:*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x_1, x_2 \in D : \qquad |x_1 - x_2| \;<\; \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x_1) - f(x_2)| \;<\; \varepsilon\,.$$

Aufgabe 6.4.2 *Zeige: Die Funktion $x \mapsto 1/x$ ist auf $\mathbb{R}_+$ nicht gleichmäßig stetig.*

Satz 6.4.3 *Sei f stetig auf einem abgeschlossenen Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Dann ist f dort auch gleichmäßig stetig.*

Beweis: Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$ *nicht* gleichmäßig stetig auf D. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ zwei Punkte $x_n, \tilde{x}_n \in D$ existieren, für die gilt $|x_n - \tilde{x}_n| < 1/n$, aber $|f(x_n) - f(\tilde{x}_n)| \geq \varepsilon$. Hätte die Folge (x_n) eine konvergente Teilfolge, so wäre die entsprechende Teilfolge von $(\tilde{x}_n)$ ebenfalls konvergent, und zwar gegen denselben Grenzwert x. Wenn dieses x zu D gehören würde, würden die entsprechenden Teilfolgen von $(f(x_n))$ und $(f(\tilde{x}_n))$ beide gegen $f(x)$ konvergieren; dies kann aber nicht sein. Das heißt, dass (x_n) keine Teilfolge besitzen kann, welche gegen ein $x \in D$ konvergiert. Falls D ein abgeschlossenes Intervall ist, ist (x_n) beschränkt und muss deshalb nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge besitzen, und deren Grenzwert muss dann zu D gehören. Darum muss also f gleichmäßig stetig sein. □

6.5 Funktionsgrenzwerte

Definition 6.5.1 *Seien $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ mit $a < b$ und ein $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Wir sagen, dass f* gegen ein $y \in \mathbb{R}$ konvergiert, wenn x von oben gegen a strebt, *falls gilt*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, c \in (a,b) \quad \forall\, x \in (a,c) : \qquad |f(x) - y| \;<\; \varepsilon\,.$$

Analog sagen wir, dass f gegen ein $y \in \mathbb{R}$ konvergiert, wenn x von unten gegen b strebt, *falls gilt*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, c \in (a,b) \quad \forall\, x \in (c,b) : \qquad |f(x) - y| < \varepsilon\,.$$

Wir schreiben in diesen Fällen dann auch

$$\lim_{x \to a+} f(x) \;=\; y \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{x \to b-} f(x) \;=\; y\,.$$

Für ein $c \in (a,b)$ schreiben wir $\lim_{x \to c} f(x) = y$, wenn beide einseitigen Grenzwerte *$\lim_{x \to c+} f(x)$ und $\lim_{x \to c-} f(x)$ existieren und gleich y sind. In allen den vorstehenden Fällen kann man eine analoge Definition formulieren für die Fälle $y = \infty$ bzw. $y = -\infty$; wir lassen dies hier aus, verweisen aber auf die nächste Bemerkung.*

Falls für ein $c \in (a,b)$ die einseitigen Grenzwerte beide existieren und endlich, aber verschieden sind, nennen wir c eine Sprungstelle *von f und nennen $\lim_{x \to c+} f(x) - \lim_{x \to c-} f(x)$ die* Sprunghöhe *von f an dieser Stelle. Falls $a \in \mathbb{R}$ ist, und falls f auch an der Stelle a definiert ist, so nennen wir a Sprungstelle, falls der rechtsseitige Grenzwert existiert, und in diesem Fall ist die Sprunghöhe als $\lim_{x \to a+} f(x) - f(a)$ definiert. In analoger Weise definiert man eine Sprungstelle bzw. -höhe bei b.*

Bemerkung 6.5.2 *Analog wie bei der Folgenstetigkeit kann man zeigen dass genau dann $\lim_{x \to a+} f(x) = y$ ist, wenn für alle Folgen (x_n) mit $x_n > a$, welche gegen a konvergieren, die Folge $(f(x_n))$ gegen y konvergiert. Analoge Aussagen gelten in allen anderen Fällen, inklusive der Fälle $y = \infty$ bzw. $y = -\infty$.*

Definition 6.5.3 *Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, heißt $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$* linksseitig stetig *in einem Punkt $x_0 \in (a,b]$, wenn*

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) \;=\; f(x_0).$$

Analog wird die rechtsseitige Stetigkeit definiert. Offenbar ist f stetig an einer Stelle $x_0 \in (a,b)$, wenn es dort sowohl rechts- als auch linksseitig stetig ist. Wir nennen f auch stückweise stetig, *wenn f bis auf endlich viele Ausnahmestellen $x_j \in [a,b]$ stetig ist, und wenn an diesen Stellen x_j noch die einseitigen Grenzwerte existieren, d. h., wenn alle Unstetigkeitsstellen Sprungstellen sind. Es ist nicht schwer zu zeigen, dass eine auf $[a,b]$ stückweise stetige Funktion dort beschränkt ist.*

Wir zeigen noch folgenden klassischen Satz:

Satz 6.5.4 (Abelscher Grenzwertsatz) *Seien $a_k \in \mathbb{R}$ so, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert. Dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$ für alle $x \in (-1, 1]$, und es gilt*

$$\lim_{x \to 1-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, .$$

Beweis: Aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ folgt, dass die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$ einen Konvergenzradius $R \geq 1$ hat. Mit $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$, $a = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ folgt dann aus Behauptung 5.8.8

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Big(a - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \Big) \\ &= \frac{a}{1-x} - \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \, . \end{aligned}$$

Die Reihenreste $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ bilden nach Proposition 5.1.6 eine Nullfolge. Also gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $|r_n| < \varepsilon$ ist für $n \geq n_0$. Daher folgt für $0 < x < 1$:

$$\begin{aligned} |f(x) - a| &\leq (1-x) \Big| \sum_{n=0}^{n_0 - 1} x^n\, r_n \Big| + \varepsilon\, (1-x) \sum_{n=n_0}^{\infty} x^n \\ &= (1-x) \Big| \sum_{n=0}^{n_0 - 1} x^n\, r_n \Big| + \varepsilon\, x^{n_0}. \end{aligned}$$

In dieser Abschätzung geht die rechte Seite für $x \to 1-$ gegen ε, und daher folgt $|f(x) - a| < 2\varepsilon$, wenn x dicht genug bei 1 ist. Daraus folgt die Behauptung. □

Aufgabe 6.5.5 *Berechne den Grenzwert einer rationalen Funktion für $x \longrightarrow \infty$.*

Aufgabe 6.5.6 *Formuliere und beweise Rechenregeln für die oben eingeführten Funktionsgrenzwerte.*

Aufgabe 6.5.7 *Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend. Zeige: Alle eventuellen Unstetigkeitsstellen von f sind Sprungstellen. Die Menge aller Unstetigkeitsstellen ist höchstens abzählbar. Falls es unendlich viele Sprungstellen $x_k \in [a, b]$ mit Sprunghöhen f_k gibt, dann ist die Reihe $\sum f_k$ konvergent, und ihr Wert ist höchstens gleich $f(b) - f(a)$.*

Aufgabe 6.5.8 *Zeige mit dem Beispiel $a_k = (-1)^k$, dass es Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ gibt welche nicht konvergieren, für die aber $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$ für alle $x \in (-1, 1)$ konvergiert und $a = \lim_{x \to 1-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$ existiert. Man nennt die Zahl a auch den* Wert der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ im Sinne des Abelschen Summationsverfahrens.

Aufgabe 6.5.9 *Benutze* (5.2.2) *und den Sandwich-Satz, um zu zeigen, dass*

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0+} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{-1}{2} \, .$$

Untersuche auch den linksseitigen Grenzwert.

Kapitel 7

Differenzialrechnung

7.1 Die Ableitung

Definition 7.1.1 *Sei* $x_0 \in \mathbb{K}$*, und sei* $r \in \mathbb{R}_+$*, sowie* $\mathcal{U}_r(x_0) = \{x \in \mathbb{K} : |x - x_0| < r\}$*. Sei weiter* $f : \mathcal{U}_r(x_0) \longrightarrow \mathbb{K}$*. Für* $x \in \mathcal{U}_r(x_0) \setminus \{x_0\}$*, also* $h = x - x_0 \neq 0$*, heißt*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

der Differenzenquotient von f im Punkt x_0*. Im Fall* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ist dieser Differenzenquotient gleich der Steigung der Sekante durch die Punkte* $(x, f(x))$ *und* $(x_0, f(x_0))$ *des Graphen von* f*. Falls der Grenzwert des Differenzenquotienten für* $x \to x_0$ *existiert, heißt er auch* die (erste) Ableitung von f im Punkt x_0*, und wir nennen* f *auch* differenzierbar im Punkt x_0 *und schreiben*

$$f'(x_0) = \frac{d\,f}{dx}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *interpretieren wir die Ableitung als die Steigung der Tangente an den Graphen von* f *im Punkt* x_0*. Sei* $D \subset \mathbb{K}$ *gegeben. Wir nennen ein* $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$ auf D differenzierbar*, wenn es zu jedem* $x_0 \in D$ *ein* $r > 0$ *gibt, für welches* $\mathcal{U}_r(x_0) \subset D$ *ist, und falls weiter* f *in jedem Punkt von* D *differenzierbar ist. Ist dies der Fall, so ist die Ableitung* f' *wieder eine auf* D *definierte Funktion. Diese Funktion kann selbst wieder in einem Punkt (oder allen Punkten) von* D *differenzierbar sein. Der Wert der Ableitung von* f' *in einem Punkt* $x_0 \in D$ *heißt dann auch* die zweite Ableitung *oder die* Ableitung zweiter Ordnung *von* f *an dieser Stelle. Enstprechend werden höhere als zweite Ableitungen von* f *definiert. Wir schreiben dann auch*

$$f''(x), \qquad f'''(x), \qquad f^{(n)}(x)$$

oder

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x), \qquad \frac{d^3}{dx^3} f(x), \qquad \frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

für den Wert der zweiten bzw. dritten bzw. n*-ten Ableitung von* f *im Punkt* x*. Wenn eine Funktion* f *auf* D n*-mal differenzierbar und die* n*-te Ableitung noch stetig ist, sagen wir auch:* f *ist* (mindestens) n-mal stetig differenzierbar *auf* D*. Beachte, dass die Stetigkeit der Ableitungen der Ordnungen* $\leq n - 1$ *aus* Satz 7.1.2 *folgt, nicht aber die der* n*-ten Ableitung! Wenn eine Funktion auf* D *Ableitungen von jeder Ordnung besitzt, nennen wir sie auch* beliebig oft differenzierbar*. Seien* $a < b$ *und* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *gegeben. Wir sagen:* f *ist im Punkt* a rechtsseitig differenzierbar*, wenn*

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

existiert, und wir nennen seinen Wert die rechtsseitige Ableitung von f im Punkt a. *Analog definieren wir* linksseitige Ableitung/Differenzierbarkeit im Punkt b. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall. Falls $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ in jedem Punkt von I differenzierbar ist, wobei wir in evtl. Randpunkten die entsprechende einseitige Differenzierbarkeit meinen, dann sagen wir auch: f ist* auf I differenzierbar.

Eine unmittelbare Folgerung aus der Definition der Ableitung ist:

Satz 7.1.2 *Ist eine Funktion in einem Punkt x_0 differenzierbar, so ist sie dort auch stetig.*

Einfache Beispiele differenzierbarer Funktionen sind in der folgenden Behauptung enthalten:

Behauptung 7.1.3

(a) *Ist $c \in \mathbb{K}$, und ist $f(x) = c$ für alle $x \in \mathbb{K}$, so ist f in jedem Punkt $x \in \mathbb{K}$ differenzierbar, und $f'(x) = 0$ für alle diese x.*

(b) *Ist $f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{K}$, so ist f in jedem Punkt $x \in \mathbb{K}$ differenzierbar, und $f'(x) = 1$ für alle diese x.*

(c) *Die Funktion $x \mapsto |x|$ ist im Nullpunkt sowohl rechts- als auch linksseitig differenzierbar, aber nicht differenzierbar.*

Beweis: Zu (a), (b): Der Differenzenquotient hat immer denselben Wert 0 bzw. 1, also folgt die Behauptung.

Zu (d): Der Wert des Differenzenquotienten im Nullpunkt ist für $h > 0$ ($h < 0$) gleich 1 (gleich -1), und daraus folgt die Behauptung. □

Satz 7.1.4 (Gliedweises Differenzieren von Potenzreihen) *Sei eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k$ mit einem Konvergenzradius $R > 0$ gegeben, und sei f ihre Grenzfunktion. Dann ist f auf $\mathcal{U}_R(z_0)$ differenzierbar, und es gilt*

$$f'(z) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, a_{k+1}\, (z-z_0)^k \quad \forall\, z \in \mathcal{U}_R(z_0).$$

Beweis: Aus $\sqrt[k]{k} \to 1$ für $k \to \infty$ folgt, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\,a_{k+1}\,(z-z_0)^k$ ebenfalls gleich R ist. Deshalb definiert diese Reihe auf $\mathcal{U}_R(z_0)$ eine Funktion, welche wir mit g bezeichnen wollen (und von der wir beweisen wollen, dass sie die Ableitung von f ist). Durch eine Indexverschiebung folgt dann

$$g(z) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k\, (z-z_0)^{k-1} \quad \forall\, z \in \mathcal{U}_R(z_0).$$

Sei jetzt $z \in \mathcal{U}_R(z_0)$ festgehalten, sei $r < R - |z - z_0|$, und sei $h \in \mathbb{C}$ so, dass $|h| \le r$ ist. Wegen

$$(z+h-z_0)^k \;-\; (z-z_0)^k \;=\; k\,h\,(z-z_0)^{k-1} \;+\; \sum_{j=2}^{k} \binom{k}{j}\, (z-z_0)^{k-j}\, h^j$$

folgt, dass

$$\Big|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - g(z)\Big| = \Big|\sum_{k=2}^{\infty} a_k \sum_{j=2}^{k} \binom{k}{j} (z-z_0)^{k-j} h^{j-1}\Big|$$
$$\le \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| \sum_{j=2}^{k} \binom{k}{j} |z-z_0|^{k-j} |h|^{j-1}$$
$$\le |h|\, M,$$

mit $M = \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| \sum_{j=2}^{k} \binom{k}{j} |z-z_0|^{k-j} r^{j-2} < \infty$. Daraus folgt die Behauptung. □

Durch gliedweises Ableiten der entsprechenden Potenzreihen zeigt man nun leicht:

Korollar zu Satz 7.1.4 *Die Exponentialfunktion, die trigonometrischen sowie die hyperbolischen Funktionen sind auf $\mathbb{C}$ differenzierbar, und es gilt*

$$(\mathrm{e}^z)' = \mathrm{e}^z \qquad \forall\, z \in \mathbb{C},$$
$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z \qquad \forall\, z \in \mathbb{C},$$
$$(\sinh z)' = \cosh z, \quad (\cosh z)' = \sinh z \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Aufgabe 7.1.5 *Beweise das Korollar zu* Satz 7.1.4.

Satz 7.1.6 (Rechenregeln für Ableitungen) *Seien f und g beide in einem Punkt x_0 differenzierbar. Dann sind auch $f+g$ und $f\,g$ dort differenzierbar, und es gilt*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0), \quad (f\,g)'(x_0) = f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0).$$

Ist $g(x_0) \neq 0$, so ist auch f/g im Punkt x_0 differenzierbar, und es gilt

$$(f/g)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{g^2(x_0)}\,.$$

Beweis: Die Regel für $f+g$ folgt sofort aus der Definition. Für den Beweis der *Produktregel* schreiben wir

$$\frac{(f\,g)(x)-(f\,g)(x_0)}{x-x_0} = f(x)\,\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} + g(x_0)\,\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,.$$

Da f im Punkt x_0 stetig ist, gilt $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, und deshalb folgt die Produktregel. Zum Beweis der *Quotientenregel*: Zu $\varepsilon = |g(x_0)| > 0$ gibt es nach Definition der Stetigkeit ein $\delta > 0$ mit $|g(x)-g(x_0)| < \varepsilon$ für $|x-x_0| < \delta$, und daraus folgt $|g(x)| \geq |g(x_0)| - (|g(x)-g(x_0)|) > 0$ für diese x. Also ist $1/g$ auf $\mathcal{U}_\delta(x_0)$ definiert und stetig, und dort ist

$$\frac{(1/g)(x)-(1/g)(x_0)}{x-x_0} = -\frac{1}{g(x)\,g(x_0)}\,\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\,.$$

Daraus folgt die Differenzierbarkeit von $1/g$, und die Regel

$$(1/g)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}\,.$$

Also folgt jetzt mit der Produktregel die Quotientenregel. □

Satz 7.1.7 (Kettenregel) *Sind f in x_0 und g in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar, so ist $g \circ f$ in x_0 differenzierbar, und es gilt*

$$(g \circ f)'(x_0) \;=\; g'(f(x_0))\, f'(x_0)\ .$$

Beweis: Aus der Stetigkeit von f folgt, dass $g \circ f$ auf $\mathcal{U}_r(x_0)$ definiert ist, für ein genügend kleines $r > 0$. Aus der Differenzierbarkeit folgt

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\,[f'(x_0) + r_f(x)], \quad g(y) = g(y_0) + (y - y_0)\,[g'(y_0) + r_g(y)],$$

mit stetigen Funktionen r_f, r_g, welche gegen 0 gehen für $x \to x_0$ bzw. $y \to y_0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
g(f(x)) &= g(f(x_0)) \;+\; [f(x) - f(x_0)]\,(g'(f(x_0)) + r_g(f(x))) \\
&= g(f(x_0)) \;+\; (x - x_0)\,(f'(x_0) + r_f(x))\,(g'(f(x_0)) + r_g(f(x))) \\
&= g(f(x_0)) \;+\; (x - x_0)\,(g'(f(x_0))\,f'(x_0) + r_{fg}(x))\,, \\
r_{fg}(x) &= r_f(x)\,(g'(f(x_0)) + r_g(f(x))) + f'(x_0)\,r_g(f(x))\ .
\end{aligned}$$

Weil $r_f(x) \to 0$ und $r_g(f(x)) \to 0$ für $x \to x_0$ gilt, folgt $r_{fg}(x) \to 0$ für $x \to x_0$. Daraus folgt dann die Behauptung. □

Aufgabe 7.1.8 *Zeige: Polynome, rationale Funktionen, die Exponentialfunktion, die trigonometrischen sowie die hyperbolischen Funktionen sind an allen Stellen ihres natürlichen Definitionsbereiches beliebig oft differenzierbar.*

Aufgabe 7.1.9 *Untersuche folgende Funktionen auf Differenzierbarkeit und berechne gegebenenfalls ihre Ableitungen:*

(a) $\sin^2 x$ (b) $\cos x\, \sin x$ (c) $\frac{1+2\,x^2}{x-1}$ (d) e^{x^2} (e) $2\,\sin(1 + x^2)\,\cos x$

Aufgabe 7.1.10 *Unter der* Annahme der Differenzierbarkeit *von $\log x$, für $x \in \mathbb{R}_+$, benutze die Gleichung $x = \mathrm{e}^{\log x}$, um die Ableitung zu berechnen. Wir werden später zeigen, dass die Umkehrfunktion einer differenzierbaren Funktion ebenfalls differenzierbar ist.*

Aufgabe 7.1.11 *Zeige: Ist eine Funktion an einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ sowohl rechts- als auch linksseitig differenzierbar, so ist sie dort genau dann differenzierbar, wenn die rechts- und linksseitige Ableitung übereinstimmen.*

Aufgabe 7.1.12 *Gib ein Beispiel für eine Funktion, welche an einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ sowohl rechts- als auch linksseitig differenzierbar ist, ohne dort differenzierbar zu sein.*

7.2 Satz von Rolle und erster Mittelwertsatz

Satz 7.2.1 (Satz von Rolle) *Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, und differenzierbar für alle $x \in (a, b)$. Weiter sei $f(a) = f(b)$. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.*

Beweis: Nach Satz 6.2.1 gibt es $x_*, x^* \in [a, b]$ mit

$$f(x_*) \;\le\; f(x) \;\le\; f(x^*) \qquad \forall\, x \in [a, b]\,.$$

Falls auf beiden Seiten Gleichheit gilt, ist f konstant, und dann ist die Behauptung trivialerweise erfüllt. Andernfalls liegt x_* oder x^* im offenen Intervall (a,b). Sei dies o. B. d. A. x^* (sonst: betrachte $-f$). Dann gilt für den Differenzenquotienten

$$\frac{f(x) \ - \ f(x^*)}{x \ - \ x^*} \quad \begin{cases} \geq 0 & (a \leq x < x^*), \\ \leq 0 & (x^* < x \leq b). \end{cases}$$

Daraus folgt, dass der Grenzwert für $x \to x^*$, also die Ableitung im Punkt x^*, gleich 0 sein muss. □

Satz 7.2.2 (Erster Mittelwertsatz der Differenzialrechnung) *Sei f auf $[a,b]$ stetig, und differenzierbar für alle $x \in (a,b)$. Dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit*

$$\frac{f(b) \ - \ f(a)}{b \ - \ a} \ = \ f'(\xi).$$

Beweis: Setze $g(x) = f(x) - [f(b) - f(a)]\ (x-a)/(b-a)$ und wende dann den Satz von Rolle auf g an. □

Aufgabe 7.2.3 *Gib eine geometrische Interpretation des Mittelwertsatzes.*

Aufgabe 7.2.4 *Benutze den Mittelwertsatz, um eine Abschätzung für den Wert* $\sin(1,005)$ *zu erhalten, wenn der Wert für* $\sin 1$*, z. B. aus einer Wertetabelle, bekannt ist.*

Korollar zu Satz 7.2.2 *Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, und differenzierbar für alle $x \in (a,b)$. Dann gilt:*

(a) $f'(x) \ = \ 0 \quad \forall\, x \in (a,b) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \ \equiv \ const.$

(b) *Aus $f'(x) \ > \ 0 \quad \forall\, x \in (a,b)$ folgt, dass f auf $[a,b]$ streng monoton wächst.*

(c) *Aus $f'(x) \ \geq \ 0 \quad \forall\, x \in (a,b)$ folgt, dass f auf $[a,b]$ monoton wächst.*

Entsprechende Aussagen gelten auch für fallende Funktionen.

Beweis: Zu (a): Sei $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$. Wenn $x_0 < x_1$ zwei beliebige Punkte aus $[a,b]$ sind, folgt aus dem Mittelwertsatz, angewandt auf das Intervall $[x_0, x_1]$, dass $f(x_1) - f(x_0) = 0$ ist. Also muss f konstant sein. Die Umkehrung ist klar, weil die Ableitung einer konstanten Funktion verschwindet.

Zu (b): Mit den gleichen Bezeichnungen wie im Beweis von (a) folgt jetzt, dass $f(x_1) - f(x_0)$ immer das gleiche Vorzeichen wie $x_1 - x_0$ hat, und das ist die Behauptung. Teil (c) wird ganz analog bewiesen. □

Aufgabe 7.2.5 *Prüfe, ob die Aussagen* (b) *und* (c) *in obigem Korollar zum Mittelwertsatz umkehrbar sind.*

Bemerkung 7.2.6 (Newton-Verfahren) *Sei $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar auf (a,b), und sei $\eta \in (a,b)$ eine Nullstelle von f mit $f'(\eta) \neq 0$. Beginnend mit einem* Startwert *$x_0 \in (a,b)$, versuchen wir eine Folge (x_n) durch die Vorschrift*

$$x_{n+1} \ = \ x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_0$$

zu definieren. Dies gelingt nur, wenn x_n keine Nullstelle von f' ist, und deshalb nehmen wir an, dass das Intervall $[a,b]$ bereits so klein ist, dass f' dort keine Nullstelle hat. Setzt man dann $\phi(x) = x - f(x)/f'(x)$, so ist offenbar $\phi(\eta) = \eta$. Falls f sogar zweimal differenzierbar auf (a,b) ist, dann ist dort ϕ wenigstens einmal differenzierbar, und $\phi'(x) = f(x)\, f''(x)/(f'(x))^2$. Wir setzen voraus, dass $|\phi'(x)| \le \alpha < 1$ gilt für alle $x \in (a,b)$ (dies gilt sicher, falls ϕ' stetig und das Intervall (a,b) klein genug ist, denn $\phi'(\eta) = 0$). Aus dem Mittelwertsatz folgt dann

$$|x_{n+1} - \eta| \;=\; |\phi(x_n) - \eta| \;\le\; \alpha\, |x_n - \eta|.$$

Mit dieser Abschätzung folgt wegen $\alpha < 1$, dass alle $x_n \in (a,b)$ liegen, und dass die Folge (x_n) gegen η konvergiert; dies wird ausführlicher in Analysis II behandelt werden. Dieses Newton-Verfahren *konvergiert im Allgemeinen deutlich schneller als das Bisektionsverfahren oder die regula falsi. Z. B. ergeben sich für $f(x) = \cos x$ und $x_0 = 1,6$ die Werte*

$$x_1 \;=\; 1,570788\,, \qquad x_2 \;=\; 1,5707963\,,$$

und der zweite Wert stimmt bereits mit $\pi/2$ in allen angegebenen Stellen überein.

Aufgabe 7.2.7 *Zeige, dass das Newtonverfahren, angewandt auf $f(x) = x^2 - a$, gerade der Quadratwurzeliteration in* Proposition 4.4.4 *entspricht. Finde selber das analoge Verfahren zur Berechnung von $\sqrt[n]{a}$.*

7.3 Gliedweises Differenzieren

Satz 7.3.1 (Gliedweises Differenzieren) *Gegeben seien ein abgeschlossenes Intervall $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ und Funktionen $f_n, g_k : I \longrightarrow \mathbb{R}$ für alle $n, k \in \mathbb{N}$.*

(a) *Seien alle f_n auf I stetig und im Inneren differenzierbar. Sei die gliedweise differenzierte Funktionenfolge (f_n') auf dem offenen Intervall (a,b) gleichmäßig konvergent, und sei die Folge $(f_n(x))$ für wenigstens ein $x = x_0 \in I$ konvergent. Dann ist die Funktionenfolge (f_n) auf I gleichmäßig konvergent, die Grenzfunktion f ist auf (a,b) differenzierbar, und es gilt*

$$f'(x) \;=\; \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \qquad \forall\; x \in (a,b).$$

(b) *Seien alle g_k auf I stetig und im Inneren differenzierbar. Sei die gliedweise differenzierte Funktionenreihe $\sum_{k=1}^\infty g_k'$ auf dem offenen Intervall (a,b) gleichmäßig konvergent, und sei die Reihe $\sum_{k=1}^\infty g_k$ für wenigstens ein $x = x_0 \in I$ konvergent. Dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^\infty g_k$ auf I gleichmäßig konvergent, die Grenzfunktion f ist auf (a,b) differenzierbar, und es gilt*

$$f'(x) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} g_k'(x) \qquad \forall\; x \in (a,b).$$

Beweis: Zu (a): Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach dem Cauchy-Kriterium für die (gleichmäßige) Konvergenz gibt es dann ein $N \in \mathbb{R}_+$, für welches

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon/2, \quad |f_n'(x) - f_m'(x)| < \frac{\varepsilon}{2\,(b-a)} \quad \forall\; x \in (a,b),$$

sofern nur $n, m \ge N$ sind. Mit dem Mittelwert folgt für jedes $x \in I$ die Existenz von ξ zwischen x und x_0 derart, dass (für n, m wie oben)

$$|f_n(x) - f_m(x) \;-\; (f_n(x_0) - f_m(x_0))| \;=\; |x - x_0|\, |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| \;\le \varepsilon/2, \tag{7.3.1}$$

Hieraus folgt mit der Dreiecksungleichung

$$|f_n(x) - f_m(x)| \;\le\; |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \;+\; |f_n(x) - f_m(x) \;-\; (f_n(x_0) - f_m(x_0))| \;\le\; \varepsilon.$$

Das impliziert die gleichmäßige Konvergenz von (f_n) gegen eine Funktion f. Also sind die Voraussetzungen des Satzes für einen beliebigen Punkt $x_0 \in I$ erfüllt. Sei jetzt für beliebiges $x, x_0 \in (a, b)$ definiert:

$$h_n(x) \;=\; \begin{cases} \frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0} & (x \neq x_0) \\ f_n'(x_0) & (x = x_0) \end{cases}$$

Dann ist h_n stetig auf (a, b), und aus (7.3.1) folgt die gleichmäßige Konvergenz der Folge (h_n) auf (a, b) gegen eine Grenzfunktion h, die nach Satz 6.1.4 stetig ist. Offenbar ist aber die Grenzfunktion gleich dem Differenzenquotienten von f, falls $x \neq x_0$ ist, bzw. gleich dem Grenzwert von $(f_n'(x_0))$ für $x = x_0$. Daher muss f im Punkt x_0 differenzierbar sein, und die Ableitung ist gleich $f'(x_0)$.

Zu (b): Folgt aus (a), angewandt auf $f_n = \sum_{k=1}^{n} g_k$. □

Aufgabe 7.3.2 *Sei* $f_n(x) = (1 + x/n)^n$ *für* $x \in \mathbb{R}$ *und* $n \in \mathbb{N}$. *Zeige, dass die Voraussetzungen von* Satz 7.3.1 *für jedes abgeschlossene Intervall* $[a, b]$ *erfüllt sind. Gib durch Anwendung dieses Satzes einen neuen Beweis für die Differenzierbarkeit von* e^x. *Untersuche, ob* Satz 7.3.1 *auf die Folge* (f_n) *mit* $f_n(x) = (1 - x)\, x^n$, $0 \le x \le 1$, *angewandt werden kann.*

7.4 Die Ableitung der Umkehrfunktion

Satz 7.4.1 *Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein Intervall, sei* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig und streng monoton, und sei* $f(I) = J$. *Sei* x_0 *ein innerer Punkt, d. h., kein Randpunkt, von* I, *sei* f *differenzierbar im Punkt* x_0, *und sei* $f'(x_0) \neq 0$. *Dann ist die Umkehrfunktion* f^{-1} *im Punkt* $y_0 = f(x_0) \in J$ *differenzierbar, und es gilt*

$$(f^{-1}(y_0))' \;=\; \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}\,.$$

Beweis: Es gilt offenbar (mit $y = f(x)$)

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \;=\; \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}\,,$$

und wegen der Stetigkeit der Umkehrfunktion gilt $x \to x_0$ für $y \to y_0$. Daraus folgt die Behauptung. □

Aufgabe 7.4.2 *Zeige* $(\log x)' = 1/x$ *für alle* $x > 0$.

Aufgabe 7.4.3 *Zeige mit der Kettenregel und der Definition der allgemeinen Potenzfunktion* (6.3.1), *dass* $(x^\alpha)' = \alpha\, x^{\alpha-1}$ *für alle* $x > 0$ *und* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 7.4.4 *Zeige mit der Kettenregel und der Definition der allgemeinen Potenzfunktion* (6.3.1), *dass* $(a^x)' = a^x \,\log a$ *für alle* $a > 0$ *und* $x \in \mathbb{R}$.

7.5 Die Zahl Pi und die Arcusfunktionen

In diesem Abschnitt wollen wir die sog. Arcusfunktionen, d. h., die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen, einführen. Zur Vorbereitung benötigen wir aber einige weitere Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen:

Definition 7.5.1 *In* Behauptung 6.2.8 *haben wir gezeigt, dass die Cosinusfunktion auf dem reellen Intervall* $[x_0, x_1]$ *mindestens eine Nullstelle haben muss. Die Stetigkeit sichert, dass das Infimum aller positiven Nullstellen von* $\cos x$ *ebenfalls eine Nullstelle sein muss, und deshalb macht es Sinn, von der kleinsten positiven Nullstelle der Cosinusfunktion zu sprechen. Wir definieren die wichtige Zahl* π *durch folgende Bedingung:*

Die kleinste positive Nullstelle von $\cos x$ *habe den Wert* $\pi/2$*.*

Behauptung 7.5.2 *Es gilt* $\sin \pi/2 = 1$*, und weiter*

$$\cos(z + \pi/2) \ = -\sin z, \quad \sin(z + \pi/2) = \cos z \qquad \forall\ z \in \mathbb{C}.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Gleichungen folgt weiter

$$\left.\begin{array}{c} \cos(z+\pi) = -\cos z,\ \sin(z+\pi) = -\sin z \\ \cos(z+2\pi) = \cos z,\ \sin(z+2\pi) = \sin z \end{array}\right\} \quad \forall\ z \in \mathbb{C}.$$

Beweis: Aus (5.2.2) und der Definition von $\pi/2$ $(< 1,6)$ folgt $\sin x > 0$ für $0 \le x < \pi/2$, und mit Behauptung 5.9.6 folgt deshalb $\sin \pi/2 = 1$. Daraus folgen die behaupteten Gleichungen mit Hilfe der Additionstheoreme. □

Satz 7.5.3 (Nullstellen der trigonometrischen Funktionen)
Die Nullstellen der trigonometrischen Funktionen sind alle reell. Genauer gilt

$$\sin z = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z = k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$
$$\cos z = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z = (k + 1/2)\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Beweis: Wegen Behauptung 7.5.2 reicht es aus, nur die Cosinusfunktion zu betrachten:

Für $z = x + i\,y$ gilt nach einer Übungsaufgabe $|\cos z|^2 = \cosh^2 y - \sin^2 x$, und aus Behauptung 5.9.6 folgt $\sin^2 x \le 1$. Direkt aus der Definition der hyperbolischen Funktionen ergibt sich $\cosh y \ge 1$, wobei Gleichheit nur für $y = 0$ eintritt. Also gilt $\cos z = 0$ höchstens wenn $y = 0$ ist, also wenn $z = x \in \mathbb{R}$ ist. Nach Definition von $\pi/2$ folgt $\cos x > 0$ für $0 \le x < \pi/2$, und da $\cos x = \cos(-x)$ ist gilt sogar $\cos x \ > \ 0$ für alle $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. Aus Behauptung 7.5.2 folgt aber dann für alle $k \in \mathbb{Z}$:

$$(-1)^k \cos x \ > \ 0 \qquad \forall\ x \in \big((k - 1/2)\pi, (k + 1/2)\pi\big).$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Definition 7.5.4 *Wir haben gezeigt, dass* $\cos x = (\sin x)' > 0$ *ist für* $-\pi/2 < x < \pi/2$*. Deshalb ist die Sinusfunktion auf* $[-\pi/2, \pi/2]$ *streng monoton wachsend, also injektiv, und die Wertemenge ist* $[-1, 1]$*. Die Umkehrfunktion*

$$\arcsin : [-1, 1] \ \longrightarrow \ [-\pi/2, \pi/2]\,.$$

heißt die Arcussinusfunktion. *Weiter ist* $\cos : [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$ *streng monoton fallend, und die Umkehrfunktion*

$$\arccos : [-1,1] \;\longrightarrow\; [0,\pi]\,.$$

heißt die Arcuscosinusfunktion.

Nach Aufgabe 7.5.6 *ist* $\tan x$ *streng monoton wachsend auf* $(-\pi/2,\pi/2)$ *und hat die Wertemenge* $\mathbb{R}$. *Die Umkehrfunktion*

$$\arctan : \mathbb{R} \;\longrightarrow\; (-\pi/2,\pi/2)$$

heißt die Arcustangensfunktion. *Der Vollständigkeit halber erwähnen wir noch, dass die Cotangensfunktion auf* $(0,\pi)$ *streng monoton fallend ist und die Wertemenge* $\mathbb{R}$ *hat. Die Umkehrfunktion*

$$\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \;\longrightarrow\; (0,\pi)$$

heißt die Arcuscotangensfunktion.

Satz 7.5.5 *Es gilt*

(a) $(\arcsin x)' \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall\; x \in (-1,1).$

(b) $(\arccos x)' \;=\; \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall\; x \in (-1,1).$

(c) $(\arctan x)' \;=\; \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall\; x \in \mathbb{R}.$

(d) $(\operatorname{arccot} x)' \;=\; \frac{-1}{1+x^2} \qquad \forall\; x \in \mathbb{R}.$

Beweis: Wir zeigen nur (a); die übrigen Beweise sind analog.

Aus dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion folgt

$$(\arcsin x)' \;=\; \frac{1}{\cos(\arcsin x)} \qquad \forall\; x \in (-1,1).$$

Da $y = \arcsin x \in (-\pi/2,\pi/2)$ ist, ist $\cos y > 0$, und daher gilt $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y}$. Wegen $\sin y = x$ folgt die Behauptung. $\square$

Aufgabe 7.5.6 *Zeige:* $(\tan x)' = 1/\cos^2 x$ *für* $(k-1/2)\pi < x < (k+1/2)\pi$, *mit* $k \in \mathbb{Z}$, *und die Tangensfunktion nimmt auf jedem der obigen Intervalle jede reelle Zahl als Wert an.*

Aufgabe 7.5.7 *Beweise die Teile* (b) – (d) *von* Satz 7.5.5.

Aufgabe 7.5.8 *Benutze* Behauptung 7.5.2, *um zu zeigen:*

$$\arcsin x \;=\; \pi/2 \;-\; \arccos x \quad \forall\; x \in (-1,1).$$

Finde eine analoge Beziehung zwischen $\arctan x$ *und* $\operatorname{arccot} x$.

Aufgabe 7.5.9 *Zeige: Die Funktion* $\sinh x$ *ist auf* $\mathbb{R}$ *streng monoton wachsend, und ihre Wertemenge ist gleich* $\mathbb{R}$. *Ihre Umkehrfunktion*

$$\operatorname{Arsinh} : \mathbb{R} \;\longrightarrow\; \mathbb{R}$$

heißt Areasinus hyperbolicus. *Zeige weiter: Die Funktion* $\cosh x$ *ist auf* $\mathbb{R}_+$ *streng monoton wachsend, und die Wertemenge ist gleich* $[1,\infty)$. *Ihre Umkehrfunktion*

$$\operatorname{Arcosh} : [1,\infty) \;\longrightarrow\; \mathbb{R}_+$$

heißt Areacosinus hyperbolicus. *Zu der hyperbolischen Tangens- und Cotangensfunktion sowie deren Umkehrfunktionen siehe* [15, 7.18].

7.6 Das Argument und der Logarithmus einer komplexen Zahl

Seien $r \in \mathbb{R}_+$ und $\phi \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann wird durch

$$z \;=\; r\,(\cos\phi \;+\; i\,\sin\phi) \;=\; r\,\mathrm{e}^{i\phi} \tag{7.6.1}$$

eine komplexe Zahl z gegeben. Ihr Realteil ist offenbar gleich $x = r\,\cos\phi$, ihr Imaginärteil gleich $y = r\,\sin\phi$. Wegen Behauptung 5.9.6 folgt $r = |z|$, also liegt z auf dem Kreis um 0 mit Radius r und kann insbesondere nicht gleich 0 sein. Weiter gilt folgendes hinsichtlich des Verhaltens von z in Abhängigkeit von ϕ:

1. Für $0 \le \phi \le \pi/2$ folgt $x, y \ge 0$, und x ist streng monoton fallend von r nach 0, dagegen ist y streng monoton wachsend von 0 nach r. Also wandert z auf dem besagten Kreis im Gegenuhrzeigersinn von der positiv-reellen zur positiv-imaginären Achse.
2. Für $\pi/2 \le \phi \le \pi$ folgt $x \le 0$, $y \ge 0$, und x ist weiterhin streng monoton fallend von 0 nach $-r$, während y jetzt ebenfalls streng monoton fällt von r nach 0. Daher wandert der Punkt z im selben Sinn weiter bis zur negativ-reellen Achse.
3. Für $\pi \le \phi \le 3\,\pi/2$ folgt $x, y \le 0$, und x ist streng monoton wachsend von $-r$ nach 0, aber y ist streng monoton fallend von 0 nach $-r$. Somit wandert z weiter bis zur negativ-imaginären Achse.
4. Für $3\,\pi/2 \le \phi \le 2\,\pi$ schließlich folgt $x \ge 0$, $y \le 0$, und x und y sind beide streng monoton wachsend von 0 bis r bzw. von $-r$ bis 0. Daher wandert z weiter zur positiv-reellen Achse.

Das bedeutet, dass die Zahl z mit wachsendem ϕ auf dem Kreis um 0 mit Radius r wandert, und zwar immer im Gegenuhrzeigersinn. Ersetzt man ϕ durch $\phi \pm 2\,\pi$, so erhält man wegen Behauptung 7.5.2 die gleiche Zahl z, d. h., nachdem ϕ ein Intervall der Länge $2\,\pi$ durchlaufen hat, beginnt die Reise von z wieder von vorne.

Ein Paar (r, ϕ) legt also eine von 0 verschiedene Zahl z fest. Umgekehrt, sei $z = x + i\,y \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gegeben, und sei $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ gesetzt. Dann sind $x/r, y/r \in [-1, 1]$. Falls $y \ge 0$ ist, sei $\phi = \arccos(x/r)$. Dann ist $0 \le \phi \le \pi$ und $x = r\,\cos\phi$. Weiter gilt $y = \sqrt{r^2 - x^2} = r\,\sqrt{1 - \cos^2\phi} = r\,\sin\phi$. Falls $y < 0$ ist, sei $\phi = \pi + \arccos(-x/r)$ gewählt. Dann folgt $\cos\phi = -\cos(\arccos(-x/r)) = x/r$, also $x = r\,\cos\phi$. Jetzt ist $y = -\sqrt{r^2 - x^2} = -r\,\sqrt{1 - \cos^2\phi}$. Wegen $\phi \in [\pi, 2\,\pi]$, also $\sin\phi \le 0$, folgt wieder $y = r\,\sin\phi$. Das bedeutet: Zu jedem $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt es $r \in \mathbb{R}_+$ und $\phi \in \mathbb{R}$ so, dass (7.6.1) gilt, und ϕ ist eindeutig bestimmt, wenn wir verlangen, dass ϕ in irgendeinem halboffenen Intervall der Länge 2π liegt.

Definition 7.6.1 *Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ein $\phi \in \mathbb{R}$ mit* (7.6.1) *heißt* ein Argument für *z. Wir schreiben auch etwas ungenau $\phi = \arg z$. Derjenige Wert für ϕ im halboffenen Intervall $[-\pi, \pi)$ heißt auch* der Hauptwert des Arguments. *Der komplexen Zahl* 0 *wird entweder überhaupt kein Argument zugeordnet, oder man sagt, dass sie jedes Argument haben kann.*

Für $z = r\,\mathrm{e}^{i\phi}$ mit $r = |z| > 0$, $\phi = \arg z \in [-\pi, \pi)$ heißt die Zahl

$$\log z = \log|z| + i\,\arg z$$

der Hauptwert des Logarithmus der komplexen Zahl *z. Beachte, dass damit jeder komplexen Zahl außer* 0 *ein Logarithmus zugeordnet ist.*

Dass das Argument einer komplexen Zahl gleich dem Winkel, im sogenannten Bogenmaß, zwischen der positiv-reellen Achse und der von 0 durch z gehenden Halbgeraden ist, wird erst aus der Theorie der Kurvenlänge in Analysis II folgen.

Aufgabe 7.6.2 *Diskutiere, in welchen Sinne folgende Aussage richtig ist: Beim Multiplizieren zweier komplexer Zahlen addieren sich deren Argumente.*

Aufgabe 7.6.3 *Finde den Hauptwert des Arguments und des Logarithmus für die folgenden komplexen Zahlen:*

$$-1\,, \qquad i\,, \qquad 1+i\,, \qquad 2\,(1-i)\,, \qquad -i\,.$$

Aufgabe 7.6.4 *Zeige: Genau dann ist* $\mathrm{e}^z = 1$, *wenn* $z = 2\,k\,\pi\,i$ *ist für ein* $k \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 7.6.5 *Zeige* $\mathrm{e}^{\pm\pi\,i} = -1$.

7.7 Lokale Extremwerte

Definition 7.7.1 *Sei* $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, *mit* $a < b$. *Wir sagen, dass* f *an einer Stelle* $x_0 \in (a,b)$ ein lokales Maximum *bzw.* ein lokales Minimum *hat, wenn ein* $\varepsilon > 0$ *existiert, so dass* $f(x) \leq f(x_0)$ *bzw.* $f(x) \geq f(x_0)$ *für alle* $x \in (a,b) \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ *gilt. In beiden Fällen sprechen wir dann auch von* einem lokalen Extremum *von* f *an der Stelle* x_0.

Satz 7.7.2 *Für* $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, *mit* $a < b$ *gilt:*

(a) *Falls* f *in* $x_0 \in (a,b)$ *differenzierbar ist und dort ein lokales Extremum besitzt, dann ist* $f'(x_0) = 0$.

(b) *Falls* f *in* (a,b) *differenzierbar ist, und falls für ein* $x_0 \in (a,b)$ *gilt*

$$(x - x_0)\, f'(x) \geq 0 \quad (\text{bzw.} \quad (x - x_0)\, f'(x) \leq 0\ ) \qquad \forall\ x \in (a,b),$$

dann ist x_0 *ein lokales Minimum bzw. Maximum von* f.

Beweis: Zu (a): Der Differenzenquotient hat für $x > x_0$ bzw. $x < x_0$ unterschiedliches Vorzeichen, und daher folgt die Behauptung.

Zu (b): Im ersten Fall ist $f'(x) \geq 0$ für $x > x_0$, und $f'(x) \leq 0$ für $x < x_0$. Mit dem Mittelwertsatz folgt, dass der Differenzenquotient an der Stelle x_0 dasselbe Vorzeichen wie die Ableitung an einer Zwischenstelle ξ haben muss, und daraus folgt die Behauptung für diesen Fall. Der andere Fall kann genauso bewiesen werden. □

Korollar zu Satz 7.7.2 *Falls* f *in* (a,b) *differenzierbar ist, und falls für ein* $x_0 \in (a,b)$ *die erste Ableitung verschwindet, während die zweite Ableitung von* f *existiert und nicht verschwindet, dann hat* f *in* x_0 *ein lokales Extremum, und zwar ein Minimum falls* $f''(x_0) > 0$ *ist, und ein Maximum falls* $f''(x_0) < 0$ *ist.*

Beweis: Nach Definition der zweiten Ableitung ist (wegen $f'(x_0) = 0$)

$$f''(x_0) \;=\; \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}\,.$$

Falls $f''(x_0) > 0$ ist, folgt deshalb dass der rechts stehende Differenzenquotient ebenfalls positiv sein muss, sofern nur $x - x_0$ genügend klein ist. Hieraus folgt $(x - x_0)\, f'(x) > 0$ für alle diese x, und daher hat f hier nach Satz 7.7.2 (b) ein lokales Minimum (beachte, dass wir o. B. d. A. das Intervall (a,b) so verkleinern können, dass die Voraussetzung auf dem ganzen Intervall gilt). Der andere Fall wird genauso bewiesen. □

Aufgabe 7.7.3 *Zeige: Die Funktion* $\sin x$ *hat lokale Extrema an allen Nullstellen von* $\cos x$.

Aufgabe 7.7.4 *Finde alle lokalen Extremstellen von* $f(x) = [1 - x^2]^{-1}$.

7.8 Zweiter Mittelwertsatz u. Zwischenwertsatz für Ableitungen

Satz 7.8.1 (Zweiter Mittelwertsatz der Differenzialrechnung)
Seien f *und* g *auf* $[a, b]$ *stetig und auf* (a, b) *differenzierbar. Dann existiert ein* $\xi \in (a, b)$ *mit*

$$\big(f(b) \;-\; f(a)\big)\; g'(\xi) \;=\; \big(g(b) \;-\; g(a)\big)\; f'(\xi)\,. \tag{7.8.1}$$

Beweis: Sei $h(x) = (f(b) - f(a))\, g(x) - (g(b) - g(a))\, f(x)$. Dann erfüllt h alle Voraussetzungen des Satzes von Rolle, und daher existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $h'(\xi) = 0$. Daraus folgt die Behauptung. □

Wenn eine Funktion differenzierbar ist, braucht die Ableitung nicht unbedingt stetig zu sein. Trotzdem gilt:

Satz 7.8.2 (Zwischenwertsatz für Ableitungen)
Sei f *auf dem abgeschlossenen Intervall* $[a, b]$ *differenzierbar, und sei* y *eine beliebige Zahl mit* $f'(a) \leq y \leq f'(b)$ *oder* $f'(b) \leq y \leq f'(a)$. *Dann gibt es ein* $x \in [a, b]$ *mit* $f'(x) = y$.

Beweis: Falls $y = f'(a)$ oder $y = f'(b)$ ist, ist nichts zu zeigen. Sonst sei $g(x) = f(x) - x\,y$ gesetzt. Sei o. B. d. A. $f'(a) < y < f'(b)$ angenommen (sonst: betrachte $-f$ und $-y$). Dann ist $g'(a) < 0$ und $g'(b) > 0$. Daraus folgt, dass das Minimum von g (welches nach Satz 6.2.1 existieren muss) nicht in einem der Randpunkte liegen kann, also in einem Punkt $x_0 \in (a, b)$ angenommen werden muss. Nach Satz 7.7.2 folgt $g'(x_0) = 0$, also die Behauptung. □

Aufgabe 7.8.3 *Warum ist folgendes Argument kein Beweis für den zweiten Mittelwertsatz:*

Nach dem ersten Mittelwertsatz gilt $f(b) - f(a) = f'(\xi)\,(b - a)$ für ein $\xi \in (a, b)$. Dasselbe gilt auch für g anstelle von f, und daraus folgt (7.8.1).

Aufgabe 7.8.4 *Zeige: Die Funktion*

$$f(x) = \begin{cases} x^2\, \sin(1/x) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

ist in jedem Punkt von $\mathbb{R}$, *also auch im Nullpunkt, differenzierbar, aber die Ableitung ist nicht stetig im Punkt* $x = 0$.

7.9 Die Regeln von de l'Hospital

Oft sucht man den Grenzwert eines Quotienten $f(x)/g(x)$, wobei sowohl Zähler als auch Nenner gegen 0 gehen, sodass der Grenzwert sozusagen "von der unbestimmten Form" $0/0$ ist. Hierzu kann man manchmal die sogenannte *l'Hospitalsche Regel* verwenden. Beachte, dass man in manchen Beispielen die Regel auch mehrmals anwenden kann, falls der Grenzwert des Quotienten der ersten Ableitungen wieder von der unbestimmten Form $0/0$ ist.

Proposition 7.9.1 (Erste l'Hospitalsche Regel) *Für $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ mit $a < b$ seien f, g auf (a, b) differenzierbar, und sei $g'(x) \neq 0$ auf (a, b). Ferner gelte noch*

$$\lim_{x \to b-} f(x) \;=\; \lim_{x \to b-} g(x) \;=\; 0.$$

Dann ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$, und es gilt die Gleichung

$$\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} \;=\; \lim_{x \to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

falls der rechte Grenzwert eigentlich oder uneigentlich existiert. Entsprechendes gilt auch für den Grenzübergang $x \to a+$.

Beweis: Sei zunächst $b < \infty$ angenommen. Wenn wir $f(b) = g(b) = 0$ setzen, dann sind f, g auf $(a, b]$ stetig. Nach dem Zwischenwertsatz für Ableitungen muss $g'(x)$ für alle $x \in (a, b)$ immer gleiches Vorzeichen haben, und daraus folgt die strenge Monotonie von g. Deswegen kann also g keine Nullstelle haben. Aus dem zweiten Mittelwertsatz folgt dann

$$\frac{f(x)}{g(x)} \;=\; \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} \;=\; \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

für ein $\xi \in (x, b)$, und daraus folgt die Behauptung in diesem Fall.

Falls $b = \infty$ ist, sei o. B. d. A. $a > 0$ angenommen. Durch Anwendung des oben Bewiesenen auf die Funktionen $\tilde{f}(x) = f(-1/x)$, $\tilde{g}(x) = g(-1/x)$ und das Intervall $(-1/a, 0)$ folgt dann die Behauptung. □

Der Vollständigkeit halber geben wir noch eine weitere Grenzwertregel von l'Hospital an für den Fall, dass der Grenzwert eines Quotienten von der Form ∞/∞, also ebenfalls unbestimmt ist; für einen Beweis siehe das Buch von *W. Walter* [15]:

Proposition 7.9.2 (Zweite l'Hospitalsche Regel) *Für $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ mit $a < b$ seien f, g auf (a, b) differenzierbar, und sei $g'(x) \neq 0$ auf (a, b). Ferner gelte noch*

$$\lim_{x \to b-} g(x) \;=\; \infty.$$

Dann ist $g(x) \neq 0$ für alle großen $x \in (a, b)$, und es gilt die Gleichung

$$\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} \;=\; \lim_{x \to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

falls der rechte Grenzwert eigentlich oder uneigentlich existiert. Entsprechendes gilt auch für den Grenzübergang $x \to a+$.

(Ohne Beweis)

Aufgabe 7.9.3 *Berechne* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$.

Aufgabe 7.9.4 *Berechne* $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sinh x}{\cosh x}$.

Aufgabe 7.9.5 *Finde ein Beispiel dafür, dass die erste l'Hospitalsche Regel falsch wird, wenn wir die Voraussetzung* $\lim\limits_{x \to b-} f(x) = \lim\limits_{x \to b-} g(x) \;=\; 0$ *fallen lassen.*

Kapitel 8

Integralrechnung

8.1 Riemann-Summen und Riemann-Integral

Wenn nicht anderes gesagt wird, betrachten wir im Folgenden immer Funktionen $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit festen reellen Zahlen $a < b$.

Definition 8.1.1 *Eine Menge $\mathcal{Z} = \{x_0, \ldots, x_N\}$, $N \in \mathbb{N}$, heißt* Zerlegung *von $[a, b]$, wenn gilt*

$$a = x_0 \ < \ x_1 \ < \ldots < \ x_{N-1} \ < \ x_N = b.$$

Die Zahl $|\mathcal{Z}| = \max\{x_k - x_{k-1} : 1 \leq k \leq N\}$ heißt die Feinheit *der Zerlegung, während N* die Zahl der Teilintervalle *genannt werden soll. Die Zahlen x_k heißen auch* die Teilpunkte der Zerlegung. *Ein Vektor $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N)^T$ heißt ein* Zwischenpunktvektor *zu $\mathcal{Z}$, falls*

$$x_{k-1} \ \leq \ \xi_k \ \leq \ x_k \qquad \forall \ k = 1, \ldots, N.$$

Für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ und jeden Zwischenpunktvektor ξ zu $\mathcal{Z}$ heißt die Zahl

$$S(\mathcal{Z}, \xi) \ = \ \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\,(x_k \ - \ x_{k-1})$$

die zu $\mathcal{Z}$ und ξ gehörige Riemannsumme *von f.*

Eine Folge $(\mathcal{Z}_n)$ von Zerlegungen heißt zulässig, *falls $\lim\limits_{n\to\infty} |\mathcal{Z}_n| = 0$ gilt.*

Falls für jede zulässige Zerlegungsfolge und jede Wahl von Zwischenpunktvektoren die zugehörige Folge von Riemannsummen konvergiert, dann heißt f über das Intervall $[a, b]$ Riemann-integrierbar. *In der nächsten Behauptung wird gezeigt, dass der Grenzwert der Riemannsummen in diesem Fall nicht von der Wahl der Zerlegungsfolge oder der Zwischenpunktvektoren abhängt. Diesen Wert nennen wir dann das* (Riemann-)Integral *von f über $[a, b]$ und schreiben*

$$\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Für die geometrische Bedeutung von Riemannsumme und Integral, siehe die untenstehende Bemerkung.

Behauptung 8.1.2 *Wenn für jede zulässige Zerlegungsfolge und jede Wahl von Zwischenpunktvektoren die zugehörige Folge von Riemannsummen konvergiert, dann ist der Grenzwert immer der gleiche, also unabhängig von der Wahl der Zerlegungsfolge oder der Zwischenpunktvektoren.*

Beweis: Seien $(\mathcal{Z}_n)$ und $(\tilde{\mathcal{Z}}_n)$ zwei zulässige Zerlegungsfolgen, und seien (ξ_n) bzw. $(\tilde{\xi}_n)$ zugehörige Folgen von Zwischenpunktvektoren. Durch *Mischen* der Folgen bilden wir zwei weitere Folgen $(\hat{\mathcal{Z}}_n)$ und $(\hat{\xi}_n)$ mit

$$\hat{\mathcal{Z}}_n \;=\; \begin{cases} \mathcal{Z}_k & (n = 2k) \\ \tilde{\mathcal{Z}}_k & (n = 2k+1) \end{cases} \quad, \qquad \hat{\xi}_n \;=\; \begin{cases} \xi_k & (n = 2k) \\ \tilde{\xi}_k & (n = 2k+1) \end{cases} \quad .$$

Dabei entsteht wieder eine zulässige Zerlegungsfolge mit zugehörigen Zwischenpunktvektoren, welche beide Ausgangsfolgen als Teilfolgen beisitzt. Da die zu $(\hat{\mathcal{Z}}_n)$ und $(\hat{\xi}_n)$ gehörigen Riemannsummen konvergieren müssen, müssen also die beiden Teilfolgen den gleichen Grenzwert besitzen, was zu beweisen war. □

Bemerkung 8.1.3 *Wenn $f(x) \geq 0$ ist für alle $x \in [a,b]$, dann ist eine Riemannsumme die Summe der Flächeninhalte von Rechtecken mit Breite $x_k - x_{k-1}$ und Höhe $f(\xi_k)$. Daraus ergibt sich, dass das Integral von f über $[a,b]$ den Flächeninhalt der Figur in einer (x,y)-Ebene unterhalb des Graphen von f bzw. oberhalb der x-Achse und mit seitlichen Begrenzungslinien $x = a$ bzw. $x = b$ definiert.*

Die folgende Proposition erlaubt, dass wir im nächsten Abschnitt zur weiteren Untersuchung der Integrierbarkeit nur beschränkte Funktionen betrachten:

Proposition 8.1.4

(a) **(Fundamentalabschätzung)** *Jede über $[a,b]$ integrierbare Funktion f ist dort beschränkt, und es gilt*

$$\Big| \int_a^b f(x)\,dx \Big| \;\leq\; (b \;-\; a)\;\sup\{\, |f(x)| : \, a \leq x \leq b \,\}\,.$$

(b) **(Linearität des Integrals)** *Sind f und g über $[a,b]$ integrierbar, und sind $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so ist auch $\alpha\, f + \beta\, g$ über $[a,b]$ integrierbar, und es gilt*

$$\int_a^b (\alpha\, f(x) + \beta\, g(x))\,dx \;=\; \alpha \int_a^b f(x)\,dx \;+\; \beta \int_a^b g(x)\,dx \;.$$

Beweis: Die Fundamentalabschätzung folgt, da der Betrag jeder Riemannsumme höchstens gleich der rechten Seite ist (auch falls f unbeschränkt sein sollte). Sei jetzt f auf $[a,b]$ nach oben unbeschränkt, und sei $\mathcal{Z}_n$ eine zulässige Zerlegungsfolge. Für jedes n ist dann f in mindestens einem Teilintervall von $\mathcal{Z}_n$ nach oben unbeschränkt, und deshalb kann man in einem solchen Teilintervall den Zwischenpunkt so wählen, dass die zugehörige Riemannsumme $\geq n$ ausfällt. Deshalb kann f nicht integrierbar sein. Durch Übergang zu $-f$ folgt, dass auch nach unten unbeschränkte Funktionen nicht integrierbar sind. Also gilt (a). Teil (b) ist aber unmittelbar klar wegen der Definition des Integrals. □

Aufgabe 8.1.5 *Zeige: Die sogenannte* Dirichletsche Sprungfunktion

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 0 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 1 & (x \notin \mathbb{Q}) \end{cases}$$

ist nicht über $[a,b]$ integrierbar.

Aufgabe 8.1.6 *Zeige: Eine konstante Funktion ist über jedes abgeschlossene Intervall integrierbar. Finde den Wert des Integrals!*

8.2 Ober- und Untersummen

Definition 8.2.1 *Sei f auf $[a,b]$ beschränkt, und sei $\mathcal{Z} = \{x_0, \ldots, x_N\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$. Für*

$$m_k = \inf\{f(x) : x_{k-1} \le x \le x_k\}\,, \quad M_k = \sup\{f(x) : x_{k-1} \le x \le x_k\}\,,$$

heißen

$$U(\mathcal{Z}) \;=\; \sum_{k=1}^{N} m_k\,(x_k \;-\; x_{k-1})\,, \quad O(\mathcal{Z}) \;=\; \sum_{k=1}^{N} M_k\,(x_k \;-\; x_{k-1})$$

die zu $\mathcal{Z}$ gehörige Unter- und Obersumme *von f. Offenbar gilt für alle Zwischenpunktvektoren immer*

$$U(\mathcal{Z}) \;\le\; S(\mathcal{Z},\xi) \;\le\; O(\mathcal{Z}).$$

Seien zwei Zerlegungen $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2$ von $[a,b]$ gegeben. Wir nennen $\mathcal{Z}_2$ Verfeinerung von *$\mathcal{Z}_1$, wenn $\mathcal{Z}_2$ alle Teilpunkte von $\mathcal{Z}_1$ enthält. Wir schreiben $\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2$ für diejenige Zerlegung, welche genau aus allen Teilpunkten von $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_2$ besteht, und nennen $\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2$* Überlagerung von *$\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_2$.*

Aufgabe 8.2.2 *Finde den Zusammenhang zwischen den Obersummen von f und den Untersummen von $-f$.*

Lemma 8.2.3 *Sei $|f(x)| \le K$ für alle $x \in [a,b]$, und sei $\mathcal{Z}_0$ eine Zerlegung von $[a,b]$ mit N Teilintervallen. Dann gilt für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$*

$$U(\mathcal{Z}) \;\le\; U(\mathcal{Z}+\mathcal{Z}_0) \;\le\; U(\mathcal{Z}) \;+\; 2\,N\,K\,|\mathcal{Z}|,$$

$$O(\mathcal{Z}) \;\ge\; O(\mathcal{Z}+\mathcal{Z}_0) \;\ge\; O(\mathcal{Z}) \;-\; 2\,N\,K\,|\mathcal{Z}|.$$

Beweis: Sei $\mathcal{Z} = \{x_0, \ldots, x_n\}$. Falls $\mathcal{Z}+\mathcal{Z}_0 = \mathcal{Z}$ ist (also falls alle Teilpunkte von $\mathcal{Z}_0$ auch zu $\mathcal{Z}$ gehören), ist die Behauptung trivial erfüllt. Im anderen Fall betrachte ein j, $1 \le j \le n$, für welches Teilpunkte von $\mathcal{Z}_0$ im Intervall (x_{j-1}, x_j) liegen, und bezeichne diese mit $\xi_1 < \ldots < \xi_\nu$. Seien m_k wie in obiger Definition, und $\mu_\tau = \inf\{f(x) : \xi_{\tau-1} \le x \le \xi_\tau\}$, für $1 \le \tau \le \nu+1$, wobei $\xi_0 = x_{j-1}$, $\xi_{\nu+1} = x_j$ gesetzt sei. Dann gilt

$$m_j = \min\{\mu_1, \ldots, \mu_{\nu+1}\} \le \max\{\mu_1, \ldots, \mu_{\nu+1}\} \le m_j + 2\,K\,,$$

und deshalb folgt für jedes solche j

$$m_j\,(x_j - x_{j-1}) \;\le\; \sum_{\tau=1}^{\nu+1} \mu_\tau\,(\xi_\tau - \xi_{\tau-1}) \;\le\; m_j\,(x_j - x_{j-1}) \;+\; 2\,K\,|\mathcal{Z}|\,.$$

Hieraus folgt durch Summation über j die behauptete Ungleichung für die Untersummen. Die Ungleichung für Obersummen beweist man analog, oder man führt sie durch Übergang zu $-f$ auf die für Untersummen zurück. □

Korollar zu Lemma 8.2.3 *Sei f auf $[a,b]$ beschränkt. Für beliebige Zerlegungen $\mathcal{Z}_j$ von $[a,b]$ gilt dann stets*

$$U(\mathcal{Z}_1) \;\le\; O(\mathcal{Z}_2)\,.$$

Beweis: Für $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_1$, $\mathcal{Z}_0 = \mathcal{Z}_2$ folgt aus dem Lemma $U(\mathcal{Z}_1) \le U(\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2)$. Trivialerweise gilt $U(\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2) \le O(\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2)$, und durch Vertauschen von $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2$ folgt aus dem Lemma $O(\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2) \le O(\mathcal{Z}_2)$. □

Definition 8.2.4 *Sei f auf $[a,b]$ beschränkt. Nach obigem Korollar sind die Obersummen (Untersummen) von f stets nach unten (oben) beschränkt. Wir definieren deshalb*

$$I_* \;=\; \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \;=\sup\{U(\mathcal{Z})\}\,, \qquad I^* \;=\; \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \;=\; \inf\{O(\mathcal{Z})\}\,,$$

wobei das Supremum bzw. Infimum jeweils über alle Zerlegungen von $[a,b]$ gebildet wird. Die so definierten Werte I_*, I^* heißen das Unter- bzw. Oberintegral von f *über $[a,b]$. Offenbar ist $I_* \le I^*$, und wir werden sehen, dass f genau dann über $[a,b]$ integrierbar ist, wenn $I_* = I^*$ gilt.*

Wir charakterisieren jetzt das Riemann-Integral durch Grenzwerte von Ober- und Untersummen:

Satz 8.2.5 *Für jede auf $[a,b]$ beschränkte Funktion f gilt:*

(a) *Für jede zulässige Zerlegungsfolge $(\mathcal{Z}_n)$ konvergieren die Folgen $(U(\mathcal{Z}_n))$ und $(O(\mathcal{Z}_n))$, und es gilt*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \;= \lim_{n\to\infty} U(\mathcal{Z}_n), \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \;= \lim_{n\to\infty} O(\mathcal{Z}_n).$$

(b) *Die Funktion f ist genau dann integrierbar über $[a,b]$, wenn ihr Unter- und Oberintegral übereinstimmen, und dann ist*

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \;=\; \overline{\int_a^b} f(x)\,dx\ .$$

Beweis: Zu (a): Aus der Definition von I_* ergibt sich, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ existiert mit $I_* - \varepsilon \le U(\mathcal{Z}) \le I_*$. Ist N die Zahl der Teilintervalle von $\mathcal{Z}$, so folgt aus Lemma 8.2.3

$$U(\mathcal{Z}_n) \;\le\; U(\mathcal{Z}+\mathcal{Z}_n) \;\le\; U(\mathcal{Z}_n) \;+\; 2\,N\,K\,|\mathcal{Z}_n| \quad \forall\, n \ge 1.$$

Genauso folgt aber $U(\mathcal{Z}) \;\le\; U(\mathcal{Z}+\mathcal{Z}_n)$, und deshalb ist

$$I_* \;-\; \varepsilon \;-\; 2\,N\,K\,|\mathcal{Z}_n| \;\le\; U(\mathcal{Z}_n) \;\le\; I_* \quad \forall\, n \ge 1.$$

Wegen $|\mathcal{Z}_n| \to 0$ folgt daraus $U(\mathcal{Z}_n) \to I_*$ für $n \to \infty$. Für die Obersummen schließt man genauso.

Zu (b): Da für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ und jede Wahl von Zwischenpunkten die zugehörige Riemannsumme zwischen Unter- und Obersumme liegt, folgt aus $I_* = I^*$ mit Hilfe von (a) die Integrierbarkeit und die behauptete Gleichung. Sei jetzt f integrierbar über $[a,b]$, und sei $(\mathcal{Z}_n)$ eine zulässige Zerlegungsfolge. Dann kann man zu jedem $n \in \mathbb{N}$ einen Zwischenpunktvektor ξ_n so wählen, dass $0 < O(\mathcal{Z}_n) - S(\mathcal{Z}_n, \xi_n) < 1/n$ ausfällt. Da die Riemannsummen gegen das Integral konvergieren müssen, folgt dasselbe für die Obersummen. Genauso schließt man aber auf die Konvergenz der Untersummen gegen das Integral, und deshalb folgt die Gleichheit von Ober- und Unterintegral. □

Proposition 8.2.6 (Riemannsches Integrabilitätskriterium))
Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann über $[a,b]$ integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ von $[a,b]$ gibt mit $O(\mathcal{Z}) - U(\mathcal{Z}) < \varepsilon$.

Beweis: Sei f integrierbar, dann folgt aus dem vorausgegangenen Satz für jede zulässige Zerlegungsfolge $(\mathcal{Z}_n)$, dass $\lim_{n\to\infty}(O(\mathcal{Z}_n) - U(\mathcal{Z}_n)) = 0$, und daraus folgt die eine Richtung der Behauptung. Umgekehrt folgt aus der Ungleichung $O(\mathcal{Z}) - U(\mathcal{Z}) < \varepsilon$, dass $I^* - I_* < \varepsilon$ ist, und da ε beliebig klein sein kann, folgt die Gleichheit von Ober- und Unterintegral, also die Integrierbarkeit. □

Aufgabe 8.2.7 *Sei f über $[a,b]$ integrierbar, und sei $g(x) = f(x)$ bis auf endlich viele $x \in [a,b]$. Zeige, dass auch g über $[a,b]$ integrierbar ist und dass $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$ ist.*

Mit dem Riemannschen Kriterium zeigt man die folgenden Resultate:

Satz 8.2.8 *Jede auf $[a,b]$ stetige oder monotone Funktion ist integrierbar.*

Beweis: Jedes auf $[a,b]$ stetige f ist dort beschränkt und gleichmäßig stetig; also gibt es zu $\varepsilon >$ ein $\delta > 0$, so dass $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ ist, falls nur $|x_1 - x_2| < \delta$ gilt. Sei $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung mit Feinheit $< \delta$. Dann ist $M_k - m_k < \varepsilon$ für alle $k = 1, \ldots, N$, und daraus folgt $O(\mathcal{Z}) - U(\mathcal{Z}) < \varepsilon \sum_{k=1}^N (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon\,(b-a)$. Daraus folgt die Integrierbarkeit mit dem Riemannschen Integrabilitätskriterium.

Falls f monoton (o. B. d. A. wachsend) ist, ist f auch beschränkt, und für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ gilt $M_k = f(x_k)$, $m_k = f(x_{k-1})$. Also ist

$$O(\mathcal{Z}) - U(\mathcal{Z}) \;=\; \sum_{k=1}^N (f(x_k) - f(x_{k-1}))\,(x_k - x_{k-1}) \;\leq\; |\mathcal{Z}| \sum_{k=1}^N (f(x_k) - f(x_{k-1}))\,,$$

und die rechtsstehende Teleskopsumme ergibt $f(b) - f(a)$. Hieraus folgt die Integrierbarkeit mit dem Riemannschen Kriterium. □

Satz 8.2.9 *Sind f und g über $[a,b]$ integrierbar, so gilt dasselbe auch für $f\,g$.*

Beweis: Da integrierbare Funktionen beschränkt sein müssen, gibt es ein $K \in \mathbb{R}$ mit $|f(x)|, |g(x)| \leq K$ für alle $x \in [a,b]$. Also gilt

$$\begin{aligned} |f(x)\,g(x) - f(y)\,g(y)| &\leq |f(x)|\,|g(x) - g(y)| + |g(y)|\,|f(x) - f(y)| \\ &\leq K\Big(|g(x) - g(y)| + |f(x) - f(y)|\Big)\,. \end{aligned}$$

Ist $\mathcal{Z}$ eine beliebige Zerlegung, und stehen U_f, O_f, bzw. U_g, O_g, bzw. U_{fg}, O_{fg} für die zugehörigen Unter- und Obersummen von f, bzw. g, bzw. $f\,g$, so folgt hieraus

$$O_{fg} - U_{fg} \leq K\,(O_f - U_f + O_g - U_g).$$

Daraus folgt die Behauptung mit dem Riemannschen Kriterium. □

Lemma 8.2.10 *Sei $f : [a,b] \longrightarrow A \subset \mathbb{R}$ über $[a,b]$ integrierbar, und gelte für $g : A \to \mathbb{R}$ eine Lipschitzbedingung auf A. Dann ist $g \circ f$ über $[a,b]$ integrierbar.*

Beweis: Für jedes Teilintervall I von $[a,b]$ sei $\omega_f(I) = \sup\{f(x) : x \in I\} - \inf\{f(x) : x \in I\}$. Damit folgt aus der Lipschitzbedingung, dass

$$\omega_{g\circ f}(I) \;\leq\; L\,\omega_f(I)\,.$$

Daraus folgt die Behauptung mit dem Riemannschen Kriterium. □

Proposition 8.2.11 (Dreiecksungleichung für Integrale)
Ist f über $[a,b]$ integrierbar, so auch $|f|$, und es gilt

$$\Big| \int_a^b f(x)\,dx \Big| \;\leq\; \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Beweis: Für $g(x) = |x|$ folgt aus dem obigen Lemma die Integrierbarkeit von $|f|$, und die Ungleichung folgt aus der Dreiecksungleichung für die Riemannsummen. □

Aufgabe 8.2.12 *Sei f über $[a,b]$ integrierbar, und sei $p > 1$. Zeige mit* Lemma 8.2.10 *die Integrierbarkeit von $|f|^p$ über $[a,b]$.*

Aufgabe 8.2.13 *Sei f über $[a,b]$ integrierbar. Zeige die Integrierbarkeit von f^+, f^-, mit*

$$f^+(x) \;=\; \max\{f(x),0\}, \qquad f^-(x) \;=\; \max\{-f(x),0\} \quad \forall\, x \in [a,b]\,.$$

Satz 8.2.14 *Für $a < c < b$ ist eine Funktion f genau dann über $[a,b]$ integrierbar, wenn sie sowohl über $[a,c]$ als auch über $[c,b]$ integrierbar ist, und dann gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \int_a^c f(x)\,dx \;+\; \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

Beweis: Aus Lemma 8.2.3 folgt, dass bei Verfeinerung einer Zerlegung die Untersummen bzw. Obersummen nicht abnehmen bzw. nicht zunehmen können. Daraus ergibt sich, dass wir o. B. d. A. nur Zerlegungen betrachten können, die c als einen Teilpunkt enthalten. Damit folgt die Behauptung mit dem Riemannschen Integrabilitätskriterium. □

Aufgabe 8.2.15 *Zeige, dass stückweise stetige Funktionen immer integrierbar sind.*

Bemerkung 8.2.16 *Sei f über $[a,b]$ integrierbar, und seien $x_0, x_1 \in [a,b]$. Ist $x_0 < x_1$, so folgt aus dem vorstehenden Satz die Integrierbarkeit von f über $[x_0,x_1]$. Es ist üblich,*

$$\int_{x_1}^{x_0} f(x)\,dx \;=\; -\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx\,, \qquad \int_{x_0}^{x_0} f(x)\,dx \;=\; 0$$

zu setzen. Mit diesen Vereinbarungen folgt dann für beliebige $x_0, x_1, x_2 \in [a,b]$ aus obigem Satz

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \;+\; \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \;=\; \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx\,.$$

Lemma 8.2.17 *Sei f über $[a,b]$ integrierbar, und sei $x_0 \in [a,b]$, sowie*

$$F(x) \;=\; \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \qquad \forall\, x \in [a,b]\,.$$

Dann erfüllt F eine Lipschitzbedingung auf $[a,b]$ und ist insbesondere dort stetig.

Beweis: Für $x_1, x_2 \in [a,b]$ folgt aus der obigen Bemerkung, dass $F(x_1) - F(x_2) = \int_{x_2}^{x_1} f(t)\,dt$ ist. Aus der Fundamentalabschätzung folgt dann die Behauptung mit der Lipschitzkonstanten $L = \sup_{[a,b]} |f(t)|$. □

Aufgabe 8.2.18 *Gib ein Beispiel einer über $[a,b]$ integrierbaren Funktion f, für welche die in* Lemma 8.2.17 *definierte Funktion F* nicht *auf $[a,b]$ differenzierbar ist.*

8.3 Die Hauptsätze der Differenzial- und Integralrechnung

Definition 8.3.1 *Sei I ein beliebiges Intervall, und sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Falls eine auf I differenzierbare Funktion F existiert mit der Eigenschaft $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$, dann nennen wir F* eine Stammfunktion *zu f. Wir schreiben in diesem Fall auch*

$$F(x) \;=\; \int f(x)\,dx$$

und nennen das rechtsstehende Symbol auch unbestimmtes Integral *von f.*

Aufgabe 8.3.2 *Finde Stammfunktionen zu den Funktionen*

$$\cos x\,, \qquad x^2+1\,, \qquad \frac{1}{\cos^2 x}\,, \qquad \frac{1}{x},$$

jeweils für x auf dem natürlichen Definitionsbereich in $\mathbb{R}$.

Behauptung 8.3.3 *Ist F auf einem Intervall I Stammfunktion zu f, und ist $c \in \mathbb{R}$, so ist auch $F + c$ eine Stammfunktion zu f. Umgekehrt, sind F_1 und F_2 zwei Stammfunktionen zu f auf I, so ist $F_2 - F_1$ konstant.*

Beweis: Folgt mit einem Korollar zum ersten Mittelwertsatz der Differenzialrechnung (Seite 73). □

Satz 8.3.4 (Erster Hauptsatz der DI)
Falls f über $[a, b]$ integrierbar ist und eine Stammfunktion F besitzt, dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; F(b) \;-\; F(a) \quad \Big(\;=\; F(x)|_a^b \Big)\,.$$

Beweis: Für eine beliebige Zerlegung $\mathcal{Z} = \{x_0, \ldots, x_N\}$ folgt mit dem ersten Mittelwertsatz der Differenzialrechnung

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{N} (F(x_k) - F(x_{k-1})) = \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1})\,,$$

mit geeigneten Zwischenwerten $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$. Mit der Definition des Integrals folgt dann die Behauptung. □

Aufgabe 8.3.5 *Berechne die Integrale $\int_0^1 (x^2+1)\,dx$ und $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$.*

Satz 8.3.6 (Zweiter Hauptsatz der DI) *Sei f auf $[a, b]$ stetig, und sei $x_0 \in [a, b]$. Dann ist durch*

$$F(x) \;=\; \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \quad \forall\; x \in [a, b]$$

eine Stammfunktion zu f definiert.

Beweis: Bemerkung 8.2.16 stellt zunächst sicher, dass F immer definiert ist, und dass

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \;=\; \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt\,.$$

Weiter ist $\int_x^{x+h} f(x)\,dt = h\,f(x)$. Also folgt mit der Fundamentalabschätzung

$$\Big|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\Big| \;=\; \Big|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t) \;-\; f(x))\,dt\Big| \;\le\; m_x(h)\,,$$

wobei $m_x(h)$ das Maximum von $|f(t)-f(x)|$ auf dem von x und $x+h$ begrenzten Intervall bezeichnet. Da f stetig ist, gilt $m_x(h)\to 0$ für $h\to 0$. Daraus folgt die Behauptung. □

8.4 Weitere Ergebnisse

Satz 8.4.1 (Partielle Integration)
Seien f, g über $[a,b]$ integrierbar, und seien F bzw. G Stammfunktionen zu f bzw. g. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,G(x)\,dx \;=\; F(x)\,G(x)|_a^b \;-\; \int_a^b F(x)\,g(x)\,dx.$$

Beweis: Es ist $(F(x)\,G(x))' = f(x)\,G(x) + F(x)\,g(x)$, und da F, G differenzierbar (also stetig) sind, folgt die Integrierbarkeit von $f\,G$ und $F\,g$ (also auch die von $(F\,G)'$). Mit dem ersten Hauptsatz folgt dann die Behauptung. □

Aufgabe 8.4.2 *Berechne $\int_0^\pi x\,\cos x\,dx$ und $\int_0^{2\pi} \cos x\,\sin x\;dx$ mit partieller Integration.*

Satz 8.4.3 (Substitutionsregel) *Seien f stetig auf $[a,b]$ und g stetig differenzierbar auf $[\alpha,\beta]$, und gelte $g([\alpha,\beta])\subset[a,b]$ sowie*

$$g(\alpha)=a,\quad g(\beta)=b,\quad \text{oder}\quad g(\alpha)=b,\quad g(\beta)=a.$$

Dann gilt

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)\,dx \;=\; \int_\alpha^\beta f(g(t))\,g'(t)\,dt.$$

Beweis: Sei F Stammfunktion zu f. Mit der Kettenregel folgt $(F(g(t)))' = f(g(t))\,g'(t)$. Also gilt nach dem ersten Hauptsatz

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)\,dx \;=\; F(g(\beta)) \;-\; F(g(\alpha)) \;=\; \int_\alpha^\beta f(g(t))\,g'(t)\,dt.$$

Das ist die Behauptung. □

Aufgabe 8.4.4 *Berechne $\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{x^2}\,dx$ und $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ mit der Substitutionsregel.*

Aufgabe 8.4.5 *Zeige für* $t = \tan(x/2)$ *die Gleichungen*

$$\cos^2(x/2) \;=\; \frac{1}{1+t^2}\;, \quad \sin^2(x/2) \;=\; \frac{t^2}{1+t^2}\;,$$

und schließe daraus mit Hilfe der Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen, dass

$$\cos x \;=\; \frac{1-t^2}{1+t^2}\;, \quad \sin x \;=\; \frac{2\,t}{1+t^2}\;.$$

Zeige damit, dass Integrale über eine rationale Funktion von $\sin x$ *und* $\cos x$ *durch die Substitution* $x = 2\arctan t$ *in ein Integral verwandelt werden, dessen Integrand eine rationale Funktion von* t *ist.*

Aufgabe 8.4.6 *Zeige mit der Substitutionsregel* $\int_0^a f(x)\,dx = \int_{-a}^0 f(-x)\,dx$*. Benutze dies, um zu zeigen, dass das Integral einer ungeraden Funktion über ein Intervall* $[-a, a]$ *immer* 0 *ergibt.*

Lemma 8.4.7 (Integration von Ungleichungen)

(a) *Seien* f, g *über* $[a, b]$ *integrierbar, und gelte* $f(x) \le g(x)$ *für alle* $x \in [a, b]$*. Dann folgt* $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$*.*

(b) *Sei* f *stetig und nicht-negativ auf* $[a, b]$*, und gelte* $\int_a^b f(x)\,dx = 0$*. Dann folgt* $f(x) = 0$ *für alle* $x \in [a, b]$*.*

Beweis: Zu (a): Für jede Zerlegung von $[a, b]$ und jede Wahl von Zwischenpunkten ist die Riemannsumme von f nicht größer als die von g. Daher folgt die Behauptung mit der Definition des Integrals.

Zu (b): Die Funktion $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ ist monoton wachsend, da $F'(x) = f(x) \ge 0$ ist. Wegen $F(a) = F(b) = 0$ folgt also, dass F die Nullfunktion ist, und deshalb gilt dasselbe auch für f. □

Definition 8.4.8 *Sei* $a < b$*, und sei* f *über* $[a, b]$ *integrierbar. Die Zahl*

$$\mu \;=\; \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

heißt der Mittelwert von f *über* $[a, b]$.

Satz 8.4.9 (Erster Mittelwertsatz der Integralrechnung)
Sei $a < b$*, sei* f *über* $[a, b]$ *integrierbar, und sei* μ *der Mittelwert von* f *über* $[a, b]$*. Dann ist*

$$m = \inf\{f(x) : a \le x \le b\} \;\le\; \mu \;\le\; \sup\{f(x) : a \le x \le b\} = M.$$

Falls f *auf* $[a, b]$ *stetig ist, existiert ein* $\xi \in [a, b]$ *mit* $\mu = f(\xi)$*.*

Beweis: Wegen $m \le f(x) \le M$ folgt die Ungleichung aus Lemma 8.4.7 (a), und der Zusatz ergibt sich aus dem Zwischenwertsatz. □

Satz 8.4.10 (Erweiterter Mittelwertsatz der Integralrechnung)
Seien g *und* $f\,g$ *über* $[a, b]$ *integrierbar, und sei* $g(x) \ge 0$ *für alle* $x \in [a, b]$*. Dann existiert ein* $\mu \in [m, M]$*, mit* m*,* M *wie im vorigen Satz, so dass*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \;=\; \mu \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Ist f *stetig auf* $[a, b]$*, so gibt es ein* $\xi \in [a, b]$ *mit* $f(\xi) = \mu$*.*

Beweis: Es gilt

$$m \int_a^b g(x)\,dx \;\le \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \;\le M \int_a^b g(x)\,dx\,,$$

und daraus folgt die Behauptung. □

Satz 8.4.11 (Zweiter Mittelwertsatz der Integralrechnung)
Seien f stetig differenzierbar und monoton, sowie g stetig auf $[a,b]$. Dann existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \;=\; f(a) \int_a^\xi g(x)\,dx \;+\; f(b) \int_\xi^b g(x)\,dx\,.$$

Beweis: O. B. d. A. sei f wachsend, also $f'(x) \ge 0$. Sei G Stammfunktion von g, dann folgt mit partieller Integration

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \;= f(x)\,G(x)|_a^b \;-\; \int_a^b f'(x)\,G(x)\,dx\,.$$

Aus dem vorherigen Satz und dem Zwischenwertsatz folgt die Existenz von ξ mit

$$\int_a^b f'(x)\,G(x)\,dx \;=\; G(\xi) \int_a^b f'(x)\,dx \;=\; G(\xi)\;f(x)|_a^b\,.$$

Daraus ergibt sich die Behauptung. □

Satz 8.4.12 (Gliedweise Integration) *Gegeben sei ein abgeschlossenes Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$, sowie Funktionen $f_n, g_k : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ für alle $n, k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

(a) *Sind alle f_n über $[a,b]$ integrierbar, und ist die Funktionenfolge (f_n) auf $[a,b]$ gleichmäßig konvergent, so ist auch die Grenzfunktion f über $[a,b]$ integrierbar, und es gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

(b) *Sind alle g_k über $[a,b]$ integrierbar, und ist die Funktionenreihe $\sum_{k=1}^\infty g_k$ auf $[a,b]$ gleichmäßig konvergent, so ist auch die Grenzfunktion f über $[a,b]$ integrierbar, und es gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \sum_{k=1}^\infty \int_a^b g_k(x)\,dx.$$

Beweis: Zu (a): O. B. d. A. sei $b > a$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es nach Definition der gleichmäßigen Konvergenz ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|f(x) - f_n(x)| \le \varepsilon/(b-a)$ für alle $x \in [a,b]$. Daraus folgt für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ von $[a,b]$ für die Obersummen $O_f(\mathcal{Z}), O_{f_n}(\mathcal{Z})$ und Untersummen $U_f(\mathcal{Z}), U_{f_n}(\mathcal{Z})$ von f bzw. f_n, dass

$$|U_f(\mathcal{Z}) - U_{f_n}(\mathcal{Z})| \;\le \varepsilon\,, \qquad |O_f(\mathcal{Z}) - O_{f_n}(\mathcal{Z})| \;\le \varepsilon\,.$$

Nach dem Riemannschen Integrabilitätskriterium existiert eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ mit $O_{f_n}(\mathcal{Z}) - U_{f_n}(\mathcal{Z}) < \varepsilon$, und daher folgt

$$\begin{aligned} O_f(\mathcal{Z}) - U_f(\mathcal{Z}) \;&=\; O_f(\mathcal{Z}) - O_{f_n}(\mathcal{Z}) + U_{f_n}(\mathcal{Z}) - U_f(\mathcal{Z}) + O_{f_n}(\mathcal{Z}) - U_{f_n}(\mathcal{Z}) \\ &<\; 3\,\varepsilon\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Integrierbarkeit von f mit dem Riemannschen Integrabilitätskriterium. Die behauptete Gleichung folgt sofort wegen

$$\Big| \int_a^b (f(x) \ - \ f_n(x))\,dx \Big| \ \le (b-a) \ \max_{x \in [a,b]} |f(x) \ - \ f_n(x)|$$

aus der gleichmäßigen Konvergenz. Der Teil (b) kann wie üblich mit $f_n = \sum_{k=1}^n g_k$ auf (a) zurückgeführt werden. □

Aufgabe 8.4.13 *Finde eine Potenzreihenentwicklung für* $\arctan x$ *und Entwicklungspunkt* $x_0 = 0$.

Lösung: Aus dem ersten Hauptsatz folgt wegen $\arctan 0 = 0$, dass

$$\arctan x \ = \ \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\ dt \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Aus der geometrischen Reihe folgt

$$\frac{1}{1+t^2} \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, t^{2k} \qquad \forall\ |t| < 1,$$

und die Reihe ist sogar gleichmäßig konvergent für $|t| \le r$, mit beliebigem $r < 1$. Deshalb folgt aus Satz 8.4.12, dass

$$\arctan x \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} \ (-1)^k \ \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\ ,$$

zunächst nur für $|x| \le r$, aber da ja r beliebig dicht bei 1 sein kann, ist dies sogar richtig für alle x mit $|x| < 1$. □

8.5 Die Partialbruchzerlegung

Auf der einen Seite garantiert der zweite Hauptsatz zu jeder stetigen Funktion f die Existenz einer Stammfunktion F, andererseits gibt er keinen Hinweis darauf, wie man F explizit berechnen kann. Tatsächlich ist es so, dass man z. B. für $f(x) = \exp(-x^2)$ keine Stammfunktion durch die uns bekannten Funktionen ausdrücken kann. In diesem Abschnitt wollen wir allerdings zeigen, dass man beliebige rationale Funktionen in einfache Ausdrücke zerlegen kann, für welche man dann einzeln Stammfunktionen findet. Dazu benötigen wir einige Hilfsmittel:

Satz 8.5.1 (Fundamentalsatz der Algebra)
Jedes nicht konstante Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$ *besitzt mindestens eine Nullstelle in* $\mathbb{C}$.

Beweis: Sei $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k\, z^k$, mit $n \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Sei $f(z) = |p(z)| \ge 0$, und sei $\mu = \inf\{f(z) : z \in \mathbb{C}\}$. Es gilt $f(z) \ge |a_n|\, r^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\, r^k \to \infty$ für $r = |z| \to \infty$. Deshalb gibt es ein $R > 0$ derart, dass $f(z) > \mu$ für $|z| > R$, und somit muss es eine Folge (z_n) in der Kreisscheibe um 0 mit Radius R geben, für welche $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \mu$ gilt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt diese Folge eine konvergente Teilfolge, etwa mit Grenzwert z_0, und wegen der Stetigkeit von f folgt hieraus $f(z_0) = \mu$. Wir nehmen an, dass $\mu > 0$ ist und setzen $q(z) = p(z+z_0)/p(z_0)$. Dann ist q ein Polynom n-ten Grades mit $|q(z)| \geq q(0) = 1$. Sei $q(z) = 1 + \sum_{k=m}^{n} b_k\, z^k$, mit $b_m \neq 0$, $m \geq 1$. Setze $b_m = \rho\, \mathrm{e}^{i\phi}$, und wähle $z = r\, \mathrm{e}^{-i(\phi+\pi)/m}$, also $z^m\, b_m = -r^m\, \rho < 0$. Dann ist

$$|q(z)| \;\leq\; 1 \;-\; r^m\, \rho \;+\; \sum_{k=m+1}^{n} |b_k|\, r^k \;<\; 1$$

falls r genügend klein ist. Das ist ein Widerspruch zu $|q(z)| \geq 1$. □

Korollar zu Satz 8.5.1 *Zu jedem $p \in \mathbb{C}[z]$ vom Grade $n \geq 1$ existieren verschiedene $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{C}$, natürliche Zahlen $\nu_1, \ldots, \nu_m$ mit $\nu_1 + \ldots + \nu_m = n$, und ein $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ derart, dass*

$$p(z) \;=\; a\,(z - z_1)^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot (z - z_m)^{\nu_m} \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}. \tag{8.5.1}$$

Beweis: Induktion über n: Für $n = 1$ ist $p(z) = az + b$, mit $a \neq 0$, also gilt $p(z) = a\,(z - z_1)$ mit $z_1 = -b/a$. Für $n \geq 2$ existiert nach Satz 8.5.1 ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $p(z_0) = 0$. Nach Ergebnissen in Abschnitt 3.2 gilt dann $p(z) = (z - z_0)^{\nu}\, q(z)$ mit einer natürlichen Zahl ν und einem Polynom q vom Grade $n - \nu$ mit $q(z_0) \neq 0$. Anwendung der Induktionshypothese liefert dann die Behauptung. □

Satz 8.5.2 *Zu jedem reellen Polynom $p \in \mathbb{R}[x]$ vom Grade $n \geq 1$ existieren verschiedene $x_1, \ldots, x_\mu \in \mathbb{R}$, verschiedene $(a_1, b_1), \ldots, (a_\nu, b_\nu) \in \mathbb{R}^2$, wobei auch $\mu = 0$ oder $\nu = 0$ eintreten kann, eine reelle Zahl $a \neq 0$, sowie natürliche Zahlen $\nu_1, \ldots, \nu_\mu, \sigma_1, \ldots, \sigma_\nu$ derart, dass folgendes gilt:*

(a) *Es ist $\sum_{k=1}^{\mu} \nu_k + 2 \sum_{k=1}^{\nu} \sigma_k = n$.*

(b) *Es ist $a_k^2 < 4\, b_k$, d. h., $x^2 - a_k\, x + b_k$ hat keine reellen Nullstellen, für alle $k = 1, \ldots, \nu$.*

(c) *Es gilt die Darstellung*

$$\begin{aligned} p(x) \;&=\; a\,(x - x_1)^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot (x - x_\mu)^{\nu_\mu}\; (x^2 - a_1\, x + b_1)^{\sigma_1} \\ &\quad \cdot \ldots \cdot (x^2 - a_\nu\, x + b_\nu)^{\sigma_\nu} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{8.5.2}$$

Beweis: Es ist $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k$, mit $a_k \in \mathbb{R}$. Ist z_0 eine nicht-reelle Nullstelle von p, so folgt

$$p(\overline{z_0}) \;=\; \sum_{k=0}^{n} a_k\, \overline{z_0}^{\,k} \;=\; \overline{\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k\, z_0^k\Big)} \;=\; \overline{p(z_0)} \;=\; 0.$$

Daher ist also $\overline{z_0}$ ebenfalls eine Nullstelle von p, und man kann zeigen, dass beide die gleiche Vielfachheit haben. Die Nullstellenmenge von p besteht also aus (verschiedenen) reellen Nullstellen $x_1, \ldots, x_\mu \in \mathbb{R}$ (wobei evtl. $\mu = 0$ sein kann), sowie (gleichfalls verschiedenen) Paaren von konjugiert-komplexen nicht-reellen Nullstellen $(z_1, \overline{z_1}), \ldots, (z_\nu, \overline{z_\nu})$ (wobei auch $\nu = 0$ eintreten kann). Sind $\nu_1, \ldots, \nu_\mu, \sigma_1, \ldots, \sigma_\nu$ die zugehörigen Vielfachheiten, so folgt (a). Setzt man $a_k = 2\, \mathrm{Re}\, z_k$, $b_k = |z_k|^2$, so folgt $(x - z_k)\,(x - \overline{z_k}) = x^2 - a_k\, x + b_k$, und es gilt (b). Aus dem Korollar zu Satz 8.5.1 folgt dann (c), und da a offenbar der höchste Koeffizient von p ist, ist $a \in \mathbb{R}$. □

Satz 8.5.3 (Partialbruchzerlegung im Komplexen) *Seien $p, q \in \mathbb{C}[z]$ mit $0 \leq \deg\, p < \deg\, q$, und gelte (8.5.1) für q an Stelle von p. Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $a_{jk} \in \mathbb{C}$ mit*

$$r(z) \;=\; \frac{p(z)}{q(z)} \;=\; \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{\nu_k} \frac{a_{jk}}{(z - z_k)^j} \qquad \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_m\}. \tag{8.5.3}$$

Beweis: Die Gleichung (8.5.3) ist äquivalent zu der Polynomgleichung

$$p(z) \;=\; \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{\nu_k} a_{jk}\, p_{jk}(z), \qquad p_{jk}(z) \;:=\; (z-z_k)^{\nu_k - j} \prod_{\mu \neq k} (z - z_\mu)^{\nu_\mu} \;=\; \frac{q(z)}{a\,(z-z_k)^j}\,.$$

Also ist zu zeigen, dass jedes Polynom p vom Grade echt kleiner als $n = \deg q = \nu_1 + \ldots + \nu_m$ eine Linearkombination der n Polynome p_{jk} ist, und dies ist wiederum äquivalent zur linearen Unabhängigkeit der p_{jk}. Wir zeigen deshalb durch Induktion über n: *Wenn verschiedene Zahlen $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{C}$ und natürliche Zahlen $\nu_1, \ldots, \nu_m$ mit $\nu_1 + \ldots + \nu_m = n$ gegeben sind, dann sind die entsprechenden Polynome p_{jk} immer linear unabhängig.* Für $n = 1$ ist offenbar nichts zu zeigen. Sei also $n \geq 2$, und sei

$$0 \;=\; \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{\nu_k} a_{jk}\, p_{jk}(z) \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}. \tag{8.5.4}$$

Offenbar gilt $p_{jk}(z_\tau) = 0$ außer für $k = \tau$ und $j = \nu_\tau$, aber $p_{\nu_\tau \tau}(z_\tau) \neq 0$. Einsetzen von z_τ, für irgend ein $\tau = 1, \ldots, m$, in (8.5.4) ergibt deshalb $0 = a_{\nu_\tau \tau}$. Also folgt jetzt

$$0 \;=\; \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{\nu_k - 1} a_{jk}\, p_{jk}(z) \quad \forall\, z \in \mathbb{C},$$

wobei einige der inneren Summen auch leer sein können. Die übrig gebliebenen Polynome haben alle die Nullstellen $z_1, \ldots, z_m$, und deshalb können wir die Gleichung durch $(z-z_1)\cdot\ldots\cdot(z-z_m)$ dividieren. Die so entstehende Gleichung ist wieder von der gleichen Natur wie (8.5.4), aber so, dass die Induktionshypothese anwendbar ist. Aus dieser folgt, dass auch die übrigen Koeffizienten $a_{jk} = 0$ sein müssen. $\square$

Satz 8.5.4 (Partialbruchzerlegung im Reellen) *Seien $p, q \in \mathbb{R}[x]$ mit $0 \leq \deg p < \deg q$, und gelte* (8.5.2)*. Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen a_{jk}, α_{jk}, $\beta_{jk} \in \mathbb{R}$ so, dass*

$$r(x) \;=\; \sum_{k=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{\nu_k} \frac{a_{jk}}{(x-x_k)^j} \;+\; \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{\sigma_k} \frac{\alpha_{jk}\, x + \beta_{jk}}{(x^2 - a_k\, x + b_k)^j} \qquad \forall\, x \in D, \tag{8.5.5}$$

mit $D = \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_\mu\}$.

Beweis: Der Beweis ist weitgehend analog zu dem des vorherigen Satzes: Wir betrachten wieder die äquivalente Polynomgleichung

$$p \;=\; \sum_{k=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{\nu_k} a_{jk}\, p_{jk} \;+\; \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{\nu_k} (\alpha_{jk}\, x + \beta_{jk})\, q_{jk},$$

mit $p_{jk}(x) = q(x)/(x-x_k)^j$, $q_{jk}(x) = q(x)/(x^2 - a_k\, x + b_k)^j$ (beachte, dass dies tatsächlich alles Polynome in x sind). Wieder sieht man, dass die Behauptung äquivalent zur linearen Unabhängigkeit der Polynome $p_{jk}(x)$, $q_{jk}(x)$ und $x\, q_{jk}(x)$ ist. Also betrachten wir die Gleichung

$$0 \;=\; \sum_{k=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{\nu_k} a_{jk}\, p_{jk}(x) \;+\; \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{\nu_k} (\alpha_{jk}\, x + \beta_{jk})\, q_{jk}(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Aus dem Nullstellensatz für Polynome folgt, dass dieselbe Gleichung aber auch für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten muss. Einsetzen der reellen Nullstellen $x_1, \ldots, x_\mu \in \mathbb{R}$ ergibt dann $a_{\nu_k k} = 0$ für alle k. Setzt man ein Paar von konjugiert komplexen Nullstellen ein, so erhält man zwei Gleichungen, aus denen $\alpha_{\sigma_k k} = \beta_{\sigma_k k} = 0$ folgt. Danach kann man auf die verbleibende Summe wieder die Induktionshypothese anwenden. $\square$

Bemerkung 8.5.5 (Durchführung der Partialbruchzerlegung)
Hat man den entsprechenden Ansatz für die Partialbruchzerlegung gemacht, so multipliziert man am besten beide Seiten mit dem Nennerpolynom $q(x)$ und erhält so eine äquivalente Polynomgleichung. Danach bieten sich folgende Möglichkeiten an:

1. Durch Sammeln aller Terme mit gleichen Potenzen der Variablen, also durch Koeffizientenvergleich, erhält man ein lineares Gleichungssystem, welches in jedem Fall eindeutig gelöst werden kann.
2. Durch Einsetzen geeigneter Werte, vor allem der Nullstellen des Nennerpolynoms, erhält man Gleichungen, welche in der Regel sehr einfach nach einer der Unbekannten auflösbar sind. In jedem Fall folgt aus dem Nullstellensatz für Polynome, dass sich durch Einsetzen von n verschiedenen Werten ein Gleichungssystem ergibt, welches eindeutig lösbar ist.
3. Durch Differenzieren der Polynomgleichung kann man eine neue, einfachere Gleichung erhalten, aus der man einige Unbekannte bestimmen kann.

Man kann auch Schritte der drei obigen Typen mischen, wenn man die bereits berechneten Werte für einige der Unbekannten in die Polynomgleichung einsetzt. In jedem Fall muss man ein Gleichungssystem in n Unbekannten lösen, und der obige Satz besagt gerade, dass diese Unbekannten eindeutig bestimmbar sind. Siehe dazu auch die folgenden Beispiele und Aufgaben.

Beispiel 8.5.6 *Sei $r(x) = 1/(x^2 - x)$. Da der Nenner die Nullstellen 0 und 1 hat, welche beide die Vielfachheit 1 haben, folgt aus obigem Satz, dass es eindeutig bestimmte Zahlen a und b aus $\mathbb{R}$ geben muss, für welche*

$$r(x) \;=\; \frac{1}{x^2 - x} \;=\; \frac{a}{x} \;+\; \frac{b}{x-1} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}.$$

Um sie zu finden, multiplizieren wir die Gleichung mit dem Nennerpolynom und erhalten die äquivalente Gleichung

$$1 \;=\; a\,(x-1) \;+\; b\,x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen von $x = 0$ ergibt $a = -1$, einsetzen von $x = 1$ ergibt $b = 1$.

Beispiel 8.5.7 *Sei jetzt $r(x) = 1/(x^3 + x)^2$. Jetzt sind sechs reelle Zahlen a, b, c, d, e, f zu finden mit*

$$r(x) \;=\; \frac{1}{(x^3 + x)^2} \;=\; \frac{a}{x} \;+\; \frac{b}{x^2} \;+\; \frac{c\,x + d}{x^2 + 1} \;+\; \frac{e\,x + f}{(x^2+1)^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Dies ist äquivalent zu

$$1 \;=\; a\,x\,(x^2+1)^2 \;+\; b\,(x^2+1)^2 \;+\; (c\,x + d)\,x^2\,(x^2+1) \;+\; (e\,x + f)\,x^2 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Für $x = 0$ folgt $b = 1$. Da die Gleichung auch für komplexe x richtig sein muss, erhält man durch Einsetzen von $\pm i$ die Gleichungen

$$1 \;=\; -(e\,i + f) \;=\; -(-e\,i + f).$$

Daraus folgt $e = 0$, $f = -1$. Bringt man die schon gefundenen Terme auf die linke Seite, so erhält man

$$-x^2\,(x^2+1) \;=\; a\,x\,(x^2+1)^2 \;+\; (c\,x + d)\,x^2\,(x^2+1) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Jetzt kann man offenbar durch $x\,(x^2+1)$ teilen und erhält so

$$-x \;=\; a\,(x^2+1) \;+\; (c\,x + d)\,x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen von $x = 0$ liefert $a = 0$. Einsetzen von $\pm i$ ergibt die Gleichungen

$$-1 \;=\; i\,c + d \;=\; -i\,c + d,$$

woraus $d = -1$ und $c = 0$ folgen. Eine Probe ist hier sicher angebracht!

Als Anwendung der Partialbruchzerlegung wollen wir nun das Problem angehen, zu einer beliebigen rationalen Funktion (mit reellen Koeffizienten) eine Stammfunktion zu finden:

Aufgabe 8.5.8 *Gegeben sei eine rationale Funktion $r \in \mathbb{R}(x)$. Finde eine Stammfunktion.*

Lösung: Sei $r = p/q$. Falls $\deg p \geq \deg q$ ist, kann man nach einer Übungsaufgabe auf Seite 30 Polynome $p_1, p_2 \in \mathbb{R}[x]$ finden mit

$$r \;=\; \frac{p}{q} \;=\; p_1 \;+\; \frac{p_2}{q},$$

und $\deg p_2 < \deg q$. Da man zu p_1 sofort eine Stammfunktion angeben kann, soll im Weiteren angenommen sein, dass $\deg p < \deg q$ ist. Dann kann man nach dem Satz über die Partialbruchzerlegung im Reellen die Funktion r in eine Summe von einfachen Termen zerlegen. Es bleibt also zu zeigen, dass man zu jedem einzelnen Term eine Stammfunktion angeben kann. Dies wollen wir jetzt tun, wobei in jedem Fall durch Differenzieren nachgeprüft werden kann, dass die angegebene Funktion F tatsächlich Stammfunktion zu f ist:

1. $f(x) = (x - x_0)^{-1}$ hat die Stammfunktion $F(x) = \log|x - x_0|$.
2. $f(x) = (x - x_0)^{-j}$ hat die Stammfunktion $F(x) = (1 - j)^{-1}\,(x - x_0)^{1-j}$ für alle natürlichen Zahlen $j \geq 2$.
3. Sei jetzt $f(x) = (\alpha\, x + \beta)/(x^2 - a\, x + b)$, wobei $a^2 < 4\, b$ sei, damit der Nenner keine reelle Nullstelle mehr hat. Wir zerlegen $f = g + h$ mit

$$g(x) \;=\; \frac{\alpha}{2}\,\frac{2\,x - a}{x^2 - a\,x + b}\,, \quad h(x) \;=\; \frac{\beta + a\,\alpha/2}{x^2 - a\,x + b}\,.$$

   Mit der Kettenregel zeigt man, dass $G(x) = (\alpha/2)\,\log|x^2 - a\,x + b|$ Stammfunktion zu g ist, und

$$H(x) \;=\; \frac{2\,\beta + \alpha\,a}{\sqrt{4\,b - a^2}}\;\arctan\frac{2\,x - a}{\sqrt{4\,b - a^2}}$$

   ist Stammfunktion zu h.
4. Als letztes sei $f(x) = (\alpha\,x + \beta)/(x^2 - a\,x + b)^j$ für eine natürliche Zahl $j \geq 2$ und $a^2 < 4\,b$. Wir zerlegen $f = f_1 + f_2$, mit

$$f_1(x) \;=\; \frac{\alpha}{2}\;\frac{2\,x - a}{(x^2 - a\,x + b)^j}\,, \quad f_2(x) \;=\; \frac{a\,\alpha/2 + \beta}{(x^2 - a\,x + b)^j}\,.$$

   Eine Stammfunktion zu f_1 ist

$$F_1(x) = \frac{-\alpha}{2\,(j - 1)}\;\frac{1}{(x^2 - a\,x + b)^{j-1}}\,.$$

   Es reicht deshalb aus, eine Stammfunktion zu $g_j(x) = (x^2 - a\,x + b)^{-j}$ zu finden. Man rechnet nach, dass gilt

$$(4\,b - a^2)\,(j - 1)\,g_j(x) \;=\; \frac{2\,(2\,j - 3)}{(x^2 - a\,x + b)^{j-1}} + \frac{d}{dx}\,\frac{2\,x - a}{(x^2 - a\,x + b)^{j-1}}\,.$$

   Der zweite Term hat natürlich eine Stammfunktion, während der erste Term, bis auf eine Konstante, gleich g_{j-1} ist. Daher kann man aus dieser Formel rekursiv eine Stammfunktion zu g_j berechnen.

Es sei noch erwähnt, dass man die oben angegebenen Stammfunktionen sowie viele weitere in zahlreichen Formelsammlungen wie etwa [3] nachschlagen kann. □

Aufgabe 8.5.9 *Führe eine Partialbruchzerlegung im Reellen für folgende rationale Funktionen durch:*

$$\frac{1}{x\,(x-1)\,(x+1)}\,, \qquad \frac{x^2}{(x-1)^2\,(x+1)}\,, \qquad \frac{x^2}{(x-1)^2\,(x^2+1)}\,.$$

Aufgabe 8.5.10 *Finde Stammfunktionen zu den drei rationalen Funktionen aus der vorigen Aufgabe.*

8.6 Der Taylorsche Satz

Im Folgenden betrachten wir ein abgeschlossenes Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ und ein $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Lemma 8.6.1 (Mehrfache Stammfunktion) *Sei f stetig auf $[a,b]$, und sei für ein $x_0 \in [a,b]$ und $n \in \mathbb{N}$*

$$F_n(x) \;=\; \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\; f(t)\,dt \qquad \forall\; x \in [a,b].$$

Dann ist F_n auf $[a,b]$ n-mal stetig differenzierbar. Weiter gilt $F_n^{(k)}(x_0) = 0$ für $0 \le k \le n-1$, und die n-te Ableitung von F_n ist f.

Beweis: Induktion über n: Für $n = 1$ folgt die Behauptung aus dem zweiten Hauptsatz. Sei jetzt $n \ge 1$, und sei F_{n+1} betrachtet. Nach der binomischen Formel gilt

$$F_{n+1}(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \int_{x_0}^{x} \frac{(-t)^{n-k}}{(n-k)!}\; f(t)\,dt,$$

und daraus folgt mit dem zweiten Hauptsatz, dass

$$\begin{aligned} F'_{n+1}(x) \;&=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \int_{x_0}^{x} \frac{(-t)^{n-k}}{(n-k)!}\; f(t)\,dt \;+\; \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\,\frac{(-x)^{n-k}}{(n-k)!}\; f(x) \\ &=\; \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \int_{x_0}^{x} \frac{(-t)^{n-k-1}}{(n-k-1)!}\; f(t)\,dt \;+\; \frac{x^n f(x)}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \\ &=\; F_n(x) \;+\; \frac{x^n f(x)}{n!}\;(1-1)^n \;=\; F_n(x)\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Satz 8.6.2 (Satz von Taylor) *Sei f auf $[a,b]$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar. Dann gilt für alle $x, x_0 \in [a,b]$*

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\;(x-x_0)^k \;+\; \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n\; f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Beweis: Wir setzen abkürzend

$$g(x) \;=\; \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n\; f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Nach dem obigen Lemma ist die $(n+1)$-te Ableitung von g gleich $f^{(n+1)}$, und alle früheren Ableitungen verschwinden an der Stelle x_0. Also folgt, dass die Differenzfunktion $h = f - g$ auf $[a,b]$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar ist, und dass $h^{(n+1)}(x) \equiv 0$ ist. Mit einer Übungsaufgabe folgt hieraus, dass h ein Polynom höchstens n-ten Grades ist. Also gilt

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} h_k\,(x-x_0)^k \;+\; g(x)$$

mit noch zu bestimmenden Koeffizienten h_k. Durch Differenzieren und Einsetzen von x_0 folgt dann aber $k!\,h_k = f^{(k)}(x_0)$, da alle Ableitungen von g bis zur Ordnung n an der Stelle x_0 verschwinden. □

Korollar zu Satz 8.6.2 *Sei f mindestens $2n$-mal stetig differenzierbar auf einem offenen Intervall (a,b), für ein $n \in \mathbb{N}$, und gelte für ein $x_0 \in (a,b)$:*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(2n)}(x_0) \neq 0.$$

Dann hat f im Punkt x_0 ein lokales Extremum, und zwar ein lokales Minimum für $f^{(2n)}(x_0) > 0$, und ein lokales Maximum für $f^{(2n)}(x_0) < 0$.

Beweis: Aus dem Taylorschen Satz folgt

$$f(x) - f(x_0) \;=\; \frac{1}{(2n-1)!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{2n-1}\; f^{(2n)}(t)\,dt \quad \forall\, x \in (a,b).$$

Da $f^{(2n)}$ stetig ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ für welches $f^{(2n)}(x)$ auf $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ stets das gleiche Vorzeichen hat wie $f^{(2n)}(x_0)$. Daraus folgt für $x > x_0$ sofort, dass auch $f(x)-f(x_0)$ gleiches Vorzeichen wie $f^{(2n)}(x_0)$ hat. Beachtet man, dass per Definition gilt

$$\int_{x}^{x_0} (x-t)^{2n-1}\; f^{(2n)}(t)\,dt \;=\; -\int_{x_0}^{x} (x-t)^{2n-1}\; f^{(2n)}(t)\,dt$$

so folgt dasselbe aber auch für $x < x_0$. □

Definition 8.6.3 *Sei f auf $[a,b]$ wenigstens n-mal differenzierbar, und sei $x_0 \in [a,b]$. Dann heißt*

$$p_n(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\;(x-x_0)^k$$

das n-te Taylorpolynom von f an der Stelle x_0. *Die Differenz $r_n = f - p_n$ heißt* das Taylorsche Restglied n-ter Ordnung.

Ist f sogar beliebig oft differenzierbar auf $[a,b]$, so heißt die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\;(x-x_0)^k$$

die Taylorreihe von f im Punkt x_0.

Bemerkung 8.6.4 *Wir haben eine Reihe von Funktionen über Potenzreihen definiert. Es ist leicht zu sehen, dass diese Reihen gerade die Taylorreihen der entsprechenden Funktionen im Punkt $x_0 = 0$ sind. Per Definition konvergiert die Talyorreihe von f genau dann für ein x gegen $f(x)$, wenn gilt $r_n(x) \longrightarrow 0$ für $n \to \infty$. Dies muss aber durchaus nicht gelten: Es kann vorkommen, dass die Taylorreihe für alle $x \neq x_0$ divergiert, oder dass sie konvergiert, aber sozusagen* gegen den falschen Wert*, soll heißen, nicht gegen $f(x)$. Der Satz von Taylor kann kurz so ausgedrückt werden:*

$$r_n(x) \;=\; \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n\; f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Man nennt diese Gleichung auch die Darstellung des Restgliedes in Integralform. *Aus dem erweiterten Mittelwertsatz folgt, wenn man dort f durch $f^{(n+1)}$ und g durch $(x-t)^n/n!$ ersetzt und noch den Zwischenwertsatz benutzt, dass für einen geeigneten Wert ξ zwischen x und x_0 gilt*

$$r_n(x) \;=\; (x-x_0)^{n+1}\,\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,.$$

Man nennt diese Gleichung auch die Darstellung des Restgliedes in differenzieller Form.

Behauptung 8.6.5 *Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt*

$$(1+x)^\alpha \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k}\, x^k \qquad \forall\, x \in (-1,1)\,.$$

Die Reihe heißt auch die Binomialreihe.

Beweis: Die Behauptung ist klar wenn $\alpha \in \mathbb{N}$ ist. Im anderen Fall folgt aus Satz 5.8.7, dass die Binomialreihe den Konvergenzradius $R = 1$ hat. Außerdem ist die Reihe gerade die Taylorreihe von $f(x) = (1+x)^\alpha$ (mit $x_0 = 0$), und das Restglied ist in diesem Fall gleich

$$r_n(x) \;=\; \binom{\alpha}{n}\,(\alpha-n)\int_0^x (x-t)^n\;(1+t)^{\alpha-n-1}\,dt.$$

Zu zeigen ist also, dass das Restglied für $|x| < 1$ gegen 0 geht wenn $n \to \infty$. Dies folgt allerdings für x nahe bei -1 nicht direkt aus den üblichen Abschätzungen. Deshalb gehen wir anders vor:

Nach einer der unten stehenden Aufgaben folgt, dass es genau eine auf $(-1,1)$ stetig differenzierbare Funktion $y(x)$ gibt, die die Bedingungen

$$y'(x) \;=\; \frac{\alpha}{(1+x)}\;y(x) \quad \forall\, x \in (-1,1)\,, \quad y(0) \;=\; 1$$

erfüllt. Offensichtlich sind diese Gleichungen richtig für $y(x) = (1+x)^\alpha$. Man rechnet aber leicht nach, dass auch die durch die Binomialreihe definierte Funktion eine Lösung dieses Anfangswertproblems ist, und daher muss die Behauptung gelten. □

Aufgabe 8.6.6 *Zeige durch Induktion über n: Ist f auf einem Intervall I n-mal differenzierbar, und ist die n-te Ableitung von f die Nullfunktion, so ist f ein Polynom vom Grade höchstens gleich $n-1$.*

Aufgabe 8.6.7 *Sei f mindestens $(2n+1)$-mal stetig differenzierbar auf einem offenen Intervall (a,b), für ein $n \in \mathbb{N}$, und gelte für ein $x_0 \in (a,b)$:*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(2n)}(x_0) = 0, \quad f^{(2n+1)}(x_0) \neq 0.$$

Zeige: Dann hat f im Punkt x_0 kein lokales Extremum.

Aufgabe 8.6.8 *Finde die Taylorreihe von $f(x) = \log x$ im Punkt $x_0 = 1$ und untersuche ihre Konvergenz.*

Aufgabe 8.6.9 (Lineare homogene Differenzialgleichung erster Ordnung) *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, und sei $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$, für ein $x_0 \in I$. Sei schließlich $y_0 \in \mathbb{R}$.*

1. Zeige: Die Funktion $y(x) = y_0\, \mathrm{e}^{F(x)}$ erfüllt die beiden Bedingungen

$$y'(x) \;=\; f(x)\, y(x)\,, \quad \forall\, x \in I, \quad y(x_0) \;=\; y_0.$$

   Man nennt die erste der beiden Gleichungen eine *lineare homogene Differenzialgleichung erster Ordnung* (und y eine Lösung derselben), während die zweite auch *Anfangsbedingung* genannt wird. Beide zusammen stellen *ein Anfangswertproblem* dar.

2. Zeige weiter: Ist y irgend eine Funktion auf I, die beiden Bedingungen genügt, so ist $y(x)\, \mathrm{e}^{-F(x)}$ konstant, und durch Einsetzen von $x = x_0$ folgt dann $y(x) = y_0\, \mathrm{e}^{F(x)}$.

Schließe hieraus dass das obige Anfangswertproblem genau eine Lösung y besitzt.

Aufgabe 8.6.10 (Differenzialgl. mit getrennten Veränderlichen) *Seien $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ zwei Intervalle, seien $f : I_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : I_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, und sei $g(x) > 0$ auf I_2. Seien weiter F und G Stammfunktionen zu f bzw. $1/g$ (also G streng monoton wachsend auf I_2). Seien schließlich $x_0 \in I_1$, $y_0 \in I_2$.*

1. Zeige: Ist $I \subset I_1$ ein Intervall, und ist $y : I \longrightarrow I_2$ stetig differenzierbar, mit

$$y'(x) \;=\; f(x)\, g(y(x)) \quad \forall\, x \in I, \qquad y(x_0) \;=\; y_0, \tag{8.6.1}$$

   so folgt $F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} y'(t)/g(y(t))\, dt = G(y(x)) - G(y_0)$ für $x \in I$. Da G injektiv ist, kann diese Gleichung nach $y(x)$ aufgelöst werden, und wir erhalten

$$y(x) \;=\; G^{-1}\Big(G(y_0) + F(x) - F(x_0)\Big) \qquad \forall x \in I. \tag{8.6.2}$$

2. Zeige: Ist $I \subset I_1$ ein Intervall und so, dass für $x \in I$ immer gilt $G(y_0) + F(x) - F(x_0) \in G(I_2)$, und definiert man y durch (8.6.2), so erfüllt y die Bedingungen (8.6.1).

Schließe hieraus dass das Anfangswertproblem (8.6.1) *auf dem in* 2. *angegebenen Intervall genau eine Lösung y besitzt.*

8.7 Uneigentliche Integrale

Im Folgenden betrachten wir ein Intervall der Form $[a, b)$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$.

Definition 8.7.1 *Sei $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ über jedes Intervall der Form $[a, c]$, mit $a \le c < b$, integrierbar, und existiere $\lim_{c \to b-} \int_a^c f(x)\, dx$. Dann heißt f* über $[a, b)$ uneigentlich integrierbar, *und wir nennen*

$$\int_a^b f(x)\, dx \;=\; \lim_{c \to b-} \int_a^c f(x)\, dx$$

das uneigentliche Integral von f über $[a, b)$. *Wir sagen manchmal:* das uneigentliche Integral ist konvergent, *falls f uneigentlich integrierbar ist. Falls $|f|$ über $[a, b)$ uneigentlich integrierbar ist, sagen wir auch: das uneigentliche Integral von f ist* absolut konvergent. *Beachte: Falls $b < \infty$ ist, und falls f auf $[a, b]$ integrierbar ist, gilt für alle $c \in [a, b)$:*

$$\int_a^b f(x)\, dx \;=\; \int_a^c f(x)\, dx \;+\; \int_c^b f(x)\, dx.$$

Die Fundamentalabschätzung impliziert mit $M = \sup|f(x)|$, dass

$$\Big|\int_c^b f(x)\,dx\Big| \le M\,(b-c) \to 0 \quad (c \to b-).$$

Deshalb ist f auch uneigentlich integrierbar über $[a,b)$, und das uneigentliche Integral ist gleich dem Integral. In analoger Weise kann man auch uneigentliche Integrale über Intervalle der Form $(a,b]$ definieren, wobei a auch gleich $-\infty$ sein kann.

Beispiel 8.7.2 *Sei $\alpha > 1$. Aus $\int_1^a x^{-\alpha} dx = (\alpha-1)^{-1}(1-a^{1-\alpha}) \to (\alpha-1)^{-1}$ für $a \to \infty$ folgt die Konvergenz des uneigentlichen Integrals $\int_1^\infty x^{-\alpha} dx$, und*

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}.$$

Beispiel 8.7.3 *Sei $0 < \alpha < 1$. Aus $\int_\varepsilon^1 x^{-\alpha} dx = (1-\alpha)^{-1}(1-\varepsilon^{1-\alpha}) \to (1-\alpha)^{-1}$ für $\varepsilon \to 0+$ folgt die Konvergenz des uneigentlichen Integrals $\int_0^1 x^{-\alpha} dx$, und*

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Satz 8.7.4 (Cauchy-Kriterium für uneigentliche Integrale)
Das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ ist genau dann konvergent, wenn gilt

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\ c \in [a,b)\ \forall\ \xi \in [c,b),\ \forall\ \eta \in [\xi,b): \quad \Big|\int_\xi^\eta f(x)\,dx\Big| < \varepsilon. \tag{8.7.1}$$

Beweis: Sei $I = \int_a^b f(x)\,dx$ konvergent. Aus der Definition des Funktionsgrenzwertes folgt dann:

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\ c \in [a,b)\ \forall\ \xi \in [c,b): \quad \Big|I - \int_a^\xi f(x)\,dx\Big| < \varepsilon/2.$$

Wegen $\int_\xi^\eta f(x)\,dx = \int_a^\eta f(x)\,dx - \int_a^\xi f(x)\,dx$ folgt dann für $\xi \in [c,b)$, $\eta \in [\xi,b)$:

$$\Big|\int_\xi^\eta f(x)\,dx\Big| \le \Big|\int_a^\eta f(x)\,dx - I\Big| + \Big|I - \int_a^\xi f(x)\,dx\Big| < \varepsilon.$$

Um die Umkehrung zu zeigen, sei (c_n) eine Folge aus $[a,b)$, welche von links gegen b konvergiert, und sei $I_n = \int_a^{c_n} f(x)\,dx$. Dann folgt aus (8.7.1), dass (I_n) eine Cauchy-Folge ist, also gegen einen Wert I konvergiert. Dieser Wert ist von der Wahl der Folge (c_n) unabhängig, und dies ist äquivalent zur Konvergenz des uneigentlichen Integrals. □

Korollar zu Satz 8.7.4 *Aus der absoluten Konvergenz des uneigentlichen Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$ folgt die Konvergenz.*

Beweis: Folgt aus $|\int_\xi^\eta f(x)\,dx| \le \int_\xi^\eta |f(x)|\,dx$ und dem Cauchy-Kriterium. □

Beispiel 8.7.5 *Sei $\alpha > 0$, und gelte $1 \le \xi < \eta$. Dann ist*

$$\int_\xi^\eta \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx = -\frac{\cos x}{x^\alpha}\Big|_\xi^\eta - \alpha\int_\xi^\eta \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}}\,dx.$$

Daraus folgt
$$\left| \int_\xi^\eta \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx \right| \le \frac{1}{\xi^\alpha} + \frac{1}{\eta^\alpha} + \alpha \int_\xi^\eta \frac{1}{x^{\alpha+1}}\, dx \ .$$
Mit Beispiel 8.7.2 *und dem Cauchy-Kriterium folgt hieraus die Konvergenz des uneigentlichen Integrals* $\int_1^\infty x^{-\alpha} \sin x\, dx$.

Satz 8.7.6 (Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale)
Gilt $|f(x)| \le g(x)$ *für* $x \in [a,b)$, *und ist das uneigentliche Integral* $\int_a^b g(x)\, dx$ *konvergent, so ist* $\int_a^b f(x)\, dx$ *absolut konvergent.*

Beweis: Folgt aus dem Cauchy-Kriterium, denn $\int_\xi^\eta |f(x)|\, dx \le \int_\xi^\eta g(x)\, dx$. □

Satz 8.7.7 (Integralkriterium)
Sei $p \in \mathbb{Z}$, *und sei* f *auf* $[p,\infty)$ *positiv und monoton fallend. Dann gilt: Genau dann ist das uneigentliche Integral* $\int_p^\infty f(x)\, dx$ *konvergent, wenn die Reihe* $\sum_{n=p}^\infty f(n)$ *konvergiert, und*
$$\sum_{n=p+1}^{\infty} f(n) \ \le \ \int_p^\infty f(x)\, dx \ \le \ \sum_{n=p}^{\infty} f(n) \ .$$

Beweis: Aus der Monotonie von f folgt die Ungleichung $f(n+1) \le f(x) \le f(n)$ für alle $x \in [n, n+1]$, und hieraus folgt $f(n+1) \le \int_n^{n+1} f(x)\, dx \le f(n)$, was die Behauptung ergibt. □

Aufgabe 8.7.8 *Zeige, dass das uneigentliche Integral* $\int_1^\infty x^{-\alpha} dx$ *für* $0 \le \alpha \le 1$ *nicht konvergiert.*

Aufgabe 8.7.9 *Zeige, dass das uneigentliche Integral* $\int_0^1 x^{-\alpha} dx$ *für* $\alpha \ge 1$ *nicht konvergiert.*

Aufgabe 8.7.10 *Zeige für* $0 \le \alpha \le 1$ *dass* $\int_1^\infty x^{-\alpha} \sin x\, dx$ *nicht absolut konvergiert.*

8.8 Die Gamma-Funktion

Definition 8.8.1 *Sei* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$. *Dann ist* $f(x) = u(x) + i\, v(x)$, $u(x), v(x) \in \mathbb{R}$ *für alle* $x \in [a,b]$. *Wir nennen* f über $[a,b]$ integrierbar, *wenn* u *und* v *über* $[a,b]$ *integrierbar sind, und setzen*
$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b u(x)\, dx \ + \ i \int_a^b v(x)\, dx.$$

Beispiel 8.8.2 *Für* $t \in \mathbb{R}_+$ *und* $z = x + i\, y \in \mathbb{C}$ *ist*
$$t^z \ = \ \mathrm{e}^{(x+i\, y)\log t} \ = \ t^x\, (\cos(y \log t) \ + \ i\, \sin(y \log t)) \ .$$
Also ist per Definition für $0 < \varepsilon < a$:
$$\int_\varepsilon^a t^{z-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, dt \ = \ \int_\varepsilon^a t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t} \, \cos(y \log t)\, dt \ + \ i \int_\varepsilon^a t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, \sin(y \log t)\, dt \ .$$
Beide Integrale auf der rechten Seite haben für $a \to \infty$ *immer einen Grenzwert. Dagegen muss* $x > 0$ *sein, damit auch für* $\varepsilon \to 0$ *ein Grenzwert existiert. Wir sagen deshalb:* Das uneigentliche Integral $\int_0^\infty t^{z-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, dt$ konvergiert für $x = \mathrm{Re}\ z > 0$.

Definition 8.8.3 *Für* Re $z > 0$ *heißt die Abbildung* $z \mapsto \Gamma(z)$ *mit*

$$\Gamma(z) \;=\; \int_0^\infty t^{z-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt$$

die Gamma-Funktion.

Proposition 8.8.4 *Für die Gamma-Funktion gilt die Darstellung*

$$\Gamma(z) \;=\; \int_1^\infty t^{z-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt \;+\; \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!\;(n+z)}\;, \quad \operatorname{Re} z \;>\; 0\,.$$

Das uneigentliche Integral konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$. *Die unendliche Reihe konvergiert absolut in der Menge* $G = \mathbb{C} \setminus \{0,\ -1,\ -2,\ \ldots\}$. *Wir sagen deshalb, dass sich die Gamma-Funktion in die Menge* G *fortsetzen läßt.*

Beweis: Aus der Exponentialreihe folgt die Entwicklung

$$t^{z-1}\,\mathrm{e}^{-t} \;=\; \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n\,t^{n+z-1}}{n!}\;,$$

wobei die Reihe auf jedem Intervall der Form $[\varepsilon, 1]$, mit $\varepsilon > 0$, gleichmäßig konvergiert. Deshalb gilt wegen des Satzes über gliedweise Integration

$$\int_\varepsilon^1 t^{z-1}\,\mathrm{e}^{-t}\;dt \;=\; \sum_{n=0}^\infty \left.\frac{(-1)^n\,t^{n+z}}{n!\;(n+z)}\right|_\varepsilon^1\;,$$

und für $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung. □

Aufgabe 8.8.5 *Zeige durch partielle Integration* $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$, *für alle* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0,\ -1,\ -2,\ \ldots\}$.

Aufgabe 8.8.6 *Berechne* $\Gamma(1)$, *und zeige mit Hilfe der vorigen Aufgabe, dass* $\Gamma(n+1) = n!$ *ist, für alle* $n \in \mathbb{N}_0$.

Satz 8.8.7 (Stirlingsche Formel) *Für reelle Werte von* x *gilt*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\Gamma(x)\;\mathrm{e}^x\;\sqrt{x}}{x^x} \;=\; \sqrt{2\,\pi}\;.$$

(Ohne Beweis)

Index