Vorlesungsmanuskript zur

Analysis IV – Funktionentheorie

Werner Balser
Institut für Angewandte Analysis

Sommersemester 2007

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Zahlenebene und -kugel

In diesem Kapitel führen wir einige Begriffe ein, die vermutlich bereits in **Analysis I, II** schon behandelt wurden. Dabei werden wir aus Zeitgründen auf einige Einzelheiten bei den Beweisen verzichten.

1.1 Die Zahlenebene

Definition 1.1.1 *Die Menge aller Punkte $z = (x, y)^T \in \mathbb{R}^2$, zusammen mit den Verknüpfungen*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\, x_2 - y_1\, y_2 \\ x_1\, y_2 + x_2\, y_1 \end{pmatrix},$$

heißt die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$*, oder* die komplexe Zahlenebene*.*

Mit diesen Operationen ist $\mathbb{C}$ *ein Körper*, und somit gelten die gleichen Rechenregeln bzgl. $+$ und $\cdot$ wie in $\mathbb{R}$. Wir identifizieren $x \longleftrightarrow (x, 0)^T$ für alle $x \in \mathbb{R}$; damit ist $\mathbb{R}$ ein *Unterkörper* von $\mathbb{C}$. Die Zahl 1 entspricht also dem ersten Einheitsvektor $(1, 0)^T$, und wir setzen $(0, 1)^T = i$; dann folgt offenbar $i^2 = -1$ und

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x + i\, y \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Wir nennen für eine komplexe Zahl $z = x + i\, y$ immer

- $x = \operatorname{Re} z$ den *Realteil von* z,
- $y = \operatorname{Im} z$ den *Imaginärteil von* z,
- $\overline{z} = x - i\, y$ die *zu* z *konjugiert komplexe Zahl.*

In der Zahlenebene können wir Polarkoordinaten einführen: Zu jeder Zahl $z = x + i\, y \in \mathbb{C}$ gehören zwei Parameter $r\,(\geq 0)$ und φ mit

$$x = \operatorname{Re} z = r \cos\varphi, \qquad y = \operatorname{Im} z = r \sin\varphi.$$

Durch r, φ sind x, y und damit auch z festgelegt. Umgekehrt, falls $z \in \mathbb{C}$ gegeben ist, ist $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ eindeutig bestimmt. Falls $r = 0$ (also $z = 0$) ist, ist φ beliebig, und sonst ist φ bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von $2\,\pi$ festgelegt; wir sagen deshalb: *φ ist modulo $2\,\pi$ eindeutig bestimmt*, und wir nennen

- $r \;=\; |z|$ den *Betrag von* z,
- $\varphi \;=\; \arg z$ das *Argument von* z.

Die *Addition* komplexer Zahlen entspricht genau der Vektoraddition in $\mathbb{R}^2$. Bei der *Multiplikation* komplexer Zahlen multiplizieren sich die Beträge, während sich die Argumente addieren. Man kann nämlich durch Benutzung der Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen nachrechnen, dass folgendes gilt:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\,\sin\varphi_1) \\ z_2 &= r_2(\cos\varphi_2 + i\,\sin\varphi_2) \end{aligned}\right\} \quad\Longrightarrow\quad z_1\,z_2 \;=\; r_1 r_2\,[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\,\sin(\varphi_1+\varphi_2)].$$

1.2 Offene Mengen, Konvergenz, Kurven, Kurvenintegrale

Da der Betrag einer komplexen Zahl genau der Norm des Vektors $(x,y)^T$ entspricht, können wir Begriffe wie Konvergenz komplexer Folgen und Reihen, offene und abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{C}$, Stetigkeit, usw. von $\mathbb{R}^2$ auf $\mathbb{C}$ übertragen, wobei wir überall statt der Norm eines Vektors den Betrag der entsprechenden Zahl schreiben können. Zusätzlich sagen wir noch:

(a) Eine Folge (z_n) *strebt gegen* ∞ *für* $n \to \infty$, falls $\lim_{n\to\infty}\,|z_n| = \infty$.

(b) Eine Funktion f, welche wenigstens außerhalb eines (großen) Kreises um den Nullpunkt definiert ist, *strebt gegen* ∞ *für* $z \to \infty$, wenn

$$\forall\, K \in \mathbb{R}_+ \quad \exists\, R \quad \forall\, |z| \geq R : \quad |f(z)| \geq K.$$

(c) Eine Funktion f, welche wenigstens in einem (kleinen) Kreis um z_0 definiert ist, *strebt gegen* ∞ *für* $z \to z_0$, wenn

$$\forall\, K \in \mathbb{R}_+ \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, |z - z_0| \leq \delta : \quad |f(z)| \geq K.$$

Definition 1.2.1

(a) *Für* $a \in \mathbb{C}$ *und* $r > 0$ *bezeichne* $K(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : \; |z-a| < r\}$ *die* offene Kreisscheibe um a mit Radius r. *Weiter seien* $\overline{K(a,r)} = \{z \in \mathbb{C} : \; |z-a| \leq r\}$ *die* abgeschlossene *und* $K'(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-a| < r\}$ *die* punktierte *Kreisscheibe.*

(b) *Ein* $M \subset \mathbb{C}$ *heißt* unzusammenhängend, *wenn zwei offene Mengen* $O_j \subset \mathbb{C}$ *existieren mit*

$$M \subset O_1 \cup O_2, \quad M \cap O_j \neq \emptyset,\; 1 \leq j \leq 2, \quad M \cap O_1 \cap O_2 \;=\; \emptyset.$$

Ist dies nicht so, dann heißt M zusammenhängend.

(c) *Eine offene und zusammenhängende Menge* $G \subset \mathbb{C}$ *heißt* ein Gebiet.

(d) *Unter einer* parametrisierten Kurve *oder* Parameterdarstellung einer Kurve *verstehen wir eine stetige Abbildung* $z : \; [a,b] \to \mathbb{C}$, *mit reellen Zahlen* $a < b$. *Dabei heißen* $[a,b]$ Parameterintervall *und* $z(a)$ Anfangs- *sowie* $z(b)$ Endpunkt *der Kurve. Wir sagen auch:* Die Kurve verbindet $z(a)$ mit $z(b)$, *und wir nennen die Kurve* geschlossen, *wenn* $z(a) = z(b)$ *ist. Als* Träger der Kurve γ *bezeichnen wir die Punktmenge* $\gamma^* = \{z(t) : a \leq t \leq b\}$.

(e) *Zwei parametrisierte Kurven* $z_j : \; I_j \to \mathbb{C}$ *heißen* äquivalent, *falls eine streng monoton wachsende Funktion* ϕ *existiert, welche* I_1 *auf* I_2 *abbildet, so dass*

$$z_2(\phi(t)) \;=\; z_1(t) \quad \forall\, t \in I_1.$$

Dies definiert in der Tat eine Äquivalenzrelation auf der Menge der parametrisierten Kurven, und eine Äquivalenzklasse von parametrisierten Kurven heißt eine orientierte Kurve *in* $\mathbb{C}$ *oder kurz* Kurve.

Bemerkung 1.2.2 *Jede Kurve besitzt eine Parametrisierung mit Parameterintervall* $[0, 1]$, *denn die Funktion* $\phi(t) = t\,b + (1-t)\,a$ *bildet* $[0, 1]$ *streng monoton wachsend auf* $[a, b\,]$ *ab.*

Das für uns wichtigste Beispiel einer Kurve ist ein Kreis*: Die Funktion* $z(t) = z_0 + r\,(\cos t + i\,\sin t)$ *für* t *in einem abgeschlossenen Intervall der Länge* 2π *parametrisiert den Kreis um* z_0 *mit Radius* $r > 0$, *und die Funktionswerte durchlaufen den Kreis im Gegenuhrzeigersinn. Wir nennen diesen Kreis auch* positiv orientiert.

Wir benutzen noch das folgende Lemma zur Charakterisierung des Zusammenhangs offener Mengen:

Lemma 1.2.3 (Charakterisierung des Zusammenhangs) *Für eine offene Menge* $O \subset \mathbb{C}$ *sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *O ist zusammenhängend, also ein Gebiet.*

(b) *O ist nicht die Vereinigung von zwei nichtleeren offenen und disjunkten Mengen O_j.*

(c) *Zu je zwei Punkten $z_j \in O$ gibt es eine in O verlaufende Kurve, welche z_1 mit z_2 verbindet, und diese Kurve kann sogar ein Streckenzug sein.*

(d) *Jede auf O definierte stetige Funktion, welche nur ganzzahlige Werte annimmt, ist konstant.*

Aufgabe 1.2.4 *Zeige: Jede offene Teilmenge* $O \subset \mathbb{C}$ *ist Vereinigung von höchstens abzählbar-unendlich vielen disjunkten Gebieten. Jedes solche Gebiet in dieser Zerlegung von* O *heißt dann auch* Zusammenhangskomponente *von* O. **Anleitung:** *Zeige zunächst, dass die Vereinigung von Gebieten, welche alle mindestens einen Punkt gemeinsam haben, wieder ein Gebiet ist, und schließe hieraus, dass es zu jedem* $z \in O$ *ein größtes Gebiet* $G \subset O$ *gibt, welches* z *enthält.*

Definition 1.2.5

(a) *Ein* Weg *sei eine Kurve mit einer stückweise stetig differenzierbaren Parameterdarstellung. Jeder Weg ist also insbesondere* rektifizierbar, *d. h., für jede Parameterdarstellung* $z : [a, b\,] \to \mathbb{C}$ *gilt:*

$$\ell \;=\; \sup_Z \sum_{k=1}^{m} |z(t_k) - z(t_{k-1})| \;<\; \infty\,, \tag{1.2.1}$$

wobei das Supremum über alle Zerlegungen $Z : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ *genommen wird. Die Zahl* $\ell = \ell(\gamma)$ *ist dann unabhängig von der Wahl der Parameterdarstellung und heißt* die Länge der Kurve. *Falls* z *eine stetig differenzierbare Parameterdarstellung von* γ *ist, gilt*

$$\ell(\gamma) \;=\; \int_a^b |z'(t)|\;dt\,.$$

(b) *Seien* γ_j *Kurven mit Parameterdarstellungen* $z_j : [0, 1] \to \mathbb{C}$, *und* $z_1(1) = z_2(0)$; *das heißt, der Endpunkt von* γ_1 *ist gleich dem Anfangspunkt von* γ_2. *Dann sei* $\gamma_1 + \gamma_2$ *die Kurve mit Parameterdarstellung* $z : [0, 1] \to \mathbb{C}$,

$$z(t) \;=\; \begin{cases} z_1(2t) & (0 \le t \le 1/2), \\ z_2(2t-1) & (1/2 \le t \le 1). \end{cases}$$

Sind γ_1, γ_2 *Wege, so ist auch* $\gamma_1 + \gamma_2$ *ein Weg, und seine Länge ist die Summe der Längen von* γ_1 *und* γ_2.

(c) *Sei* γ *eine Kurve mit Parameterdarstellung* $z : [0, 1] \to \mathbb{C}$. *Mit* $-\gamma$ *bezeichnen wir dann den Weg mit Parameterdarstellung* $\tilde z(t) = z(1-t)$, $0 \le t \le 1$.

(d) *Sei* $z : [a,b] \to \mathbb{C}$ *Parameterdarstellung einer Kurve* γ*, und sei* f *eine komplexwertige Funktion, die wenigstens auf dem Träger von* γ *definiert ist, wobei wie üblich* $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ *gesetzt sei, mit* reellen u, v, x, y*. Dann sei*

$$\int_\gamma f(z)\,dz \;=\; \int_\gamma [\,u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy\,] \;+\; i\int_\gamma [\,v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy\,],$$

falls die rechts stehenden reellen Kurvenintegrale über die Vektorfelder $(u,-v)^T$ *und* $(v,u)^T$ *beide existieren. Wir nennen dieses Integral dann* das komplexe Kurvenintegral von f entlang der Kurve γ*. Wir schreiben auch*

$$\oint_\gamma f(z)\,dz$$

für das Kurvenintegral von f *über eine* geschlossene Kurve γ.

Aufgabe 1.2.6 *Veranschauliche den Weg* γ *mit der Parameterdarstellung* $z(t) = 1 + i\,\cos t$, $0 \le t \le 2\pi$*, und berechne seine Länge.*

Lemma 1.2.7 (Rechenregeln für Kurvenintegrale)

(a) *Ist* γ *eine rektifizierbare Kurve, und ist* f *stetig auf* γ^**, so existiert das Kurvenintegral von* f *entlang des Weges* γ *und hängt nicht von der Wahl der Parameterdarstellung von* γ *ab. Außerdem gilt*

$$\int_{-\gamma} f(z)\,dz \;=\; -\int_\gamma f(z)\,dz.$$

Sind ℓ *die Länge von* γ *und* $M = \max_{z\in\gamma^*}|f(z)|$*, so gilt die* Fundamentalabschätzung

$$\Big|\int_\gamma f(z)\,dz\Big| \;\le\; M\,\ell\,.$$

(b) *Seien* γ_j *Kurven, für die der Endpunkt von* γ_1 *gleich dem Anfangspunkt von* γ_2 *ist, so dass also* $\gamma_1 + \gamma_2$ *definiert ist, und sei* f *definiert auf dem Träger von* $\gamma_1 + \gamma_2$*. Das Kurvenintegral von* f *über* $\gamma_1 + \gamma_2$ *existiert genau dann, wenn die beiden Kurvenintegrale über* γ_1 *und* γ_2 *existieren, und es gilt*

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\,dz \;=\; \int_{\gamma_1} f(z)\,dz \;+\; \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

(c) *Sei* γ *eine rektifizierbare Kurve mit Träger* γ^**, seien* f_n *stetig auf* γ^**, für* $n \in \mathbb{N}_0$*, und sei die Reihe* $\sum_0^\infty f_n(z)$ *auf* γ^* *gleichmäßig konvergent gegen die Grenzfunktion* $f(z)$*. Dann ist* f *stetig auf* γ^**, und es gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,dz \;=\; \sum_{n=0}^\infty \int_\gamma f_n(z)\,dz\,.$$

Beweis: Folgt aus der Theorie der reellen Kurvenintegrale. □

Aufgabe 1.2.8 *Finde selber eine mathematisch korrekte Formulierung und den Beweis dafür, dass das komplexe Kurvenintegral über eine geschlossene Kurve nicht davon abhängt, wo man die Kurve beginnen und enden lässt.*

Bemerkung 1.2.9 *Falls die Parameterdarstellung* $z(t)$ *einer Kurve* γ *stetig differenzierbar ist, folgt für jede auf* γ^* *stetige Funktion* f *dass*

$$\int_\gamma f(z)\,dz \;=\; \int_a^b f\big(z(t)\big)\,z'(t)\,dt. \qquad (1.2.2)$$

Entsprechend kann man einen Weg, also eine stückweise stetig differenzierbare Kurve in endlich viele stetig differenzierbare Teile zerlegen und das Kurvenintegral über jeden stetig differenzierbaren Teil nach (1.2.2) *berechnen. Anders ausgedrückt: Die Formel* (1.2.2) *gilt auch für Wege, wenn man davon absieht, dass $z'(t)$ an endlich vielen Punkten undefiniert sein kann.*

Aufgabe 1.2.10 *Sei γ gegeben durch die Parameterdarstellung $z(t) = \cos t + i \sin t$ mit $0 \le t \le 2\pi$. Berechne das Kurvenintegral $\int_\gamma z^{-1}\,dz$. Begründe ohne Rechnung, dass sich der Wert des Integrals nicht ändert, wenn man dieselbe Parameterdarstellung auf dem Intervall $-\pi \le t \le \pi$ betrachtet.*

Definition 1.2.11 *Sei G ein Gebiet, und sei $f :\ G \to \mathbb{C}$ stetig. Wir sagen:* Das Kurvenintegral über f ist wegunabhängig in G, *wenn für je zwei rektifizierbare Kurven γ_j mit gleichem Anfangs- und Endpunkt immer gilt*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz \;=\; \int_{\gamma_2} f(z)\,dz\,.$$

Dies ist offenbar gleichwertig damit, dass das Kurvenintegral von f über eine beliebige geschlossene rektifizierbare Kurve in G verschwindet.

Wir zeigen noch ein Lemma, welches es erlaubt, dass wir uns beim Überprüfen der Wegunabhängigkeit, aber auch in manchen der folgenden Beweise o. B. d. A. auf Wege beschränken können:

Lemma 1.2.12 *Sei $O \subset \mathbb{C}$ offen, und sei $f :\ O \to \mathbb{C}$ stetig, sowie γ eine rektifizierbare Kurve in O. Dann gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein Weg $\tilde\gamma$ in O mit gleichem Anfangs- und Endpunkt wie γ, so dass*

$$\left| \int_\gamma f(z)\,dz \;-\; \int_{\tilde\gamma} f(z)\,dz \right| \;\le\; \varepsilon. \tag{1.2.3}$$

Falls speziell für jeden geschlossenen Weg γ in O

$$\oint_\gamma f(z)\,dz \;=\; 0 \tag{1.2.4}$$

gilt, dann gilt (1.2.4) *sogar für jede geschlossene rektifizierbare Kurve in O; d. h., das Kuvenintegral ist dann wegunabhängig.*

Beweis: Sei γ rektifizierbare Kurve in O mit Parameterdarstellung $z :\ [a,b\,] \to O$. Sei $r > 0$ so, dass für jedes $t \in [a,b\,]$ die Kreisscheibe um $z(t)$ mit Radius r in O liegt; ein solches r existiert, da der Träger γ^* kompakt ist. Sei weiter $\varepsilon > 0$ gegeben, und sei $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ eine Zerlegung von $[a,b\,]$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Es sei $|z(t_j) - z(t_{j-1})| < r$, für alle $j = 1,\ldots,m$. Eine solche Zerlegung existiert auf Grund der gleichmäßigen Stetigkeit von $z(t)$.
2. Für geeignete Zwischenpunkte $\xi_j \in [t_{j-1}, t_j]$ gelte
$$\left| \int_\gamma f(z)\,dz \;-\; \sum_{j=1}^m f(z(\xi_j))\,[z(t_j) - z(t_{j-1})] \right| \;\le\; \varepsilon/2\;.$$
Nach Definition des Kurvenintegrals gibt es eine solche Zerlegung, und bei jeder Verfeinerung bleibt diese Abschätzung immer richtig.
3. Für jedes $j \in \{1,\ldots,m\}$ und alle $t, \tilde t \in [t_{j-1}, t_j]$ sei $|f(z(t)) - f(z(\tilde t))| < \varepsilon/(2\ell)$, wobei ℓ die Länge des Weges γ bedeutet. Dies ist ebenfalls immer richtig für genügend feine Zerlegungen, da $f(z(t))$ auf $[a,b\,]$ gleichmäßig stetig ist.

Sei jetzt $\tilde\gamma$ der Streckenzug, welcher die Punkte $z(t_0), z(t_1), \ldots, z(t_m)$ verbindet. Dies ist eine stückweise stetig differenzierbare Kurve, also ein Weg, in O mit gleichem Anfangs- und Endpunkt wie γ, und wir bezeichnen die Strecke von $z(t_{j-1})$ bis $z(t_j)$ mit $\tilde\gamma_j$. Dann ist

$$\left| \int_{\tilde\gamma} f(z)\,dz \;-\; \sum_{j=1}^m f(z(\xi_j))\,[z(t_j) - z(t_{j-1})] \right| \;\le\; \sum_{j=1}^m \left| \int_{\tilde\gamma_j} [f(z(\xi_j)) - f(z)]\,dz \right| \,.$$

Die rechte Seite ist aber höchstens gleich $\varepsilon/(2\ell)\sum_{j=1}^m |z(t_j) - z(t_{j-1})| \le \varepsilon/2$. Das ergibt die Behauptung.

□

1.3 Die Riemannsche Zahlenkugel

In $\mathbb{R}^3$ betrachten wir die Kugel mit Radius $1/2$ und Mittelpunkt $(0,0,1/2)^T$, und wir identifizieren $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$ mit $(x,y,0)^T \in \mathbb{R}^3$. Den Punkt $(0,0,1)^T$ nennen wir *den Nordpol der Kugel.* Ist z eine beliebige komplexe Zahl, also hier eigentlich ein Punkt $(x,y,0)^T$, und legt man durch z und den Nordpol eine Gerade $g = g(z)$, so schneidet diese die Kugel in einem vom Nordpol verschiedenen Punkt $(\xi,\eta,\zeta)^T$. Durch diese Konstruktion wird die komplexe Ebene $\mathbb{C}$ bijektiv auf die Kugel ohne den Nordpol abgebildet. Aus naheliegenden Gründen nennen wir den Nordpol auch *den unendlich fernen Punkt* oder kürzer *den Punkt* ∞. Die oben beschriebene Kugel, zusammen mit dieser bijektiven Abbildung, heißt *die Riemannsche Zahlenkugel*, die Abbildung heißt *die stereographische Projektion.*

Aufgabe 1.3.1 *Beschreibe die Bilder von Geraden in $\mathbb{C}$ unter der stereographischen Projektion.*

Aufgabe 1.3.2 *Begründe die Aussage* "zwei Geraden in der Ebene schneiden sich im Unendlichen".

Aufgabe 1.3.3 *Berechne die Koordinaten ξ,η,ζ in Abhängigkeit von x,y.*

Lösung: *Parameterdarstellung der Geraden $g(z)$ ist gleich $(\xi(t),\eta(t),\zeta(t))^T = (t\,x, t\,y, 1-t)$; Gleichung der Kugel ist $\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - 1/2)^2 = 1/4$. Einsetzen ergibt für den Schnittpunkt die Gleichungen*

$$\xi \;=\; \frac{x}{1+x^2+y^2}\,, \quad \eta \;=\; \frac{y}{1+x^2+y^2}\,, \quad \zeta \;=\; \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\,. \tag{1.3.1}$$

□

Definition 1.3.4 *Für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ heißt der Abstand der Bildpunkte auf der Riemannschen Zahlenkugel* der chordale Abstand *von z_1 und z_2, bezeichnet mit $d(z_1,z_2)$. Man rechnet nach, dass gilt*

$$d(z_1,z_2) \;=\; \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}}\,,$$

und wir setzen noch

$$d(z,\infty) \;=\; d(\infty,z) \;=\; \lim_{\tilde z\to\infty} d(z,\tilde z) \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}\,.$$

Definition 1.3.5

(a) *Eine Abbildung $f:\ D \to \mathbb{C}$, mit $D \subset \mathbb{C}$ offen, heißt* winkeltreu*, falls gilt:* Für zwei beliebige glatte Kurven in D mit glatten Parameterdarstellungen $z_j(t)$, $a \le t \le b$, $1 \le j \le 2$, welche sich in einem Punkt $z_0 \in D$ unter einem Winkel α schneiden, schneiden sich auch die Bildkurven $f(z_j(t))$ unter dem gleichen Winkel.

(b) *Ein* allgemeiner Kreis *in* $\mathbb{C}$ *ist entweder ein Kreis oder eine Gerade in* $\mathbb{C}$.

(c) *Eine Abbildung* $f : D \to \mathbb{C}$, *mit* $D \subset \mathbb{C}$ *offen, heißt* kreisverwandt, *wenn sie beliebige allgemeine Kreise in* D *auf allgemeine Kreise abbildet.*

(d) *Winkeltreue und Kreisverwandschaft definiert man genauso für Abbildungen* $f : D \to Y$, *mit* $D \subset X$, *wenn* X, Y *Vektorräume über* $\mathbb{K}$ *mit einem inneren Produkt sind, also z. B. für* $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$, $n, m \in \mathbb{N}$, *wobei ein Kreis der Durchschnitt einer Kugel mit einer zweidimensionalen Untermannigfaltigkeit ist.*

Aufgabe 1.3.6 (Allgemeine Kreise) *Zeige: Zu jedem Kreis bzw. jeder Geraden in* $\mathbb{C}$ *gibt es Konstanten* $A, C \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{C}$, *mit* $A\,C < |B|^2$, *derart dass die Lösungsmenge der Gleichung*

$$A\,z\,\bar{z} + B\,z + \bar{B}\,\bar{z} + C \;=\; 0, \tag{1.3.2}$$

genau dieser Kreis bzw. diese Gerade ist. Stelle fest, wann die Lösungsmenge ein Kreis bzw. eine Gerade ist.

Satz 1.3.7 *Die stereographische Projektion ist winkeltreu und kreisverwandt.*

Beweis: Seien $z_j(t) = x_j(t) + i\,y_j(t)$ glatte Parameterdarstellungen von Kurven in $\mathbb{C}$, und seien $\vec{x}_j(t) = (\xi_j(t), \eta_j(t), \zeta_j(t))^T$ die entsprechenden Bildkurven auf der Zahlenkugel. Mit $N_j(t) = 1 + x_j^2(t) + y_j^2(t)$ gilt dann

$$\vec{x}_j\,'(t) \;=\; \frac{1}{N_j(t)^2} \begin{pmatrix} x_j'(t)\,N_j(t) - x_j(t)\,N_j'(t) \\ y_j'(t)\,N_j(t) - y_j(t)\,N_j'(t) \\ N_j'(t) \end{pmatrix}.$$

Wenn sich die Kurven schneiden, etwa für $t = t_0$, können wir der Einfachheit halber $x, y, \vec{x}, N$ statt $x_j(t_0), y_j(t_0), \vec{x}_j(t_0), N_j(t_0)$ schreiben und auch bei den Ableitungen die Abhängigkeit von t_0 nicht notieren. In diesem Fall folgt für das innere Produkt

$$\begin{aligned}(\vec{x}_1\,', \vec{x}_2\,') \;&=\; N^{-4}\Big[(x_1'\,x_2' + y_1'\,y_2')\,N^2 \;-\; x\,(x_1'\,N_2' + x_2'\,N_1')\,N \\ &\qquad\qquad - \; y\,(y_1'\,N_2' + y_2'\,N_1')\,N \;+\; N\,N_1'\,N_2'\Big].\end{aligned}$$

Wegen $N_j' = 2\,(x_j'\,x + y_j'\,y)$ vereinfacht sich dies zu

$$(\vec{x}_1\,', \vec{x}_2\,') \;=\; (x_1'\,x_2' + y_1'\,y_2')\,N^{-2}.$$

Genauso folgt

$$\|\vec{x}_j\,'\| \;=\; N^{-1}\sqrt{(x_j')^2 + (y_j')^2}, \quad 1 \le j \le 2.$$

Daraus folgt die Winkeltreue, denn per Definition ist der Winkel zwischen zwei Kurven gleich dem Winkel zwischen den beiden Tangenten, d. h., den Ableitungen. Zur Kreisverwandtschaft: Nach Aufgabe 1.3.6 sind allgemeine Kreise genau die Lösungsmengen von Gleichungen der Form (1.3.2) mit $A, C \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{C}$, und $A\,C < |B|^2$. Aus (1.3.1) folgt $x = \xi/(1-\zeta)$, $y = \eta/(1-\zeta)$, $x^2 + y^2 = \zeta/(1-\zeta)$, und Einsetzen in (1.3.2) ergibt mit $B = B_1 + i\,B_2$ die Gleichung

$$A\,\zeta + 2\,(B_1\,\xi - B_2\,\eta) + C\,(1-\zeta) \;=\; 0.$$

Dies ist die Gleichung einer Ebene in $\mathbb{R}^3$, und die Schnittmenge mit der Kugel ist ein Kreis. $\square$

Wir definieren noch folgende Rechenregeln für das Symbol ∞:

$$\begin{aligned} \forall\, z \in \mathbb{C} : \quad z + \infty = \infty + z \;&=\; \infty, \\ \forall\, z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} : \quad z\,\infty = \infty\,z \;&=\; \infty, \end{aligned}$$

$$1/\infty = 0, \qquad 1/0 = \infty, \qquad \infty\,\infty = \infty.$$

Aufgabe 1.3.8 *Leite aus obigen Rechenregeln für ∞ die folgenden weiteren Regeln ab:*

$$\forall\ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \quad z/0 = \infty, \quad z/\infty = 0.$$

Aufgabe 1.3.9 *Zeige: Die Bilder zweier $z_j \in \mathbb{C}$ auf der Riemannschen Zahlenkugel liegen sich genau dann diametral gegenüber, wenn $z_1\,\overline{z}_2 = -1$ gilt.*

Kapitel 2

Möbiustransformationen

2.1 Abbildungseigenschaften

Definition 2.1.1 *Für komplexe Zahlen a, b, c, d mit $a\,d - b\,c \neq 0$ heißt die Abbildung*

$$z \longmapsto f(z) = \frac{a\,z + b}{c\,z + d} \tag{2.1.1}$$

eine Möbiustransformation *oder auch eine* gebrochen lineare Abbildung. *Für $z = -d/c$ ($= \infty$ falls $c = 0$ ist) gilt $a\,z + b = -(a\,d - b\,c)/c \neq 0$, also ist es vernünftig, $f(-d/c) = \infty$ zu setzen. Außerdem sei $f(\infty) = \lim_{z\to\infty} f(z) = a/c$. Es ist deshalb sinnvoll, f als Abbildung von $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ nach $\mathbb{C}^*$ zu betrachten.*

Bemerkung 2.1.2 *Offenbar ist eine Möbiustransformation f in $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ stetig, und für $z \to -d/c$ gilt $f(z) \to \infty$. Also gilt für alle $z_0 \in \mathbb{C}^*$, dass $f(z) \to f(z_0)$ geht, wenn $z \to z_0$ strebt. Daher ist es sinnvoll zu sagen, dass f in ganz $\mathbb{C}^*$ stetig ist.*

Aufgabe 2.1.3 *Zeige: Jede Möbiustransformation f besitzt eine Darstellung wie in* (2.1.1)*, aber mit $a\,d - b\,c = 1$.*

Spezialfälle:

- $f(z) = z + b$ heißt *eine Translation* (Verschiebung) in $\mathbb{C}$.
- $f(z) = a\,z$, mit $a = r\,(\cos\phi + i\,\sin\phi) \neq 0$, heißt *eine Drehstreckung in* $\mathbb{C}$ *mit Zentrum* 0*, Drehwinkel ϕ und Streckungsfaktor r.*
- $f(z) = 1/z$ heißt *Inversion am Einheitskreis.* Diese Abbildung hängt auch eng mit der *Spiegelung am Einheitskreis* zusammen; siehe dazu den Abschnitt über Spiegelpunkte.

Satz 2.1.4 *Jede Möbiustransformation* (2.1.1) *bildet $\mathbb{C}^*$ bijektiv auf sich ab; die Umkehrabbildung ist gleich*

$$f^{-1}(z) = \frac{-d\,z + b}{c\,z - a}\,,$$

also ebenfalls eine Möbiustranformation. Die Menge aller Möbiustransformationen ist eine nichtkommutative Gruppe bzgl. der Hintereinanderausführung als Verknüpfung. Genauer gilt:

$$f(z) = \frac{a\,z + b}{c\,z + d}\,, \quad \tilde f(z) = \frac{\tilde a\,z + \tilde b}{\tilde c\,z + \tilde d} \quad \Longrightarrow \quad (\tilde f \circ f)(z) = \frac{\hat a\,z + \hat b}{\hat c\,z + \hat d}\,,$$

mit

$$\begin{bmatrix} \hat a & \hat b \\ \hat c & \hat d \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} \tilde a & \tilde b \\ \tilde c & \tilde d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Beweis: *Definiere f^{-1} wie im Satz.* Dann gilt: Falls $z = a/c$, also $c\,z - a = 0$ ist, dann ist $(f \circ f^{-1})(z) = f(\infty) = z$. Für alle anderen $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$(f \circ f^{-1})(z) \;=\; \frac{a\,(-d\,z + b) + b\,(c\,z - a)}{c\,(-d\,z + b) + d\,(c\,z - a)} \;=\; z,$$

und schließlich gilt auch $(f \circ f^{-1})(\infty) = f(-d/c) = \infty$. Genauso zeigt man, dass $(f^{-1} \circ f)(z) = z$ für alle $z \in \mathbb{C}^*$ gilt. Also ist f bijektiv und f^{-1} die Umkehrabbildung. Der Rest der Behauptungen ist in den nächsten Übungsaufgaben enthalten. □

Aufgabe 2.1.5 *Beweise die Aussage von* Satz 2.1.4 *über die Hintereinanderausführung von Möbiustransformationen.*

Aufgabe 2.1.6 *Zeige, dass die Möbiustransformationen eine nichtkommutative Gruppe bzgl. Hintereinanderausführung bilden.*

Satz 2.1.7 *Möbiustransformationen sind kreisverwandt und winkeltreu.*

Beweis: Sei $f(z) = (a\,z + b)/(c\,z + d)$, $a\,d - b\,c \neq 0$. Falls $c = 0$ ist, ist f Hintereinanderausführung einer Translation und einer Drehstreckung, und beide sind kreisverwandt, wie man z. B. durch Einsetzen in (1.3.2) nachrechnen kann. Die Winkeltreue ergibt sich in diesem Fall leicht durch die Anschauung. Im anderen Fall gilt

$$f(z) \;=\; \frac{a}{c} \;-\; \frac{a\,d - b\,c}{c}\,\frac{1}{c\,z + d}\,,$$

also ist f Hintereinanderausführung von Translationen, Drehstreckungen sowie einer Inversion. Deshalb genügt es zu zeigen, dass die Behauptung für die Inversion richtig ist. Sei deshalb jetzt $f(z) = 1/z$. Wenn man z in (1.3.2) durch $1/z$ ersetzt und mit $z\,\bar z$ erweitert, erhält man

$$A + B\,\bar z + \bar B\,z + C\,z\,\bar z \;=\; 0,$$

was wieder die Gleichung eines allgemeinen Kreises ist. Zur Winkeltreue der Inversion: Die Abbildung $z \mapsto 1/z$, in (1.3.1) eingesetzt, ergibt $\xi \mapsto \xi$, $\eta \mapsto -\eta$ und $\zeta \mapsto 1-\zeta$, was zwei Spiegelungen auf der Zahlenkugel entspricht. Dies und die Winkeltreue der stereographischen Projektion ergibt die Behauptung. □

Aufgabe 2.1.8 *Zeige: Eine Möbiustransformation $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ ist* gleichmäßig stetig bzgl. des chordalen Abstandes, *das heißt*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\,\forall\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*\ :\ d(z_1, z_2) < \delta \;\Longrightarrow\; d(f(z_1), f(z_2)) < \varepsilon\,.$$

Aufgabe 2.1.9 *Seien a, z in der Einheitskreisscheibe, d. h., $|a|, |z| < 1$. Zeige*

$$\left|\frac{z - a}{1 - \bar a\,z}\right| \;<\; 1.$$

2.2 Doppelverhältnisse

Definition 2.2.1 *Ein $z \in \mathbb{C}^*$ heißt* Fixpunkt *einer Abbildung $f: \mathbb{C}^* \longmapsto \mathbb{C}^*$, wenn $f(z) = z$ gilt.*

Lemma 2.2.2 *Hat eine Möbiustransformation f drei verschiedene Fixpunkte, so ist f die Identität, d. h., $f(z) = z$ für alle $z \in \mathbb{C}^*$.*

Beweis: Ist $z_0 \in \mathbb{C}$ Fixpunkt von (2.1.1), so ist $c\,z_0 + d \neq 0$ und

$$c\,z_0^2 + (d-a)\,z_0 - b \;=\; 0\;.$$

Falls $c \neq 0$ ist, hat diese Gleichung höchstens zwei Lösungen in $\mathbb{C}$, und ∞ ist wegen $f(\infty) = a/c$ sicher kein Fixpunkt. Falls $c = 0$ und $d - a \neq 0$ ist, sind nur ∞ und $b/(d-a)$ Fixpunkte. Falls $c = 0$ und $d = a\,(\neq 0)$ ist, ist entweder nur ∞ Fixpunkt, oder $b = 0$, d. h., $f(z) \equiv z$. □

Definition 2.2.3 *Für vier verschiedene $z_j \in \mathbb{C}$ heißt*

$$D(z_1, z_2, z_3, z_4) \;=\; \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_3} : \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3} \quad \left(= \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_3}\,\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}\right)$$

das Doppelverhältnis *von z_1, z_2, z_3, z_4. Durch Grenzübergang eines z_j nach ∞ erhält man noch*

$$D(\infty, z_2, z_3, z_4) \;=\; \frac{z_2 - z_3}{z_4 - z_3}\;, \qquad D(z_1, \infty, z_3, z_4) \;=\; \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_3}\;,$$

$$D(z_1, z_2, \infty, z_4) \;=\; \frac{z_4 - z_1}{z_2 - z_1}\;, \qquad D(z_1, z_2, z_3, \infty) \;=\; \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}\;.$$

Satz 2.2.4 (Invarianz des Doppelverhältnisses)

(a) *Für vier verschiedene $z_j \in \mathbb{C}^*$ und jede Möbiustransformation f gilt stets*

$$D(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)) \;=\; D(z_1, z_2, z_3, z_4)\;, \tag{2.2.1}$$

d. h., das Doppelverhältnis ist invariant unter Möbiustransformationen.

(b) *Zu verschiedenen z_1, z_2, z_3 und verschiedenen w_1, w_2, w_3 aus $\mathbb{C}^*$ gibt es genau eine Möbiustransformation f mit*

$$f(z_j) \;=\; w_j\;, \qquad 1 \leq j \leq 3\;,$$

und man kann f durch Auflösen der Gleichung

$$D(w_1, w_2, w_3, f(z)) \;=\; D(z_1, z_2, z_3, z)$$

nach $f(z)$ erhalten.

(c) *Vier verschiedene $z_j \in \mathbb{C}^*$ liegen genau dann auf einem allgemeinen Kreis, wenn ihr Doppelverhältnis eine reelle Zahl ist.*

Beweis: Zu (b): Durch $g_1(z) = D(z_1, z_2, z_3, z)$ ist eine Möbiustransformation gegeben, für welche gilt $g_1(z_1) = 0$, $g_1(z_2) = 1$, $g_1(z_3) = \infty$. Analog definiert $g_2(w) = D(w_1, w_2, w_3, w)$ eine Möbiustranformation mit $g_2(w_1) = 0$, $g_2(w_2) = 1$, $g_2(w_3) = \infty$. Das heißt, durch Auflösen von $D(w_1, w_2, w_3, w) = D(z_1, z_2, z_3, z)$ nach w ergibt sich die Möbiustransformation $g_2^{-1} \circ g_1$, welche z_1, z_2, z_3 auf w_1, w_2, w_3 abbildet. Somit existiert f, und mit dem obigen Lemma ergibt sich die Eindeutigkeit von f. Zu (a): Folgt aus (b). Zu (c): Die Möbiustransformation $f(z) = D(z_1, z_2, z_3, z)$ bildet den allgemeinen Kreis durch die Punkte z_1, z_2, z_3 ab auf den allgemeinen Kreis durch die Punkte $0, 1, \infty$, und dieser ist offenbar die reelle Achse. □

Aufgabe 2.2.5 *Finde eine Möbiustransformation f mit $f(0) = 1$, $f(i) = 2$, $f(-1) = 3$.*

Lösung: 1. Weg: $D(1, 2, 3, f(z)) = D(0, i, -1, z) \iff -(f(z) - 1)\,(z + 1) = z\,(f(z) - 3)\,(1 - i) \iff f(z)\,(z(2 - i) + 1) = z\,(4 - 3i) + 1 \iff f(z) = (z(4 - 3i) + 1)/(z(2 - i) + 1)$.

2. Weg: Ansatz $f(z) = (a\,z + b)/(c\,z + d)$ führt auf die Gleichungen

$$b = d,\ 2(ic + d) = ia + b,\ 3(d - c) = b - a.$$

Dies sind drei lineare Gleichungen in vier Unbekannten. *Wählt* man z. B. $b = 1$, so folgt $d = 1$, $a = 4-3i$, $c = 2 - i$. □

Aufgabe 2.2.6 *Bestimme eine Möbiustransformation f, welche den Einheitskreis auf die imaginäre Achse abbildet. Untersuche, wohin das Innere/Äußere des Einheitskreises abgebildet wird.*

Lösung: Die Bedingungen $f(1) = 0$, $f(i) = i$, $f(-1) = \infty$ führen auf $f(z) = (z - 1)/(z + 1)$. Wegen der Kreisverwandtschaft ist klar, dass dieses f den Einheitskreis auf den allgemeinen Kreis durch die Punkte $0, i, \infty$, also auf die imaginäre Achse abbilden muss. Wegen $f(0) = -1$ muss das Innere des EK in die linke Halbebene gehen (Begründung?) □

2.3 Spiegelpunkte

Definition 2.3.1 *Punkte $z, z^* \in \mathbb{C}^*$ heißen* Spiegelpunkte bezgl. eines allgemeinen Kreises K *oder* symmetrisch bzgl. K, *wenn für drei verschiedene Punkte z_j auf K, welche auch von z, z^* verschieden sind, gilt*

$$D(z_1, z_2, z_3, z^*) \;=\; \overline{D(z_1, z_2, z_3, z)}.$$

Die Abbildung, welche ein z auf seinen Spiegelpunkt z^* abbildet, heißt Spiegelung am allgemeinen Kreis K.

Bemerkung 2.3.2 *Für den Kreis K um z_0 mit Radius R gilt wegen $z_j \in K \Longrightarrow \overline{(z_j - z_0)} = R^2/(z_j - z_0)$*

$$\begin{aligned}\overline{D(z_1, z_2, z_3, z)} &= D(\overline{z_1 - z_0}, \overline{z_2 - z_0}, \overline{z_3 - z_0}, \overline{z - z_0})\\ &= D(R^2/(z_1 - z_0), R^2/(z_2 - z_0), R^2/(z_3 - z_0), \overline{z} - \overline{z_0})\\ &= D(z_1, z_2, z_3, z_0 + R^2/(\overline{z} - \overline{z_0})),\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung aus der Invarianz des Doppelverhältnisses gegenüber der Möbiustransformation $f(z) = z_0 + R^2/z$ folgt. Daraus lesen wir für den Spiegelpunkt z^* zu z ab:

$$z^* \;=\; z_0 + \frac{R^2}{\overline{z} - \overline{z_0}}\ , \quad \textit{also}\ |z^* - z_0| = \frac{R^2}{|z - z_0|}\ ,\ \arg(z^* - z_0) = \arg(z - z_0).$$

Insbesondere hängt z^* nicht von der Wahl der Punkte z_1, z_2, z_3 ab. Speziell ist der Spiegelpunkt des Kreismittelpunktes z_0 der Punkt ∞, und umgekehrt. Daher folgt:

Sind z_j drei verschiedene Punkte eines Kreises, so ist der Mittelpunkt z_0 gegeben durch die Formel

$$D(z_1, z_2, z_3, z_0) \;=\; \overline{D(z_1, z_2, z_3, \infty)} \;=\; \overline{\left(\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}\right)}.$$

Falls K eine Gerade ist, so stimmt die Definition eines Spiegelpunktes mit der geometrischen Anschauung überein. Insbesondere ist auch hier der Spiegelpunkt z^* zu z nicht von der Wahl der $z_1, z_2, z_3 \in K$ abhängig. Schließlich ist die Spiegelpunktdefinition reflexiv, d. h., ist z^* Spiegelpunkt zu z, so ist z wiederum der Spiegelpunkt zu z^*. *Außerdem gilt*

$$z^* \;=\; z \qquad \Longleftrightarrow \qquad z \in K.$$

Satz 2.3.3 (Symmetrieprinzip) *Seien K ein allgemeiner Kreis, f eine Möbiustransformation, und $\tilde{K} = f(K)$. Ist dann z^* Spiegelpunkt von z bzgl. K, so ist $f(z^*)$ Spiegelpunkt von $f(z)$ bzgl. $\tilde{K}$. Also: Möbiustransformationen überführen Spiegelpunkte in Spiegelpunkte.*

Beweis: Für drei verschiedene $z_j \in K$ sind $f(z_j) \in \tilde{K}$ ebenfalls verschieden, und nach Satz 2.2.4 (a) folgt:

$$\begin{aligned} D(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z)) \;&=\; D(z_1, z_2, z_3, z) \;=\; \overline{D(z_1, z_2, z_3, z^*)} \\ &=\; \overline{D(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z^*))}. \end{aligned}$$

Also gilt die Behauptung. □

Aufgabe 2.3.4 *Bestimme alle Möbiustransformationen f, welche das Innere des EK auf sich abbilden.*

Lösung: Jedes solche f muss den Einheitskreis auf sich abbilden. Also setzen wir an: $f(1) = \mathrm{e}^{i\alpha}$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(z_0) = 0$ für ein $|z_0| < 1$. Nach dem Symmetrieprinzip ist dann $f(z_0^*) = \infty$, wobei z_0^* der Spiegelpunkt zu z_0 bzgl. des EK ist, also $z_0^* = 1/\overline{z_0}$. Dies führt auf

$$f(z) \;=\; \mathrm{e}^{i\phi}\,\frac{z - z_0}{1 - z\,\overline{z_0}}\,, \qquad \mathrm{e}^{i\phi} \;=\; \mathrm{e}^{i\alpha}\,\frac{1 - \overline{z_0}}{1 - z_0}\,.$$

Also sind die gesuchten f genau von der Form

$$f(z) \;=\; \mathrm{e}^{i\phi}\,\frac{z - z_0}{1 - z\,\overline{z_0}}\,, \qquad \phi \in \mathbb{R},\ |z_0| < 1.$$

□

Aufgabe 2.3.5 *Bestimme alle Möbiustransformationen f, welche die obere Halbebene in den EK abbilden.*

Lösung: Ein z_0 mit positivem Imaginärteil gehe nach 0, und 0 gehe nach $\mathrm{e}^{i\alpha}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Das Symmetrieprinzip impliziert dann $f(z_0^*) = \infty$, und $z_0^* = \overline{z_0}$. Dies ergibt: Die gesuchten f sind genau von der Form

$$f(z) \;=\; \mathrm{e}^{i\phi}\,\frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}\,, \qquad \phi \in \mathbb{R},\ \mathrm{Im}\ z_0 > 0.$$

□

Aufgabe 2.3.6 *Bestimme alle $z \in \mathbb{C}$, für die folgende Ungleichungen gelten:*

$$\text{(a)}\ \ \mathrm{Im}\left(\frac{z - a}{z - b}\right) > 0\ , \qquad\qquad \text{(b)}\ \ |z - 1| \le 2\,|z - 2|\ .$$

Aufgabe 2.3.7 *Bestimme eine Möbiustransformation, die 1 als Fixpunkt hat und 0 auf $-i$ sowie ∞ auf i abbildet.*

Aufgabe 2.3.8 *Bestimme alle Möbiustransformationen, welche die reelle Gerade auf sich abbilden.*

Aufgabe 2.3.9 *Zeige, dass die Punkte* 2, i, $1-i$ *und* $-2i/3$ *auf einem Kreis liegen, und bestimme dessen Mittelpunkt.*

Aufgabe 2.3.10 *Gegeben seien drei verschiedene Punkte* $z_j \in \mathbb{C}^*$. *Zeige, dass es genau einen allgemeinen Kreis* K *durch* z_1 *gibt, bezüglich dessen* z_2 *und* z_3 *Spiegelpunkte sind.*

Kapitel 3

Holomorphe Funktionen

3.1 Differenzierbarkeit und Holomorphie

Definition 3.1.1 *Sei $O \subset \mathbb{C}$ offen, und sei $f: O \to \mathbb{C}$.*

(a) *Wir nennen f* differenzierbar in *$z_0 \in O$, falls*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \;=\; f'(z_0)$$

existiert, und wir nennen dann den Grenzwert $f'(z_0)$ die (erste) Ableitung von f im Punkt z_0.

(b) *Wir nennen f* holomorph *oder* analytisch *in $z_0 \in O$, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, für das f in jedem Punkt $z \in K(z_0, \varepsilon) \subset O$ differenzierbar ist. Wir nennen f* holomorph in O, *falls f in jedem Punkt von O holomorph ist.*

(c) *Ein $F: O \to \mathbb{C}$ heißt* Stammfunktion zu f, *wenn F in O holomorph ist, und wenn gilt*

$$F'(z) \;=\; f(z) \qquad \forall\, z \in O.$$

Bemerkung 3.1.2 *Wie im Reellen gelten für die Berechnung der Ableitung die Produkt-, Quotienten- und Kettenregel, und Summen von endlich vielen Funktionen dürfen gliedweise differenziert werden. Außerdem ergibt sich aus der Definition, dass Differenzierbarkeit immer Stetigkeit impliziert.*

Aufgabe 3.1.3 *Untersuche, für welche $z \in \mathbb{C}$ die folgenden Funktionen differenzierbar bzw. holomorph sind:*

(a) $f(z) = |z|^2$, (b) $f(z) = \overline{z}$.

Aufgabe 3.1.4 *Sei $f(z)$ in einem Punkt $z_0 = x_0 + i\, y_0$ differenzierbar. Zeige dass dann f, aufgefasst als Funktion der reellen Variablen x und y, im Punkt $(x_0, y_0)^T$ nach beiden Variablen partiell differenzierbar ist. Gilt auch die Umkehrung?*

Aufgabe 3.1.5 *Sei $O \subset \mathbb{C}$ offen, und sei $f: O \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $\overline{O} = \{z : \overline{z} \in O\}$. Zeige: Dann ist die Funktion g mit*

$$g(z) \;=\; \overline{f(\overline{z})} \qquad \forall\, z \in \overline{O}$$

holomorph in $\overline{O}$, und $g'(z) = \overline{f'(\overline{z})}$ für alle $z \in \overline{O}$.

Beispiel 3.1.6 *Polynome sind in ganz $\mathbb{C}$ holomorph, und die Ableitung berechnet sich wie üblich. Wegen der Quotientenregel sind dann rationale Funtkionen überall auf ihrem natürlichen Definitionsbereich holomorph.*

Weitere Beispiele holomorpher Funktionen ergeben sich als Summen von *Potenzreihen*: Zu einer Reihe der Form $\sum_0^\infty a_k\,(z-z_0)^k$ berechnen wir den *Konvergenzradius* R nach der Formel

$$R^{-1} \;=\; \limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k}\,.$$

Wegen $\lim_{k\to\infty} k^{1/k} = 1$ folgt, dass die gliedweise differenzierte Potenzreihe $\sum_0^\infty (k+1)a_{k+1}\,(z-z_0)^k$ den gleichen Konvergenzradius R hat. Falls $R > 0$ ist, gilt für alle $\rho < R$, dass beide Reihen in $\overline{K}(z_0,\rho)$ sogar gleichmäßig konvergieren. Nach dem Satz über die gliedweise Differenziation von Reihen folgt deshalb:

Satz 3.1.7 *Ist $f(z) = \sum_0^\infty a_k\,(z-z_0)^k$ konvergent für $z \in K(z_0,R)$ mit $R > 0$, so ist f dort holomorph, und $f'(z) = \sum_0^\infty (k+1)\,a_{k+1}\,(z-z_0)^k$.*

3.2 Einige spezielle Funktionen

Definition 3.2.1 *Da der Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen jeweils unendlich ist, definieren wir für alle $z \in \mathbb{C}$:*

$$\mathrm{e}^z \;=\; \sum_0^\infty \frac{z^k}{k!}\,, \quad \sin z \;=\; \sum_0^\infty (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\,, \quad \cos z \;=\; \sum_0^\infty (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}\,,$$

$$\sinh z \;=\; \sum_0^\infty \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\,, \quad \cosh z = \sum_0^\infty \frac{z^{2k}}{(2k)!}\,.$$

Allgemein nennt man jede Funktion, die auf ganz $\mathbb{C}$ definiert und holomorph ist, eine *ganze Funktion*. Somit sind also obige Funktionen alle ganz. Beachte, dass auch Polynome ganze Funktionen sind!

Folgende Resultate lassen sich leicht mit Hilfe der Potenzreihen beweisen:

Lemma 3.2.2 *Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ gilt stets:*

(a) $\cosh(iz) = \cos z, \quad \sinh(iz) = i\,\sin z,$

(b) $\mathrm{e}^z = e^x\,(\cos y + i\,\sin y),$

(c) $\sin z = \frac{\mathrm{e}^{iz}-\mathrm{e}^{-iz}}{2i} = \sin x\,\cosh y + i\,\cos x\,\sinh y,$

(d) $\cos z = \frac{\mathrm{e}^{iz}+\mathrm{e}^{-iz}}{2} = \cos x\,\cosh y - i\,\sin x\,\sinh y.$

Lemma 3.2.3 (Additionstheoreme) *Für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt stets:*

(a) $\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\,\mathrm{e}^{z_2},$

(b) $\sin(z_1+z_2) = \sin z_1\,\cos z_2 + \cos z_1\,\sin z_2,$

(c) $\cos(z_1+z_2) = \cos z_1\,\cos z_2 - \sin z_1\,\sin z_2.$

Aufgabe 3.2.4 *Beweise obige zwei Lemmata.*

Satz 3.2.5

(a) $\forall\, z \in \mathbb{C}: \quad (\mathrm{e}^z)' = \mathrm{e}^z,\ (\cos z)' = -\sin z,\ (\sin z)' = \cos z.$

(b) *Die einzigen Nullstellen von* $\cos z$ *sind die Zahlen* $z_k = (k + 1/2)\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

(c) *Die einzigen Nullstellen von* $\sin z$ *sind die Zahlen* $z_k = k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

(d) *Die Exponentialfunktion* e^z *hat keine Nullstellen.*

(e) $\mathrm{e}^{z+2k\pi i} = \mathrm{e}^z \qquad \forall\, z \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{Z}.$

(f) $\cos(z + 2k\pi) = \cos z,\ \sin(z + 2k\pi) = \sin z \qquad \forall\, z \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{Z}.$

Aufgabe 3.2.6 *Beweise obigen Satz unter Benutzung der Definition von* $\pi/2$ *als die kleinste positiv-reelle Nullstelle von* $\cos x$.

Aufgabe 3.2.7 *Zeige folgende Identitäten:*

(a) $\cosh z = \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2}.$

(b) $\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1\, \cosh z_2 + \cosh z_1\, \sinh z_2.$

(c) $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1\, \cosh z_2 + \sinh z_1\, \sinh z_2.$

Aufgabe 3.2.8 *Zeige, dass die Funktion*

$$f(z) \;=\; \begin{cases} \mathrm{e}^{1/z} & (z \neq 0) \\ 0 & (z = 0) \end{cases}$$

im Nullpunkt nicht differenzierbar ist.

3.3 Der komplexe Logarithmus

Das folgende Ergebnis ist wichtig für die Definition des natürlichen Logarithmus einer komplexen Zahl:

Satz 3.3.1 (Abbildungseigenschaften der Exponentialfunktion)
Für jedes feste $y_0 \in \mathbb{R}$ *bildet* $f(z) = \mathrm{e}^z$ *den Streifen* $\{\, z \;:\; y_0 < \mathrm{Im}\ z < y_0 + 2\,\pi \,\}$ *bijektiv ab auf die* geschlitzte Ebene

$$\mathbb{C}(y_0) \;=\; \mathbb{C} \setminus \{ z = r\,\mathrm{e}^{iy_0} \;:\; 0 \le r < \infty \,\}.$$

Beweis: Aus $\mathrm{e}^{x+iy} = \mathrm{e}^x\,(\cos y + i\,\sin y)$ folgt $|\mathrm{e}^z| = \exp\,[\mathrm{Re}\ z]$ sowie $\arg \mathrm{e}^z = \mathrm{Im}\ z \in (y_0, y_0 + 2\pi)$, und daraus folgt die Behauptung. □

Definition 3.3.2 *Für* $y_0 \in \mathbb{R}$ *und* $\mathbb{C}(y_0)$ *wie oben heißt die auf* $\mathbb{C}(y_0)$ *definierte Umkehrfunktion von* e^z ein Zweig des komplexen Logarithmus, *und wir schreiben* $\log z$ *oder* $\ln z$ *für diese Funktion.*

Satz 3.3.3 *Für* $z \in \mathbb{C}(y_0)$ *sei die Funktion* $\arg z$ *so festgelegt, dass* $y_0 < \arg z < y_0 + 2\pi$ *gilt. Dann ist*

$$\log z \;=\; \log|z| + i\,\arg z \qquad \forall\; z \in \mathbb{C}(y_0)\,,$$

wobei mit $\log|z|$ *der reelle Logarithmus gemeint ist. Die Funktion* $\log z$ *ist in* $\mathbb{C}(y_0)$ *holomorph, und*

$$\frac{d}{dz}\,\log z \;=\; \frac{1}{z} \qquad \forall\; z \in \mathbb{C}(y_0).$$

Beweis: Sei $\log z = w = a + i\,b$, für $a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist $z = \mathrm{e}^w = \mathrm{e}^a\,(\cos b + i\,\sin b)$, und $y_0 < b < y_0 + 2\pi$. Also ist $|z| = \mathrm{e}^a$, d. h., $a = \mathrm{Re}\ w = \log|z|$, und $b = \arg z = \mathrm{Im}\ w$. Seien jetzt $z, z_0 \in \mathbb{C}(y_0)$. Da der reelle Logarithmus und die Argumentfunktion beide stetig sind, folgt

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ :\ |z - z_0| \le \delta \Longrightarrow |\log z - \log z_0| \le \varepsilon\ .$$

Mit $w = \log z$, $w_0 = \log z_0$ folgt

$$\frac{\log z - \log z_0}{z - z_0} - \frac{1}{z_0} = \frac{w - w_0 - (\mathrm{e}^{w-w_0} - 1)}{\mathrm{e}^w - \mathrm{e}^{w_0}}.$$

Mit der Exponentialreihe zeigt man für festes w_0 und $|w - w_0| \le c$ mit hinreichend kleinem $c > 0$:

$$|\mathrm{e}^w - \mathrm{e}^{w_0}| = \left|\ \mathrm{e}^{w_0}\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(w - w_0)^k}{k!}\ \right| \ \ge\ c_1\,|w - w_0|\,,$$

$$|w - w_0 - (\mathrm{e}^{w-w_0} - 1)| = \left|\ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(w - w_0)^k}{k!}\ \right| \ \le\ c_2\,|w - w_0|^2,$$

für geeignete Konstanten $c_j > 0$. Daraus folgt für $|z - z_0| \le \delta$:

$$\left|\ \frac{\log z - \log z_0}{z - z_0} - \frac{1}{z_0}\ \right| \ \le\ \frac{c_2}{c_1}\,|w - w_0|\ \le\ \varepsilon\frac{c_2}{c_1},$$

woraus die Behauptung folgt. □

Bemerkung 3.3.4 *Offenbar gibt es unendlich viele Zweige des komplexen Logarithmus, und obiger Satz zeigt, dass die Wahl eines Zweiges des Logarithmus genau der Wahl eines Zweiges der Argumentfunktion entspricht. Der in $\mathbb{C}(-\pi)$ definierte Zweig des Logarithmus hat die Eigenschaft dass er für positiv-reelle Werte von z mit dem reellen Logarithmus übereinstimmt und heißt deshalb* der Hauptzweig.

Die Funktionalgleichung

$$\log(z_1\,z_2) = \log z_1 + \log z_2$$

gilt genau dann, wenn man die drei Zweige der Logarithmusfunktion so festlegt, dass $\arg(z_1\,z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ *gilt.*

Aufgabe 3.3.5 *Finde alle möglichen Werte für* $\log(1 + i)$.

Lösung: Für jedes y_0, für welches $1 + i \in \mathbb{C}(y_0)$ liegt, gibt es einen Zweig von $\log(1 + i)$, und dieser ist gleich $\log|1 + i| + i\ \arg(1 + i)$. Es ist $|1 + i| = \sqrt{2}$, und $\arg(1 + i) = \pi/4 + 2\,k\,\pi$ mit beliebigem $k \in \mathbb{Z}$. Also sind die möglichen Werte gegeben durch

$$\log(1 + i) = \frac{1}{2}\log 2 + i\,(2\,k + 1/4)\,\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Dies ist (nach Definition des Logarithmus) auch genau die Lösungsmenge der Gleichung $\mathrm{e}^w = 1 + i$. □

Definition 3.3.6 *Wir setzen*

$$z^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha\,\log z} \qquad \forall\ z \in \mathbb{C}\setminus\{0\},\ \alpha \in \mathbb{C}.$$

Dabei kann jeder Zweig des Logarithmus gewählt werden. Nimmt man für $\log z$ *den Hauptzweig, so erhält man den* Hauptzweig der Potenzfunktion z^α.

Im Allgemeinen ist also z^α *erst durch eine Wahl von* $\log z$ *eindeutig festgelegt.* Wenn allerdings α eine ganze Zahl ist, dann ist z^α *unabhängig* von der Wahl des Zweiges von $\log z$; dies folgt, da $\mathrm{e}^{2m\pi i} = 1$ gilt für alle $m \in \mathbb{Z}$. Mehr dazu in den nächsten Aufgaben.

Aufgabe 3.3.7 *Zeige für $\alpha = 1/2$, dass obige Definition von $w = z^\alpha$ für jedes $z \neq 0$ zu genau zwei verschiedenen Werten $w \in \mathbb{C}$ führt, welche sich gerade um den Faktor -1 unterscheiden. Wir sagen deshalb:* Die Quadratwurzelfunktion $\sqrt{z}$ hat genau zwei Zweige. *Diese sind auch genau die Lösungen der Gleichung $w^2 = z$.*

Aufgabe 3.3.8 *Zeige für $\alpha = 1/q$ mit $q \in \mathbb{N}$, dass obige Definition von $w = z^\alpha$ für jedes $z \neq 0$ zu genau q verschiedenen Werten $w \in \mathbb{C}$ führt. Genauer: Ist $z = r\,\mathrm{e}^{\phi}$, $r > 0$, so ergibt sich für $w = z^{1/q}$ durch geeignete Wahl von $\log z$ genau eine der Zahlen*

$$w_j \;=\; \sqrt[q]{r}\,\mathrm{e}^{(\phi+2j\pi)i/q}\,, \qquad j = 0, \ldots, q-1\,,$$

Wir sagen deshalb: Die q-te Wurzelfunktion $z^{1/q}$ hat genau q Zweige. *Diese Zweige sind auch genau die Lösungsmenge der Gleichung $w^q = z$.*

Aufgabe 3.3.9 *Sei $\alpha = p/q$ mit teilerfremden $p, q \in \mathbb{Z}$. Zeige, dass dann die obige Definition von $w = z^\alpha$ für jedes $z \neq 0$ zu genau q verschiedenen Werten $w \in \mathbb{C}$ führt.*

Aufgabe 3.3.10 *Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, also eine irrationale Zahl. Zeige, dass dann die obige Definition von $w = z^\alpha$ für jedes $z \neq 0$ zu unendlich vielen verschiedenen Werten $w \in \mathbb{C}$ führt.*

Aufgabe 3.3.11 *Sei $\alpha = a + i\,b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Zeige $|z^\alpha| = |z|^a\,\mathrm{e}^{-b\arg z}$ für $z \neq 0$, und diskutiere, wann man die Potenzfunktion im Nullpunkt stetig ergänzen kann.*

Aufgabe 3.3.12 *Finde alle möglichen Werte für folgende Ausdrücke:*

$$(a) \quad \log(-1), \qquad (b) \quad \log i, \qquad (c) \quad i^i, \qquad (d) \quad i^{1/3}.$$

Aufgabe 3.3.13 *Bestimme für $n \in \mathbb{N}$ alle n-ten* Einheitswurzeln, *d. h. alle Lösungen der Gleichung*

$$z^n \;=\; 1,$$

und diskutiere ihre Lage in der Zahlenebene.

3.4 Die Gamma-Funktion

Definition 3.4.1 *Wir definieren die* Gamma-Funktion *durch das uneigentliche Integral*

$$\Gamma(z) \;=\; \int_0^\infty t^{z-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt\,, \quad \mathrm{Re}\,z > 0, \tag{3.4.1}$$

wobei entlang der positiv-reellen Achse integriert wird und für die Potenz t^z der Hauptwert zu nehmen ist. Wegen $|t^z| = t^x$ für $z = x + i\,y$ und $x > 0$ folgt leicht die absolute Konvergenz dieses Integrals, da e^t schneller als jede Potenz von t anwächst.

Satz 3.4.2 (Holomorphie der Gamma-Funktion)
Die Gamma-Funktion ist holomorph in der rechten Halbebene $\mathrm{Re}\,z > 0$. *Ihre Ableitung hat die Integraldarstellung*

$$\Gamma'(z) \;=\; \int_0^\infty t^{z-1}\,\log t\,\mathrm{e}^{-t}\,dt\,, \quad \mathrm{Re}\,z > 0. \tag{3.4.2}$$

Beweis: Zunächst stellen wir fest, dass das Integral (3.4.2) für $z = x + i\,y$, $x > 0$, absolut konvergiert, da der (reelle) Logarithmus schwächer wächst als jede Potenz von t. Für $0 < |h| \le \varepsilon$ mit $0 < \varepsilon < x$ zeigt man unter Benutzung der Potenzreihenentwicklung für $t^h = \mathrm{e}^{h \log t}$:

$$\begin{aligned} \Big| \frac{t^{z+h-1} - t^{z-1}}{h} - t^{z-1} \log t \Big| &= t^{x-1} \Big| \frac{t^h - 1}{h} - \log t \Big| \\ &= t^{x-1} \Big| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{h^{n-1} (\log t)^n}{n!} \Big| \\ &\le t^{x-1}\, |h|\, |\log t|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|h|^n\, |\log t|^n}{(n+2)!} \\ &\le t^{x-1}\, |h|\, |\log t|^2 \; \exp(\varepsilon\, |\log t|^2)\,. \end{aligned}$$

Wenn wir für den Moment $\Gamma'(z)$ durch (3.4.2) definieren, folgt

$$\Big| \frac{\Gamma(z+h) - \Gamma(z)}{h} - \Gamma'(z) \Big| \le |h| \int_0^\infty t^{x-1}\, |\log t|^2 \exp(\varepsilon\, |\log t|^2 - t)\, dt\,.$$

Offenbar geht die rechte Seite dieser Ungleichung gegen 0 für $h \to 0$, woraus die Behauptung folgt. □

Aufgabe 3.4.3 *Zeige durch partielle Integration von* (3.4.1) *die folgende* Funktionalgleichung der Gammafunktion*:*

$$\Gamma(z+1) = z\, \Gamma(z)\,, \qquad \mathrm{Re}\, z > 0\,.$$

Aufgabe 3.4.4 *Zeige* $\Gamma(n+1) = n!$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$.

3.5 Einfache Konsequenzen der Holomorphie

Dieser Abschnitt zeigt, dass Real- und Imaginärteil von holomorphen Funktionen stark miteinander gekoppelt sind:

Satz 3.5.1 (Cauchy-Riemannsche Differenzialgleichungen) *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Setzt man $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$, für $z = x + i\, y$ und x, y, u, v reell, so sind u, v für alle $z \in G$ nach beiden Variablen partiell diffbar, und es gilt*

$$f'(z) = u_x(x, y) + i\, v_x(x, y) = -i\, u_y(x, y) + v_y(x, y). \tag{3.5.1}$$

Daraus folgen insbesondere die Cauchy-Riemannsche Differenzialgleichungen

$$u_x(x, y) = v_y(x, y)\,, \; u_y(x, y) = -v_x(x, y) \quad \forall\, z = x + i\, y \in G.$$

Beweis: Für $z \in G$ gilt nach Definition $f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$, wobei h eine komplexe Zahl $\neq 0$ ist. Für *reelle* h ist

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} + i \frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h}\,, \\ \frac{f(z+ih) - f(z)}{ih} &= -i \frac{u(x, y+h) - u(x, y)}{h} + \frac{v(x, y+h) - v(x, y)}{h}\,. \end{aligned}$$

Für $h \to 0$ gehen beide Ausdrücke gegen $f'(z)$, und daraus folgt (3.5.1), also die Behauptung. □

Definition 3.5.2 *Eine Abbildung $f : G \to \mathbb{C}$ heißt* lokalkonform in G, *wenn f in G winkeltreu ist, und wenn*

$$\lim_{h\to 0} \left| \frac{f(z+h)-f(z)}{h} \right| \tag{3.5.2}$$

existiert und nicht verschwindet.

Satz 3.5.3 *Eine in einem Gebiet G holomorphe Funktion f, deren Ableitung nirgends verschwindet, ist in G lokalkonform.*

Beweis: Aus der Definition der Holomorphie folgt sofort (3.5.2). Sei jetzt $z(t)$ glatte Parameterdarstellung einer Kurve in G. Dann ist

$$\frac{d}{dt}\, f(z(t)) \;=\; f'(z(t))\, z'(t),$$

also insbesondere

$$\arg \frac{d}{dt}\, f(z(t)) \;=\; \arg f'(z(t)) \;+\; \arg z'(t).$$

Daraus folgt, dass die Tangente an die Bildkurve $f(z(t))$ gegenüber der Tangente an die Kurve $z(t)$ um den Winkel $\arg f'$ gedreht ist. Das ergibt die Winkeltreue von f. □

Aufgabe 3.5.4 *Sei $O \subset \mathbb{C}$ offen, und sei $f : O \to \mathbb{C}$ holomorph. Untersuche $g(z) = \mathrm{Re}\,(f(z))$ auf Holomorphie in O.*

Aufgabe 3.5.5 *Finde zu $u(x,y) = 2\,x\,y$ eine Funktion $v(x,y)$ so, dass $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ eine ganze Funktion ist.*

3.6 Integrale vom Cauchy-Typ

Definition 3.6.1 *Sei γ eine rektifizierbare Kurve, und seien $g, \phi : \gamma^* \to \mathbb{C}$ stetig. Sei weiter $O = \{z : z \neq \phi(w)\ \forall\ w \in \gamma^*\ \}$. Dann wird durch*

$$f(z) \;=\; \int_\gamma \frac{g(w)}{\phi(w)-z}\, dw \tag{3.6.1}$$

auf O eine Funktion f definiert. Ein Integral (3.6.1) *heißt* vom Cauchy-Typ.

Behauptung 3.6.2 *Ist f auf O durch ein Integral vom Cauchy-Typ gegeben, so gilt für beliebiges $z_0 \in O$:*

$$f(z) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} f_k\,(z-z_0)^k, \qquad f_k \;=\; \int_\gamma \frac{g(w)}{(\phi(w)-z_0)^{k+1}}\, dw, \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.6.2}$$

und die Potenzreihe konvergiert mindestens im größten Kreis um z_0, der noch ganz in O enthalten ist. Insbesondere ist f auf O holomorph.

Beweis: Sei $z_0 \in O$, und sei $\delta > 0$ so, dass $K(z_0,\delta) \subset O$. Somit ist also $|\phi(w)-z_0| \geq \delta$ für alle $w \in \gamma^*$. Deshalb gilt für alle festen z mit $|z-z_0| < \delta$

$$\frac{1}{\phi(w)-z} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\phi(w)-z_0)^{n+1}}\ ,$$

und die Reihe konvergiert gleichmäßig auf γ^*. Daher darf man in (3.6.1) obige Reihe einsetzen und Integration und Summation vertauschen. □

Aufgabe 3.6.3 *Gegeben sei ein Integral* (3.6.1) *vom Cauchy-Typ. Zeige folgende Darstellung für die Ableitungen von f:*

$$f^{(n)}(z) \; = \; n! \int_\gamma \frac{g(w)}{(\phi(w)-z)^{n+1}} \; dw \qquad \forall \; n \in \mathbb{N}, \; z \in O.$$

Aufgabe 3.6.4 *Zeige, analog wie im Beweis von* Behauptung 3.6.2*: Das uneigentliche Integral*

$$f(z) \; = \; \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x} \; dx}{x-z}$$

definiert eine auf $\mathbb{C} \setminus \{x \geq 0\}$ holomorphe Funktion.

Kapitel 4

Die lokale Version des Cauchyschen Integralsatzes

4.1 Der Integralsatz für Ableitungen

Satz 4.1.1 *Seien $O \subset \mathbb{C}$ offen, $F : O \to \mathbb{C}$ holomorph, und $f = F'$ stetig auf O. Dann gilt für jede rektifizierbare Kurve γ in O mit Anfangspunkt z_0 und Endpunkt z_1*

$$\int_\gamma f(z)\,dz \;=\; F(z_1) \;-\; F(z_0)\,.$$

Insbesondere gilt (1.2.4) *für jede geschlossene rektifizierbare Kurve in O.*

Beweis: Sei zunächst ein Weg γ betrachtet, und sei $z : [a,b] \to O$ dessen Parameterdarstellung. Dann folgt aus dem Beweis von Satz 3.5.1 mit $F(z) = U(x,y) + i\,V(x,y)$, dass $f(z) = F'(z) = U_x(x,y) + i\,V_x(x,y) = V_y(x,y) - i\,U_y(x,y)$. Nach Definition des komplexen Kurvenintegrals ist demnach

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,dz \;&=\; \int_a^b \left[U_x(x(t),y(t))\,x'(t) \;+\; U_y(x(t),y(t))\,y'(t)\right]\;dt \\
&\quad +i\int_a^b \left[V_x(x(t),y(t))\,x'(t) \;+\; V_y(x(t),y(t))\,y'(t)\right]\;dt \\
&=\; U(x(b),y(b)) - U(x(a),y(a)) \;+\; i\,[V(x(b),y(b)) - V(x(a),y(a))] \\
&=\; F(z(b)) - F(z(a))\,.
\end{aligned}$$

Ist γ eine beliebige rektifizierbare Kurve, dann gibt es zu $\varepsilon > 0$ nach Lemma 1.2.12 einen Weg $\tilde\gamma$ mit gleichem Anfangs- und Endpunkt, für den (1.2.3) gilt. Da aber das Kurvenintegral von f entlang $\tilde\gamma$ immer gleich $F(z_1) - F(z_0)$, also unabhängig von $\tilde\gamma$ ist, und da ε beliebig klein sein darf, folgt die Behauptung. □

Korollar zu Satz 4.1.1 *Für alle $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ und jeden geschlossene rektifizierbare Kurve γ, die für $n \le -2$ nicht durch den Nullpunkt geht, gilt $\int_\gamma z^n\ dz = 0$.*

Beweis: Folgt, da z^n die Ableitung von $z^{n+1}/(n+1)$ ist. □

Aufgabe 4.1.2 *Welche Werte kann das Kurvenintegral*

$$I \;=\; \int_\gamma \frac{dz}{z^2+1}$$

annehmen, wenn γ eine rektifizierbare Kurve von 0 nach 1 ist, die die Nullstellen des Nenners vermeidet?

Lösung: Es ist $-2i\,(z^2+1)^{-1} = (z+i)^{-1} \;-\; (z-i)^{-1}$, also betrachten wir die einfacheren Integrale

$$I_\pm \;=\; \int_\gamma \frac{dz}{z \pm i}\;.$$

Die Substitution $w = z \pm i$ führt dann zu

$$I_\pm \;=\; \int_{\gamma_\pm} \frac{dw}{w}\;,$$

wobei $\gamma_\pm$ aus γ durch Verschiebung um $\pm i$ hervorgeht, also eine Kurve von $\pm i$ nach $1 \pm i$ ist. Nach den untenstehenden Übungsaufgaben ist deshalb $I_\pm = \log(1 \pm i) - \log(\pm i)$, wobei wir noch diskutieren müssen, welche Zweige der Logarithmusfunktion jeweils zu nehmen sind:

Im Anfangspunkt der Kurve können wir einen beliebigen Zweig des Logarithmus wählen, da eine andere Wahl durch entsprechende Wahl des Zweiges im Endpunkt ausgeglichen werden kann. Wir setzen also z. B. $\log(\pm i) \;=\; \log 1 + i\,\arg(\pm i) \;=\; \pm i\,\pi/2$. Welcher Wert im Endpunkt zu nehmen ist, hängt davon ab, *wie sich die Kurve $\gamma_\pm$ um den Nullpunkt herumwindet*, und das entspricht genau dem Verhalten des ursprünglichen Weges γ bezüglich des Punktes $\mp i$. Deshalb kann im Endpunkt *jeder mögliche Zweig des Logarithmus der richtige sein.* Alle Zweige sind aber gegeben durch die Zahlen

$$\log(1 \pm i) \;=\; \frac{1}{2}\,\log 2 \;+\; i\,(2\,k_\pm \pm 1/4)\,\pi\,, \quad k_\pm \in \mathbb{Z}.$$

Dies ergibt

$$I_+ \;=\; \log(1+i) \;-\; \log i \;=\; \frac{1}{2}\log 2 \;+\; i\,(2\,k_+ - 1/4)\,\pi,$$
$$I_- \;=\; \log(1-i) \;-\; \log(-i) \;=\; \frac{1}{2}\log 2 \;+\; i\,(2\,k_- + 1/4)\,\pi.$$

Damit ergibt sich

$$I \;=\; \frac{i}{2}\,(I_+ \;-\; I_-) \;=\; (k \;+\; 1/4)\,\pi,$$

wobei $k = k_- - k_+$ eine beliebige ganze Zahl ist. □

Aufgabe 4.1.3 *Berechne das Kurvenintegral von $f(z) = 1/(\cos z)^2$ entlang eines Weges γ, welche durch keine Nullstelle des Nenners geht.*

Aufgabe 4.1.4 *Zeige: Ist γ ein Weg von $a \neq 0$ nach $b \neq 0$, welcher den Nullpunkt vermeidet, so gilt bei geeigneter Wahl von $\log a$ und $\log b$:*

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} \;=\; \log b \;-\; \log a\,. \tag{4.1.1}$$

Aufgabe 4.1.5 *Zeige: Für zwei beliebige Werte von $\log a$ und $\log b$, für $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, gibt es einen Weg von a nach b, der den Nullpunkt vermeidet, derart dass* (4.1.1) *gilt.*

Aufgabe 4.1.6 *Zeige: Jeder Zweig von $\log z$, mit beliebigem $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ergibt sich als*

$$\log z \;=\; \int_{\gamma_z} \frac{dw}{w}\;,$$

wobei γ_z ein Weg von 1 nach z ist, der den Nullpunkt vermeidet.

4.2 Der Integralsatz für ein Dreieck

Seien a, b, c drei Punkte in $\mathbb{C}$, welche nicht auf einer Geraden liegen, und sei $\Delta = \Delta(a, b, c)$ das von diesen Punkten definierte Dreieck. Sei ferner $\partial\Delta$ der Streckenzug von a über b und c zurück nach a (also der Rand von Δ, aber mit festgelegter Durchlaufrichtung).

Satz 4.2.1 *Sei $O \subset \mathbb{C}$ offen, und seien a, b, c nicht auf einer Geraden, so dass $\Delta = \Delta(a, b, c) \subset O$. Sei weiter $z_0 \in O$ fest gewählt, und sei $f: O \to \mathbb{C}$ auf O stetig und in $O \setminus \{z_0\}$ holomorph. Dann gilt*

$$\oint_{\partial\Delta} f(z)\, dz \;=\; 0.$$

Beweis: **1. Fall:** $z_0 \notin \Delta$**.** Beginnend mit $\Delta_0 = \Delta$ seien Δ_n wie folgt konstruiert: Wenn a_n, b_n, c_n die Ecken von Δ_n sind, bilden wir $a_n' = (b_n + c_n)/2$, $b_n' = (c_n + a_n)/2$, $c_n' = (a_n + b_n)/2$, und zerlegen Δ_n in die vier Teildreiecke $\Delta_n^1 = \Delta(a_n, c_n', b_n')$, $\Delta_n^2 = \Delta(b_n, a_n', c_n')$, $\Delta_n^3 = \Delta(c_n, b_n', a_n')$, $\Delta_n^4 = \Delta(a_n', b_n', c_n')$. Da sich Kurvenintegrale über entgegengesetzt durchlaufene Dreiecksseiten gegenseitig aufheben, findet man

$$\oint_{\partial\Delta_n} f(z)\, dz \;=\; \sum_{j=1}^{4} \oint_{\partial\Delta_n^j} f(z)\, dz\,.$$

Daher gibt es mindestens ein $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ mit

$$\left|\oint_{\partial\Delta_n} f(z)\, dz\right| \;\le\; 4\, \left|\oint_{\partial\Delta_n^j} f(z)\, dz\right|\,, \tag{4.2.1}$$

und eines von diesen Δ_n^j sei Δ_{n+1}. Wenn die Länge des Randes von Δ gleich L ist, dann ist die von Δ_n gleich $2^{-n}L$. Außerdem ist nach Konstruktion $\Delta_{n+1} \subset \Delta_n$, und deshalb folgt $\cap_{n=0}^{\infty} \Delta_n = \{z_1\}$ für ein $z_1 \in O \setminus \{z_0\}$. Da f in z_1 differenzierbar ist, gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 :\ |z - z_1| \;\le\; \delta \implies \big|f(z) - f(z_1) - f'(z_1)\,(z - z_1)\big| \;\le\; \varepsilon\, |z - z_1|\,.$$

Außerdem gibt es ein n_0 derart, dass für alle $n \ge n_0$ gilt $\Delta_n \subset K(z_1, \delta)$. Mit Hilfe des Korollars zu Satz 4.1.1 folgt

$$\oint_{\partial\Delta_n} f(z)\, dz \;=\; \oint_{\partial\Delta_n} [f(z) - f(z_1) - f'(z_1)\,(z - z_1)\,]\, dz.$$

Also ist $|\oint_{\partial\Delta_n} f(z)\, dz| \le \varepsilon\, [2^{-n}L] \max_{z\in\Delta} |z - z_1| \le \varepsilon\, [2^{-n}L]^2$, woraus mit (4.2.1) folgt $|\oint_{\partial\Delta} f(z)\, dz| \le \varepsilon\, L^2$. Daher gilt die Behauptung in diesem Fall.

2. Fall: z_0 **eine Ecke von** Δ**.** Sei etwa $z_0 = a$. Wähle a_1 bzw. a_2 auf der Verbindungsstrecke von a nach b bzw. c, und zwar dicht bei a. Dann ist das Integral über $\partial\Delta$ gleich der Summe der Integrale über die Ränder von $\Delta(a, a_1, a_2)$, $\Delta(a_1, b, a_2)$ sowie $\Delta(b, c, a_2)$. Die beiden letzten Dreiecke enthalten nicht den Punkt z_0, und somit verschwinden diese beiden Integrale. Da die Länge des Randes von $\Delta(a, a_1, a_2)$ aber beliebig klein gemacht werden kann, folgt hieraus die Behauptung für diesen Fall.

3. Fall: z_0 **ein anderer Punkt von** Δ**.** Wir können Δ so in Teildreiecke zerlegen, dass z_0 jeweils ein Eckpunkt wird, und dann folgt die Behauptung, da nach Fall 2 die Integrale über die Teile verschwinden.
$\square$

Bemerkung 4.2.2 *Beachte, dass obiger Satz trivialerweise auch gilt, wenn die Punkte a, b, c auf einer Geraden liegen!*

4.3 Der Integralsatz für ein sternförmiges Gebiet

Definition 4.3.1

(a) *Eine Menge $M \subset \mathbb{C}$ heißt* konvex, *wenn für je zwei Punkte $z_j \in M$ auch die Verbindungsstrecke $z(t) = t\,z_1 + (1-t)\,z_2$, $0 \le t \le 1$, zu M gehört.*

(b) *Eine Menge $M \subset \mathbb{C}$ heißt* sternförmig bzgl. $z_0 \in M$, *wenn für jedes $z \in M$ auch die Verbindungsstrecke von z_0 nach z zu M gehört.*

Beispiel 4.3.2

(a) *Eine konvexe Menge ist sternförmig bzgl. jedes ihrer Punkte.*

(b) *Kreisscheiben, Dreiecke und Rechtecke sind immer konvex. Ein allgemeines Viereck ist i. a. nicht konvex, aber immer sternförmig bzgl. einiger seiner Punkte.*

(c) *Die Menge $\mathbb{C} \setminus \{z = x \in \mathbb{R} :\ x \ge 0\}$ ist nicht konvex, aber sternförmig bzgl. jedes Punktes auf der negativ-reellen Achse. Wir nennen diese Menge die* entlang der positiv reellen Achse aufgeschnittene Ebene.

Satz 4.3.3 (Cauchyscher Integralsatz für sternförmige Gebiete) *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein bzgl. $z_1 \in G$ sternförmiges Gebiet, und sei $z_0 \in G$. Sei ferner $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und auf $G \setminus \{z_0\}$ holomorph. Dann gilt für jede geschlossene rektifizierbare Kurve γ in G*

$$\oint_\gamma f(z)\,dz \;=\; 0\ .$$

Beweis: Sei γ_z die Verbindungsstrecke von z_1 nach einem $z \in G$, und sei $F(z) = \int_{\gamma_z} f(w)\,dw$. Mit Hilfe von Satz 4.2.1 folgt für $z \in G$ und h so klein, dass $\Delta(z_1, z, z+h) \subset G$ gilt:

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} \;=\; \frac{1}{h}\int_z^{z+h} f(w)\,dw\ ,$$

wobei wir geradlinig von z nach $z+h$ integrieren. Wegen der Stetigkeit von f folgt

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| \;=\; \left|\frac{1}{h}\int_z^{z+h} (f(w)-f(z))\,dw\right| \;\le\; \varepsilon\ ,$$

falls nur h klein genug ist. Daraus folgt, dass F holomorph in G und $F' = f$ ist. Nach Satz 4.1.1 folgt dann die Behauptung. □

Bemerkung 4.3.4 *In den vorstehenden Integralsätzen haben wir jeweils einen Ausnahmepunkt z_0 zugelassen, in dem f zwar stetig, aber nicht unbedingt holomorph ist. Wir werden in* Bemerkung 5.5.6 *sehen, dass unter den gemachten Annahmen f auch in z_0 holomorph sein muss, sodass ein solcher Punkt eigentlich gar nicht auftreten kann. Es wird aber im Beweis der Cauchyschen Integralformel nützlich sein, einen solchen Ausnahmepunkt formal zuzulassen.*

Bemerkung 4.3.5 *Unter den Voraussetzungen von* Satz 4.3.3 *verschwindet das Kurvenintegral von f über jede geschlossene rektifizierbare Kurve in G. Dies hat zur Folge, dass das Kurvenintegral von f über eine beliebige rektifizierbare Kurve in G nur vom Anfangs- und Endpunkt, nicht aber vom weiteren Verlauf der Kurve abhängig ist. Wir schreiben deshalb im Folgenden $\int_a^b f(z)\,dz$ für das Kurvenintegral von f über eine rektifizierbare Kurve von a nach b. Im Beweis von* Satz 4.3.3 *haben wir auch gezeigt, dass f eine Stammfunktion F besitzt, und somit folgt aus* Satz 4.1.1, *dass $\int_a^b f(z)\,dz = F(b) - F(a)$ gilt.*

Aufgabe 4.3.6 *Sei f holomorph in $K'(0,r)$ mit $r > 1$, und sei γ ein doppelpunktfreier geschlossener Weg in $K'(0,r)$. Zeige: Wenn das Integral $\int_\gamma f(z)\,dz$ nicht verschwindet, so ist sein Wert bis auf ein Vorzeichen gleich dem Integral von f entlang des positiv orientierten Einheitskreises.*

Aufgabe 4.3.7 *Berechne $\int_\gamma z^{-1}\,dz$ entlang des Randes eines Rechtecks, welches nicht den Nullpunkt enthält.*

Kapitel 5

Anwendungen des Cauchyschen Integralsatzes

5.1 Der Index eines Weges

Definition 5.1.1 *Sei γ ein beliebiger geschlossener Weg mit Parameterdarstellung $z : [a,b] \to \mathbb{C}$. Dann nennen wir die Menge $O = \mathbb{C} \setminus \{ z(t) : \ a \le t \le b \}$ auch* das Komplement von γ*. Für $z \in O$ heißt*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{dw}{w-z} \tag{5.1.1}$$

der Index *oder* die Windungszahl von γ bzgl. z. *Die Abbildung* $\mathrm{Ind}_\gamma : O \to \mathbb{C}$ *nennen wir auch* Indexfunktion.

Bemerkung 5.1.2 *Das Komplement O eines Weges γ ist offen, also Vereinigung höchstens abzählbar vieler Gebiete. Jedes solche Gebiet nennen wir auch* eine Komponente von O*. Da der Träger der Kurve γ kompakt, also beschränkt, ist, liegt er ganz in einer abgeschlossenen Kreisscheibe um den Nullpunkt mit genügend großem Radius; das Komplement dieser Kreisscheibe ist dann ganz in O. Daher folgt, dass genau eine der Komponenten von O unbeschränkt ist.*

Satz 5.1.3 *Sei γ ein geschlossener Weg und O sein Komplement. Die oben definierte Indexfunktion* Ind_γ *nimmt auf O nur ganzzahlige Werte an und ist auf jeder Komponente von O konstant. In der unbeschränkten Komponente von O ist die Indexfunktion identisch gleich* 0.

Beweis: Sei $z_0 \in O$ fest gewählt, und sei $z : [a,b] \to O$ stückweise glatte Parameterdarstellung von γ. Sei

$$\phi(t) \;=\; \exp\left[\int_a^t \frac{z'(\tau)}{z(\tau)-z_0}\, d\tau\right] \qquad \forall\ t \in [a,b]\,.$$

Dann ist $\phi'(t) = \phi(t)\, z'(t)/(z(t)-z_0)$, außer für endlich viele Punkte, an denen $z'(t)$ nicht existiert. Daraus folgt, dass $\phi(t)/(z(t)-z_0)$ stetig und bis auf endlich viele t auch differenzierbar ist, und dass seine Ableitung überall verschwindet. Daher ist

$$\frac{\phi(t)}{z(t)-z_0} \;\equiv\; \frac{\phi(a)}{z(a)-z_0} \;=\; \frac{1}{z(a)-z_0}\,,$$

und somit $\phi(t) = (z(t)-z_0)/(z(a)-z_0)$, also $\phi(b) = 1$ wegen $z(b) = z(a)$. Daraus folgt die Ganzzahligkeit von Ind_γ. Da die Indexfunktion ein Integral vom Cauchy-Typ und somit holomorph (also auch stetig) ist, folgt mit Lemma 1.2.3 die Konstanz auf jeder Komponente von O. Für $z \to \infty$ folgt aus der Definition, dass $\operatorname{Ind}_\gamma(z) \to 0$. Daher muss die Indexfunktion auf der unbeschränkten Komponente sogar identisch gleich Null sein. □

Bemerkung 5.1.4 (Zur praktischen Berechnung der Windungszahl)
Wegen $\frac{d}{dw} \log(w-z) = 1/(w-z)$ *folgt, dass die Windungszahl eines Weges* γ *bzgl.* z *genau der Änderung von* $\arg(w-z)$ *entspricht, wenn sich die Variable* w *entlang* γ *bewegt. Daher kann* $\operatorname{Ind}_\gamma(z)$ *in allen praktisch vorkommenden Fällen leicht angegeben werden,* ohne das Integral 5.1.1 ausrechnen zu müssen. *Z. B. ist die Windungszahl eines positiv orientierten Kreises gleich* 1 *im Inneren und gleich* 0 *im Äußeren.*

Aufgabe 5.1.5 *Gegeben seien ein* $r > 0$, *ein* $z_0 \in \mathbb{C}$ *und ein* $\mu \in \mathbb{Z}$. *Finde einen geschlossenen Weg* γ, *dessen Träger der Kreis um* z_0 *mit Radius* r *ist, so dass* $\operatorname{Ind}_\gamma(z_0) = \mu$ *gilt.*

Lösung: Der positiv orientierte Kreis um z_0 mit Radius r sei γ_1 genannt; er hat Windungszahl 1 bzgl. z_0. Sei $\gamma_\mu = \gamma_1 + \ldots + \gamma_1$ (μ mal) für $\mu \geq 1$. Dann ist dies ein möglicher Weg mit $\operatorname{Ind}_\gamma(z_0) = \mu$ (aber nicht die einzige), denn $\operatorname{Ind}_{\gamma_\mu}(z) = \mu \operatorname{Ind}_{\gamma_1}(z)$. Für $\mu \leq -1$ definiere $\gamma_\mu = -\gamma_{-\mu}$ und für $\mu = 0$ kann man z.B. $\gamma_0 = \gamma_1 - \gamma_1$ setzen. In jedem der Fälle ist der Träger wie verlangt. □

Aufgabe 5.1.6 *Berechne die Windungszahl bzgl. des Nullpunktes des Weges mit Parameterdarstellung* $z(t) = a \cos t + i\, b \sin t$ *(mit* $a, b > 0$*), wenn* t *ein Intervall der Länge* $2\, k\, \pi$ *durchläuft, wobei* $k \in \mathbb{N}$ *ist.*

Aufgabe 5.1.7 *Sei* γ *der Rand eines beliebigen Dreiecks in* $\mathbb{C}$. *Gib alle möglichen Fälle an, die für die Windungszahl von* γ *bzgl. des Nullpunktes auftreten können.*

5.2 Die Cauchysche Integralformel

Satz 5.2.1 (Cauchysche Integralformel) *Sei* $G \subset \mathbb{C}$ *sternförmig bzgl.* z_0, *und sei* γ *ein geschlossener Weg in* G. *Sei ferner* $f : G \to \mathbb{C}$ *holomorph. Dann gilt für alle* z *im Komplement von* γ

$$f(z)\ \operatorname{Ind}_\gamma(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw\,. \tag{5.2.1}$$

Ist γ *ein positiv orientierter Kreis, so ist* $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = 1$ *im Inneren des Kreises, und somit ist speziell*

$$f(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw \tag{5.2.2}$$

für alle z *im Inneren des Kreises.*

Beweis: Aus der Definition der Indexfunktion folgt

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(w)\, dw}{w-z} \;-\; f(z)\ \operatorname{Ind}_\gamma(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma g_z(w)\, dw\ ,$$

mit $g_z(w) = [f(w) - f(z)]/(w-z)$ falls $w \neq z$ ist, bzw. $g_z(z) = f'(z)$. Da g_z auf G stetig und für $w \neq z$ sogar holomorph ist, folgt mit Satz 4.3.3, dass das Integral auf der rechten Seite verschwindet. Das ist die Behauptung. □

Satz 5.2.2 *Sei G ein Gebiet, und sei $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt:*

(a) *Die Funktion f ist an jeder Stelle $z \in G$ beliebig oft differenzierbar. Für jedes $z \in G$ und jeden geschlossenen Weg γ, welcher in einem sternförmigen Teilgebiet von G liegt und für den $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 1$ ist, also z. B. für den positiv orientierten Rand einer kleinen Kreisscheibe um z, gilt*

$$f^{(j)}(z) \;=\; \frac{j!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{j+1}}\, dw \qquad \forall\, j \in \mathbb{N}_0\,. \tag{5.2.3}$$

(b) *Für $z_0 \in G$ sei $\rho > 0$ so, dass $K(z_0, \rho) \subset G$ gilt, und*

$$f_j \;=\; \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!} \;=\; \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{j+1}}\, dw \qquad \forall\, j \in \mathbb{N}_0\,, \tag{5.2.4}$$

wobei wir entlang eines positiv orientierten Kreises um z_0 mit einem Radius $r < \rho$ integrieren. Dann ist

$$f(z) \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} f_j\ (z-z_0)^j \qquad \forall z \in K(z_0, \rho).$$

Beweis: Aus Satz 5.2.1 folgt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw\,,$$

mit γ wie in (a) beschrieben, also insbesondere für den positiv orientierten Kreis wie in (b). Dies ist ein Integral vom Cauchy-Typ, und deshalb folgen (a) und (b) wegen (3.6.2). □

Aufgabe 5.2.3 *Sei $\alpha \in \mathbb{R}$, und $f(z) = (1-z)^\alpha = \exp[\alpha \log(1-z)]$, wobei wir einen festen Zweig des Logarithmus für $|z| < 1$ wählen. Zeige: f ist im Einheitskreis holomorph.*

Aufgabe 5.2.4 *Sei f wie oben, und sei jetzt der Hauptzweig des Logarithmus gewählt, also der Zweig, der für positiv-reelle z einen reellen Wert für $\log z$ ergibt. Finde die Potenzreihenentwicklung von f um den Nullpunkt und bestimme ihren Konvergenzradius.*

Aufgabe 5.2.5 *Finde die Potenzreihenentwicklung von $\log(1+z)$ um den Nullpunkt.*

5.3 Nullstellen holomorpher Funktionen

Definition 5.3.1 *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und sei $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph.*

(a) *Wir nennen ein $z_0 \in G$ eine* Nullstelle k-ter Ordnung von f *(mit $k \in \mathbb{N}$), falls eine in G holomorphe Funktion g existiert mit $g(z_0) \neq 0$ und*

$$f(z) \;=\; (z-z_0)^k\ g(z) \qquad \forall\, z \in G.$$

Manchmal nennen wir z_0 Nullstelle 0-ter Ordnung von f, wenn $f(z_0) \neq 0$ gilt.

(b) *Wir nennen ein $z_0 \in G$ eine* Nullstelle endlicher Ordnung von f, *wenn ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, für das z_0 Nullstelle k-ter Ordnung von f ist.*

Lemma 5.3.2 *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und sei $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph. Genau dann ist $z_0 \in G$ Nullstelle k-ter Ordnung von f, wenn gilt*

$$f^{(j)}(z_0) \;=\; 0 \qquad \forall j = 0, \ldots, k-1, \quad f^{(k)}(z_0) \;\neq\; 0\ .$$

Beweis: Als Übungsaufgabe. □

Aufgabe 5.3.3 *Beweise* Lemma 5.3.2*, z. B. durch Induktion über k.*

Satz 5.3.4 *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und sei $f:\ G \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei die Nullstellenmenge*

$$Z(f) \;=\; \{\, z \in G :\ f(z) = 0 \,\}$$

eine echte Teilmenge von G, also f nicht die Nullfunktion. Dann ist $Z(f)$ höchstens abzählbar und besitzt keinen Häufungspunkt in G, und jedes Element von $Z(f)$ ist Nullstelle endlicher Ordnung von f.

Beweis: Sei O die Menge aller in G gelegenen Häufungspunkte von $Z(f)$, und sei $\tilde{O} = G \setminus O$. Wenn $O = G$ wäre, müsste f aus Stetigkeitsgründen die Nullfunktion sein, was nach Voraussetzung ausgeschlossen ist. Also ist $\tilde{O} \neq \emptyset$. Wir wollen zeigen, dass beide Mengen offen sind, und da $G = O \cup \tilde{O}$ gilt, folgt dann aus Lemma 1.2.3, dass O leer sein muss.

Sei $z_0 \in O$ (falls O leer ist, ist es auch offen). Dann gibt es eine Folge (z_n) aus $Z(f) \setminus \{z_0\}$, welche gegen z_0 konvergiert. Wegen $f(z_n) = 0$ und der Stetigkeit von f folgt $f(z_0) = 0$. Sei jetzt $k \in \mathbb{N}$ so, dass $f^{(j)}(z_0) = 0$ für alle $j = 0, \ldots, k-1$; dies ist sicher richtig für $k = 1$. Nach Satz 5.2.2 gilt dann

$$f_k(z) \;=\; \frac{f(z)}{(z-z_0)^k} \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j+k)}(z_0)}{(j+k)!}\,(z-z_0)^j \;,$$

für alle z in einer Kreisscheibe $K = K(z_0, r) \subset G$ mit $r > 0$, also insbesondere für alle z_n mit $n \geq n_0$. Also ist f_k holomorph und somit insbesondere stetig im Punkt z_0, und $f_k(z_n) = 0$ für alle großen n. Daraus folgt aber wiederum $f_k(z_0) = 0$, d. h., $f^{(k)}(z_0) = 0$. Hieraus folgt also induktiv $f^{(k)}(z_0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, das heißt f ist identisch Null in K. Daher ist $K \subset O$, also ist O offen. Gleichzeitig ist aber auch $\tilde{O} = G \setminus O$ offen, denn wäre ein $z \in \tilde{O}$ kein innerer Punkt, so gäbe es in jeder Kreisscheibe um z einen Häufungspunkt von $Z(f)$, also insbesondere eine Nullstelle von f, und damit wäre ja z in der Häufungspunktmenge O von $Z(f)$ enthalten. Wie oben beschrieben, folgt also $O = \emptyset$.

Um die Abzählbarkeit von $Z(f)$ zu zeigen, betrachten wir für $n \in \mathbb{N}$ die Mengen

$$F_n \;=\; \{z \in G :\ |z| \leq n,\ K(z, 1/n) \subset G\} \;.$$

Diese Mengen sind abgeschlossen und beschränkt (also kompakt), und ihre Vereinigung ist gleich G. In jeder der Mengen F_n können nur endlich viele Nullstellen von f liegen, da sonst nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß ein Häufungspunkt existieren müsste. Daher muss $Z(f)$ abzählbar sein.

Die Endlichkeit der Ordnung aller Nullstellen ist Inhalt einer Übungsaufgabe. □

Satz 5.3.5 (Identitätssatz für holomorphe Funktionen) *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und seien $f, g :$ $G \to \mathbb{C}$ holomorph. Falls die Menge der $z \in G$ mit $f(z) = g(z)$ einen Häufungspunkt in G hat, gilt*

$$f(z) \;=\; g(z) \qquad \forall\ z \in G.$$

Beweis: Wende den vorausgegangenen Satz auf die Funktion $h = f - g$ an! □

Aufgabe 5.3.6 *Zeige: Ist f holomorph in einem Gebiet G, und gibt es ein $z_0 \in G$ mit $f^{(j)}(z_0) = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$, so ist $f(z) \equiv 0$ auf einer Kreisscheibe um z_0.*

Aufgabe 5.3.7 *Für* reelle *z kennen wir die Funktion* $\arctan z$ *und wissen, dass ihre Ableitung gleich $1/(1+z^2)$ ist. Benutze den Identitätssatz, um zu zeigen: Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, welches die reelle Achse enthält, und ist $f : G \to C$ holomorph mit $f(z) = \arctan z$ für $z \in \mathbb{R}$, so ist $f'(z) = 1/(1+z^2)$ in ganz G.*

5.4 Der Satz von Morera

Der folgende Satz ist eine Umkehrung des Cauchyschen Integralsatzes:

Satz 5.4.1 (Satz von Morera) *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und sei $f : G \to \mathbb{C}$ stetig. Weiter sei für jedes Dreieck $\Delta \subset G$*

$$\oint_{\partial\Delta} f(z)\,dz \;=\; 0\,.$$

Dann gibt es in jeder Kreisscheibe, die ganz in G liegt, eine Stammfunktion zu f, und deshalb ist f holomorph in G.

Beweis: Sei $z_0 \in G$, und sei $r > 0$ so, dass $K(z_0, r) \subset G$ liegt. Wenn $\gamma_{z_0,z}$ die Verbindungsstrecke von z_0 nach z bezeichnet, dann definieren wir

$$F(z) \;=\; \int_{\gamma_{z_0,z}} f(w)\,dw \qquad \forall\; z \in K(z_0, r)\,.$$

Ist auch $z + h \in G$, dann folgt aus der Voraussetzung dass

$$F(z+h) \;-\; F(z) \;=\; \int_{\gamma_{z,z+h}} f(w)\,dw\,.$$

Wie im Beweis von Satz 4.3.3 kann man dann zeigen, dass F in $K(z_0, r)$ holomorph ist. Nach Satz 5.2.2 folgt aber dann die Holomorphie von f in $K(z_0, r)$, also die Behauptung. □

Bemerkung 5.4.2 *Im Beweis von* Satz 5.4.1 *haben wir die Existenz einer Stammfunktion F zu f gezeigt* – allerdings nur lokal, d. h., in jeder kleinen Kreisscheibe um ein $z_0 \in G$. *Global, also in ganz G, muss es keine solche Stammfunktion geben, wie das Beispiel $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = 1/z$ zeigt.*

Aufgabe 5.4.3 *Seien reellwertige Funktionen u, v in einem Gebiet G mindestens einmal stetig partiell nach x und y differenzierbar. Zeige: Genau dann erfüllen die Vektorfelder $(u, -v)^T$ und $(v, u)^T$ die Integrabilitätsbedingungen, wenn u und v den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen genügen.*

Aufgabe 5.4.4 *Zeige unter den oben gemachten Voraussetzungen, dass $f = u + i\,v$ in g stetig ist. Falls für u und v die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gelten, schließe aus dem Satz von Morera, dass f sogar in G holomorph ist.*

5.5 Weitere Anwendungen des Cauchyschen Integralsatzes

Definition 5.5.1 *Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ heißt* ein Cauchy-Gebiet, *wenn für* jede *in G holomorphe Funktion f und* jeden *geschlossenen Weg γ in G gilt*

$$\oint_{\gamma} f(z)\,dz \;=\; 0.$$

Dies ist offenbar äquivalent zur Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals von f in G.

Bemerkung 5.5.2 Satz 4.3.3 *sagt, dass jedes sternförmige Gebiet ein Cauchy-Gebiet ist. Später zeigen wir, dass Cauchy-Gebiete genau die einfach zusammenhängenden Gebiete sind.*

Satz 5.5.3 *Sei G ein Cauchy-Gebiet, und sei $f:\ G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt:*

(a) *Ist $z_0 \in G$ beliebig gewählt, und ist*

$$F(z) \;=\; \int_{z_0}^{z} f(w)\,dw \qquad \forall\, z \in G,$$

wobei entlang eines beliebigen Weges in G von z_0 nach z integriert wird, so ist F Stammfunktion zu f.

(b) *Ist $F_1:\ G \to \mathbb{C}$ Stammfunktion zu f, dann ist für einen beliebigen Weg γ in G mit Anfangspunkt a und Endpunkt b stets*

$$\int_\gamma f(z)\,dz \;=\; F_1(b) - F_1(a)\,.$$

(c) *Sind $F, F_1:\ G \to \mathbb{C}$ beide Stammfunktionen zu f, so gilt $F(z) - F_1(z) \equiv c$ für eine Konstante $c \in \mathbb{C}$.*

Beweis: Zu (a): Wegen der Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals ist F wohldefiniert, und es gilt für $z, z+h \in G$:

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} \;-\; f(z) \;=\; \frac{1}{h} \int_z^{z+h} [f(w) - f(z)]\,dw\,,$$

wobei wir für kleine h geradlinig integrieren dürfen. Daher ist die rechte Seite betragsmäßig höchstens gleich dem Maximum von $|f(w) - f(z)|$ auf der Verbindungsstrecke von z und $z+h$, und dies geht gegen Null für $h \to 0$.

Zu (b): Folgt aus Satz 4.1.1.

Zu (c): Sei o. B. d. A. F wie in (a). Nach (b) gilt dann $F(z) = F_1(z) - F_1(z_0)$, also die Behauptung. □

Definition 5.5.4 *Sei G ein Gebiet, und sei $z_0 \in G$. Wenn f auf $G \setminus \{z_0\}$ holomorph, aber in z_0 evtl. gar nicht definiert ist, dann heißt z_0 eine* isolierte Singularität *von f. Wenn bei geeigneter Definition von $f(z_0)$ erreicht werden kann, dass f auch in z_0 holomorph wird, dann heißt diese Singularität* hebbar.

Satz 5.5.5 (Riemannscher Hebbarkeitssatz) *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, sei $z_0 \in G$, und sei $f:\ G \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Falls dann Konstanten $r > 0$ und $K > 0$ existieren mit*

$$|f(z)| \;\le\; K \qquad \forall\, z \in K'(z_0, r)\ \big(\;=\;\{\, z:\ 0 < |z - z_0| < r\,\}\big)\,,$$

dann ist z_0 hebbare Singularität von f.

Beweis: Setze

$$h(z) \;=\; \begin{cases} (z-z_0)^2\, f(z), & z \in G \setminus \{z_0\}, \\[2ex] 0\,, & z \;=\; z_0. \end{cases}$$

Dann ist h auf $G \setminus \{z_0\}$ holomorph. Wegen

$$\left| \frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} \right| \;=\; |(z-z_0)\, f(z)| \;\le\; |z - z_0|\; K \qquad \forall\, z \in K'(z_0, r)$$

folgt dass h auch im Punkt z_0 holomorph ist, und $h'(z_0) = 0$. Nach Satz 5.2.2 folgt $h(z) = \sum_2^\infty h_j\,(z - z_0)^j$ in $K(z_0, r)$. Wenn wir $f(z_0) = h_2$ setzen, dann folgt offenbar $f(z) = \sum_0^\infty h_{j+2}\,(z - z_0)^j$ in $K(z_0, r)$, also die Holomorphie von f in z_0. □

Bemerkung 5.5.6 *In* Satz 4.3.3 *und den Vorstufen dazu hatten wir einen Ausnahmepunkt z_0 zugelassen, in dem f zwar stetig, aber nicht unbedingt holomorph sein musste. Da aus Stetigkeit die Beschränktheit folgt, zeigt der vorstehende Hebbarkeitssatz, dass eine solche Stelle gar nicht existieren kann, weil dann f auch in z_0 holomorph sein muss.*

Lemma 5.5.7 *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, sei $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph, und seien $z_0 \in G$ und $r > 0$ so, dass $\overline{K}(z_0, r) \subset G$. Dann gilt*

$$|f^{(j)}(z_0)| \;\leq\; \frac{j!}{r^j} \max_{|z-z_0|=r} |f(z)| \qquad \forall\, j \in \mathbb{N}_0\,.$$

Beweis: Nach Satz 5.2.2 (a) gilt

$$f^{(j)}(z_0) \;=\; \frac{j!}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{j+1}}\, dz,$$

und daraus folgt die Behauptung mit Lemma 1.2.7 (a). □

Satz 5.5.8 (Satz von Liouville) *Eine beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

Beweis: Sei f ganz, also holomorph in $\mathbb{C}$, und gelte $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dann folgt nach dem obigen Lemma $|f^{(j)}(0)| \leq M j!/r^j$ für $j \in \mathbb{N}_0$ und *beliebiges* $r > 0$. Für $r \to \infty$ erhalten wir deshalb $f^{(j)}(0) = 0$ für $j \geq 1$. In der Potenzreihe von f verschwinden deshalb alle Koeffizienten außer dem absoluten Glied. □

Satz 5.5.9 (Fundamentalsatz der Algebra) *Ein Polynom ohne Nullstelle in $\mathbb{C}$ ist konstant.*

Beweis: Sei p ein Polynom n-ten Grades, mit $n \geq 1$, und sei o. B. d. A. sein höchster Koeffizient gleich 1, also $p(z) = z^n + \sum_0^{n-1} a_j\, z^j$. Dann gilt für $|z| \geq r > 0$

$$|p(z)| \;\geq\; |z|^n \left(1 \;-\; \sum_{j=0}^{n-1} \frac{|a_j|}{r^{n-j}} \right),$$

und für genügend großes r ist die rechte Seite positiv. Daher ist $f = 1/p$ außerhalb von $K(0,r)$ beschränkt, kann also nach dem Satz von Liouville keine ganze Funktion sein. Daher muss p eine Nullstelle haben. □

Satz 5.5.10 (Maximumprinzip) *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und sei $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Dann hat $|f(z)|$ in G kein lokales Maximum.*

Beweis: Sei $z_0 \in G$ und $r > 0$ so dass $\overline{K}(z_0, r) \subset G$. Falls $f(z_0) = 0$ ist, hat $|f(z)|$ sicher kein lokales Maximum in z_0. Sei deshalb o. B. d. A. $f(z_0) = 1$ angenommen, denn sonst können wir zu $f(z)/f(z_0)$ übergehen. Nach Satz 5.2.2 gilt dann für ein $k \in \mathbb{N}$

$$f(z) \;=\; 1 \;+\; \sum_{j=k}^{\infty} f_j\, (z-z_0)^j \qquad \forall\, z \in \overline{K}(z_0, r),$$

und $f_k \neq 0$. Sei $f_k = \rho\, \mathrm{e}^{i\phi}$ und $z - z_0 = r\, \mathrm{e}^{-i\phi/k}$. Dann folgt

$$|f(z)| \;\geq\; 1 \;+\; \rho\, r^k \;-\; \sum_{j=k+1}^{\infty} |f_j|\, r^j \;=\; 1 \;+\; r^k \left(\rho \;-\; \sum_{j=1}^{\infty} |f_{j+k}|\, r^j \right).$$

Wenn r klein genug ist, ist $\rho > \sum_{j=1}^{\infty} |f_{j+k}|\, r^j$, und dann ist $|f(z)| > 1 = f(z_0)$. Deshalb kann z_0 kein lokales Maximum von $|f(z)|$ sein. □

Aufgabe 5.5.11 *Zeige folgende* Substitutionsregel für komplexe Kurvenintegrale *:*

Seien $G, \tilde{G} \subset \mathbb{C}$ Gebiete, seien $\phi : G \to \tilde{G}$ und $f : \tilde{G} \to \mathbb{C}$ holomorph, und sei γ eine stückweise glatte Kurve in G, sowie $\tilde{\gamma}$ das Bild von γ unter ϕ. Dann ist $\tilde{\gamma}$ stückweise glatte Kurve in $\tilde{G}$, und

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(w)\, dw \;=\; \int_{\gamma} f(\phi(z))\, \phi'(z)\, dz.$$

Aufgabe 5.5.12 *Benutze die vorstehende Aufgabe, um Folgendes zu zeigen:*

Seien $G, \tilde{G} \subset \mathbb{C}$ Gebiete, und sei $f : G \to \tilde{G}$ biholomorph, *d. h., f ist bijektiv und f, f^{-1} beide holomorph auf G bzw. $\tilde{G}$. Ist dann G ein Cauchy-Gebiet, so auch $\tilde{G}$.* **Bemerkung:** *Wir werden später noch die Holomorphie der Umkehrfunktion untersuchen!*

Aufgabe 5.5.13 *Zeige, dass* $\sin z/z$ *im Nullpunkt eine hebbare Singularität hat. Was ist der richtige Funktionswert im Nullpunkt für diese Funktion?*

Aufgabe 5.5.14 *Warum ist es nicht richtig zu sagen, dass $\sqrt{z}$ im Nullpunkt eine isolierte Singularität hat?*

Aufgabe 5.5.15 *Zeige: Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und ist $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und so, dass $|f(z)|$ konstant ist, so ist auch $f(z)$ konstant.*

Aufgabe 5.5.16 *Zeige folgendes* **Minimumprinzip:**

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, nicht konstant und ohne Nullstelle in G. Dann hat $|f(z)|$ in G kein lokales Minimum.

Kapitel 6

Laurentreihen und Klassifikation von Singularitäten

6.1 Singularitäten

Definition 6.1.1 *Sei z_0 eine isolierte Singularität einer Funktion f, also f holomorph auf einer punktierten Kreisscheibe $K'(z_0, r)$ mit einem $r > 0$. Wenn ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, für welches $(z - z_0)^m f(z)$ für $z \to z_0$ einen nicht verschwindenden Grenzwert besitzt, dann heißt z_0* ein Pol von f, *und m heißt* die Ordnung des Pols. *Wenn z_0 weder ein Pol noch eine hebbare Singularität von f ist, dann heißt z_0* wesentliche Singularität *von f.*

Aufgabe 6.1.2 *Zeige, dass $f(z) = \mathrm{e}^{1/z}$ im Nullpunkt eine wesentliche Singularität hat.*

Lösung: Für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ und $z = x > 0$ gilt $\lim_{x \to 0+} x^m \mathrm{e}^{1/x} = \lim_{t \to \infty} \mathrm{e}^t / t^m = \infty$. Also kann $z_0 = 0$ weder hebbar noch ein Pol sein. □

Satz 6.1.3 *Sei z_0 isolierte Singularität von f. Dann gilt:*

(a) *Falls für alle $\alpha \in \mathbb{R}_+$ gilt, dass $|z - z_0|^\alpha \, |f(z)|$ für $z \to z_0$ unbeschränkt ist, dann ist z_0 eine wesentliche Singularität von f.*

(b) *Falls ein $\alpha \in \mathbb{R}_+$ existiert, so dass $|z - z_0|^\alpha \, |f(z)|$ für $z \to z_0$ beschränkt bleibt, dann ist z_0 entweder ein Pol oder eine hebbare Singularität von f.*

Beweis: Teil (a) ist klar nach Definition eines Pols.

Zu (b): Die Menge der $n \in \mathbb{N}_0$, für die $g_n(z) = (z - z_0)^n \, f(z)$ bei $z \to z_0$ beschränkt bleibt, ist nicht leer, hat also ein Minimum m. Aus dem Hebbarkeitssatz folgt, dass z_0 hebbare Singularität von g_m ist. Wäre $g_m(z_0) = 0$, so könnte m nicht minimal gewesen sein. Daraus folgt die Behauptung. □

Satz 6.1.4 *Sei z_0 eine isolierte Singularität einer Funktion f. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *Die Stelle z_0 ist ein Pol von f.*

(b) $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

(c) *Die Funktion* $g = 1/f$ *hat in* z_0 *eine Nullstelle, also insbesondere eine hebbare Singularität.*

(d) *Es gibt eindeutig bestimmte Zahlen* $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{C}$ *mit* $a_m \neq 0$*, so dass die Funktion*

$$h(z) \;=\; f(z) \;-\; \sum_{j=1}^{m} \frac{a_j}{(z-z_0)^j} \tag{6.1.1}$$

in z_0 *eine hebbare Singularität hat.*

Beweis: Zu (a) $\Longrightarrow$ (b): Klar nach Definition eines Pols.

Zu (b) $\Longrightarrow$ (c): Klar nach dem Hebbarkeitssatz und den Rechenregeln für Grenzwerte.

Zu (c) $\Longrightarrow$ (a): Sei m die Ordnung der Nullstelle von g, dann folgt $g(z) = (z-z_0)^m\, \tilde g(z)$ mit $\tilde g(z_0) \neq 0$. Also ist $(z-z_0)^m\, f(z) = 1/\tilde g(z)$, und somit ist z_0 ein Pol m-ter Ordnung von f.

Zu (a) $\Longrightarrow$ (d): Sei m die Polordnung, also $g(z) = (z-z_0)^m\, f(z)$ in z_0 holomorph. Nach Satz 5.2.2 gilt dann

$$g(z) \;=\; \sum_0^\infty g_j\, (z-z_0)^j \qquad \forall\, z \in K(z_0, r)$$

mit einem genügend kleinen $r > 0$. Also ist

$$f(z) \;=\; \sum_0^{m-1} g_j\, (z-z_0)^{j-m} \;+\; h(z) \qquad \forall\, z \in K(z_0, r),$$

mit $h(z) = \sum_0^\infty g_{j+m}\, (z-z_0)^j$ holomorph in $K(z_0, r)$. Also gilt (6.1.1) mit $a_j = g_{m-j}$. Zur Eindeutigkeit der a_j: Ist (6.1.1) auch richtig für Zahlen b_j anstelle von a_j und μ anstelle von m, so folgt dass

$$d(z) \;=\; \sum_{j=1}^{m} \frac{a_j}{(z-z_0)^j} \;-\; \sum_{j=1}^{\mu} \frac{b_j}{(z-z_0)^j}$$

in $K(z_0, r)$ holomorph ist. Offenbar ist dann aber d eine ganze Funktion, und $d(z) \to 0$ für $z \to \infty$. Nach dem Liouvilleschen Satz ist also $d(z) \equiv 0$, das heißt $(z-z_0)^\nu\, d(z)$, mit $\nu = \max(m, \mu)$, ist das Nullpolynom. Daraus folgt aber $m = \mu$ und $a_j = b_j$.

Zu (d) $\Longrightarrow$ (a): Aus (6.1.1) folgt $(z-z_0)^m\, f(z) \to a_m$, also ist z_0 ein Pol m-ter Ordnung von f. $\square$

Aufgabe 6.1.5 *Warum ist es nicht richtig zu sagen, dass der Nullpunkt ein Pol von* $\log z$ *ist, obwohl* $\log z$ *für* $z \to 0$ *gegen* ∞ *geht?*

Definition 6.1.6 *Die Summe* $\sum_{j=1}^m \frac{a_j}{(z-z_0)^j}$ *in* Satz 6.1.4 (d) *heißt auch* der Hauptteil des Poles von f im Punkt z_0.

Satz 6.1.7 *Sei* z_0 *eine isolierte Singularität von* f*. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *Die Stelle* z_0 *ist eine wesentliche Singularität von* f.

(b) $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, w \in \mathbb{C} \quad \forall\, r > 0 \quad \exists\, z \in K'(z_0, r) \,:\, |f(z) - w| \;<\; \varepsilon.$

Beweis: Zu (a) $\Longrightarrow$ (b): Falls (b) nicht gilt, dann folgt

$$\exists\, \varepsilon > 0 \;\exists\, w \in \mathbb{C} \;\exists\, r > 0 \;\forall\, z \in K'(z_0, r): \;\; |f(z) - w| \;\geq\; \varepsilon\,.$$

Somit ist $g(z) = 1/[f(z) - w]$ in $K'(z_0, r)$ beschränkt, also z_0 eine hebbare Singularität von g. Sei m die Nullstellenordnung von g im Punkt z_0 (also evtl. $m = 0$). Dann hat $f(z) = w + 1/g(z)$ nach Satz 6.1.4 in z_0 einen Pol (falls $m \geq 1$ ist) bzw. eine hebbare Singularität (für $m = 0$).

Zu (b) $\Longrightarrow$ (a): Wenn (b) richtig ist, kann $f(z)$ nicht beschränkt bleiben für $z \to z_0$, aber auch nicht gegen ∞ streben. Daher kann z_0 weder hebbar noch ein Pol sein. $\Box$

Definition 6.1.8 *Wir sagen:* Der Punkt ∞ ist eine isolierte Singularität von f, *wenn es ein $R > 0$ gibt, so dass f außerhalb von $\overline{K}(0, R)$ holomorph ist. Wir nennen dann ∞ eine* hebbare Singularität *bzw.* einen Pol *bzw.* eine wesentliche Singularität *von f, wenn der Nullpunkt eine solche Singularität von $g(z) = f(1/z)$ ist. Insbesondere heißt f* holomorph im Punkt ∞*, falls ∞ hebbare Singularität von f ist, und dies gilt falls f für $z \to \infty$ beschränkt bleibt.*

Aus dieser Definition ergeben sich unmittelbar die folgenden Analoga zu den Sätzen 6.1.4 und 6.1.7:

Satz 6.1.9 *Sei ∞ eine isolierte Singularität einer Funktion f. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *Die Stelle ∞ ist ein Pol von f.*

(b) $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$.

(c) *Die Funktion $g = 1/f$ hat in ∞ eine Nullstelle (also insbesondere eine hebbare Singularität).*

(d) *Es gibt eindeutig bestimmte Zahlen $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{C}$ mit $a_m \neq 0$, so dass die Funktion*

$$h(z) \;=\; f(z) \;-\; \sum_{j=1}^{m} a_j\, z^j \tag{6.1.2}$$

in ∞ eine hebbare Singularität hat.

Satz 6.1.10 *Sei ∞ eine isolierte Singularität von f. Dann sind folgende Ausagen äquivalent:*

(a) *Die Stelle ∞ ist eine wesentliche Singularität von f.*

(b) $\forall\, \varepsilon > 0 \;\forall\, w \in \mathbb{C} \;\forall\, r > 0 \;\exists\, z \notin \overline{K}(0, r): \;\; |f(z) - w| \;<\; \varepsilon.$

Aufgabe 6.1.11 *Offenbar ist ∞ eine isolierte Singularität für jede rationale Funktion f. Entscheide, wann dies ein Pol, eine hebbare oder eine wesentliche Singularität ist!*

Lösung: O. B. d. A. sei f nicht die Nullfunktion. Dann ist $f(z) = p(z)/q(z)$ mit Polynomen p, q vom Grade $n, m \geq 0$. Also ist

$$f(z) \;=\; z^{n-m}\, \frac{z^{-n}\, p(z)}{z^{-m}\, q(z)},$$

und $z^{-n}\, p(z)$ sowie $z^{-m}\, q(z)$ haben für $z \to \infty$ nicht verschwindende Grenzwerte. Daher ist ∞ ein Pol von f, falls $n > m$ ist, bzw. eine hebbare Singularität, falls $n \leq m$ ist. $\Box$

Aufgabe 6.1.12 *Bestimme die Art der Singularität der folgenden Funktionen im Nullpunkt:*

$$\text{(a)}\quad \frac{\cos z}{z}\ , \qquad \text{(b)}\quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}\ , \qquad \text{(c)}\quad \sin(1/z)\ .$$

Bestimme im Falle eines Poles auch die Ordnung und den Hauptteil.

Aufgabe 6.1.13 *Entscheide, ob* $1/\sin z$ *bei* ∞ *eine isolierte Singularität hat.*

6.2 Laurentreihen

Definition 6.2.1

(a) *Seien Zahlen* $a_k \in \mathbb{C}$ *für alle* $k \in \mathbb{Z}$, *sowie ein Punkt* $z_0 \in \mathbb{C}$ *beliebig gegeben. Der Ausdruck*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\ (z-z_0)^k \tag{6.2.1}$$

heißt dann eine Laurentreihe mit Entwicklungspunkt z_0 und Koeffizienten a_k. *Die Reihe*

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k\ (z-z_0)^k \ = \ \sum_{j=1}^{\infty} a_{-j}\ \frac{1}{(z-z_0)^j}$$

heißt der Hauptteil der Laurentreihe. *Dieser Hauptteil ist offenbar* eine Potenzreihe in der Veränderlichen $w = 1/(z-z_0)$. *Die Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\ (z-z_0)^k$$

heißt auch der Nebenteil der Laurentreihe. *Dieser Nebenteil ist eine Potenzreihe in* $w = z - z_0$.

(b) *Eine Laurentreihe heißt* konvergent für ein z $(\neq z_0)$, *falls sowohl der Haupt- als auch der Nebenteil für dieses* z *konvergieren.*

Bemerkung 6.2.2 *Sei eine Laurentreihe* (6.2.1) *beliebig gegeben, und seien*

$$R \ = \ \frac{1}{\limsup \sqrt[k]{|a_k|}}\ , \qquad r \ = \ \limsup \sqrt[k]{|a_{-k}|}\ . \tag{6.2.2}$$

Dann sind der Nebenteil für alle z *mit* $|z-z_0| < R$, *und der Hauptteil für alle* $w = 1/(z-z_0)$ *mit* $|w| < 1/r$, *d. h., für alle* z *mit* $|z-z_0| > r$, *absolut konvergent. Nach Definition ist die Laurentreihe also absolut konvergent für alle* z *mit*

$$r \ < \ |z-z_0| \ < \ R. \tag{6.2.3}$$

Diese Punktmenge ist leer, falls $r \geq R$, *und sonst* ein Kreisring $K(z_0, r, R)$ um z_0 mit Innenradius r und Außenradius R. *Wie bei Potenzreihen gilt auch für Laurentreihen:* Für $r < \tilde{r} < \tilde{R} < R$ ist die Reihe (6.2.1) in $K(z_0, \tilde{r}, \tilde{R})$ sogar gleichmäßig konvergent. *Für* $|z-z_0| > R$ *ist der Nebenteil, und für* $|z-z_0| < r$ *der Hauptteil der Laurentreihe divergent. Also kann die Laurentreihe höchstens noch in Randpunkten des Kreisringes konvergieren. Dies muss jeweils gesondert untersucht werden.*

Beachte, dass $r = 0$ *und/oder* $R = \infty$ *sein kann, so dass* (6.2.3) *auch eine punktierte Kreisscheibe, oder das Äußere einer abgeschlossenen Kreisscheibe, oder sogar gleich* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *sein kann.*

Aufgabe 6.2.3 *Finde* $K(z_0, r, R)$ *für folgende Laurentreihen:*

$$\text{(a)}\qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^k\ , \qquad\qquad \text{(b)}\qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} [2 - \operatorname{sign} k]^k\ z^k\ .$$

Lösung: Zu (a): $R = r = 1$, also ist $K(z_0, r, R)$ leer.

Zu (b): $\operatorname{sign} k = 1$ für $k > 0$ bzw. $= -1$ für $k < 0$. Also ist $a_k = 1$, $a_{-k} = 3^{-k}$ für $k \geq 1$. Deshalb ist $R = 1$, $r = 1/3$. □

Lemma 6.2.4 *Seien $0 \leq r < R \leq \infty$, $z_0 \in \mathbb{C}$, und sei $f: K(z_0, r, R) \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für $0 < \varepsilon < (R-r)/2$ und alle $z \in K(z_0, r+\varepsilon, R-\varepsilon)$:*

$$f(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\left(\oint_{|w-z_0|=R-\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \;-\; \oint_{|w-z_0|=r+\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z}\,dw\right), \tag{6.2.4}$$

wobei die Kreise in beiden Integralen positiv orientiert seien.

Beweis: (a) Angenommen, das Lemma ist richtig für $z_0 = 0$. Dann kann man durch Substitution $z \mapsto z + z_0$ und $w \mapsto w + z_0$ sehen, dass es auch allgemein gilt. Somit genügt es, den Fall $z_0 = 0$ zu betrachten.

(b) Beide Integrale in (6.2.4) sind vom Cauchy-Typ, also stehen auf beiden Seiten von (6.2.4) Funktionen, die in $K(z_0, r+\varepsilon, R-\varepsilon)$ holomorph sind. Nach dem Identitätssatz genügt es deshalb, die Gleichung etwa für alle $z \in K(z_0, r+\varepsilon, R-\varepsilon)$ mit $z - z_0$ auf der positiv-reellen Achse zu beweisen.

(c) Sei jetzt $z_0 = 0$ und $z = x$ mit $r+\varepsilon < x < R-\varepsilon$ vorausgesetzt. Für $0 < \alpha < \pi$ sei $\gamma_\alpha = \gamma_\alpha^{(1)} + \ldots + \gamma_\alpha^{(4)}$ die Summe aus vier Wegen $\gamma_\alpha^{(j)}$ mit folgenden Parameterdarstellungen:

$$\begin{aligned}
\gamma_\alpha^{(1)}:&\quad w(t) = R\,\mathrm{e}^{it}\,, \quad -\alpha \leq t \leq \alpha\,,\\
\gamma_\alpha^{(2)}:&\quad w(t) = [t\,r + (1-t)R]\,\mathrm{e}^{i\alpha}\,, \quad 0 \leq t \leq 1\,,\\
\gamma_\alpha^{(3)}:&\quad w(t) = r\,\mathrm{e}^{-it}\,, \quad -\alpha \leq t \leq \alpha\,,\\
\gamma_\alpha^{(4)}:&\quad w(t) = [t\,R + (1-t)r]\,\mathrm{e}^{-i\alpha}\,, \quad 0 \leq t \leq 1\,.
\end{aligned}$$

Dieser Weg hat Windungszahl 1 bzgl. z und liegt für kleine Werte α in einem sternförmigen Teilgebiet von $K(0, r, R)$, und deshalb gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\alpha} \frac{f(w)}{w-z}\,dw.$$

Durch Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes zeigt man, dass diese Darstellung auch richtig bleibt, wenn man α größer werden lässt, und sogar dann, wenn $\alpha \to \pi$. In diesem Fall gilt aber $\gamma_\alpha^{(2)} = -\gamma_\alpha^{(4)}$, so dass sich diese Teilintegrale aufheben. Das ergibt die Behauptung. □

Satz 6.2.5 *Seien $0 \leq r < R \leq \infty$, $z_0 \in \mathbb{C}$, und sei $f: K(z_0, r, R) \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt*

$$f(z) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k\,(z-z_0)^k \qquad \forall\, z \in K(z_0, r, R),$$

wobei für ein beliebiges $\rho \in (r, R)$ gilt:

$$f_k \;=\; \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}. \tag{6.2.5}$$

Beweis: Es gilt

$$\frac{1}{w-z} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{(w-z_0)^{k+1}} & \text{für} \quad |z-z_0| < |w-z_0|\,, \\[2ex] \displaystyle -\sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{(z-z_0)^k}{(w-z_0)^{k+1}} & \text{für} \quad |z-z_0| > |w-z_0|\,. \end{cases}$$

Für $r < \tilde{r} < |z-z_0| < \tilde{R} < R$ folgt deshalb aus Lemma 6.2.4, dass f sich als Laurentreihe schreiben läßt, wobei die Koeffizienten fast wie in (6.2.5) sind, allerdings mit $\tilde{R}$ anstelle von ρ (falls $k \geq 0$ ist) bzw. $\tilde{r}$ anstelle von ρ (für $k < 0$). Ähnlich wie im Beweis von Lemma 6.2.4 zeigt man aber, dass die Wahl des Radius unerheblich ist, da der Wert des Integrals davon nicht abhängt. □

Aus diesem Satz folgt offenbar, dass sich eine Funktion mit einer isolierten Singularität im Punkt z_0 immer in eine Laurentreihe um z_0 entwickeln läßt. Diese Laurentreihe konvergiert dann in der größten punktierten Kreisscheibe um z_0, in der die Funktion holomorph ist. Wir wollen jetzt an Hand der Laurentreihe feststellen, welche Art von Singularität in z_0 vorliegt:

Definition 6.2.6 *Gegeben sei eine Laurentreihe* (6.2.1)*.*

(a) *Wir sagen:* Der Hauptteil von (6.2.1) verschwindet*, wenn $a_k = 0$ gilt für alle $k \leq -1$.*

(b) *Wir sagen:* Der Hauptteil von (6.2.1) bricht ab*, wenn ein $k_0 \leq -1$ existiert, für welches $a_k = 0$ gilt für alle $k < k_0$, während $a_{k_0} \neq 0$ ist.*

(c) *Wir sagen:* Der Hauptteil von (6.2.1) bricht nicht ab*, wenn $a_k \neq 0$ gilt für unendlich viele $k \leq -1$.*

Satz 6.2.7 *Sei z_0 eine isolierte Singularität von f. Dann gilt:*

(a) *Falls der Hauptteil der Laurentreihe von f um z_0 verschwindet, ist z_0 eine hebbare Singularität.*

(b) *Falls der Hauptteil abbricht, ist z_0 ein Pol, und dessen Ordnung ist gleich m genau dann, wenn $a_{-m} \neq 0$, aber $a_k = 0$ für alle $k < -m$ ist.*

(c) *Falls der Hauptteil nicht abbricht, ist z_0 wesentliche Singularität von f.*

Beweis: Im Fall (a) ist die Laurentreihe eigentlich eine Potenzreihe, und somit ist $f(z)$ für $z \to z_0$ beschränkt, also z_0 hebbar. Im Fall (b) ist $(z-z_0)^m f(z)$ beschränkt und strebt gegen $a_{-m} \neq 0$ für $z \to z_0$, also ist z_0 Pol m-ter Ordnung. Der dritte Fall ergibt sich aus der ersten der nachfolgenden Übungsaufgaben. □

Bemerkung 6.2.8 *Da die drei Fälle von Singularitäten und auch die drei Aussagen über den Hauptteil einer Laurentreihe jeweils eine vollständige Fallunterscheidung bilden, ergibt sich, dass in obigem Satz alle drei Teilaussagen umkehrbar sind. Weiter gilt für Laurentreihen folgende Aussage:*

(Identitätssatz für Laurentreihen) Seien $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} f_k\,(z-z_0)^k$ und $g(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} g_k\,(z-z_0)^k$ beide konvergent auf $K(z_0, r, R)$. Falls die Menge der z mit $f(z) = g(z)$ einen Häufungspunkt in $K(z_0, r, R)$ besitzt, dann folgt $f_k = g_k$ für alle k.

Dies gilt, da nach dem Identitätssatz $f(z) \equiv g(z)$ folgt, und dann gilt die Behauptung wegen (6.2.5)*.*

Beachte, dass Potenzreihen spezielle Laurentreihen sind, und deshalb ist die Methode des Koeffizientenvergleichs *für Potenz- wie auch Laurentreihen gerechtfertigt.*

Bemerkung 6.2.9 *Seien* $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} f_k\,(z-z_0)^k$ *und* $g(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} g_k\,(z-z_0)^k$ *beide konvergent auf* $K(z_0,r,R)$. *Beachtet man, dass beide Reihen dann sogar absolut konvergieren, so kann man in der Doppelreihe* $\sum_{j,k=-\infty}^{\infty} f_j\,g_k\,(z-z_0)^{j+k}$ *die Terme beliebig umordnen. Tut man dies so, dass man alle Terme mit* $j+k=n$ *zusammenfaßt, so erhält man*

$$f(z)\,g(z) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,(z-z_0)^n, \quad \forall z \in K(z_0,r,R),$$

mit

$$c_n \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{n-k}\,g_k \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_{n-k}\,f_k \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}, \tag{6.2.6}$$

wobei alle diese Reihen absolut konvergieren. Dies ist die Faltungsformel für Laurentreihen. *Für Potenzreihen stimmt diese mit der üblichen Formel für das Cauchy-Produkt überein.*

Aufgabe 6.2.10 *Finde die Laurentreihe der Funktion* $f(z) = z^{-3}\,\mathrm{e}^{z^2}$ *um den Entwicklungspunkt* $z_0 = 0$.

Lösung: Es ist $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{2k-3}/k!$ für alle $z \neq 0$, und deshalb gilt $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\,z^j$, mit $a_j = 1/k!$ falls $j = 2k-3$ ist mit $k \geq 0$, und $a_j = 0$ für alle anderen j. □

Aufgabe 6.2.11 *Finde die Laurentreihe um* $z_0 = 0$ *der Funktion*

$$f(z) \;=\; \cosh(1/z)\,\sinh z.$$

Lösung: Es ist $\cosh(1/z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k\,z^{2k}$, $\sinh z = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k\,z^{2k+1}$, mit

$$f_k \;=\; \begin{cases} 1/(2|k|)! & (k \leq 0), \\ 0 & (k > 0), \end{cases} \qquad g_k \;=\; \begin{cases} 1/(2k+1)! & (k \geq 0), \\ 0 & (\text{sonst}). \end{cases}$$

Daraus folgt $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,z^{2n+1}$ mit

$$c_n \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{n-k}\,g_k \;=\; \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!\,(2|n-k|)!},$$

wobei $n_0 = \max\{0,n\}$ ist. □

Aufgabe 6.2.12 *Zeige: Ist* z_0 *isolierte Singularität von* f, *und gilt für ein* $m \in \mathbb{Z}$, *dass* $(z-z_0)^m\,f(z)$ *für* $z \to z_0$ *beschränkt ist, so folgt aus* (6.2.5), *dass* $f_k = 0$ *für alle* $k < -m$. *Benutze dies zum Beweis von* Satz 6.2.7 (c).

Aufgabe 6.2.13 *Finde Laurentreihen für* $f(z) = (1-z^2)^{-1} \;+\; (3-z)^{-1}$ *für die Kreisringe*

(a) $K(0,0,1)$, (b) $K(0,1,3)$, (c) $K(0,3,\infty)$.

Kapitel 7

Die globale Version des Cauchyschen Integralsatzes

7.1 Wegekomplexe und Zyklen von Wegen

Für das Folgende ist es bequem, statt nur eines Weges endlich viele Wege $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ in einem Gebiet G simultan zu betrachten. Dabei soll auch erlaubt sein, dass ein Weg mehrmals aufteten kann. Deshalb ist es formal nicht richtig, von einer Menge von Wegen zu sprechen. Statt dessen sprechen wir von einem *Wegekomplex* $\mathcal{K}$, bestehend aus den Wegen $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, und schreiben

$$\mathcal{K} \;=< \gamma_1, \ldots, \gamma_n > \,.$$

Wir schreiben γ_j^* für den Träger des Weges γ_j und setzen $\mathcal{K}^* = \cup_{j=1}^n \gamma_j^*$. Falls $f : \mathcal{K}^* \to \mathbb{C}$ stetig ist, setzen wir

$$\int_{\mathcal{K}} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f(z)\,dz. \tag{7.1.1}$$

Wir betrachten auch den *leeren Wegekomplex* und setzen $\int_{\mathcal{K}} f(z)\,dz = 0$ falls $\mathcal{K} = \emptyset$ und f beliebig ist.

Zwei Wegekomplexe $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$ heißen *äquivalent* oder einfacher *gleich*, wenn für *jede* auf $\mathcal{K}_1^* \cup \mathcal{K}_2^*$ stetige Funktion f gilt

$$\int_{\mathcal{K}_1} f(z)\,dz \;=\; \int_{\mathcal{K}_2} f(z)\,dz\,. \tag{7.1.2}$$

Ist z. B. ein Weg $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, so gilt (7.1.2) für $\mathcal{K}_1 =< \gamma >$ und $\mathcal{K}_2 =< \gamma_1, \gamma_2 >$. Gilt $\gamma_1 = -\gamma_2$, so darf man diese Wege zu einem Wegekomplex hinzufügen, ohne diesen zu ändern, denn dann ist $< \gamma_1, \gamma_2 >$ äquivalent zum leeren Wegekomplex. Außerdem sind Wegekomplexe äquivalent, wenn sie sich nur durch die Reihenfolge der Wege unterscheiden.

Ein Wegekomplex heißt *ein Zyklus*, wenn er gleich einem Wegekomplex aus lauter geschlossenen Wegen ist. D. h., jeder Komplex aus lauter geschlossenen Wegen ist ein Zyklus, aber auch $\mathcal{K} =< \gamma_1, \gamma_2 >$, wenn $\gamma_1 + \gamma_2$ geschlossen ist. Der *Index* eines Zyklus $\mathcal{K}$ bzgl. eines $z \notin \mathcal{K}^*$ sei gleich

$$\mathrm{Ind}_{\mathcal{K}}(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{K}} \frac{dw}{w - z} \quad .$$

Ist $\mathcal{K} =< \gamma_1, \ldots, \gamma_n >$, so sei $-\mathcal{K} =< -\gamma_1, \ldots, -\gamma_n >$. Daher gilt

$$\int_{-\mathcal{K}} f(z)\,dz \;=\; -\int_{\mathcal{K}} f(z)\,dz.$$

Schließlich sei für $\mathcal{K}_1 =< \gamma_1^{(j)}, \dots, \gamma_{n_j}^{(j)} >$ noch

$$\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 =< \gamma_1^{(1)}, \dots, \gamma_{n_1}^{(1)}, \gamma_1^{(2)}, \dots, \gamma_{n_2}^{(2)} >$$

gesetzt, und dann gilt

$$\int_{\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2} f(z)\, dz \; = \; \int_{\mathcal{K}_1} f(z)\, dz \; + \; \int_{\mathcal{K}_2} f(z)\, dz\,,$$

wenn f auf $\mathcal{K}_1^* \cup \mathcal{K}_2^*$ stetig ist.

Aufgabe 7.1.1 *Welche Art von Wegen darf man aus einem Wegekomplex immer entfernen, ohne diesen zu verändern?*

Aufgabe 7.1.2 *Zeige, dass zwei Wegekomplexe gleich sind, wenn sie sich nur durch die Reihenfolge der enthaltenen Wege unterscheiden.*

Aufgabe 7.1.3 *Zeige dass ein Wegekomplex sich im Allgemeinen ändert, wenn man einen der Wege, aus denen er besteht, ein zweites Mal hinzunimmt.*

Aufgabe 7.1.4 *Wie sollte man sinnvollerweise $\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_2$ für Wegekomplexe $\mathcal{K}_j$ definieren?*

Aufgabe 7.1.5 *Bestimme die Indexfunktion für einen Wegekomplex aus zwei konzentrischen positiv orientierten Kreisen.*

Aufgabe 7.1.6 *Zeige für die Indexfunktion die Regeln*

(a) $\operatorname{Ind}_{-\mathcal{K}}(z) = -\operatorname{Ind}_{\mathcal{K}}(z)$,

(b) $\operatorname{Ind}_{\mathcal{K}_1 \pm \mathcal{K}_2}(z) = \operatorname{Ind}_{\mathcal{K}_1} \pm \operatorname{Ind}_{\mathcal{K}_2}(z)$.

Aufgabe 7.1.7 *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Cauchy-Gebiet, und seien nur Wegekomplexe in G betrachtet. Falls wir dann zwei Wegekomplexe bereits als äquivalent ansehen, wenn* (7.1.2) *für alle f gilt, die auf G holomorph sind, welche Art von Wegen darf man dann aus einem Wegekomplex entfernen?*

7.2 Die allgemeine Form des Cauchyschen Integralsatzes

Satz 7.2.1 (Integralsatz und -formel für Zyklen) *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt:*

(a) *Für jeden Zyklus $\mathcal{K}$ in G mit*

$$\operatorname{Ind}_{\mathcal{K}}(z) \; = \; 0 \qquad \forall\, z \notin G \tag{7.2.1}$$

ist immer $\int_{\mathcal{K}} f(z)\, dz \; = \; 0$, und es gilt die allgemeine Cauchy-Formel

$$f(z)\, \operatorname{Ind}_{\mathcal{K}}(z) \; = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{K}} \frac{f(w)}{w - z}\, dw \qquad \forall\, z \in G \setminus \mathcal{K}^*.$$

(b) *Für zwei Zyklen $\mathcal{K}_j$ in G mit*

$$\operatorname{Ind}_{\mathcal{K}_1}(z) \; = \; \operatorname{Ind}_{\mathcal{K}_2}(z) \qquad \forall\, z \notin G \tag{7.2.2}$$

ist immer $\int_{\mathcal{K}_1} f(z)\, dz \; = \; \int_{\mathcal{K}_2} f(z)\, dz$.

Beweis: Für $z, w \in G$ sei

$$g(z,w) \;=\; \frac{f(w)-f(z)}{w-z} \quad \text{für } w \neq z\,, \quad g(z,z) \;=\; f'(z)\,. \tag{7.2.3}$$

Dann ist g auf $G \times G$ stetig, und wir können $h : G \to \mathbb{C}$ durch

$$h(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{K}} g(z,w)\, dw \qquad \forall\, z \in G$$

definieren. Dies ist eine stetige Funktion auf G. Für ein Dreieck $\Delta \subset G$ kann man daher nach dem Satz von Fubini schließen, dass

$$\int_{\partial\Delta} h(z)\, dz \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{K}} \left(\int_{\partial\Delta} g(z,w)\, dz \right) dw\,.$$

Da g für festes w in der Variablen z holomorph ist, verschwindet das innere Integral nach Satz 4.2.1, und somit folgt aus dem Satz von Morera, dass h in G holomorph ist. Sei jetzt $O = \{z : \mathrm{Ind}_{\mathcal{K}}\,(z) = 0\}$. Wegen

$$h(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{K}} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \;-\; f(z)\, \mathrm{Ind}_{\mathcal{K}}\,(z) \qquad \forall\, z \in G \setminus \mathcal{K}^*$$

folgt für

$$h_1(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{K}} \frac{f(w)}{w-z}\, dw\,,$$

dass $h_1(z) = h(z)$ auf $G \cap O$ gilt. Definiert man $g(z) = h(z)$ auf G, bzw. $= h_1(z)$ auf O, so ist g holomorph auf $G \cup O$. Nach Voraussetzung ist $\mathbb{C} \setminus G \subset O$, und daher ist $G \cup O = \mathbb{C}$, d. h., g ist eine ganze Funktion. Die unbeschränkte Komponente des Komplements von $\mathcal{K}^*$ gehört zu O, und dort strebt $g = h_1$ gegen 0 für $z \to \infty$. Deshalb folgt aus dem Liouvilleschen Satz, dass g konstant, ja sogar gleich der Nullfunktion ist. Daraus folgt die Integralformel.

Setze $F(z) = (z - z_0)\, f(z)$ für ein $z_0 \in G \setminus \mathcal{K}^*$ und $z \in G$. Aus der Integralformel folgt dann wegen $F(z_0) = 0$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{K}} f(z)\, dz \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{K}} \frac{F(z)}{z - z_0}\, dz \;=\; F(z_0)\, \mathrm{Ind}_{\mathcal{K}}\,(z_0) \;=\; 0\,.$$

Seien jetzt $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ wie im Satz. Setzt man $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 + (-\mathcal{K}_2)$ so folgt aus der Definition des Index und (7.2.2), dass $\mathrm{Ind}_{\mathcal{K}}\,(z) = \mathrm{Ind}_{\mathcal{K}_1}(z) - \mathrm{Ind}_{\mathcal{K}_2}(z) = 0$ im Komplement von G gilt, und daraus folgt der Rest der Behauptung. □

Bemerkung 7.2.2 *Für $z_0 \notin G$ ist die Funktion $(z - z_0)^{-1}$ in dem Gebiet G holomorph. Falls G sternförmig und γ eine geschlossene Kurve in G ist, folgt deshalb* $\mathrm{Ind}\,\gamma(z_0) = 0$ *aus* Satz 4.3.3. *Also erfüllt in einem sternförmigen G* jeder Zyklus *die Voraussetzung* (7.2.1).

Aufgabe 7.2.3 *Sei f holomorph im Kreisring $K(z_0, r, R)$, und sei γ_ρ der positiv orientierte Kreis um z_0 mit Radius ρ, $r < \rho < R$. Benutze* Satz 7.2.1 *um zu zeigen, dass $\int_\gamma f(z)\, dz$ nicht von ρ abhängt.*

Aufgabe 7.2.4 *Gib einen neuen Beweis von* Lemma 6.2.4 *durch Anwendung von* Satz 7.2.1 *auf einen Zyklus aus zwei konzentrischen positiv orientierten Kreisen.*

7.3 Einfach zusammenhängende Gebiete

Definition 7.3.1 *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet.*

1. Zwei geschlossene Kurven γ_j in G heißen *homotop*, wenn eine stetige Funktion $h : [0,1] \times [0,1] \to G$ mit folgenden Eigenschaften existiert:

   (a) Für alle $s \in [0,1]$ gilt $h(0,s) = h(1,s)$. Mit anderen Worten: Für jedes feste $s \in [0,1]$ ist $h(\cdot, s)$ Parameterdarstellung einer geschlossenen Kurve in G.

   (b) Die Kurven γ_1 bzw. γ_2 haben $h(\cdot, 0)$ bzw. $h(\cdot, 1)$ als Parameterdarstellungen.

2. Wenn der Träger einer Kurve γ nur aus einem Punkt besteht (wenn also eine konstante Funktion Parameterdarstellung ist), dann heißt γ *Einpunktkurve*.

3. Wenn γ eine geschlossene Kurve in G ist, welche zu einer Einpunktkurve homotop ist, dann heißt γ *nullhomotop*.

4. Das Gebiet G heißt *einfach zusammenhängend*, wenn jede geschlossene Kurve in G nullhomotop ist.

Lemma 7.3.2 *Seien $z_j : [0,1] \to \mathbb{C}$ Parameterdarstellungen zweier geschlossener Wege γ_j. Wenn für ein $z_0 \in \mathbb{C}$ gilt*

$$|z_1(t) \ - \ z_2(t)| \ < \ |z_0 \ - \ z_1(t)| \ + \ |z_0 \ - \ z_2(t)| \quad \forall\, t \in [0,1]\,,$$

dann folgt $z_0 \notin \gamma_1^* \cup \gamma_2^*$, und es gilt $\operatorname{Ind}_{\gamma_1}(z_0) = \operatorname{Ind}_{\gamma_2}(z_0)$.

Beweis: Wäre $z_2(t) = z_0$ für irgendein $t \in [0,1]$, so wäre $|z_1(t) - z_0| \ < \ |z_0 - z_1(t)|$, was nicht sein kann. Also ist $z_0 \notin \gamma_1^*$, und genauso folgt $z_0 \notin \gamma_2^*$. Lemma 1.2.12 zeigt, dass wir uns o. B. d. A. im weiteren Beweis auf stückweise stetig differenzierbare Wege beschränken können. Für solche folgt für die Funktion

$$z(t) \ = \ \frac{z_2(t) - z_0}{z_1(t) - z_0}\,, \qquad 0 \le t \le 1\,,$$

dass

$$\frac{z'(t)}{z(t)} \ = \ \frac{z_2'(t)}{z_2(t) - z_0} \ - \ \frac{z_1'(t)}{z_1(t) - z_0}$$

bis auf solche t, für die $z'(t)$ undefiniert ist. Daraus folgt aber

$$\operatorname{Ind}_{\gamma_2}(z_0) \ - \ \operatorname{Ind}_{\gamma_1}(z_0) \ = \ \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{z'(t)}{z(t)}\, dt = \operatorname{Ind}_{\gamma}(0)$$

für die Kurve γ mit Parameterdarstellung $z(t)$. Es folgt aber aus der Voraussetzung, dass $|z(t) - 1| < 1 + |z(t)|$ für alle t gilt. Das bedeutet, dass γ die negativ-reelle Achse nicht schneidet. Nach dem Cauchyschen Integralsatz ist deshalb $\operatorname{Ind}_{\gamma}(0) = 0$. □

Satz 7.3.3 *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann gilt für zwei homotope geschlossene Wege γ_j in G*

$$\operatorname{Ind}_{\gamma_1}(z) \ = \ \operatorname{Ind}_{\gamma_2}(z) \qquad \forall\, z \notin G.$$

Beweis: Seien $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ und h wie in der Homotopiedefinition. Da I^2 kompakt ist, ist auch das Bild $h(I^2)$ kompakt. Daher gibt es zu einem $z \notin G$ ein $\varepsilon > 0$ derart, dass $|z - h(t,s)| > 2\varepsilon$ für alle $(t,s) \in I^2$. Weiter ist h gleichmäßig stetig, und deshalb existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$|h(t,s) \ - \ h(\tilde{t}, \tilde{s})| \ < \ \varepsilon \quad \forall\, |s - \tilde{s}| \ + \ |t - \tilde{t}| \ \le \ 1/n\,.$$

Definiere $z_k(t)$, $0 \le k \le n$, wie folgt:

$$z_k(t) \ = \ (n\,t \ + \ 1 - j)\, h(j/n, k/n) \ + \ (j \ - n\,t)\, h([j-1]/n, k/n)\,,$$

für $(j-1)/n \le t \le j/n$ und $1 \le j \le n$. Dann ist jedes z_k Parameterdarstellung eines Polygonzugs, also eines stückweise glatten Weges β_k in G, und es gilt

$$|z_k(t) \;-\; h(t,k/n)| \;<\; \varepsilon \qquad \forall\, t \in [0,1],\; 0 \le k \le n\,,$$

und (für die gleichen t und k)

$$|z \;-\; z_k(t)| \;> |z \;-\; h(t,k/n)| \;-\; |h(t,k/n) \;-\; z_k(t)| \;>\; \varepsilon.$$

Schließlich zeigt man noch, dass

$$|z_k(t) \;-\; z_{k-1}(t)| \;<\; \varepsilon\,, \qquad \forall\, t \in [0,1],\; 1 \le k \le n\,.$$

Daher sind die Voraussetzungen des Lemma 7.3.2 für je zwei aufeinander folgende Wege β_k erfüllt, und deshalb haben alle dieselbe Windungszahl bzgl. z. Genauso schließt man, dass die Windungszahl von β_1 bzw. β_n gleich der von γ_1 bzw. γ_2 ist, und daraus folgt die Behauptung. □

Satz 7.3.4 *Jedes einfach zusammenhängende Gebiet ist ein Cauchy-Gebiet.*

Beweis: Jeder geschlossene Weg in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G ist nach Definition nullhomotop. Nach dem vorausgegangenen Satz ist also seine Windungszahl bzgl. eines $z \notin G$ gleich der einer Einpunktkurve, also eines Weges der Länge $\ell = 0$, und diese Windungszahl verschwindet offenbar. Also folgt die Behauptung aus Satz 7.2.1. □

Aufgabe 7.3.5 *Zeige: Jedes sternförmige Gebiet ist einfach zusammenhängend.*

Aufgabe 7.3.6 *Zeige: Ein Kreisring ist nicht einfach zusammenhängend.*

Aufgabe 7.3.7 *Seien G_j Gebiete in $\mathbb{C}$, und sei $f : G_1 \longrightarrow G_2$* bistetig*, d. h., f ist bijektiv, und f und f^{-1} stetig auf G_1 bzw. G_2. Zeige: Genau dann ist G_1 einfach zusammenhängend, wenn dies auch für G_2 gilt.*

Kapitel 8

Residuenkalkül

8.1 Funktionen mit isolierten Singularitäten in Gebieten

Lemma 8.1.1 *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und sei f eine Funktion, welche an jeder Stelle $z \in G$ entweder holomorph ist oder eine isolierte Singularität hat. Dann ist die Singularitätenmenge von f in G höchstens abzählbar unendlich und hat in G keinen Häufungspunkt.*

Beweis: Da ein Häufungspunkt von Singularitäten keine isolierte Singularität sein kann, ist nur die Abzählbarkeit zu zeigen. Dies beweist man aber genau wie die Abzählbarkeit der Nullstellenmenge im Beweis von Satz 5.3.4. □

8.2 Der Residuensatz

Definition 8.2.1 *Sei z_0 eine isolierte Singularität von f, also f holomorph in $K'(z_0, r)$ für genügend kleines $r > 0$. Dann läßt sich f in $K'(z_0, r)$ als Laurentreihe $\sum_{-\infty}^{\infty} f_k\,(z - z_0)^k$ darstellen, und wir nennen*

$$\operatorname{Res}_{z_0} f \;=\; f_{-1}$$

das Residuum von f an der Stelle z_0. *Aus* (6.2.5) *folgt für jedes $\rho \in (0, r)$:*

$$\operatorname{Res}_{z_0} f \;=\; \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\rho} f(z)\; dz.$$

Wir bemerken noch, dass das Residuum einer hebbaren Singularität verschwindet. Da jede Stelle, an der f holomorph ist, als hebbare Singularität aufgefasst werden kann, ist also $\operatorname{Res}_{z_0} f = 0$ für alle Holomorphiepunkte z_0 von G.

Satz 8.2.2 (Residuensatz) *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und sei f bis auf isolierte Singularitäten holomorph in G. Sei $\mathcal{K}$ ein Zyklus in G, welcher die Singularitäten von f vermeidet, und für den $\operatorname{Ind}_{\mathcal{K}}(z) = 0$ für alle $z \notin G$ gilt. Dann gilt*

$$\int_{\mathcal{K}} f(z)\, dz \;=\; 2\pi i \sum_{z_0 \in G} \operatorname{Res}_{z_0} f \;\operatorname{Ind}_{\mathcal{K}}(z_0)\,, \tag{8.2.1}$$

wobei in der Summe nur endlich viele nicht-triviale Summanden auftreten, da $\operatorname{Ind}_{\mathcal{K}}(z_0)$ nur für endlich viele Singularitäten nicht verschwindet.

Beweis: Seien A die Singularitätenmenge und $B \subset A$ diejenigen Singularitäten mit $\operatorname{Ind}_{\mathcal{K}}(z_0) \neq 0$. Das Komplement O von $\mathcal{K}^*$ hat genau eine unbeschränkte Komponente $\hat{G}$, und dort verschwindet der Index. Daher ist $B \subset \mathbb{C} \setminus \hat{G}$, also beschränkt. In G existiert nach Lemma 8.1.1 kein Häufungspunkt von A, also auch keiner von B. Falls B einen Häufungspunkt $z_0 \notin G$ hätte, gäbe es $z_n \in B$, welche gegen z_0 konvergierten und dann für große n alle in der gleichen Komponente von O lägen. Dann hätten sie aber alle den gleichen Index wie z_0 (nämlich 0), was der Definition von B widerspricht. Also hat B überhaupt keinen Häufungspunkt und ist deshalb nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine endliche Menge. Für jedes $z_0 \in B$ sei γ_{z_0} ein geschlossener Weg, dessen Träger ein kleiner Kreis um z_0 ist, und dessen Windungszahl gleich $\operatorname{Ind}_{\mathcal{K}}(z_0)$ ist (vergl. hierzu Aufgabe 5.1.5). Der Radius sei dabei so klein, dass alle γ_{z_0} in G liegen und sich in ihrem Inneren keine weitere Singularität von f befindet. Für den Zyklus $\mathcal{K}_1$ aus allen solchen Wegen gilt dann folgendes: Für $z \notin G$ ist $\operatorname{Ind}_{\mathcal{K}}(z) = \operatorname{Ind}_{\mathcal{K}_1}(z) = 0$, und genauso für $z \in A \setminus B$. Für $z \in B$ gilt nach Wahl der Wege γ_{z_0} jedenfalls $\operatorname{Ind}_{\mathcal{K}}(z) = \operatorname{Ind}_{\mathcal{K}_1}(z)$. Deshalb können wir Teil (b) des Satzes 7.2.1 auf das Gebiet $\tilde{G} = G \setminus A$ anwenden und erhalten

$$\int_{\mathcal{K}} f(z)\,dz = \int_{\mathcal{K}_1} f(z)\,dz = \sum_{z_0 \in B} \int_{\gamma_{z_0}} f(z)\,dz = \sum_{z_0 \in B} \operatorname{Ind}_{\gamma_{z_0}} \oint_{|z-z_0|=\rho} f(z)\,dz,$$

woraus die Behauptung folgt. □

Der wichtigste Spezialfall des obigen Satzes benutzt folgenden Begriff:

Definition 8.2.3 *Ein geschlossener Weg γ heißt* ein Jordanweg, *falls $O = \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ genau zwei Komponenten besitzt, von denen dann notwendig eine beschränkt und eine unbeschränkt ist, und falls $|\operatorname{Ind}_\gamma(z)| \equiv 1$ in der beschränkten Komponente ist. Wenn sogar $\operatorname{Ind}_\gamma(z) \equiv 1$ gilt, dann heißt γ* positiv orientiert, *im anderen Fall* negativ orientiert. *Die beschränkte Komponente von O heißt* das Innengebiet, *die unbeschränkte* das Außengebiet *von γ.*

Bemerkung 8.2.4 *Ein Kreis ist immer ein Jordanweg, und die Definition der Orientierung stimmt mit der früher für einen Kreis gegebenen überein. Auch der Rand eines Dreicks ist ein Jordanweg. Anschaulich erkennt man die positive Orientierung eines Jordanweges daran, dass beim Umlauf auf dem Weg das Innengebiet stets links liegt.*

Als Hauptfall des Residuensatzes ergibt sich nun das folgende

Korollar zu Satz 8.2.2 *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und sei f bis auf isolierte Singularitäten holomorph in G. Sei γ ein positiv orientierter Jordanweg in G, welcher die Singularitäten von f vermeidet und dessen Innengebiet G_i zu G gehört. Dann gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,dz \;=\; 2\pi i \sum_{z_0 \in G_i} \operatorname{Res}_{z_0} f\,. \tag{8.2.2}$$

Beweis: Folgt aus Satz 8.2.2, da für alle z_0 im Außengebiet von γ die Indexfunktion verschwindet. □

Aufgabe 8.2.5 *Sei f holomorph in einem sternförmigen Gebiet G, und sei $z_0 \in G$. Finde das Residuum von $f(z)\,(z - z_0)^{-n}$ im Punkt z_0 für ein $n \in \mathbb{N}$.*

Aufgabe 8.2.6 *Zeige für f wie oben, dass* (5.2.3) *aus dem Residuensatz folgt.*

8.3 Berechnung von Residuen

Für Pole ist die Berechnung des Residuums relativ einfach möglich:

Satz 8.3.1 *Sei z_0 ein Pol höchstens m-ter Ordnung der Funktion f. Dann gilt*

$$\operatorname{Res}_{z_0} f \;=\; \lim_{z\to z_0}\left[\frac{1}{(m-1)!}\,\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\,(z-z_0)^m\,f(z)\right]. \tag{8.3.1}$$

Beweis: Nach Voraussetzung hat f eine Laurentreihe der Form

$$f(z) \;=\; \sum_{k=-m}^{\infty} f_k\,(z-z_0)^k \qquad \forall\; z\in K'(z_0,r),$$

für ein $r>0$. Also gilt für diese z

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\,(z-z_0)^m f(z) \;=\; \sum_{k=m-1}^{\infty} k\,(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-m+2)\,f_{k-m}\,(z-z_0)^{k-m+1}$$

und daraus folgt die Behauptung. □

Häufig ist das Residuum eines Quotienten von holomorphen Funktionen an einer Nullstelle des Nenners gesucht. Für eine Nullstelle erster und zweiter Ordnung gelten dann folgende Formeln:

Korollar zu Satz 8.3.1 *Seien f,g in z_0 holomorph. Dann gilt:*

(a) *Falls g in z_0 eine Nullstelle erster Ordnung hat, ist*

$$\operatorname{Res}_{z_0}(f/g) \;=\; \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}\;.$$

(b) *Falls g in z_0 eine Nullstelle zweiter Ordnung hat, ist*

$$\operatorname{Res}_{z_0}(f/g) \;=\; 2\,\frac{f'(z_0)}{g''(z_0)} \;-\; \frac{2\,f(z_0)\,g'''(z_0)}{3\,[g''(z_0)]^2}\;.$$

Beweis: Zu (a): Wegen $g(z_0)=0$ ist

$$(z-z_0)\,\frac{f(z)}{g(z)} \;=\; \frac{f(z)}{\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}}\quad ,$$

und dies strebt gegen $\frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$ für $z\to z_0$.

Zu (b): Es ist

$$\left[(z-z_0)^2\,\frac{f(z)}{g(z)}\right]' \;=\; \frac{(z-z_0)\,f(z)\,[2\,g(z)-(z-z_0)\,g'(z)]}{g^2(z)} \;+\; \frac{(z-z_0)^2\,f'(z)}{g(z)}\;.$$

Wegen $g(z_0)=g'(z_0)=0$ gilt für kleine Werte von $z-z_0$:

$$f(z) \;=\; f(z_0) \;+\; (z-z_0)\,f'(z_0) \;+\; (z-z_0)^2\,f_1(z),$$

$$f'(z) \;=\; f'(z_0) \;+\; (z-z_0)\; f_2(z)\,,$$

$$g(z) \;=\; (z-z_0)^2\, \frac{g''(z_0)}{2} \;+\; (z-z_0)^3\, \frac{g'''(z_0)}{6} \;+\; (z-z_0)^4\, g_1(z),$$

$$g'(z) \;=\; (z-z_0)\, g''(z_0) \;+\; (z-z_0)^2\, \frac{g'''(z_0)}{2} \;+\; g_2(z)\,,$$

mit bei z_0 holomorphen Funktionen f_j, g_j. Daraus folgt

$$\left[(z-z_0)^2\, \frac{f(z)}{g(z)}\right]' \;=\; 2\, \frac{f'(z_0)}{g''(z_0)} \;-\; \frac{2\, f(z_0)\, g'''(z_0)}{3\,[g''(z_0)]^2} \;+\; (z-z_0)\, h(z),$$

mit einer bei z_0 holomorphen Funktion h. □

Aufgabe 8.3.2 *Berechne folgende Residuen:*

1. $$\operatorname{Res}_{2i} \frac{3}{(z-2i)^2(z+1)} \quad .$$
2. $$\operatorname{Res}_{-1} \frac{3}{(z-2i)^2(z+1)} \quad .$$
3. $$\operatorname{Res}_{\pi} \frac{\cos z}{(z-\pi)^2} \quad .$$

Aufgabe 8.3.3 *Zeige: Ist f holomorph im Punkt z_0, und hat g dort einen Pol erster Ordnung, so gilt*

$$\operatorname{Res}_{z_0} f\, g \;=\; f(z_0) \operatorname{Res}_{z_0} g\,.$$

8.4 Anwendungen des Residuensatzes

Im Folgenden berechnen wir einige *reelle* uneigentliche Integrale durch Anwendungen des Residuensatzes!

Satz 8.4.1 *Seien p, q Polynome mit* grad $q \geq 2 +$ grad p, *und habe q keine reelle Nullstelle. Dann gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\, dx \;=\; 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_0 > 0} \operatorname{Res}_{z_0}(p/q) \;. \tag{8.4.1}$$

Das heißt also: Das links stehende uneigentliche Integral ist konvergent und gleich dem $2\pi i$-fachen der Summe der Residuen der rationalen Funktion p/q in der oberen Halbebene!

Beweis: Sei $R > 0$ so groß, dass alle Nullstellen von q im Kreis $K(0, R)$ liegen. Dann gibt es ein $K > 0$ derart, dass

$$|p(z)/q(z)| \leq K\, |z|^{-2} \qquad \forall\; |z| \geq R\,. \tag{8.4.2}$$

Darum sind $\int_0^\infty p(x)/q(x)\, dx$ und $\int_{-\infty}^0 p(x)/q(x)\, dx$ absolut konvergent.

Sei jetzt γ_R die Summe aus dem positiv durchlaufenen oberen Halbkreises um 0 mit Radius R und dem Teil der reellen Achse von $-R$ bis R. Dann ist γ_R ein positiv orientierter Jordanweg, also ist nach dem Residuensatz $\int_{\gamma_R} f(z)\, dz$ gleich der rechten Seite von (8.4.1). Aus (8.4.2) folgt aber, dass das Integral über den oberen Halbkreis gegen 0 strebt wenn $R \to \infty$, und daher gilt die Behauptung. □

Aufgabe 8.4.2 *Berechne* $\int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)^{-1}dx$.

Lösung: Da $q(z) = 1 + z^2$ bei $z_0 = i$ eine einfache Nullstelle hat, gilt nach Teil (a) des Korollars zu Satz 8.3.1:

$$\mathrm{Res}_{\,i}\ \frac{1}{1+z^2} \;=\; \frac{-i}{2}.$$

Also folgt mit (8.4.1), dass $\int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)^{-1}dx = \pi$. □

Um den nächsten Satz zu beweisen, benötigen wir folgendes Hilfsresultat:

Lemma 8.4.3 *Sei z_0 ein Pol erster Ordnung einer Funktion f. Sei γ_ε der Weg mit Parameterdarstellung $z(t) = z_0 + \varepsilon\,\mathrm{e}^{it}$, $0 \le t \le \pi$, also der positiv durchlaufene obere Halbkreis um z_0 mit Radius ε. Dann gilt*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz \;=\; \frac{1}{2}\,\mathrm{Res}_{\,z_0} f\,.$$

Beweis: Es gilt $f(z) = a/(z-z_0) + g(z)$ mit $a = \mathrm{Res}_{\,z_0} f$ und g holomorph in z_0. Es ist aber $\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{a}{z-z_0}\,dz = a\pi$ und $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon} g(z)\,dz = 0$. □

Wir zeigen jetzt ein Resultat, welches z. B. die Berechung von $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ gestattet:

Satz 8.4.4 *Sei $\alpha > 0$, und sei f eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *Die Funktion f sei holomorph in einem Gebiet G, welches die abgeschlossene obere Halbebene umfaßt, bis auf endlich viele isolierte Singularitäten. Die Singularitäten mit positivem Imaginärteil seien mit z_j, $1 \le j \le n$, und die auf der reellen Achse mit x_k, $1 \le k \le m$, bezeichnet. Dabei darf auch $n = 0$ oder $m = 0$ sein, falls die entsprechenden Singularitäten nicht auftreten.*

(b) *Die Stellen x_k seien nur Pole erster Ordnung von f und Nullstellen der Funktion $\sin(\alpha z)$, also hebbare Singularitäten von $f(z)\sin(\alpha z)$.*

(c) *Es gelte*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ R > 0\ \forall\ z : |z| \ge R,\ \mathrm{Im}\ z \ge 0 \implies |f(z)| \;\le\; \varepsilon\,. \tag{8.4.3}$$

(d) *Die Funktion $f(z)\sin(\alpha z)$ habe reelle Werte auf der reellen Achse.*

Dann gilt für $g(z) = f(z)\,\mathrm{e}^{i\alpha z}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\sin(\alpha x)\,dx \;=\; \mathrm{Im}\;\left[2\pi i\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}_{\,z_j} g \quad + \pi i\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}_{\,x_k} g\right]\;. \tag{8.4.4}$$

Der Satz bleibt richtig, wenn man die Funktion $\sin(\alpha z)$ durch $\cos(\alpha z)$ ersetzt und in (8.4.4) den Real- statt des Imaginärteils der rechten Seite nimmt.

Beweis: Seien R_j so groß, dass $-R_1 < x_k < R_2$ für alle $k = 1, \ldots, m$, und seien γ_j die folgenden Wege:

Der Weg γ_1 sei im wesentlichen der Teil der reellen Achse von $-R_1$ bis R_2, allerdings seien die Singularitäten x_k auf in der oberen Halbebene liegenden (negativ orientierten) Halbkreisen um x_k mit Radius ε umgangen. Mit Hilfe von Lemma 8.4.3 folgt für $\varepsilon \to 0$, dass

$$\mathrm{Im}\left[\int_{\gamma_1} g(z)\,dz\right] = \int_{-R_1}^{R_2} f(x)\,\sin(\alpha\,x)\,dx \;-\; \mathrm{Im}\;\left[\pi i\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}_{\,x_k} g\right]\;.$$

Der Weg γ_2 sei das Geradenstück von R_2 bis $R_2 + i\,R$ mit R groß, γ_3 die Strecke von $R_2 + i\,R$ bis $-R_1 + i\,R$, und γ_4 die von dort zum Punkt $-R_1$ auf der reellen Achse. Also ist $\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_4$ ein positiv orientierter geschlossener Jordanweg, der die Singularitäten z_j im Inneren enthält. Deshalb ist nach dem Residuensatz

$$\int_\gamma g(z)\,dz \;=\; 2\pi i \sum_{j=1}^n \mathrm{Res}_{\,z_j}\;.$$

Wenn man wie üblich abschätzt, folgt mit (8.4.3):

$$\left|\int_{\gamma_3} g(z)\,dz\right| \;\le\; \max_{|z|\ge R}\;|f(z)|\;\mathrm{e}^{-\alpha\,R}\,(R_1+R_2) \;\longrightarrow\; 0 \quad (R\to\infty)\,,$$

$$\left|\int_{\gamma_2} g(z)\,dz\right| \;\le\; \max_{|z|\ge R_2}\;|f(z)|\;\int_0^R \mathrm{e}^{-\alpha\,t}\,dt \;\le\; \max_{|z|\ge R_2}\;|f(z)|\;\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha\,t}\,dt \;\longrightarrow\; 0 \quad (R_2\to\infty)\,,$$

$$\left|\int_{\gamma_4} g(z)\,dz\right| \;\le\; \max_{|z|\ge R_1}\;|f(z)|\;\int_0^R \mathrm{e}^{-\alpha\,t}\,dt \;\le\; \max_{|z|\ge R_1}\;|f(z)|\;\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha\,t}\,dt \;\longrightarrow\; 0 \quad (R_1\to\infty)\,.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Definition 8.4.5

(a) *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine Funktion f heißt* meromorph *in G, wenn für alle $z \in G$ entweder f holomorph in z ist oder dort einen Pol hat.*

(b) *Beim Zählen der Nullstellen einer Funktion wollen wir, wenn nichts anderes vereinbart ist, eine Nullstelle der Vielfachheit n auch n-mal zählen. Genauso zählen wir einen Pol der Ordnung m auch m-mal, wenn wir die Anzahl der Pole einer meromorphen Funktion feststellen wollen.*

Satz 8.4.6 (Das nullstellenzählende Integral) *Sei f meromorph in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. Sei γ eine positiv orientierte Jordankurve in G, die die Nullstellen und Pole von f vermeidet, und seien N bzw. P die Anzahl der Nullstellen bzw. Pole von f im Innengebiet von γ. Dann gilt*

$$N \;-\; P \;=\; \frac{1}{2\pi i}\;\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\;dz\,.$$

Beweis: Sei $g(z) = f'(z)/f(z)$ $(= [\log f(z)]'$; die sogenannte *logarithmische Ableitung* von f). Dann ist auch g meromorph in G. Ist z_0 Nullstelle von f der Ordnung n, also $f(z) = (z-z_0)^n\,h(z)$ mit $h(z_0) \neq 0$, so folgt

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n\,(z-z_0)^{n-1}h(z) + (z-z_0)^n h'(z)}{(z-z_0)^n\,h(z)},$$

und daraus liest man ab, dass z_0 Pol erster Ordnung von g ist und $\mathrm{Res}_{\,z_0} g = n$. Obige Rechnung bleibt auch richtig für $n = -m < 0$, und deshalb ist ein Pol von f der Ordnung m ebenfalls Pol erster Ordnung für g mit $\mathrm{Res}_{\,z_0} g = -m$. Der Residuensatz liefert jetzt die Behauptung. □

Korollar zu Satz 8.4.6 (Der Satz von Rouché) *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und seien $f, g : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei γ ein positiv orientierter Jordanweg in G, dessen Innengebiet ganz zu G gehört, und gelte*

$$|f(z) \;-\; g(z)| \;<\; |f(z)| \qquad \forall\; z \in \gamma^*. \tag{8.4.5}$$

Dann haben f und g im Innengebiet von γ die gleiche Anzahl von Nullstellen.

Beweis: Falls f konstant ist, ist der Beweis einfach. Sonst folgt aus (8.4.5), dass keine Nullstellen von f oder g in γ^* liegen können (vergleiche auch Aufgabe 8.4.10). O. B. d. A. sei γ stückweise glatt, und $z(t)$,

$0 \le t \le 1$, sei eine stückweise glatte Parameterdarstellung. Dann ist $f(z(t))$ Parameterdarstellung eines stückweise glatten Weges γ_f, und

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_f}(0) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_f}\frac{dz}{z} \;=\; \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f'(z)\,dz}{f(z)}\,,$$

also nach Satz 8.4.6 die Nullstellenzahl von f im Innengebiet von γ. Gleiches gilt für g anstelle von f, und nach Lemma 7.3.2 gilt $\mathrm{Ind}_{\gamma_f}(0) = \mathrm{Ind}_{\gamma_g}(0)$. □

Aufgabe 8.4.7 *Zeige, dass es im Satz von Rouché ausreicht, wenn statt* (8.4.5) *die schwächere Bedingung*

$$|f(z) \;-\; g(z)| \;<\; |f(z)| \;+\; |g(z)| \qquad \forall\, z \in \gamma^*. \tag{8.4.6}$$

erfüllt ist.

Aufgabe 8.4.8 *Berechne* (a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$, (b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Aufgabe 8.4.9 *Wende den Satz von Rouché auf* $f(z) = z^n + \sum_0^{n-1} f_k\, z^k$ *und* $g(z) = z^n$ *an, um einen anderen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra zu erhalten.*

Aufgabe 8.4.10 *Zeige dass aus der Ungleichung* (8.4.6) *folgt, dass* f *und* g *auf dem Weg* γ *keine Nullstellen haben können. Also haben* f *und* g *sogar in der abgeschlossenen Hülle des Innengebietes die gleiche Zahl von Nullstellen.*

Kapitel 9

Der Satz von der Umkehrabbildung

9.1 Funktionen mit nicht verschwindender Ableitung

Satz 9.1.1 *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Für ein $z_0 \in G$ sei $f'(z_0) \neq 0$. Dann gibt es ein $r > 0$ derart, dass f auf $K(z_0, r)$ injektiv ist und $f'(z) \neq 0$ auf $K(z_0, r)$ gilt. Die Bildmenge $O = f(K(z_0, r))$ ist dann offen, die Umkehrabbildung $f^{-1} : O \to K(z_0, r)$ ist holomorph, und es gilt*

$$\frac{d}{dz}\, f^{-1}(z) \;=\; \frac{1}{f'(f^{-1}(z))} \qquad \forall\, z \in O\,. \tag{9.1.1}$$

Beweis: Sei $g(z, w)$ wie in (7.2.3), also g stetig auf $G \times G$. Dann gibt es ein $r > 0$ so, dass $|g(z, w)| \geq |g(z_0, z_0)|/2$ für alle $z, w \in K(z_0, r)$. Das heißt $g(z, z) = f'(z) \neq 0$ auf$K(z_0, r)$ und

$$|f(w) \;-\; f(z)| \;\geq\; \frac{1}{2}\, |f'(z_0)|\, |w \;-\; z| \qquad \forall\, z, w \in K(z_0, r). \tag{9.1.2}$$

Das zeigt die Bijektivität von f auf $K(z_0, r)$. Sei jetzt $z_1 \in K(z_0, r)$ fest und $\rho > 0$ so klein, dass $\overline{K}(z_1, \rho) \subset K(z_0, r)$. Für $z(t) = z_1 + \rho\, \mathrm{e}^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, folgt hieraus $|f(z(t)) - f(z_1)| \geq c = \rho |f'(z_0)|/2 > 0$. Sei $w \notin O$, und sei $h(z) = f(z) - w$ auf $K(z_0, r)$. Dann ist h holomorph und $\neq 0$ auf $K(z_0, r)$, und $c \leq |f(z(t)) - f(z_1)| \leq |f(z(t)) - w| + |w - f(z_1)| = |h(z(t))| + |h(z_1)|$. Wäre $|h(z_1)| < |h(z(t))|$ für alle t, so hätte $|h|$ im Inneren des Kreises $K(z_1, \rho)$ ein Minimum, was dem Minimumprinzip widerspricht. Also gilt $|h(z_1)| \geq |h(z(t))|$ für wenigstens ein t, und deshalb folgt $|w - f(z_1)| \geq c/2$. Das heißt umgekehrt, dass jedes $w \in K(z_1, c/2)$ zu O gehören muss, und deshalb ist O offen. Für $w_1 = f(z_1), w_2 = f(z_2) \in O$ gilt wegen (9.1.2), dass aus $w_2 \to w_1$ auch $z_2 \to z_1$ folgt, und deshalb ist

$$\frac{f^{-1}(w_2) \;-\; f^{-1}(w_2)}{w_2 \;-\; w_1} \;=\; \frac{1}{\frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1}} \quad\longrightarrow\quad \frac{1}{f'(z_1)} \qquad (w_2 \to w_1).$$

□

Aufgabe 9.1.2 *Zeige die Injektivität von $f(z) = 1 + 2\,z - \mathrm{e}^z$ für z in der Nähe von Null.*

Aufgabe 9.1.3 *Gib ein Beispiel einer auf einem Gebiet G holomorphen, aber dort nicht injektiven Funktion f mit $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in G$.*

9.2 Nullstellen der Ableitung

Satz 9.2.1 *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Für ein $z_0 \in G$ habe f' eine Nullstelle $(m-1)$-ter Ordnung, mit $m \geq 2$. Dann gibt es ein $r > 0$ und eine auf $K(z_0, r)$ holomorphe und injektive Funktion g, für welche gilt:*

$$g'(z) \neq 0, \qquad f(z) = f(z_0) + [g(z)]^m \qquad \forall\, z \in K(z_0, r).$$

Beweis: Nach Voraussetzung hat $f(z) - f(z_0)$ in z_0 eine m-fache Nullstelle, und daher gibt es ein auf G holomorphes h mit $f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^m\, h(z)$ für $z \in G$. Weiter gibt es ein $\rho > 0$ so, dass h keine Nullstelle in $K(z_0, \rho)$ hat, und dann ist die logarithmische Ableitung $h'(z)/h(z)$ dort holomorph. Da ein Kreis sternförmig (also ein Cauchy-Gebiet) ist, existiert nach Satz 5.5.3 eine Stammfunktion G zu $h'(z)/h(z)$ auf $K(z_0, \rho)$. Es ist aber

$$\frac{d}{dz}\, h(z)\, \mathrm{e}^{-G(z)} = h'(z)\, \mathrm{e}^{-G(z)} - h(z)\, G'(z)\, \mathrm{e}^{-G(z)} \equiv 0,$$

und somit ist $h(z) = c\, \mathrm{e}^{G(z)}$ mit einer Konstanten $c \neq 0$, und durch geeignete Wahl der Stammfunktion G kann $c = 1$ erzielt werden. Sei jetzt

$$g(z) = (z - z_0)\, \mathrm{e}^{G(z)/m} \qquad \forall z \in K(z_0, \rho).$$

Dann folgt $[g(z)]^m = (z - z_0)^m\; h(z) = f(z) - f(z_0)$ auf $K(z_0, \rho)$. Da $g'(z_0) = \mathrm{e}^{G(z_0)/m} \neq 0$ ist, folgt nach Satz 9.1.1 dass g auf einem evtl. kleineren Kreis $K(z_0, r)$ bijektiv ist. □

Aufgabe 9.2.2 *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $z_0 \in G$ eine m-fache Nullstelle von f, mit $m \in \mathbb{N}$. Zeige: Es gibt $r_j > 0$ derart, dass die Gleichung $w = f(z)$ für alle $w \in K'(0, r_2)$ genau m verschiedene Lösungen in $K'(z_0, r_1)$ hat.*

Aufgabe 9.2.3 *Sei f wie oben. Für $|w|$ fest, diskutiere das Verhalten der Lösungen von $w = f(z)$ in Abhängigkeit von* $\arg w$.

9.3 Das Prinzip der Gebietstreue

Mit Hilfe der vorausgegangenen zwei Sätze können wir nun leicht folgendes wichtige Ergebnis zeigen:

Satz 9.3.1 (Satz von der Gebietstreue) *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Dann ist $f(G)$ ein Gebiet.*

Beweis: Sei $w_0 \in f(G)$, also $w_0 = f(z_0)$ für (mindestens) ein $z_0 \in G$. Falls $f'(z_0) \neq 0$ ist, gibt es nach Satz 9.1.1 ein $r > 0$ mit $f : K(z_0, r) \to O = f(K(z_0, r))$ bijektiv und O offen. Wegen $O \subset f(G)$ ist w_0 innerer Punkt von $f(G)$. Falls $f'(z_0)$ in z_0 eine Nullstelle der Ordnung $m - 1$ hat ($m \geq 2$), dann folgt aus Satz 9.2.1 die Darstellung $f(z) = f(z_0) + [g(z)]^m$ mit einem auf $K(z_0, r)$ holomorphem und injektivem g. Nach Satz 9.1.1 ist $g(K(z_0, r))$ offen, also existiert wegen $g(z_0) = 0$ ein $\rho > 0$ mit $K(0, \rho) \subset g(K(z_0, r))$. Wegen $w \in K(0, \rho) \iff w^m \in K(0, \rho^m)$ folgt $K(f(z_0), \rho^m) \subset f(K(z_0, r)) \subset f(G)$. Darum ist auch in diesem Fall w_0 innerer Punkt von $f(G)$, und deshalb ist $f(G)$ offen. Da stetige Abbildungen den Zusammenhang erhalten, ist $f(G)$ ein Gebiet. □

Aufgabe 9.3.2 *Seien $G_j \subset \mathbb{C}$ Gebiete, und sei $f : G_1 \to G_2$ bijektiv. Zeige: Dann ist $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in G_1$, und $f^{-1} : G_2 \to G_1$ ist holomorph.*

Aufgabe 9.3.3 *Finde im Beweis des Satzes von der Gebietstreue die Stelle, an der benutzt wurde, dass* f *nicht konstant ist.*

Kapitel 10

Verschiedenes

10.1 Kompakte Konvergenz

Definition 10.1.1 *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und seien $f_n : G \to \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$ holomorph.*

(a) *Wir nennen (f_n) eine* kompakte Cauchy-Folge *auf G, falls für jede kompakte Teilmenge $K \subset G$ folgendes gilt:*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{R} \quad \forall\, n, m \geq N \quad \forall\, z \in K \;:\quad |f_n(z) \;-\; f_m(z)| \;\leq\; \varepsilon\,.$$

(b) *Wir nennen (f_n)* kompakt konvergent *auf G gegen ein $f : G \to \mathbb{C}$, falls für jede kompakte Teilmenge $K \subset G$ folgendes gilt:*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{R} \quad \forall\, n \geq N \quad \forall\, z \in K \;:\quad |f_n(z) \;-\; f(z)| \;\leq\; \varepsilon\,.$$

Das heißt also, dass (f_n) auf jeder kompakten Teilmenge von G gleichmäßig konvergiert.

Satz 10.1.2 (Kompakte Konvergenz) *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und seien $f_n : G \to \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$ holomorph. Dann gilt:*

(a) *Ist (f_n) eine kompakte Cauchy-Folge auf G, so ist die Folge auf G kompakt konvergent gegen ein $f : G \to \mathbb{C}$, und dieses f ist holomorph in G.*

(b) *Falls (f_n) auf G gegen ein f kompakt konvergiert, so ist auch die gliedweise differenzierte Folge (f_n') auf G kompakt konvergent gegen f'.*

(c) *Sei G ein Cauchy-Gebiet. Falls (f_n) auf G gegen ein f kompakt konvergiert, und falls wir für ein festes $z_0 \in G$ setzen*

$$F_n(z) \;=\; \int_{z_0}^{z} f_n(w)\,dw\,, \qquad F(z) \;=\; \int_{z_0}^{z} f(w)\,dw\,,$$

so ist (F_n) auf G kompakt konvergent gegen F.

Beweis: Zu (a): Aus der Definition einer kompakten Cauchy-Folge folgt, dass $(f_n(z))$ für jedes feste $z \in G$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ ist, also auch konvergiert wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{C}$. Also ist (f_n) *punktweise konvergent* gegen ein $f : G \to \mathbb{C}$. Aus der Definition der kompakten Cauchy-Folge folgt für $m \to \infty$, dass (f_n) auf G kompakt gegen f konvergiert, und da dies die gleichmäßige Konvergenz auf jeder kompakten Menge bedeutet, folgt aus Analysis II, dass f auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset G$

stetig ist. Das ist aber äquivalent zu der Stetigkeit auf G. Für ein Dreieck $\Delta \subset G$ folgt aus einem Satz über gliedweise Integration bei gleichmäßiger Konvergenz, dass

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Delta} f_n(z)\,dz\,.$$

Die Integrale auf der rechten Seite verschwinden nach dem Cauchyschen Integralsatz, und deshalb ist das Integral links ebenfalls $= 0$. Nach dem Satz von Morera folgt hieraus die Holomorphie von f auf G.

Zu (b): Sei K eine kompakte Teilmenge von G. Dann folgt mit der Definition der Kompaktheit die Existenz eines $\delta > 0$, für welches die Menge $K_\delta = \cup_{z\in K}\overline{K}(z,\delta)$ ganz zu G gehört. Diese Menge ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Deshalb ist (f_n) auf K_δ gleichmäßig konvergent gegen f. Für $z \in K$ (also $\overline{K}(z,\delta) \subset K_\delta$) folgt mit der Cauchyschen Integralformel für die erste Ableitung:

$$|f_n'(z) \;-\; f'(z)| \;=\; \Big|\, \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z|=\delta} \frac{f_n(w)-f(w)}{(w-z)^2}\,dw \,\Big| \;\le\; \frac{M_n}{\delta}\;,$$

mit $M_n = \max_{w\in K_\delta}\, |f_n(w) - f(w)|$. Daher ist (f_n') auf G kompakt konvergent gegen f'.

Zu (c): Sei $K \subset G$ kompakt. Wir wollen zunächst beweisen, dass es eine Zahl $\ell > 0$ gibt derart, dass jedes $z \in K$ von z_0 aus entlang eines Weges γ_z mit einer Länge $\le \ell$ erreicht werden kann. Dazu sei K mit Kreisscheiben $K(z,r_z)$ überdeckt, wobei $z \in K$ und $r_z > 0$ so klein ist, dass $\overline{K}(z,r_z) \subset G$. Wegen der Kompaktheit reichen dann endlich viele Kreisscheiben aus, und deren Mittelpunkte seien $z_1,\ldots,z_\mu$. Da G zusammenhängend ist, existieren Wege γ_j in G (aber evtl. nicht in K) von z_0 nach jedem der z_j. Da jedes $z \in K$ in einem der $K(z_j, r_{z_j})$ liegt, kann es von z_0 aus entlang des Weges γ_j, gefolgt von der Strecke von z_j nach z, erreicht werden (beachte, dass dieser Weg in G liegt). Dies zeigt die Existenz einer solchen Zahl ℓ. Weiter sei

$$\tilde K = K \cup \gamma_1^* \cup \ldots \cup \gamma_\mu^* \cup \overline{K}(z_1, r_{z_1}) \cup \ldots \cup \overline{K}(z_\mu, r_{z_\mu}).$$

Dann ist $\tilde K \subset G$ kompakt und wegzusammenhängend, und nach Konstruktion ist jeder Punkt $z \in K$ von z_0 aus entlang eines Weges $\gamma(z)$ erreichbar, welcher ganz in $\tilde K$ liegt und eine Länge $\le \ell$ hat. Daher ist

$$|F_n(z) \;- F(z)| \;=\; \Big|\, \int_{\gamma(z)} [f_n(w) - f(w)]\,dw \,\Big| \;\le\; \ell\, \max_{w\in\tilde K}\, |f_n(w) - f(w)|\,.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Satz 10.1.3 (Weierstraßscher Doppelreihensatz) *Seien die Potenzreihen*

$$f_n(z) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} f_{nk}\,(z-z_0)^k, \quad n \ge 0,$$

alle konvergent in $K(z_0,R)$, mit R unabhängig von n. Ferner sei die Reihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ auf $K(z_0,R)$ kompakt konvergent, also f dort holomorph nach Satz 10.1.2. *Dann gilt*

$$f(z) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} f_k\,(z-z_0)^k, \quad f_k = \sum_{n=0}^{\infty} f_{nk} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis: Für $0 < r < R$ und $j \in \mathbb{N}_0$ gilt (5.2.4), und wir dürfen in das Integral die Reihendarstellung für f einsetzen und (wegen der kompakten Konvergenz) gliedweise integrieren. Daraus folgt aber die Behauptung, da (5.2.4) auch für f_n an Stelle von f gilt. □

Aufgabe 10.1.4 *Gelte $f(z) = \sum_0^\infty f_k\,(z-z_0)^k$ auf $K(z_0,r)$ mit $r > 0$. Wie erhält man die Potenzreihe von f um einen anderen Punkt $z_1 \in K'(z_0,r)$?*

Lösung: Ein Möglichkeit ist die folgende: Es gilt wegen der binomischen Formel

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} f_n\,(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (z_1-z_0)^{n-k}\;(z-z_1)^k\,.$$

Mit dem Doppelreihensatz kann man das Vertauschen der Summationen rechtfertigen, und es folgt dann

$$f(z) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} g_k\,(z-z_1)^k\,, \qquad g_k \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} f_{n+k}\,(z_1-z_0)^n \quad \forall\; n \ge 0\,, \tag{10.1.1}$$

und diese Darstellung konvergiert mindestens in $K(z_1, r-|z_1|)$. □

Aufgabe 10.1.5 *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und sei $K \subset G$ kompakt. Zeige: Es gibt ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $z_1 \in K$ und $z_2 \notin G$ gilt $|z_1 - z_2| \ge \delta$.*

Aufgabe 10.1.6 *Zeige: Jedes Gebiet G ist Vereinigung von abzählbar vielen kompakten Teilmengen.*

Aufgabe 10.1.7 *Formuliere den Begriff der kompakten Konvergenz für Reihen an Stelle von Folgen.*

Aufgabe 10.1.8 *Zeige: Eine Potenzreihe $\sum_0^\infty f_k\,(z-z_0)^k$ mit Konvergenzradius $r > 0$ ist auf $K(z_0, r)$ kompakt konvergent.*

10.2 Holomorphe Fortsetzung

Definition 10.2.1 *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Ein Randpunkt z von G heißt* erreichbar*, falls ein $K(z_0, r) \subset G$ existiert, welche dieses z als Randpunkt hat. Das heißt anschaulich, dass der Rand von $K(z_0, r)$ den von G im Punkt z berührt. Wir sagen weiter, dass f in einen Randpunkt z holomorph fortgesetzt werden kann, wenn es ein $r > 0$ gibt, für welches f in $K(z, r) \setminus G$ so definiert werden kann, dass f in $G \cup K(z, r)$ holomorph wird. Ist dies nicht der Fall, dann heißt z* Singularität *von f.*

Theoretisch lässt sich Aufgabe 10.1.4 benutzen, um für einen erreichbaren Randpunkt zu entscheiden, ob f in diesen Randpunkt fortgesetzt werden kann:

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei z ein erreichbarer Randpunkt von G, und sei $K(z_0, r) \subset G$ wie in der Definition, sowie z_1 ein Punkt auf der Verbindungsstrecke von z_0 und z. Sei f in die Reihe (10.1.1) umentwickelt. Falls ein $r_1 > r - |z_1|$ existiert, für welches (10.1.1) in $K(z_1, r_1)$ konvergiert, dann ist f holomorph in $G_1 = G \cup K(z_1, r_1)$, und wegen $z \in G_1$ ist die Fortsetzung von f in eine Umgebung von z gelungen. Umgekehrt, falls f fortgesetzt werden kann, gibt es ein $G_1 \supset K(z_0, r)$ mit $z \in G_1$, sodass f in G_1 holomorph ist. Dann sieht man, dass für jedes z_1 wie oben ein $r_1 > r - |z_1|$ existiert, für welches $K(z_1, r_1) \subset G_1$ gilt, und dann hat (10.1.1) einen Konvergenzradius $\ge r_1$.

Die Umentwicklung (10.1.1) bietet also theoretisch die Möglichkeit, für erreichbare Randpunkte zu prüfen, ob sie Singularitäten sind. Wir geben noch folgendes Beispiel einer Funktion, welche in der Einheitskreisscheibe holomorph ist (sodass also jeder Randpunkt auch erreichbar ist), und für die jeder Punkt des Randes eine Singularität ist:

Behauptung 10.2.2 *Sei*

$$f(z) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} z^{k!} \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} f_j\, z^j\,, \qquad f_j = \begin{cases} 1 & \text{für } j = k!\,,\ k \in \mathbb{N}_0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Reihe konvergiert für $|z| < 1$, also ist f holomorph in der Einheitskreisscheibe, aber jeder Randpunkt ist eine Singularität für dieses f; d. h. genauer, es gibt keinen Randpunkt z und kein $r > 0$ derart, dass f in den Kreis $K(z, r)$ holomorph fortgesetzt werden kann.

Beweis: Offenbar sind Häufungspunkte von Singularitäten selbst wieder Singularitäten. Deshalb beschränken wir uns auf Randpunkte mit rationalem Argument: Sei $z_0 = \mathrm{e}^{2p\pi i/q}$ mit teilerfremden $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, und sei $z = r\, z_0$, $0 < r < 1$. Für $k \geq q$ ist q ein Teiler von $k!$, und deshalb ist $z_0^{k!} = 1$. Also ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^{k!} \;=\; \sum_{k=0}^{q-1} z^{k!} \;+\; \sum_{k=q}^{\infty} r^{k!}\,.$$

Für $r \to 1$ gilt $\sum_{k=q}^{\infty} r^{k!} \to \infty$, und daraus folgt die Behauptung. □

Definition 10.2.3 *Sei γ eine Kurve in $\mathbb{C}$ mit Anfangs- bzw. Endpunkt z_0 bzw. z_1 und Parameterdarstellung $z(t)$, $0 \leq t \leq 1$. Sei weiter f eine Funktion, welche im Punkt z_0 holomorph ist. Wir sagen dann, dass f* entlang γ von z_0 nach z_1 mit dem Kreiskettenverfahren fortgesetzt werden kann*, wenn es eine Zerlegung $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_N = 1$ und Radien $r_0, r_1, \ldots, r_N$ gibt, sodass folgendes gilt:*

(a) *Das Stück der Kurve γ, welches $z_k = z(t_k)$ mit $z_{k+1} = z(t_{k+1})$ verbindet, liegt ganz in der Kreisscheibe $K(z_k, r_k)$, für alle $k = 0, \ldots, N-1$.*

(b) *Die Potenzreihenentwicklung von f um z_0 konvergiert in $K(z_0, r_0)$, sodass f auch im Punkt z_1 holomorph ist.*

(c) *Für alle $k = 1, \ldots, N-1$ konvergiert die Potenzreihenentwicklung von f um z_k in $K(z_k, r_k)$, sodass f auch im Punkt z_{k+1} noch holomorph ist.*

Wenn dies gilt, kann man theoretisch die Potenzreihenentwicklungen von f um alle Punkte z_k durch wiederholte Anwendung von Aufgabe 10.1.4 *erhalten, und schließlich sogar die Potenzreihe um den Endpunkt von γ.*

Während man theoretisch die Fortsetzung einer Funktion mit dem Kreiskettenverfahren erhält, ist dies in praktisch allen interessanten Fällen nahezu undurchführbar. Oft gelingt es aber, die Fortsetzung einer Funktion aus einer Darstellung der Funktion durch eine kompakt konvergente Funktionenreihe oder ein Integral zu erhalten. Wir demonstrieren das in den folgenden beiden Sätzen am Beispiel der Gamma-Funktion, die wir durch (3.4.1) in der rechten Halbebene definiert hatten:

Satz 10.2.4 (Die Fortsetzung der Gamma-Funktion) *Die Funktion $\Gamma(z)$ läßt sich zu einer meromorphen Funktion in $\mathbb{C}$ fortsetzen, mit Polen genau an den Stellen $z_k = -k$, $k \in \mathbb{N}_0$. Alle diese Pole sind von erster Ordnung, und es gilt*

$$\operatorname{Res}_{-k} \Gamma \;=\; \frac{(-1)^k}{k!}\,, \qquad \forall\; k \in \mathbb{N}_0.$$

Insbesondere ist die Fortsetzung der Gammafunktion gegeben durch die Darstellung

$$\Gamma(z) \;=\; \int_1^{\infty} t^{z-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, dt \;+\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+z)} \qquad \forall\; z \in \mathbb{C} \setminus \{\, 0, -1, -2, \ldots \}\,. \tag{10.2.1}$$

Beweis: Da das Integral $\int_1^{\infty} t^{z-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, dt$ für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergiert, stellt es eine ganze Funktion dar (die Holomorphie zeigt man genau wie im Beweis von Satz 3.4.2). Deshalb kommt es für den Beweis nur auf $g(z) = \int_0^1 t^{z-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt$ an. Da die Exponentialreihe unendlichen Konvergenzradius hat, folgt für Re $z > 0$ durch Vertauschen von Integral und Reihe die Darstellung

$$g(z) \;=\; \int_0^1 t^{z-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t)^n}{n!}\right)dt \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(n+z)}\,.$$

Für $m \in \mathbb{N}_0$ und $z = x + i\,y$ mit $x > -m$ ist $|n+z|^2 = (n+x)^2 + y^2 > (n-m)^2 + y^2 \geq 1$, falls $n \geq m+1$ ist. Daher ist $\sum_{n=m+1}^{\infty}(-1)^n/(n!\,(n+z))$ dort gleichmäßig konvergent. Hieraus folgt, dass g für Re $z > m$ meromorph ist, mit Polen genau an den Stellen z_k für $k \leq m-1$, wobei die Pole von erster Ordnung sind mit Residuen wie behauptet. Da aber m beliebig war, folgt die Behauptung. □

Satz 10.2.5 (Die inverse Gamma-Funktion) *Die Funktion $\Gamma(z)$ hat keine Nullstellen. Folglich ist die Funktion $1/\Gamma(z)$ eine ganze Funktion. Sie hat die Integraldarstellung*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^w\,dw}{w^z}\,, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{10.2.2}$$

wobei wir entlang der Geraden $\arg w = -\pi$, also der negativ-reellen Achse, von ∞ bis zum Einheitskreis integrieren, dann weiter auf dem Einheitskreis bis zu $\arg w = \pi$, und von dort zurück nach ∞; der Zweig der Funktion w^z ist hierbei entsprechend der Vorgabe der Argumentwerte zu wählen.

Beweis: Da e^w in der linken Halbebene fallend ist, folgt zunächst die absolute Konvergenz des Integrals in (10.2.2). Die dadurch definierte Funktion heiße für den Moment $g(z)$. Durch eine einfache Substitution erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{u\,w}\,dw}{w^z} \;=\; g(z)\,u^{z-1}\,.$$

Für Re $z > 0$ ist, durch Substitution von (3.4.1),

$$\int_0^\infty u^{z-1}\,\mathrm{e}^{-u\,\zeta}\,du \;=\; \frac{\Gamma(z)}{\zeta^z}\,.$$

Andererseits kann man für Re $\zeta > 1$ die folgende Vertauschung der beiden Integrale rechtfertigen und erhält

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u\,\zeta}\,\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{u\,w}\,dw}{w^z}\,du \;=\; -\,\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dw}{w^z\,(w-\zeta)}\,.$$

Mit Hilfe des Residuensatzes erhält man dann weiter

$$=\; \zeta^{-z} \;-\; \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(r)} \frac{dw}{w^z\,(w-\zeta)}\,,$$

wobei der Weg $\gamma(r)$ wieder so wie der ursprüngliche Weg γ verläuft, allerdings entlang des Kreises mit Radius $r > 1$ an Stelle des Einheitskreises. Wegen Re $\zeta > 1$ kann man aber sehen, dass das Integral für $r \to \infty$ gegen 0 geht. Dies ergibt insgesamt, dass

$$\zeta^{-z} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u\,\zeta}\,\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{u\,w}\,dw}{w^z}\,du = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u\,\zeta}\;g(z)\,u^{z-1}\,du = \zeta^{-z}\,\Gamma(z)\;g(z).$$

Das aber impliziert $g(z) = 1/\Gamma(z)$. □

Definition 10.2.6 *Das Integral* (10.2.2) *heißt auch* die Hankelsche Darstellung der inversen Gamma-Funktion.

Aufgabe 10.2.7 *Sei f in der Einheitskreisscheibe holomorph, und seien die Koeffizienten der Potenzreihe von f mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ entweder $= 0$ oder $= 1$. Zeige: Genau dann ist f auch im Punkt $z = 1$ noch holomorph, wenn alle bis auf endlich viele Koeffizienten verschwinden.*

Aufgabe 10.2.8 *Beweise folgendes* **Spiegelungsprinzip für holomorphe Funktionen:**

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und sei $G^* = \{z : \overline{z} \in G\}$. Sei weiter $G \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$, sei $G \cap G^*$ zusammenhängend, und sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in G \cap \mathbb{R}$. Dann existiert eine in $G \cup G^*$ holomorphe Funktion g mit $g(z) = f(z)$ auf G.

Anleitung: Betrachte die Funktion $h(z) = \overline{f(\overline{z})}$ und verwende den Identitätssatz für holomorphe Funktionen.

10.3 Harmonische Funktionen

Definition 10.3.1 *Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, und sei $u : G \to \mathbb{R}$ mindestens zweimal partiell differenzierbar. Falls jetzt gilt*

$$\Delta\, u(x,y) \;=\; u_{xx}(x,y) \;+\; u_{yy}(x,y) \equiv 0 \quad \text{in } G,$$

dann heißt u harmonische Funktion *in G.*

Satz 10.3.2 *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind $u = \mathrm{Re}\ f$ und $v = \mathrm{Im}\ f$, aufgefasst als Funktionen von $x, y \in \mathbb{R}$ für $x + i\,y \in G$, harmonisch.*

Beweis: Wir haben gezeigt, dass

$$f'(z) = u_x(x,y) + i\,v_x(x,y) = v_y(x,y) - i\,u_y(x,y) \qquad \forall\ z = x + i\,y \in G.$$

Da f' ebenfalls holomorph in G ist, folgt durch Anwendung derselben Aussage auf f':

$$f''(z) = u_{xx}(x,y) + i\,v_{xx}(x,y) = -u_{yy}(x,y) - i\,v_{yy}(x,y) \qquad \forall\ z = x + i\,y \in G.$$

Vergleich von Real- und Imaginärteil ergibt dann die Behauptung. □

Im Beweis des nächsten Satzes benötigen wir folgendes Integral:

Behauptung 10.3.3 *Sei f holomorph in $K(0,r)$ für ein $r > 0$. Dann gilt für $0 < \rho < r$:*

$$\overline{f(0)} \;=\; \frac{1}{2\pi i}\oint_{|w|=\rho} \frac{\overline{f(w)}}{w - z}\, dw \quad \forall\ z \in K(0,\rho).$$

Beweis: Als Übung – siehe auch [11, Kapitel 7, §3] in der Literaturliste. □

Satz 10.3.4 (Schwarzsche Integralformel) *Sei f holomorph in $K(0,r)$ für ein $r > 0$. Dann gilt für $0 < \rho < r$:*

$$f(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\oint_{|w|=\rho} \frac{\mathrm{Re}\ f(w)}{w}\,\frac{w+z}{w-z}\, dw \;+\; i\ \mathrm{Im}\ f(0) \quad \forall\ z \in K(0,\rho).$$

Beweis: Wegen

$$\frac{1}{w}\,\frac{w+z}{w-z} = \frac{2}{w-z} - \frac{1}{w}\,, \quad 2\ \mathrm{Re}\ f(w) = f(w) + \overline{f(w)}$$

gilt

$$\oint_{|w|=\rho} \frac{\mathrm{Re}\ f(w)}{w}\,\frac{w+z}{w-z}\, dw = \oint_{|w|=\rho} \frac{f(w) + \overline{f(w)}}{w-z}\, dw - \oint_{|w|=\rho} \frac{f(w) + \overline{f(w)}}{2w}\, dw.$$

Wegen der Cauchyschen Integralformel ist dies gleich

$$2\pi\, i\, f(z) + \oint_{|w|=\rho} \frac{\overline{f(w)}}{w-z}\, dw - \pi\, i\, f(0) - \oint_{|w|=\rho} \frac{\overline{f(w)}}{2w}\, dw.$$

Die Behauptung 10.3.3 komplettiert dann den Beweis. □

Die Schwarzsche Formel zeigt, dass f bereits durch die Werte von $u = \operatorname{Re} f$ auf dem Kreis um 0 mit Radius ρ sowie den Wert $v(0)$ festgelegt ist. Setzt man $w = \rho\, \mathrm{e}^{it}$ und $z = R\, \mathrm{e}^{i\phi}$ ein und trennt Real- und Imaginärteil, so erhält man für $f = u + i\, v$:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho\, \mathrm{e}^{it})\, \frac{\rho^2 - R^2}{\rho^2 - 2\rho\, R\, \cos(t-\phi) + R^2}\, dt\,.$$

Dies ist die sogenannte *Poissonsche Integralformel* für eine harmonische Funktion. Genauso folgt noch

$$v(z) = v(0) - \frac{\rho\, R}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho\, \mathrm{e}^{it})\, \frac{\sin(t-\phi)}{\rho^2 - 2\rho\, R\, \cos(t-\phi) + R^2}\, dt\,.$$

Dies zeigt, wie man bei vorgegebenem Realteil den Imaginärteil einer holomorphen Funktion berechnen kann.

Satz 10.3.5 *Gegeben sei eine auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ zweimal stetig partiell differenzierbare harmonische Funktion u. Dann gibt es eine dort harmonische Funktion v derart, dass $f = u + i\, v$ auf G holomorph ist. Dieses v ist bis auf eine additive reelle Konstante eindeutig bestimmt.*

Beweis: Falls v existiert, folgt aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, dass v eine Stammfunktion des reellen Vektorfeldes $(-u_y, u_x)^T$ sein muss. Daraus folgt sofort die Eindeutigkeit von v bis auf eine additive reelle Konstante. Die Tatsache, dass u harmonisch ist, ist äquivalent zu den Integrabilitätsbedingungen für dieses Vektorfeld, und nach einem Satz der reellen Analysis folgt deshalb auch die Existenz von v. Die Holomorphie von $f = u + i\, v$ folgt dann aus zwei Übungsaufgaben am Ende von Abschnitt 5.4. □

Aufgabe 10.3.6 *Gegeben sei eine auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ zweimal stetig partiell differenzierbare harmonische Funktion u. Zeige: Dann ist u auf G beliebig oft stetig partiell differenzierbar.*

Aufgabe 10.3.7 *Gegeben sei eine auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ zweimal stetig partiell differenzierbare harmonische Funktion u. Zeige: Für u gilt die Poissonsche Integralformel.*

10.4 Die zyklometrischen Funktionen

Definition 10.4.1 *Seien*

$$G_1 \;=\; \mathbb{C} \setminus \{x : x \in \mathbb{R},\ |x| \geq 1\}\,, \quad G_i \;=\; \mathbb{C} \setminus \{i\, x : x \in \mathbb{R},\ |x| \geq 1\}\,.$$

Offenbar sind diese zwei Gebiete sternförmig bzgl. $z_0 = 0$. Wir definieren dann

$$\arcsin z \;=\; \int_0^z \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}}\,, \quad z \in G_1, \tag{10.4.1}$$

$$\arccos z \;=\; \frac{\pi}{2} - \int_0^z \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}}\,, \quad z \in G_1, \tag{10.4.2}$$

$$\arctan z \;=\; \int_0^z \frac{dw}{1-w^2}\,, \quad z \in G_i, \tag{10.4.3}$$

$$\operatorname{arccot} z \;=\; \frac{\pi}{2} - \int_0^z \frac{dw}{1-w^2}\,, \quad z \in G_i. \tag{10.4.4}$$

Entsprechend werden die Umkehrfunktionen der hyperbolischen Funktionen definiert.

Satz 10.4.2 *Es gelten die Identitäten*

(a) $\arcsin z = i \log(-i\,z + \sqrt{1-z^2})\,, \qquad z \in G_1,$

(b) $\arccos z = -i \log(z + i\,\sqrt{1-z^2})\,, \qquad z \in G_1,$

(c) $\arctan z = \frac{-i}{2} \log \frac{1+i\,z}{1-i\,z}\,, \qquad z \in G_i,$

(d) $\operatorname{arccot} z = \frac{-i}{2} \log \frac{i\,z-1}{i\,z+1}\,, \qquad z \in G_i,$

wenn man jeweils den Zweig des Logarithmus so festlegt, dass die Aussagen für $z = 0$ richtig sind; das heißt genau, dass wir in (a), (c) $\log 1 = 0$, *in* (b) $\log i = i\,\pi/2$ *und in* (d) $\log(-1) = i\,\pi$ *setzen müssen.*

Beweis: Zunächst ist zu zeigen, dass die rechten Seiten der vier Identitäten wohldefiniert sind, das heißt, dass die Argumente der Logarithmusfunktionen niemals gleich 0 sind. In den Fällen (c) und (d) ist dies offensichtlich der Fall, und in den übrigen Fällen folgt dies, da die Gleichung $i\,z = \sqrt{1-z^2}$ durch Quadrieren auf $-z^2 = 1 - z^2$ führt, was nicht sein kann. Daher sind die rechten Seiten immer wohldefinierte holomorphe Funktionen. Dabei benutzen wir eine der folgenden Übungsaufgaben. Jetzt folgen die Behauptungen durch Differenzieren der beiden Seiten. □

Satz 10.4.3 *Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|\operatorname{Re} z| < \pi/2$ gilt $\arcsin(\sin z) = z$. Weiter gilt für alle $z \in G_1$ die Gleichung $\sin(\arcsin z) = z$. Folglich bildet die Sinusfunktion den Streifen $|\operatorname{Re} z| < \pi/2$ bijektiv auf G_1 ab, und die Arcussinusfunktion ist ihre Umkehrfunktion.*

Beweis: Aus $\sin z = \sin x\ \cosh y + i\,\cos x\ \sinh y$ folgt, dass der Imaginärteil von $\sin z$ auf dem Streifen $|\operatorname{Re} z| < \pi/2$ genau dann verschwindet, wenn $y = 0$ ist. In diesem Fall ist aber $|\operatorname{Re}(\sin z)| = |\sin x| < 1$, also folgt $\sin z \in G_1$. Aus dem Identitätssatz folgt dann die erste Gleichung, da sie jedenfalls für reelle z richtig ist. Die zweite Gleichung folgt aber genauso aus dem Identitätssatz. □

Aufgabe 10.4.4 *Sei f in einem Cauchygebiet holomorph, und gelte $f(z) \neq 0$ für alle $z \in G$. Zeige: Wählt man ein $z_0 \in G$ aus und legt einen beliebigen Wert für $\log z_0$ fest, so gibt es genau eine Möglichkeit, $\log z$ für $z \in G$ so zu definieren, dass wir eine in G holomorphe Funktion erhalten.*

Aufgabe 10.4.5 *Zeige: Die Cosinusfunktion bildet den Streifen $0 < \operatorname{Re} z < \pi$ bijektiv auf G_1 ab, und die Arcuscosinusfunktion ist ihre Umkehrfunktion.*

Aufgabe 10.4.6 *Zeige: Die Tangensfunktion bildet den Streifen $|\operatorname{Re} z| < \pi/2$ bijektiv auf G_i ab, und die Arcustangensfunktion ist ihre Umkehrfunktion.*

10.5 Die Riemannsche Zeta-Funktion

Lemma 10.5.1 *Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ ist in jeder Halbebene der Form $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 1 + \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, absolut und gleichmäßig konvergent. Daraus folgt die kompakte Konvergenz der Reihe in der Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$.*

Beweis: Es ist $|n^z| = \mathrm{e}^{x \log n} = n^x$ für alle $z = x + i\,y$, und daraus folgt, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} n^{-(1+\varepsilon)}$ eine Majorante ist. Also gilt die Behauptung nach dem Majorantenkriterium für gleichmäßige Konvergenz. □

Definition 10.5.2 *Die durch die Reihe*

$$\zeta(z) \;:=\; \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}\,, \qquad \mathrm{Re}\; z > 1\,,$$

definierte Funktion heißt die Riemannsche Zeta-Funktion. *Wegen der oben bewiesenen Konvergenzaussage folgt, dass* $\zeta(z)$ *in der Halbebene* $\mathrm{Re}\; z > 1$ *holomorph ist.*

Satz 10.5.3 (Produktdarstellung der Zeta-Funktion) *Für* $\mathrm{Re}\; z > 1$ *hat die Zeta-Funktion keine Nullstellen, und es gilt*

$$1/\zeta(z) \;=\; \prod_p \,(1 - 1/p^z) \;=:\; \lim_{m\to\infty} \prod_{p \le m} \,(1 - 1/p^z)\,,$$

wobei das Produkt über alle Primzahlen p gebildet wird.

Beweis: In der Theorie der unendlichen Produkte, die z. B. in einer aufbauenden Vorlesung über Funktionentheorie behandelt wird, nennt man ein Produkt $\prod_k (1+a_k)$ konvergent, wenn ein n existiert, so dass $1+a_k \neq 0$ ist für alle $k \ge n$, und dass $\lim_{m\to\infty} \prod_{n\le k\le m} (1+a_k)$ existiert und nicht gleich 0 ist. Wegen der Stetigkeit der Logarithmusfunktion ist dies gleichwertig mit der Konvergenz der Reihe $\sum_{k=n}^{\infty} \log(1 + a_k)$. Notwendig für die Konvergenz ist deshalb, dass $\lim_{k\to\infty} \log(1 + a_k) = 0$, also $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, gilt. Ist dies der Fall, so folgt für große Werte von k, dass $|\log(1 + a_k)| \le |a_k|$ ist, und deshalb ist nach dem Majorantenkriterium *hinreichend für die Konvergenz des Produktes, dass $\sum_k a_k$ absolut konvergiert.* Dies wenden wir auf obiges Produkt an: Da $\sum_p |p^{-z}|$ durch die konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |n^{-z}|$ nach oben abgeschätzt werden kann, folgt die Konvergenz des Produktes. Weiter halten wir fest, dass per Definition der Konvergenz eines Produktes der Grenzwert nicht 0 sein kann, weil für alle Primzahlen p gilt $1 - 1/p^z \neq 0$ (wegen $|p^z| = p^x > 1$ für alle $z = x + i\,y$ mit $x > 1$). Schließlich folgt mit dem Majorantenkriterium sogar die gleichmäßige Konvergenz von Reihe und Produkt für alle z mit $\mathrm{Re}\; z \ge c > 1$, und deshalb ist die Grenzfunktion holomorph.

Für die behauptete Gleichheit genügt es wegen des Identitätssatzes, reelle $z = x > 1$ zu betrachten. Für solche gilt

$$\prod_{p\le m} (1 - 1/p^x)^{-1} \;=\; \prod_{p\le m} \sum_{k=0}^{\infty} p^{-kx}\,. \tag{10.5.1}$$

Jede natürliche Zahl n hat eine eindeutige Darstellung als Produkt von Primzahlen, etwa

$$n \;=\; p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_\nu^{k_\nu}\,,$$

mit Primzahlen $2 \le p_1 < p_2 < p_\nu$ und Exponenten $k_j \in \mathbb{N}_0$. Ist $n \le m$, so sind auch alle Primfaktoren $p_j \le m$. Deshalb kann man die Terme auf der rechten Seite von (10.5.1) so zusammenfassen, dass

$$\prod_{p\le m} (1 - 1/p^x)^{-1} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{-x}\,,$$

mit einer streng monoton wachsenden Folge von natürlichen Zahlen a_n, für die gilt $a_n = n$, für alle $n \le m$. Daraus folgt

$$\sum_{n=0}^{m} n^{-x} \;\le\; \prod_{p\le m} (1 - 1/p^x)^{-1} \;\le\; \zeta(x)\,.$$

Nach Definition der Zeta-Funktion folgt für $m \to \infty$ die Behauptung. □

Im Folgenden benutzen wir, dass nach Satz 10.2.5 die inverse Gamma-Funktion eine ganze Funktion ist.

Satz 10.5.4 (Integraldarstellung der Zeta-Funktion) *Für* Re $z > 1$ *gilt die folgende Integraldarstellung der Zeta-Funktion:*

$$\zeta(z) \;=\; \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}\, dt, \tag{10.5.2}$$

wobei das Integral entlang der positiv-reellen Achse zu nehmen und die Potenz t^{z-1} *als Hauptwert zu interpretieren ist.*

Beweis: Es gilt

$$\int_0^\infty t^{z-1}\, e^{-nt}\, dt \;=\; n^{-z} \int_0^\infty x^{z-1}\, e^{-x}\, dx \;=\; \frac{\Gamma(z)}{n^z}\,.$$

Deshalb folgt

$$\Gamma(z)\,\zeta(z) \;=\; \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty t^{z-1}\, e^{-nt}\, dt \;=\; \int_0^\infty t^{z-1} \sum_{n=1}^\infty e^{-nt}\, dt \;=\; \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}\, dt\,,$$

sofern man die Vertauschung von Integral und Reihe rechtfertigen kann. Dies ist aber eine Folge der absoluten und gleichmäßigen Konvergenz der Reihe auf jedem Intervall der Form $[\varepsilon, \infty)$, $\varepsilon > 0$. □

Die oben bewiesene Integraldarstellung kann zur Fortsetzung der Zeta-Funktion benutzt werden. Dazu beachten wir, dass $(e^t - 1)^{-1}$ für $t = 0$ einen Pol erster Ordnung mit Residuum 1 hat, und deshalb ist die Laurentreihe von der Form

$$\frac{1}{e^t - 1} \;=\; \frac{1}{t} \;+\; \sum_{k=0}^\infty f_k\, t^k, \qquad 0 < |t| < 2\,\pi\,.$$

Die Koeffizienten f_k hängen eng mit den sogenannten *Bernoullischen Zahlen* zusammen. Mit dieser Entwicklung zeigen wir:

Satz 10.5.5 (Fortsetzung der Zeta-Funktion) *Die Zeta-Funktion ist eine meromorphe Funktion in* $\mathbb{C}$ *mit einem einzigen Pol erster Ordnung bei* $z = 1$. *Ihre Fortsetzung ist gegeben durch die Darstellung*

$$\zeta(z) \;=\; \frac{1}{\Gamma(z)} \left(\frac{1}{z-1} \;+\; \sum_{k=0}^\infty \frac{f_k}{k+z} \;+\; \int_1^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}\, dt \right), \tag{10.5.3}$$

wobei die isolierten Singularitäten bei $z = 0, -1, -2, \ldots$ *alle hebbar sind.*

Beweis: Der Beweis ist analog zu dem von Satz 10.2.4: Es gilt nach Vertauschen von Integral und Reihe

$$g(z) \;:=\; \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}\, dt \;=\; \frac{1}{\Gamma(z)} \left(\frac{1}{z-1} \;+\; \sum_{k=0}^\infty \frac{f_k}{k+z} \right).$$

Weil $1/\Gamma$ Nullstellen bei $z = -k$, $k \in \mathbb{N}_0$, hat, sind diese Punkte hebbare Singularitäten der rechten Seite, und somit ist g meromorph in ganz $\mathbb{C}$ mit nur einem Pol bei $z = 1$, dessen Ordnung gleich 1 ist. Da $\int_1^\infty t^{z-1}\,(e^t - 1)^{-1}\, dt$ eine ganze Funktion ergibt, folgt die Behauptung. □

Die berühmte und immer noch ungelöste *Riemannsche Vermutung* besagt gerade, dass die nicht-reellen Nullstellen der Funktion alle auf der Geraden Re $z = 1/2$ liegen.

Aufgabe 10.5.6 *Benutze die Potenzreihe von* $\log(1-z)$ *um zu zeigen, dass für genügend kleine* z *gilt* $|\log(1-z)| \le |z|$.

Aufgabe 10.5.7 *Zeige, dass die im Beweis der Integraldarstellung der Zeta-Funktion vorgenommene Vertauschung von Integral und Reihe gerechtfertigt ist.*

Literaturverzeichnis

[1] **L. V. Ahlfors**, *Complex Analysis*, McGraw–Hill, New York, 1966.

[2] **H. Behnke und F. Sommer**, *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen*, Springer Verlag, 3. Aufl., 1976.

[3] **J. B. Conway**, *Functions of One Complex Variable*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 1978.

[4] **E. Freitag und R. Busam**, *Funktionentheorie*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[5] **A. Hurwitz**, *Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen*, Springer, Berlin, 1999.

[6] **K. Knopp**, *Funktionentheorie. I. Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen. 9. neubearb. Aufl.*, Sammlung Göschen Band 668. Berlin: Walter de Gruyter, 1957.

[7] ——, *Aufgabensammlung zur Funktionentheorie. II: Aufgaben zur höheren Funktionentheorie. 7. Aufl.*, Sammlung Göschen. 878. Berlin: Walter de Gruyter, 1971.

[8] ——, *Aufgabensammlung zur Funktionentheorie. I. Aufgaben zur elementaren Funktionentheorie. 8. Aufl.*, Sammlung Göschen. 2127. Berlin - New York: Walter de Gruyter, 1977.

[9] ——, *Elemente der Funktionentheorie. 9. Aufl.*, Sammlung Göschen. 2124. Berlin - New York: Walter de Gruyter, 1978.

[10] ——, *Funktionentheorie. II: Anwendungen und Weiterführung der allgemeinen Theorie. 13. Aufl.*, Sammlung Göschen, 2126. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1981.

[11] **R. Remmert**, *Funktionentheorie I*, Springer, Berlin, 1995. 66

[12] **W. Rudin**, *Reelle und komplexe Analysis*, Oldenbourg, München, 1999.

[13] **H.-J. Runckel**, *Höhere Analysis - Funktionentheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen*, Oldenbourg, München, 2000.

Index