Vorlesungsmanuskript

Elemente der Funktionalanalysis

Werner Balser
Institut für Angewandte Analysis

Sommersemester 2011

Literaturverzeichnis

[1] **J. Appell und M. Väth**, *Elemente der Funktionalanalysis*, Vieweg, Wiesbaden, 2005. Vektorräume, Operatoren und Fixpunktsätze.

[2] **L. Collatz**, *Funktionalanalysis und numerische Mathematik*, Springer-Verlag, Berlin, 1964.

[3] **A. Y. Helemskii**, *Lectures and exercises on functional analysis*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.

[4] **H. Heuser**, *Funktionalanalysis*, B. G. Teubner, Stuttgart, vierte Aufl., 2006. Theorie und Anwendung. 10, 37

[5] **F. Hirzebruch und W. Scharlau**, *Einführung in die Funktionalanalysis*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1991. Nachdruck des Originals von 1971.

[6] **L. W. Kantorowitsch und G. P. Akilow**, *Funktionalanalysis in normierten Räumen*, Verlag Harri Deutsch, Thun, 1978.

[7] **L. A. Ljusternik und W. I. Sobolew**, *Elemente der Funktionalanalysis*, Akademie-Verlag, Berlin, sechste Aufl., 1979.

[8] **B. D. MacCluer**, *Elementary functional analysis*, Springer, New York, 2009.

[9] **R. Meise und D. Vogt**, *Einführung in die Funktionalanalysis*, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1992.

[10] **J. R. Munkres**, *Topology: a first course*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975. 7

[11] **E. Pflaumann und H. Unger**, *Funktionalanalysis. I*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1974.

[12] **S. D. Promislow**, *A first course in functional analysis*, Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], Hoboken, NJ, 2008.

[13] **F. Riesz und B. Sz.-Nagy**, *Vorlesungen über Funktionalanalysis*, Verlag Harri Deutsch, Thun, deutsche Aufl., 1982.

[14] **B. P. Rynne und M. A. Youngson**, *Linear functional analysis*, Springer-Verlag London Ltd., London, zweite Aufl., 2008.

[15] **H. Schröder**, *Funktionalanalysis*, Verlag Harri Deutsch, Thun, zweite Aufl., 2000.

[16] **D. Werner**, *Funktionalanalysis*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[17] **J. Wloka**, *Funktionalanalysis und Anwendungen*, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1971.

[18] **B. S. Wulich**, *Einführung in die Funktionalanalysis. Teil 1*, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1961.

[19] **K. Yosida**, *Functional analysis*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995. Nachdruck der 6. Auflage.

Inhaltsverzeichnis

1 Metrische Räume **5**

1.1 Normierte und metrische Räume 5

1.2 Topologie metrischer Räume 7

1.3 Stetigkeit und Konvergenz 9

1.4 Cauchyfolgen 10

1.5 Kompakte Mengen 10

1.6 Der Satz von Arzela-Ascoli 13

1.7 Der Bairesche Satz 14

2 Stetige lineare Abbildungen **15**

2.1 Elementare Eigenschaften 16

2.2 Invertierbare Operatoren 19

2.3 Endlichdimensionale Räume 20

2.4 Reflexivität 21

2.5 Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit 21

2.6 Der Satz von der offenen Abbildung und der Graphensatz 23

3 Hilberträume **26**

3.1 Prä-Hilberträume 26

3.2 Die induzierte Norm 27

3.3 Orthogonalität, orthogonale Projektion 28

3.4 Der adjungierte Operator 30

3.5 Projektionen 31

3.6 Schwache Konvergenz 32

3.7 Orthogonalsysteme 32

3.8 Orthogonalreihen 34

3.9 Separable Hilberträume 36

3.10 Der Satz von Lax-Milgram 37

4 Spektraltheorie stetiger Operatoren **39**

4.1 Einige Beispiele 39

4.2 Spektrum und Resolvente 41

4.3 Kompakte Operatoren und Operatoren von endlichem Rang 43

4.4 Spektraltheorie kompakter Operatoren im Hilbertraum 45

4.5 Selbstadjungierte Operatoren 46

4.6 Unitäre und normale Operatoren 48

Kapitel 1

Metrische Räume

Inhalt der Vorlesung *Analysis* ist die Theorie der Konvergenz von Folgen und Reihen, sowie der Differentiation und Integration von Funktionen. Dabei ist der zugrundeliegende Vektorraum gleich $\mathbb{R}^n$, mit $n \in \mathbb{N}$, also endlichdimensional. In der linearen Algebra werden zwar unendlichdimensionale Vektorräume zugelassen, aber auch dort liegt der Schwerpunkt eher auf dem endlichdimensionalen Fall. In dieser Vorlesung werden wir jetzt hauptsächlich unendlichdimensionale Räume untersuchen und die Begriffe und Resultate der Analysis, soweit dies möglich ist, auf diesen Fall ausdehnen. Dabei ist es notwendig, dass wir die Länge eines Vektors, und damit den Abstand zweier Vektoren als die Länge des Differenzvektors, bestimmen können. Dies geschieht durch die axiomatische Einführung einer *Norm*. Da jedoch in vielen interessanten Beispielen statt einer Norm nur eine sogenannte *Metrik* gegeben ist, und da viele Resultate genausogut in dieser allgemeineren Situation gelten, werden wir zunächst vor allem *metrische Räume* studieren. Dabei werden viele Begriffe betrachtet, die so oder ähnlich zum Beispiel in Analysis II und/oder einer Vorlesung über Topologie behandelt werden, und wir werden in den ersten Abschnitten die meisten Beweise auslassen, da sie vollkommen analog zu denen in der Analysis sind.

1.1 Normierte und metrische Räume

Wenn man in der *Analysis* zeigt, dass die Summe zweier konvergenter Folgen wieder konvergiert, spielt die *Dreiecksungleichung* für reelle und komplexe Zahlen bzw. für Vektoren in $\mathbb{K}^n$ eine entscheidende Rolle. Daher ist es nicht weiter verwunderlich, dass wir bei der axiomatischen Definition für die Länge, oder besser: die Norm von Vektoren ebenfalls die Gültigkeit einer Dreiecksungleichung fordern.

Definition 1.1.1 (Normierte Räume) *Sei $\mathbb{X}$ ein beliebiger Vektorraum über $\mathbb{K}$, wobei $\mathbb{K}$ immer $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ bedeuten soll. Eine Abbildung*

$$\|\cdot\|: \quad \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \|x\|$$

heißt eine Norm *auf $\mathbb{X}$, wenn folgende Axiome gelten:*

(N1) $\quad \forall\, x \in \mathbb{X}: \quad \|x\| \geq 0\,; \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$ (Positive Definitheit)

(N2) $\quad \forall\, x \in \mathbb{X} \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{K}: \quad \|\alpha\, x\| = |\alpha|\, \|x\|$ (Homogenität)

(N3) $\quad \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{X}: \quad \|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$ (Dreiecksungleichung)

Das Paar $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ *heißt dann* ein normierter Raum. *Wir schreiben auch einfach* $\mathbb{X}$ *für einen normierten Raum, obwohl es auf einem Vektorraum mehrere Normen geben kann – vergleiche dazu die unten stehenden Beispiele.*

Beispiel 1.1.2 *Für* $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{K}^n$ *und* $1 \leq p \leq \infty$ *sei*

$$\|x\|_p \quad = \quad \begin{cases} \Big(|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p\Big)^{1/p} & (p < \infty), \\ \\ \sup\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} & (p = \infty). \end{cases}$$

Dadurch ist für jedes solche p *eine Norm auf* $\mathbb{K}^n$ *definiert; für* $p < \infty$ *ist die Dreiecksungleichung äquivalent zur* Minkowskischen Ungleichung. *Wir nennen* $\|\cdot\|_p$ die p-Norm auf $\mathbb{K}^n$, *und sprechen für* $p = 2$ *auch von der* euklidischen Norm. *Dabei gilt immer*

$$\|x\|_\infty \ \leq \ \|x\|_p \ \leq \ n^{1/p}\, \|x\|_\infty \,,$$

und daher folgt $\|x\|_p \to \|x\|_\infty \ (p \to \infty)$ *für alle* $x \in \mathbb{K}^n$.

Beispiel 1.1.3 *Sei* $[a, b]$ *ein abgeschlossenes Intervall, wobei* $a < b$ *sei, und sei* $C[a, b]$ *die Menge aller dort stetigen Funktionen mit Werten in* $\mathbb{K}$. *Für* $f \in C[a, b]$ *sei*

$$\|f\|_p \ = \ \begin{cases} \Big(\displaystyle\int_a^b |f(x)|^p dx\Big)^{1/p} & (1 \leq p < \infty), \\ \\ \sup\{|f(x)| : \ a \leq x \leq b\} & (p = \infty). \end{cases}$$

Dies sind Normen auf $C[a, b]$, *für jedes solche* p. *Man erhält aber keine Norm, wenn man statt der stetigen Funktionen die Menge aller auf* $[a, b]$ *Riemann- oder auch aller Lebesgue-integrierbaren Funktionen betrachtet. Der in der Funktionalanalysis sehr wichtige Raum* $L_p[a, b]$ *ist deshalb genaugenommen kein Raum von Funktionen, sondern von Äquivalenzklassen von fast überall gleichen Funktionen auf* $[a, b]$.

Da in vielen interessanten Beispielen und Anwendungen die Abstände von Elementen einer Menge, welche kein Vektorraum ist, eine Rolle spielen, hat man in der Mathematik auch das allgemeinere Konzept eines *metrischen Raumes* eingeführt:

Definition 1.1.4 (Metrischer Raum) *Sei* $\mathbb{M}$ *eine nicht-leere Menge. Als* Metrik auf $\mathbb{M}$ *bezeichnen wir eine Abbildung* $d : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \to \mathbb{R}$, *für die folgende Axiome gelten:*

(M1) $\quad \forall\, x, y \in \mathbb{M} : \quad d(x, y) \ \geq 0\,, \qquad d(x, y) \ = \ 0 \iff x = y$ (Positive Definitheit)

(M2) $\quad \forall\, x, y \in \mathbb{M} : \quad d(x, y) \ = \ d(y, x)$ (Symmetrie)

(M3) $\quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{M} : \quad d(x, z) \ \leq \ d(x, y) \ + \ d(y, z)$ (Dreiecksungleichung)

Das Paar $(\mathbb{M}, d)$ *heißt dann auch* ein metrischer Raum.

Beispiel 1.1.5 *Wenn* $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ *ein beliebiger normierter Raum ist, dann ist durch* $d(x, y) = \|x - y\|$ *für alle* $x, y \in \mathbb{X}$ *eine Metrik auf* $\mathbb{X}$ *gegeben; wir sprechen dann* von der durch die Norm induzierten Metrik. *Jeder normierte Raum ist also auch ein metrischer Raum, aber nicht umgekehrt, denn ein metrischer Raum ist im Allgemeinen kein Vektorraum, und wenn doch, dann braucht die Metrik nicht zu einer Norm zu gehören.*

Beispiel 1.1.6 *Eine beliebige nicht-leere Teilmenge U eines metrischen Raumes $(\mathbb{M}, d)$ ist offenbar selber wieder metrischer Raum, wenn man die Abbildung d auf $U \times U$ einschränkt, und wir sprechen dann auch vom* Unterraum U, *was nicht dasselbe ist wie der Unterraumbegriff bei Vektorräumen. Beachte, dass eine nicht-leere Teilmenge eines normierten Raumes natürlich im Allgemeinen kein normierter Raum, aber stets ein metrischer Raum ist.*

Aufgabe 1.1.7 (Dreiecksungleichung nach unten – Vierecksungleichung) *Sei $(\mathbb{M}, d)$ ein metrischer Raum. Zeige:*

(a) $\quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{M}: \qquad \big|d(x,y) - d(y,z)\big| \;\leq\; d(x,z).$

(b) $\quad \forall\, x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{M}: \quad \big|d(x_1,x_2) \;-\; d(x_3,x_4)\big| \;\leq\; d(x_1,x_3) \;+\; d(x_2,x_4).$

1.2 Topologie metrischer Räume

Die in diesem Abschnitt vorgestellten Begriffe sind für den Raum $\mathbb{R}^n$ aus der *Analysis* bekannt und werden in metrischen Räumen analog definiert. Wir lassen hier alle Beweise aus.

Definition 1.2.1 (Offene Mengen, Umgebungen) *Sei $(\mathbb{M}, d)$ ein metrischer Raum. Für $x_0 \in \mathbb{M}$ und $\varepsilon > 0$ heißt die Menge*

$$U_\varepsilon(x_0) \;=\; K(x_0, \varepsilon) \;=\; \{x \in \mathbb{M}: \quad d(x, x_0) < \varepsilon\}$$

die ε-Umgebung von x_0, *oder auch* die Kugel *oder* Kreisscheibe um x_0 mit Radius ε. *Eine Teilmenge $O \subset \mathbb{M}$ heißt* offen, *wenn folgendes gilt:*

$$\forall\, x_0 \in O \quad \exists\, \varepsilon > 0 \;: \qquad U_\varepsilon(x_0) \;\subset\; O\,.$$

Eine Menge U heißt Umgebung eines Punktes $x \in \mathbb{M}$, *falls eine offene Menge $O \subset \mathbb{M}$ existiert, für die $x \in O \subset U$ gilt. Falls U sogar selber offen ist, sprechen wir auch von einer* offenen Umgebung *von x. Mit $\mathcal{U}(x)$ bzw. $\mathcal{U}_0(x)$ wird das System aller Umgebungen bzw. aller offenen Umgebungen von x bezeichnet. Beachte, dass in manchen Büchern, z. B. in* [10], *Umgebungen immer offen sein müssen, während dies hier anders ist.*

In der folgenden Aufgabe 1.2.2 wird gezeigt, dass alle Kugeln offen sind; dies liegt an der Dreiecksungleichung für die Metrik. Jede ε-Umgebung von x ist also auch offene Umgebung von x.

Aufgabe 1.2.2 *Sei $(\mathbb{M}, d)$ ein metrischer Raum. Zeige:*

(a) *Für jedes $x \in \mathbb{M}$ und jedes $\varepsilon > 0$ ist $U_\varepsilon(x)$ offen.*

(b) *Eine Menge $O \subset \mathbb{M}$ ist genau dann offen, wenn sie Umgebung aller ihrer Punkte ist.*

Satz 1.2.3 (Eigenschaften offener Mengen) *In jedem metrischem Raum $(\mathbb{M}, d)$ haben die offenen Mengen immer folgende drei Eigenschaften:*

(O1) $\quad$ *$\emptyset$ und $\mathbb{M}$ sind offen.*

(O2) $\quad$ *Die Vereinigung* beliebig *vieler offener Mengen ist wieder offen.*

(O3) $\quad$ *Der Durchschnitt* endlich *vieler offener Mengen ist wieder offen.*

Definition 1.2.4 *Sei* $(\mathbb{M}, d)$ *metrischer Raum. Eine Menge* $A \subset \mathbb{M}$ *heißt* abgeschlossen, *wenn* $\mathbb{M} \setminus A$ *offen ist. Ein* $x \in \mathbb{M}$ *heißt* Berührungspunkt *einer Teilmenge* $E \subset \mathbb{M}$, *wenn gilt*

$$\forall\, U \in \mathcal{U}(x) \ : \qquad U \cap E \neq \emptyset\,. \tag{1.2.1}$$

Beachte, dass jedes Element aus E *auch ein Berührungspunkt von* E *ist.*

Satz 1.2.5 (Eigenschaften abgeschlossener Mengen) *In jedem metrischen Raum* $(\mathbb{M}, d)$ *gilt:*

(A1) $\emptyset$ *und* $\mathbb{M}$ *sind abgeschlossen.*

(A2) *Die Vereinigung* endlich *vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*

(A3) *Der Durchschnitt* beliebig *vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*

Definition 1.2.6 *Sei* $(\mathbb{M}, d)$ *metrischer Raum, und sei* $E \subset \mathbb{M}$. *Ein* $x \in E$ *heißt* innerer Punkt (von E), *falls* $E \in \mathcal{U}(x)$ *ist. Die Menge aller inneren Punkte von* E *wird mit* $\mathring{E}$ *bezeichnet und* offener Kern von E *genannt. Die Menge aller Berührungspunkte von* E *heißt* die abgeschlossene Hülle von E *und wird mit* $\overline{E}$ *bezeichnet. Wir nennen* E dicht *in* $\mathbb{M}$, *falls* $\overline{E} = \mathbb{M}$ *ist.*

Aufgabe 1.2.7 *Finde einen metrischen Raum* $(\mathbb{M}, d)$ *sowie ein* $r > 0$ *und ein* $x \in \mathbb{M}$, *so dass* $\overline{K(x,r)} \neq \{y \in \mathbb{M} : d(x,y) \leq r\}$ *ist.*

Satz 1.2.8 *In jedem metrischen Raum* $(\mathbb{M}, d)$ *gilt:*

(a) *Der offene Kern von* E *ist die größte offene Teilmenge von* E, *oder genauer:* $\mathring{E}$ *ist die Vereinigung aller offenen Teilmengen von* E.

(b) *Die abgeschlossene Hülle von* E *ist die kleinste abgeschlossene Obermenge von* E, *oder genauer:* $\overline{E}$ *ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Obermengen von* E.

(c) E *ist genau dann offen, wenn* $E = \mathring{E}$ *ist.*

(d) E *ist genau dann abgeschlossen, wenn* $E = \overline{E}$ *ist.*

(e) *Für* $F = \mathbb{M} \setminus E$ *gilt* $\mathring{F} = \mathbb{M} \setminus \overline{E}$, $\overline{F} = \mathbb{M} \setminus \mathring{E}$.

Definition 1.2.9 *Sei* $(\mathbb{M}, d)$ *metrischer Raum, und sei* $E \subset \mathbb{M}$. *Ein* $x \in \mathbb{M}$ *heißt* Häufungspunkt von E, *falls gilt*

$$\forall\, U \in \mathcal{U}(x) \ : \qquad \Big(U \setminus \{x\}\Big) \cap E \neq \emptyset\,.$$

Die Menge aller Häufungspunkte von E *wird mit* E' *bezeichnet. Ein* $x \in \mathbb{M}$ *heißt* Randpunkt von E, *falls gilt*

$$\forall\, U \in \mathcal{U}(x) \ : \qquad U \cap E \neq \emptyset\,, \quad U \cap \Big(\mathbb{M} \setminus E\Big) \neq \emptyset\,.$$

In Worten bedeutet dies, dass Randpunkte genau diejenigen Punkte sind, welche Berührungspunkte sowohl von E *als auch vom Komplement von* E *sind. Die Menge aller Randpunkte von* E *heißt* der Rand *von* E, *in Zeichen* $\mathrm{rd}\,(E)$. *Ein Punkt* $x \in E$ *heißt* isolierter Punkt *von* E, *falls ein* $U \in \mathcal{U}(x)$ *existiert mit* $U \cap E = \{x\}$.

Aufgabe 1.2.10 *Gib ein Beispiel eines metrischen Raumes* $(\mathbb{M}, d)$, *in dem es ein* $r > 0$ *und ein* $x \in \mathbb{M}$ *gibt, für die* $\mathrm{rd}\, K(x,r) \neq \{y \in \mathbb{M} : d(x,y) = r\}$ *ist.*

Satz 1.2.11 *In jedem metrischen Raum* $(\mathbb{M}, d)$ *gilt:*

(a) $\overline{E} \ = \ E \cup E'$.

(b) $\mathrm{rd}\,(E) = \mathrm{rd}\,(\mathbb{M} \setminus E) = \overline{E} \setminus \mathring{E}$.

1.3 Stetigkeit und Konvergenz

Auch die Definitionen der Stetigkeit von Funktionen bwz. der Konvergenz von Folgen sind in einem metrischen Raum ganz analog zu denen in *Analysis*.

Definition 1.3.1 (Stetigkeit in metrischen Räumen) *Seien* $(\mathbb{M}, d)$ *und* $(\tilde{\mathbb{M}}, \tilde{d})$ *metrische Räume. Eine Abbildung* $f : \mathbb{M} \to \tilde{\mathbb{M}}$ *heißt* in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{M}$ stetig, *falls folgendes gilt:*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x \in \mathbb{M}: \qquad d(x, x_0) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \tilde{d}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon\,. \tag{1.3.1}$$

Falls dies für alle $x \in \mathbb{M}$ *gilt, nennen wir* f auf $\mathbb{M}$ stetig. *Die Abbildung* f *heißt* auf $\mathbb{M}$ gleichmäßig stetig, *wenn*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ x_0, x \in \mathbb{M}: \qquad d(x, x_0) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \tilde{d}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon\,. \tag{1.3.2}$$

Beachte, dass jede Teilmenge von $\mathbb{M}$ *wieder ein metrischer Raum ist, so dass die Definition der gleichmäßigen Stetigkeit auf einer Teilmenge* $A \subset \mathbb{M}$ *klar ist. Weiter nennen wir* f Lipschitz-stetig *auf* $\mathbb{M}$*, wenn es eine Konstante* L *gibt, für welche*

$$\forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{M}: \qquad d(f(x_1), f(x_2)) \ \leq\ L\, d(x_1, x_2)\,.$$

Jedes solche L *heißt auch* Lipschitzkonstante *für* f*. Klar ist, dass aus Lipschitzstetigkeit die gleichmäßige Stetigkeit folgt. Schließlich sagen wir, dass* f *auf* $\mathbb{M}$ lokal Lipschitz-stetig *ist, falls es zu jedem* $x_0 \in M$ *eine Umgebung von* x_0 *gibt, auf der* f *Lipschitz-stetig ist. Mit* $F(\mathbb{M}, \tilde{\mathbb{M}})$ *bezeichnen wir die Menge aller Abbildungen von* $\mathbb{M}$ *in* $\tilde{\mathbb{M}}$*, und* $C(\mathbb{M}, \tilde{\mathbb{M}})$ *sei die Teilmenge aller stetigen Abbildungen. Eine Menge* $E \subset F(\mathbb{M}, \tilde{\mathbb{M}})$ *heißt* gleichgradig stetig *in* $x_0 \in \mathbb{M}$*, falls gilt*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ f \in E\,,\ x \in \mathbb{M}: \qquad d(x, x_0) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \tilde{d}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon\,. \tag{1.3.3}$$

Aufgabe 1.3.2 *Zeige: Ist* $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ *ein normierter Raum, so ist die Abbildung* $x \mapsto \|x\|$ *Lipschitz-stetig auf* $\mathbb{X}$.

Die Stetigkeit kann allein mit Hilfe offener Mengen bzw. Umgebungen formuliert werden:

Satz 1.3.3 *Seien* $(\mathbb{M}, d)$ *und* $(\tilde{\mathbb{M}}, \tilde{d})$ *metrische Räume, und sei* $f : \mathbb{M} \to \tilde{\mathbb{M}}$*. Genau dann ist* f *stetig in* $x_0 \in \mathbb{M}$*, falls für jede Umgebung* U *von* $f(x_0)$ *die Menge* $f^{-1}(U)$ *Umgebung von* x_0 *ist. Genau dann ist* f *auf* $\mathbb{M}$ *stetig, wenn für jede offene Teilmenge* $O \subset \tilde{\mathbb{M}}$ *die Menge* $f^{-1}(O)$ *in* $\mathbb{M}$ *offen ist.*

Definition 1.3.4 *Sei* $(\mathbb{M}, d)$ *ein metrischer Raum. Eine Folge* (x_n) *heißt* konvergent in $\mathbb{M}$*, oder einfach* konvergent*, falls ein* $x \in \mathbb{M}$ *existiert, so dass*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ N \in \mathbb{R} \quad \forall\ n \geq N: \qquad d(x_n, x) \ <\ \varepsilon\,.$$

Wir schreiben dann $x_n \to x$ *für* $n \to \infty$*, oder* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$*, und nennen* x *auch* Grenzwert der Folge (x_n)*. Sei* $(\tilde{\mathbb{M}}, \tilde{d})$ *ein weiterer metrischer Raum, und sei* $f : \mathbb{M} \to \tilde{\mathbb{M}}$*. Wir nennen* f folgenstetig in dem Punkt $x \in \mathbb{M}$*, falls für jede Folge* (x_n) *aus* $\mathbb{M}$ *gilt*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \ =\ x \quad (\text{in } \mathbb{M}) \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n) \ =\ f(x) \quad (\text{in } \tilde{\mathbb{M}})\,.$$

Lemma 1.3.5 *In einem metrischen Raum* $(\mathbb{M}, d)$ *hat jede Folge höchstens einen Grenzwert. Seien* $(\mathbb{M}, d)$ *und* $(\tilde{\mathbb{M}}, \tilde{d})$ *metrische Räume, und sei* $f : \mathbb{M} \to \tilde{\mathbb{M}}$*. Genau dann ist* f *stetig in einem Punkt* $x \in \mathbb{M}$*, wenn es dort folgenstetig ist.*

1.4 Cauchyfolgen

Definition 1.4.1 *Eine Folge* (x_n) *in einem metrischen Raum* $(\mathbb{M}, d)$ *heißt* Cauchyfolge, *wenn gilt*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, n, m \geq N : \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon\,.$$

Wenn jede Cauchyfolge in $\mathbb{M}$ *konvergiert, dann heißt* $(\mathbb{M}, d)$ vollständig.

Aufgabe 1.4.2 *Folgere aus* Aufgabe 1.3.2*: Ist* (x_n) *eine Cauchyfolge in einem normierten Vektorraum* $(\mathbb{M}, \|\cdot\|)$*, so ist die Folge der Normen* $\|x_n\|$ *eine Cauchyfolge in* $\mathbb{R}$*, also insbesondere beschränkt.*

Lemma 1.4.3 *Sei* $(\mathbb{M}, d)$ *ein metrischer Raum. Wenn eine Folge* (x_n) *in* $(\mathbb{M}, d)$ *konvergiert, dann ist sie Cauchyfolge. Wenn eine Cauchyfolge eine konvergente Teilfolge besitzt, dann ist sie konvergent.*

Beweis: Falls gilt $x_n \to x$ für $n \to \infty$, dann folgt, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq N$ gilt $d(x_n, x) < \varepsilon$. Mit der Dreiecksungleichung folgt daraus aber $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < 2\,\varepsilon$ für alle $n, m \geq N$. Das ist äquivalent zur Cauchybedingung. Sei jetzt (x_n) eine Cauchyfolge, und gelte für ein $x \in \mathbb{M}$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, N \in \mathbb{N} \quad \exists\, n_N \geq N \;:\quad d(x, x_{n_N}) < \varepsilon\,.$$

Dies ist gerade äquivalent zur Existenz einer Teilfolge, welche gegen x konvergiert. Daraus folgt für jedes $\varepsilon > 0$, mit N wie in der Cauchybedingung: $d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_N}) + d(x_{n_N}, x) < 2\,\varepsilon$, falls $n \geq N$ ist, was zu zeigen war. □

Beispiel 1.4.4 *Sei* $\mathbb{X}$ *die Menge der komplexen Zahlenfolgen* $x = (x_k)$ *mit nur endlich vielen Gliedern* $x_k \neq 0$*, und sei für ein* $p \geq 1$

$$\|x\|_p \;=\; \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\Big)^{1/p} \qquad \forall\, x \in \mathbb{X}\,.$$

Dann ist $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_p)$ *ein normierter Raum, und für die Folgen* $x^{(n)} = (x_k^{(n)})$ *mit* $x_k^{(n)} = 1/k^2$ *für* $1 \leq k \leq n$ *bzw.* $= 0$ *für* $k \geq n+1$ *folgt dann* $\|x^{(n)} - x^{(m)}\|_p^p \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-2p}$ *für* $m > n \geq 1$*. Daher ist* $(x^{(n)}, n \in \mathbb{N})$ *eine Cauchyfolge, hat aber in* $\mathbb{X}$ *keinen Grenzwert, weil aus* $x^{(n)} \to x = (x_k)$ *folgen würde, dass für jedes feste* k *gilt* $x_k^{(n)} \to x_k$ *für* $n \to \infty$*, und dann müsste* $x_k = 1/k^2$ *sein für alle* $k \in \mathbb{N}$*; diese Folge gehört aber nicht zur Menge* $\mathbb{X}$*. Der Ausweg aus diesem Dilemma besteht darin, die Menge* $\mathbb{X}$ *zu erweitern und statt ihrer den Raum*

$$\ell_p \;=\; \Big\{(x_k) : \quad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \;<\; \infty\Big\}$$

zu betrachten; in diesem Raum ist nämlich jede Cauchyfolge konvergent.

1.5 Kompakte Mengen

Es gibt verschiedene äquivalente Definitionen der Kompaktheit; z. B. wird in [4] eine andere Definition verwendet. Die hier benutzte heißt manchmal auch *Überdeckungskompaktheit*, oder die *Heine-Borel-Eigenschaft* und ist die gebräuchlichste.

Definition 1.5.1 (Kompaktheit, Folgenkompaktheit) *Eine Teilmenge K eines metrischen Raumes $(\mathbb{M}, d)$ heißt* kompakt*, wenn jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Das heißt genauer: Sind O_j, $j \in J$, alle offen, und ist $K \subset \cup_j O_j$, so gibt es $j_1, \ldots, j_n \in J$ derart dass $K \subset \cup_{k=1}^n O_{j_k}$ ist. Ist dies der Fall für $K = \mathbb{M}$, so nennen wir $(\mathbb{M}, d)$ auch* einen kompakten Raum*. Die Menge K heißt* folgenkompakt*, falls jede Folge mit Gliedern aus K eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert ebenfalls zu K gehört. Wir nennen K auch* präkompakt *oder* total beschränkt*, wenn gilt:*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{M}\ : \qquad K \ \subset\ \bigcup_{j=1}^{n} U_\varepsilon(x_j)\,. \tag{1.5.1}$$

Man nennt K auch beschränkt*, falls der* Durchmesser

$$\delta(K) \ :=\ \sup_{x,y \in K}\ d(x,y) <\ \infty$$

ist. Beachte aber, dass $\mathbb{M}$ selber beschränkt sein kann, so dass dieser Begriff vielfach bedeutungslos ist.

Aufgabe 1.5.2 *Zeige, dass ein kompakter metrischer Raum auch präkompakt ist. Zeige weiter, dass ein folgenkompakter metrischer Raum vollständig und präkompakt ist.*

Aufgabe 1.5.3 *Zeige: Eine Teilmenge eines folgenkompakten metrischen Raumes ist genau dann selber folgenkompakt, wenn sie abgeschlossen ist.*

Aufgabe 1.5.4 *Zeige: Wenn $K \neq \emptyset$ präkompakt ist, dann gilt* (1.5.1) *auch, wenn wir $x_1, \ldots, x_n \in K$ verlangen.*

Aufgabe 1.5.5 *Zeige, dass in einem metrischen Raum eine kompakte Teilmenge immer abgeschlossen und beschränkt ist.*

Satz 1.5.6 *In jedem metrischen Raum $(\mathbb{M}, d)$ gelten folgende Aussagen für alle Teilmenge $K \subset \mathbb{M}$:*

(a) *K ist genau dann kompakt, wenn es folgenkompakt ist.*

(b) *K ist genau dann folgenkompakt, wenn es vollständig und präkompakt ist.*

Beweis: Zu (a): Wenn K nicht folgenkompakt ist, dann gibt es eine Folge (x_n) ohne konvergente Teilfolge, und das bedeutet dass die Menge $A = \{x_n\}$ der Folgenglieder eine unendliche Menge ist (warum?), die keinen Häufungspunkt besitzt und daher abgeschlossen ist. Wir nehmen o. B. d. A. noch an, dass alle x_n verschieden sind, denn sonst könnte man zu einer Teilfolge übergehen. Dann gibt es zu jedem n ein $\varepsilon_n > 0$ derart, dass in $U_{\varepsilon_n}(x_n)$ keine weiteren Glieder der Folge liegen (wenn dies anders wäre, dann wäre x_n ein Häufungspunkt von A). Die offenen Mengen

$$U_{\varepsilon_n}(x_n)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,, \qquad O \ =\ \mathbb{M} \setminus A$$

bilden dann eine Überdeckung von K ohne endliche Teilüberdeckung, und folglich ist K nicht kompakt. Sei umgekehrt K folgenkompakt, und seien O_j, $j \in J$, eine offene Überdeckung von K. Wir beweisen zunächst die folgende

Zwischenbeh: Es gibt ein $\varepsilon > 0$ derart, dass für alle $x \in K$ ein $j \in J$ existiert mit $(U_\varepsilon(x) \cap K) \subset O_j$.

Wenn dem nicht so wäre, dann gäbe es für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in K$ derart, dass $U_{1/n}(x_n) \cap K \not\subset O_j$ für alle $j \in J$. Die Folge (x_n) hat einen Häufungspunkt $\xi \in K$, und $\xi \in O_{j_0}$ für ein $j_0 \in J$. Daher gibt es ein $\varepsilon > 0$

mit $U_\varepsilon(\xi) \subset O_{j_0}$, und für unendlich viele n folgt $x_n \in U_{\varepsilon/2}(\xi)$, also $U_{\varepsilon/2}(x_n) \subset O_{j_0}$. Dies widerspricht aber der Wahl der x_n.

Da aus Folgenkompaktheit wegen Aufgabe 1.5.2 die Präkompaktheit folgt, gibt es zu dem ε aus obiger Behauptung endlich viele $x_1, \ldots, x_n$ so, dass die $U_\varepsilon(x_k)$ ganz K überdecken, und zu jedem k gibt es ein $j_k \in J$ mit $(K \cap U_\varepsilon(x_k)) \subset O_{j_k}$. Daher bilden die $O_{j_1}, \ldots, O_{j_n}$ die gesuchte endliche Teilüberdeckung. Daher ist (a) bewiesen.

Die eine Richtung von (b) wurde in Aufgabe 1.5.2 gezeigt, und daher sei jetzt K als vollständig und präkompakt vorausgesetzt. Sei (x_n) eine beliebige Folge aus K. Zu jedem $\nu \in \mathbb{N}$ gibt es endlich viele $y_{1\nu}, \ldots, y_{m\nu} \in \mathbb{M}$ mit $K = \cup_k U_{1/\nu}(y_{k\nu})$. Für $\nu = 1$ liegen in mindestens einem $U_1(y_{k1})$ unendlich viele x_n, und wir bezeichnen die entsprechende Teilfolge mit x_{n1}. Zu dieser Folge und $\nu = 2$ gibt es wiederum ein $U_{1/2}(y_{k2})$, welches unendlich viele der x_{n1} enthält, und diese seien mit x_{n2} bezeichnet. Setzt man dies fort, so erhält man Folgen $x_{n\nu}$ mit $d(x_{n\nu}, x_{m\mu}) < 2/\nu$ für alle $n, m, \mu, \nu \in \mathbb{N}$ mit $\mu \geq \nu$. Die Diagonalfolge (x_{nn}) ist dann eine Teilfolge der Ausgangsfolge (x_n), welche Cauchyfolge ist. Also hat sie wegen der Vollständigkeit von K einen Grenzwert $\xi \in K$, was die Folgenkompaktheit von K zeigt. □

Definition 1.5.7 *Ein metrischer Raum* $(\mathbb{M}, d)$ *heißt* separabel*, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt, d. h., wenn eine abzählbare Menge* $A \subset \mathbb{M}$ *existiert mit* $\overline{A} = \mathbb{M}$.

Satz 1.5.8 *Sei* $(\mathbb{M}, d)$ *ein kompakter metrischer Raum. Dann gilt:*

(a) $(\mathbb{M}, d)$ *ist separabel.*

(b) *Wenn* $(\tilde{\mathbb{M}}, \tilde{d})$ *ein weiterer metrischer Raum und* $f : \mathbb{M} \to \tilde{\mathbb{M}}$ *stetig ist, dann ist* f *sogar gleichmäßig stetig, und* $f(\mathbb{M})$ *ist kompakt.*

(c) *Wenn* $f : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ *stetig ist, dann gibt es* $a, b \in \mathbb{M}$ *derart, dass*

$$\forall\, x \in \mathbb{M} : \qquad f(a) \;\leq\; f(x) \;\leq\; f(b)\,.$$

Insbesondere ist also f *beschränkt.*

Beweis: Da der Raum auch präkompakt ist, gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ endlich viele Punkte $x_{nk} \in \mathbb{M}$ derart, dass die $U_{1/n}(x_{nk})$ eine Überdeckung von $\mathbb{M}$ sind. Es folgt sofort, dass die Menge aller x_{nk} dicht ist, und deshalb gilt (a). Zu (b): Sei $\varepsilon > 0$, dann gibt es zu jedem $x \in \mathbb{M}$ ein $\delta(x) > 0$, so dass (1.3.1) gilt. Die Menge der $U_{\delta(x)/2}(x)$ ist eine offene Überdeckung von $\mathbb{M}$, und somit gibt es endlich viele $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{M}$, so dass auch $U_{\delta(x_1)/2}(x_1), \ldots, U_{\delta(x_n)/2}(x_n)$ eine Überdeckung bilden. Seien $x, y \in \mathbb{M}$, und sei k so, dass $x \in U_{\delta(x_k)/2}(x_k)$. Ist dann $d(x, y) < \delta := \min\{\delta(x_1)/2, \ldots, \delta(x_n)/2\}$, so folgt $x, y \in U_{\delta(x_k)}(x_k)$, und deshalb gilt

$$\tilde{d}(f(x), f(y)) \;\leq\; \tilde{d}(f(x), f(x_k)) \;+\; \tilde{d}(f(x_k), f(y)) \;<\; 2\,\varepsilon\,.$$

Das impliziert die gleichmäßige Stetigkeit von f. Die Kompaktheit von $f(\mathbb{M})$ folgt leicht aus der Definition und der Charakterisierung der Stetigkeit mit Hilfe von offenen Mengen. Für (c) können wir aus (b) folgern, dass $f(\mathbb{M})$ eine kompakte, also eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, und jede solche Menge besitzt ein maximales und ein minimales Element. □

Definition 1.5.9 *Wenn* $(\mathbb{M}, d)$ *kompakt ist, wird durch*

$$\rho(f, g) \;:=\; \sup_{x \in \mathbb{M}} \tilde{d}(f(x), g(x)) \qquad \forall\; f, g \in C(\mathbb{M}, \tilde{\mathbb{M}})$$

eine Metrik auf $C(\mathbb{M}, \tilde{\mathbb{M}})$ *definiert – wir betrachten auf diesem Raum immer diese Metrik.*

Definition 1.5.10 *In einem metrischen Raum* $(\mathbb{M}, d)$ *setzen wir für zwei nichtleere Teilmengen* $E, F \subset \mathbb{M}$

$$d(E,F) \;=\; \inf\{d(x,y) \,:\, x \in E\,,\; y \in F\}$$

und interpretieren das als den Abstand der Mengen E und F. *Beachte dazu aber die nächste Aufgabe. Wenn* $E = \{x\}$ *nur ein Element hat, schreiben wir auch* $d(x,F)$ *anstatt* $d(E,F)$.

Aufgabe 1.5.11 *Seien* $E, F \subset \mathbb{M}$ *zwei nichtleere Teilmengen eines metrischen Raumes* $(\mathbb{M}, d)$. *Zeige: Im Allgemeinen folgt aus* $d(E,F) = 0$ *nicht, dass* $E \cap F \neq \emptyset$ *ist, selbst wenn beide abgeschlossen sind. Wenn aber* E *kompakt und* F *abgeschlossen ist, und wenn* $E \cap F = \emptyset$ *ist, dann folgt in der Tat* $d(E,F) > 0$.

1.6 Der Satz von Arzela-Ascoli

Definition 1.6.1 *Seien* $X \neq \emptyset$ *eine ansonsten beliebige Menge und* $(\mathbb{M}, d)$ *ein metrischer Raum, und sei* $E \subset F(X, \mathbb{M})$. *Wir nennen* E punktweise beschränkt, *falls gilt*

$$\forall\, x \in X \quad \exists\, K \in \mathbb{R} \quad \forall\, f_1, f_2 \in E: \quad d(f_1(x), f_2(x)) \;\leq\; K\,.$$

Dagegen heißt E gleichmäßig beschränkt, *falls gilt*

$$\exists\, K \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in X \quad \forall\, f_1, f_2 \in E: \quad d(f_1(x), f_2(x)) \;\leq\; K\,.$$

Im ersten Fall darf also K *von* x *abhängen, im anderen Fall dagegen nicht.*

Lemma 1.6.2 *Seien* $(\mathbb{M}, d)$ *ein kompakter und* $(\tilde{\mathbb{M}}, \tilde{d})$ *ein beliebiger metrischer Raum. Wenn* $E \subset C(\mathbb{M}, \tilde{\mathbb{M}})$ *gleichgradig stetig und punktweise beschränkt ist, dann ist* E *sogar gleichmäßig beschränkt.*

Beweis: Wegen der gleichgradigen Stetigkeit folgt für jedes $x \in \mathbb{M}$ die Existenz eines $U_x \in \mathcal{U}(x)$ so dass für alle $f \in E$ und alle $y \in U_x$ gilt $\tilde{d}(f(x), f(y)) < 1$. Wegen der Kompaktheit von $(\mathbb{M}, d)$ gibt es $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{M}$ mit $\mathbb{M} = \cup_k U_{x_k}$, und aus der punktweisen Beschränktheit folgt die Existenz von K_k so, dass für alle $f_1, f_2 \in E$ gilt $\tilde{d}(f_1(x_k), f_2(x_k)) \leq K_k$, für $k = 1, \ldots, n$. Mit $K = 2 + \max\{K_1, \ldots, K_n\}$ gilt dann: Zu $x \in \mathbb{M}$ gibt es ein $k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $x \in U_{x_k}$, und daher ist

$$\tilde{d}(f_1(x), f_2(x)) \;\leq\; \tilde{d}(f_1(x), f_1(x_k)) \;+\; \tilde{d}(f_1(x_k), f_2(x_k)) + \tilde{d}(f_2(x_k), f_2(x)) \;\leq\; K_k + 2 \;\leq K \quad \forall\, x \in \mathbb{M}\,.$$

Das ist die gleichmäßige Beschränktheit. □

Definition 1.6.3 *Wir sagen dass ein metrischer Raum die* Heine-Borel-Eigenschaft *besitzt, wenn jede abgeschlossene und beschränkte Teilmenge kompakt ist. Aus den Grundvorlesungen wissen wir, dass* $\mathbb{K}^n$ *diese Eigenschaft hat. Allgemeiner besitzt jeder endlich-dimensionale normierte Vektorraum die Heine-Borel-Eigenschaft.*

Satz 1.6.4 (Arzela-Ascoli) *Seien* $(\mathbb{M}, d)$ *ein kompakter metrischer Raum und* $(\tilde{\mathbb{M}}, \tilde{d})$ *ein metrischer Raum mit der Heine-Borel-Eigenschaft. Für eine beliebige Teilmenge* $E \subset C(\mathbb{M}, \tilde{\mathbb{M}})$ *ist* $\overline{E}$ *genau dann kompakt, wenn* E *gleichgradig stetig und punktweise beschränkt ist.*

(Ohne Beweis)

1.7 Der Bairesche Satz

Lemma 1.7.1 *In jedem vollständigen metrischen Raum* $(\mathbb{M}, d)$ *gilt: Sind die Mengen* $A_n \subset \mathbb{M}$, $n \in \mathbb{N}$, *alle abgeschlossen und nicht leer, und ist*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}: \qquad A_n \supset A_{n+1}\,, \qquad d(A_n) \;:=\; \sup_{x,y \in A_n} d(x,y) \;\to\; 0 \quad (n \to \infty)\,,$$

so enthält $\cap_n A_n$ *genau einen Punkt* $x_0 \in \mathbb{M}$.

Beweis: Sei $x_n \in A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist für $n, p \in \mathbb{N}$ immer $x_{n+p} \in A_n$, und somit folgt $d(x_{n+p}, x_n) \le d(A_n)$. Daraus schließen wir, dass (x_n) eine Cauchyfolge ist und wegen der Vollständigkeit einen Grenzwert x_0 besitzt. Da alle A_n abgeschlossen sind, folgt $x_0 \in A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist y ebenfalls im Durchschnitt aller A_n, so folgt $d(x_0, y) \le d(A_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, weswegen $y = x_0$ sein muss. □

Definition 1.7.2 *Ein metrischer Raum* $(\mathbb{M}, d)$ *heißt* Baire-Raum*, falls gilt: Wenn für alle* $n \in \mathbb{N}$ *die Menge* $A_n \subset \mathbb{M}$ *abgeschlossen ist und keine inneren Punkte hat, so hat auch die Vereinigung aller* A_n *keine inneren Punkte.*

Beispiel 1.7.3 *Die Menge* $\mathbb{Q}$ *mit der euklidischen Topologie ist kein Baire-Raum, da sie die abzählbare Vereinigung von einelementigen Mengen ist. Allgemeiner ist jeder abzählbare metrische Raum kein Baire-Raum.*

Satz 1.7.4 (Baire) *Vollständige metrische Räume sind immer Baire-Räume.*

Beweis: Sei $(\mathbb{M}, d)$ ein vollständiger metrischer Raum mit Metrik d, und seien die Mengen $A_n \subset \mathbb{M}$ abgeschlossen und ohne innere Punkte. Sei O offen und nicht leer. Dann wollen wir nicht-leere offene Mengen O_n mit $O_0 = O$ so wählen, dass $\overline{O}_n \subset O_{n-1}$ und $\overline{O}_n \cap A_n = \emptyset$ ist, jeweils für $n \ge 1$. Wenn $O_0, \dots, O_{n-1}$ bereits gewählt sind, dann ist $V := O_{n-1} \cap (\mathbb{M} \setminus A_n)$ eine offene Menge und nicht leer, denn sonst wäre $O_{n-1} \subset A_n$, was $\mathring{A}_n = \emptyset$ widerspricht. Sei $x \in V$, dann gibt es ein offenes O_n, etwa eine Kugel mit hinreichend kleinem Radius, mit $x \in O_n \subset \overline{O}_n \subset V$, und dieses O_n hat die gewünschte Eigenschaft. O. B. d. A. können wir zusätzlich O_n noch so verkleinern, dass $d(\overline{O}_n) \le 1/n$ ist. Mit Hilfe des letzten Lemmas folgt dann dass der Durchschnitt aller $\overline{O}_n$ genau einen Punkt x enthält. Also folgt nach Wahl der O_n dass $x \in \cap_n(\mathbb{M} \setminus A_n) = \mathbb{M} \setminus \cup_n A_n$. Wegen $x \in \overline{O}_1 \subset O_0 = O$ folgt dass $O \not\subset \cup_n A_n$ ist. Da O eine beliebige offene Menge gewesen ist, kann $\cup_n A_n$ keine inneren Punkte haben. □

Proposition 1.7.5 *Ein metrischer Raum* $(\mathbb{M}, d)$ *ist genau dann ein Baire-Raum, wenn folgendes gilt: Sind die Mengen* O_n *offen und dicht in* $(\mathbb{M}, d)$, *für* $n \in \mathbb{N}$, *dann ist ihr Durchschnitt dicht in* $(\mathbb{M}, d)$.

Beweis: Ein O_n ist genau dann offen und dicht, wenn $A_n := \mathbb{M} \setminus O_n$ abgeschlossen ist und keine inneren Punkte hat. Daraus folgt die Behauptung. □

Kapitel 2

Stetige lineare Abbildungen

Wenn nichts anderes gesagt wird, sind $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$, $\mathbb{Z}$ im Folgenden immer normierte (Vektor-)Räume über dem gleichen Körper $\mathbb{K}$, wobei wie üblich $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sein kann. Im ersten bzw. zweiten Fall sprechen wir auch von reellen bzw. komplexen Räumen. Es ist bequem, die Normen in den Räumen $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$, $\mathbb{Z}$ immer mit dem gleichen Symbol $\|\cdot\|$ zu bezeichnen; nur falls dies zu Missverständnissen führen könnte, wollen wir davon abweichen. Da jeder normierte Raum immer auch ein metrischer Raum ist, gelten alle Definitionen und Ergebnisse aus dem ersten Kapitel sinngemäß auch für normierte Räume. Insbesondere ist klar, was ein vollständiger normierter Raum ist, und jeder solche Raum wird künftig kurz als *Banachraum* bezeichnet. Wir geben noch folgende wichtige Beispiele von Banachräumen, ohne ihre Vollständig zu beweisen:

- Für $p \geq 1$ ist ℓ_p wie in Beispiel 1.4.4 ein Banachraum mit der dort angegebenen Norm.
- Die Menge ℓ_∞ aller beschränkten Zahlenfolgen mit Gliedern in $\mathbb{K}$ ist ein Banachraum über $\mathbb{K}$ mit der Norm $\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|$.
- Die Menge c aller konvergenten Zahlenfolgen ist ein abgeschlossener Unterraum von ℓ_∞ und deshalb selber ein Banachraum (mit der gleichen Norm). Dasselbe gilt für die Menge c_0 aller Nullfolgen.
- Für eine beliebige nichtleere Menge D ist die Menge $\mathcal{F}_\infty(D)$ aller beschränkten Abbildungen $f : D \to \mathbb{K}$ ein Banachraum über $\mathbb{K}$ unter der Supremumsnorm

  $$\|f\| \;=\; \sup_{t\in D} |f(t)|\,.$$

  Offenbar ist ℓ_∞ ein Spezialfall dieses Raumes für $D = \mathbb{N}$. Noch allgemeiner sei $\mathcal{F}_\infty(D, \mathbb{X})$ die Menge aller beschränkten Abbildungen von D in einen beliebigen Banachraum $\mathbb{X}$. Sie ist selber wieder ein Banachraum unter der Norm

  $$\|f\| \;=\; \sup_{t\in D} \|f(t)\|\,,$$

  wobei rechts die Norm in $\mathbb{X}$ gemeint ist.
- Für einen metrischen Raum (D, d) ist die Menge $C(D)$ aller auf D stetigen und beschränkten Abbildungen mit Werten in $\mathbb{K}$ ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{F}_\infty(D)$, also selbst ein Banachraum. Falls (D, d) kompakt ist, ist jede auf D stetige Abbildung beschränkt, und deshalb ist $C(D)$ in diesem Fall der Raum *aller auf D stetigen Abbildungen*. Für uns wird der Fall $D = [a, b]$ eine wichtige Rolle spielen, wobei $[a, b]$ immer ein nichttriviales abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$ ist, d. h. insbesondere ist $a < b$. Wir schreiben dann auch $C[a, b]$ an Stelle von $C(D)$, wobei in der Regel offen bleibt, ob wir als Wertebereich der Funktionen $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ betrachten.

- Die Menge $C^{(n)}[a,b]$ aller auf $[a,b]$ mindestens n-mal stetig differenzierbaren Funktionen ist ein Banachraum unter der Norm
$$\|f\| \;=\; \max_{j=0}^{n} \;\|f^{(j)}\|_\infty \,.$$
Statt dieser verwendet man auch oft die Norm
$$\|f\| \;=\; \sum_{j=0}^{n} \;\|f^{(j)}\|_\infty \,;$$
beide Normen sind äquivalent im Sinne der unten stehenden Definition.

- Die Menge $BV[a,b]$ der Funktionen, die auf $[a,b]$ *von beschränkter, d. h. endlicher Variation* sind, ist ein Banachraum unter der Norm
$$\|f\|_{BV} \;=\; |f(a)| \;+\; V_a^b(f)\,.$$
Dabei bezeichnet
$$V_a^b(f) \;=\; \sup_{\mathcal{Z}} \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})|$$
die *Variation* von f über dem Intervall $[a,b]$, wobei sich das Supremum über alle Zerlegungen $\mathcal{Z} = \{a = t_0 < \ldots < t_n = b\}$ erstreckt.

Definition 2.0.6 *Zwei Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ auf einem Vektorraum $\mathbb{X}$ heißen* äquivalent*, falls es Konstanten $c_1, c_2 > 0$ gibt, für welche gilt*
$$\forall\, x \in \mathbb{X} : \qquad \|x\|_2 \;\le\; c_1\,\|x\|_1 \;\le\; c_2\,\|x\|_2\,.$$

Beachte dass aus Beispiel 1.1.2 folgt, dass alle p-Normen auf $\mathbb{K}^n$ äquivalent sind! Dies ist kein Zufall – für die allgemeine Situation in endlichdimensionalen Räumen siehe Abschnitt 2.3.

2.1 Elementare Eigenschaften

Aus der linearen Algebra ist der Begriff der linearen Abbildung bekannt. Da wir jetzt normierte Räume betrachten, können wir untersuchen, welche (falls nicht alle) linearen Abbildungen stetig sind. Dazu bezeichnen wir mit $B_{\mathbb{X}} = \{x \in \mathbb{X} : \|x\| < 1\}$ bzw. $\overline{B}_{\mathbb{X}} = \{x \in \mathbb{X} : \|x\| \le 1\}$ die offene bzw. abgeschlossene *Einheitskugel* in $\mathbb{X}$ und schreiben für eine lineare Abbildung $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ statt $T(x)$ kürzer $T\,x$.

Aufgabe 2.1.1 *Zeige: Die abgeschlossene Hülle von $B_{\mathbb{X}}$ ist in der Tat gleich $\{x \in \mathbb{X} : \|x\| \le 1\}$, und* $\operatorname{rd} B_{\mathbb{X}} = \{x : \|x\| = 1\}$. *Vergleiche dies mit* Aufgabe 1.2.7 *und* Aufgabe 1.2.10.

Satz 2.1.2 (Stetigkeit linearer Abbildungen) *Für jede lineare Abbildung $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *Es gibt ein $x_0 \in \mathbb{X}$ so, dass T im Punkt x_0 stetig ist.*

(b) *T ist stetig im Punkt $x_0 = 0$.*

(c) *T ist stetig auf $\mathbb{X}$.*

(d) *T ist auf $\overline{B}_{\mathbb{X}}$ beschränkt, d. h., es gibt ein $c \geq 0$ so, dass $\|T\,x\| \leq c$ für alle $x \in \overline{B}_{\mathbb{X}}$.*

(e) *Es gibt ein $c \geq 0$ derart, dass $\|T\,x\| \leq c\,\|x\|$ für alle $x \in \mathbb{X}$.*

Beweis: Da für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$ immer $T(x_1 \pm x_2) = T\,x_1 \pm T\,x_2$ ist, folgt die Äquivalenz von (a), (b) und (c). Wegen $\|T(\lambda\,x)\| = |\lambda|\,\|T\,x\|$ für alle $x \in \mathbb{X}$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ folgt die Äquivalenz von (d) und (e), und aus (e) folgt sogar die Lipschitzstetigkeit von T. Um (d) aus (b) zu folgern, beachte dass $B_{\mathbb{Y}}$ eine Umgebung von $y_0 = 0$ in $\mathbb{Y}$ ist, und somit ist $T^{-1}(B_{\mathbb{Y}})$ Umgebung von $x_0 = 0$ in $\mathbb{X}$. Also existiert ein $\delta > 0$ so, dass $U_\delta(0) \subset T^{-1}(B_{\mathbb{Y}})$ ist. Für $x \in B_{\mathbb{X}}$ ist $\delta\,x \in U_\delta(0)$, und daher folgt $T(\delta\,x) = \delta\,T\,x \in B_{\mathbb{Y}}$, also $\|T\,x\| \leq \delta^{-1}$. Da die Menge der $x \in \mathbb{X}$ mit $\|T\,x\| \leq \delta^{-1}$ abgeschlossen ist, folgt (d). □

Aufgabe 2.1.3 *Zeige, dass die Aussage* (d) *des letzten Satzes auch äquivalent zur Beschränktheit auf dem Rand von $\overline{B}_{\mathbb{X}}$ ist.*

Bemerkung 2.1.4 *Wir werden noch sehen, dass genau dann jede lineare Abbildung $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ stetig ist, wenn $\mathbb{X}$ endliche Dimension hat.*

Definition 2.1.5 *Mit $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ bezeichnen wir die Menge aller stetigen linearen Abbildungen von $\mathbb{X}$ nach $\mathbb{Y}$. Offenbar ist $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Jedes $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ wird auch als* beschränkter Operator *von $\mathbb{X}$ nach $\mathbb{Y}$ bezeichnet. Falls $\mathbb{Y} = \mathbb{X}$ ist, sprechen wir auch von einem beschränkten Operator auf $\mathbb{X}$ und schreiben $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) =: \mathcal{L}(\mathbb{X})$. Für den besonders wichtigen Spezialfall $\mathbb{Y} = \mathbb{K}$ schreiben wir $\mathbb{X}' := \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{K})$ und nennen diesen Vektorraum den* Dualraum *von $\mathbb{X}$. Wir setzen noch*

$$\forall\, T \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) : \qquad \|T\| = \sup\{\|T\,x\| : \quad x \in \overline{B}_{\mathbb{X}}\} \tag{2.1.1}$$

und nennen $\|\cdot\|$ die Operatornorm *auf $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Dass dies tatsächlich eine Norm ist, wird im nächsten Satz gezeigt.*

Beispiel 2.1.6 *Die* Nullabbildung *$O : \ x \mapsto 0 \in \mathbb{Y}$ für alle $x \in \mathbb{X}$ ist immer ein beschränkter Operator von $\mathbb{X}$ nach $\mathbb{Y}$, und die* identische Abbildung *$I : \ x \mapsto x$ für alle $x \in \mathbb{X}$ ist immer in $\mathcal{L}(\mathbb{X})$. Weiter geben wir folgende wichtige Beispiele von beschränkten Operatoren in einigen der Banachräume, die oben vorgestellt wurden:*

1. Sei $\mathbb{X} = C[a, b]$, und sei k eine sogenannte *stetige Kernfunktion* - das soll heißen, dass k eine stetige Funktion auf $[a, b]^2$ ist. Dann heißt die Abbildung T mit

$$\forall\, x \in C[a, b] : \qquad (T\,x)(s) = \int_a^b k(s, t)\,x(t)\,dt \tag{2.1.2}$$

   ein *Fredholmscher Integraloperator*. Es folgt aus der Analysis, dass $T\,x$ wieder auf $[a, b]$ stetig ist, und deshalb ist T eine lineare Abbildung von $\mathbb{X} = C[a, b]$ in sich. Durch eine einfache Abschätzung des Integrals folgt

$$\|T\,x\|_\infty \leq K\,\|x\|_\infty\,, \qquad K := \max_{s \in [a,b]} \int_a^b |k(s, t)|\,dt\,,$$

   und deshalb ist $T \in \mathcal{L}(C[a, b])$ mit $\|T\| \leq K$. Ob hier sogar das Gleichheitszeichen gilt, soll nicht untersucht werden.

2. Wenn k eine stetige Funktion zweier reeller Veränderlicher auf dem Dreieck $\Delta = \{a \leq t \leq s \leq b\}$ ist, so nennt man den Operator

$$(T\,x)(s) = \int_a^s k(s, t)\,x(t)\,dt \tag{2.1.3}$$

   auch einen *Volterraschen Integraloperator* auf $C[a, b]$. Auch dieser Operator ist stetig.

3. Wie die Spektraltheorie zeigen wird, gibt es stetige Operatoren von $C[a,b]$ in sich, deren Eigenschaften wesentlich von denen der obigen Integraloperatoren verschieden sind; ein einfaches Beispiel ist $(T\,x)(s) = s\,x(s)$.

4. Seien p, q zwei reelle Zahlen aus dem offenen Intervall $(1, \infty)$, und sei p' so, dass $1/p' + 1/p = 1$ ist. Sei weiter $A = [a_{jk}]_{j,k=1}^{\infty}$ eine Matrix mit unendlich vielen Zeilen und Spalten, für welche

$$\|A\|_{p,q} \;:=\; \left[\,\sum_{j=1}^{\infty}\,\Big(\sum_{k=1}^{\infty}|a_{jk}|^{p'}\Big)^{q/p'}\right]^{1/q} \;<\; \infty\,. \tag{2.1.4}$$

Sei jetzt $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_p$. Aus der *Hölderschen Ungleichung* folgt dass

$$\forall\, j \in \mathbb{N}: \qquad \sum_{k=1}^{\infty}|a_{jk}\,x_k| \;\le\; \Big(\sum_{k=1}^{\infty}|a_{jk}|^{p'}\Big)^{1/p'}\;\|x\|_p\,.$$

Daher sind die Reihen $y_j := \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}\,x_k$ für alle $j \in \mathbb{N}$ absolut konvergent, und aus (2.1.4) folgt dass $y := (y_1, y_2, \ldots) \in \ell_q$ ist. Deshalb definiert die Matrix A eine stetige lineare Abbildung T von ℓ_p nach ℓ_q mit $\|T\| \le \|A\|_{p,q}$, und wir wollen A *Darstellungsmatrix der Abbildung* T nennen. Wir zeigen im nächsten Beispiel, dass jede lineare Abbildung $T: \ell_p \to \ell_q$ eine Darstellungsmatrix besitzt - allerdings zeigt das Beispiel der identischen Abbildung auf ℓ_p, dass solche Matrizen i. a. nicht (2.1.4) erfüllen.

5. Für p, q mit $1 \le p < \infty$ und $1 \le q \le \infty$ sei jetzt $T \in \mathcal{L}(\ell_p, \ell_q)$ ein beliebiger beschränkter Operator. Dann ist für $x = (x_k) \in \ell_p$ und $T\,x = y = (y_k) \in \ell_q$ die Abbildung $x \mapsto y_k$, als Hintereinanderausführung stetiger Abbildungen, eine stetige Abbildung von ℓ_p nach $\mathbb{K}$. Wenn wir mit $e_n = (\delta_{nk})$ die Folge bezeichnen, die an der n-ten Stelle eine 1 hat, während ihre übrigen Glieder verschwinden, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n\,e_n$, in Sinn der p-Norm, gegen die Folge x. Daraus folgt dass $y = T\,x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\,T\,e_n$ ist, und wenn man $T\,e_n = (a_{kn})_{k=1}^{\infty}$ setzt, ergibt sich

$$y_j \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}\,x_k \qquad \forall\, j \in \mathbb{N}\,. \tag{2.1.5}$$

Also gehört in der Tat zu jedem $T \in \mathcal{L}(\ell_p, \ell_q)$ eine Darstellungsmatrix A. Es ergibt sich aus den Resultaten des nächsten Kapitels, dass ein Operator $T \in \mathcal{L}(\ell_\infty, \ell_q)$ im Allgemeinen keine Darstellungsmatrix besitzt.

6. Der sogenannte *Linksshift* $x = (x_1, x_2, \ldots) \mapsto T\,x := (x_2, x_3, \ldots)$ ist ein stetiger Operator von ℓ_p in sich und hat die Darstellungsmatrix A, wobei alle $a_{jk} = 0$ sind bis auf die direkt oberhalb der Diagonale, welche gleich 1 sind. Diese Matrix erfüllt nicht (2.1.4).

Aufgabe 2.1.7 *Finde eine Bedingung, analog zu* (2.1.4)*, dafür dass A Darstellungsmatrix einer stetigen linearen Abbildung T von ℓ_p nach ℓ_∞, bzw. von ℓ_∞ nach ℓ_q ist.*

Aufgabe 2.1.8 *Sei für $x = (x_1, x_2, \ldots) \in c$*

$$\ell(x) \;:=\; \lim_{k\to\infty}\; x_k$$

gesetzt. Zeige dass die Abbildung $\ell:\; c \to \mathbb{K}$ stetig ist, und berechne $\|\ell\|$.

Aufgabe 2.1.9 *Zeige für alle $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$*

$$\|T\| \;=\; \sup\{\|T\,x\| \;:\; \|x\| = 1\} \;=\; \inf\{c \ge 0 \;:\; \|T\,x\| \;\le c\,\|x\| \quad \forall\, x \in \mathbb{X}\}\;.$$

Folgere hieraus dass für alle $x \in \mathbb{X}$ gilt $\|T\,x\| \le \|T\|\,\|x\|$.

Satz 2.1.10 *Die oben definierte Operatornorm ist eine Norm auf $\mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$, und falls $\mathbb{Y}$ ein Banachraum ist, dann ist auch $\mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ ein Banachraum.*

Beweis: Die ersten beiden Normeigenschaften folgen direkt mit der Definition. Seien jetzt $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$. Dann gilt $\|(T_1+T_2)\,x\| \le \|T_1\,x\| + \|T_2\,x\| \le \|T_1\| + \|T_2\|$ für alle $x \in \overline{B}_{\mathbb{X}}$, und daraus folgt die Dreiecksungleichung für die Operatornorm. Zum Beweis der Vollständigkeit sei (T_n) eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$. Dann ist $\|(T_n-T_m)\,x\| \le \|T_n-T_m\|\,\|x\|$ für alle $x \in \mathbb{X}$, und deshalb ist $(T_n\,x)$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{Y}$, für alle $x \in \mathbb{X}$. Wenn $\mathbb{Y}$ vollständig ist, existiert also ein Grenzwert, den wir mit $T\,x$ bezeichnen, und dadurch wird eine lineare Abbildung $T:\ \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ definiert. Da (T_n) Cauchyfolge ist, gibt es wegen Aufgabe 1.4.2 ein $c \in \mathbb{R}_+$ mit $\|T_n\| \le c$ für alle n, und daher folgt für alle $x \in \mathbb{X}$ die Ungleichung $\|T\,x\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n\,x\| \le c\,\|x\|$. Deshalb ist $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$. Sei jetzt $\varepsilon > 0$, und sei N so dass für alle $n, m \ge N$ gilt $\|T_n - T_m\| \le \varepsilon$. Dann folgt für jedes $x \in \mathbb{X}$ die Ungleichung $\|T_n\,x - T_m\,x\| \le \varepsilon\,\|x\|$, und für $m \to \infty$ ergibt sich $\|T_n\,x - T\,x\| \le \varepsilon\,\|x\|$ für alle $n \ge N$ und alle $x \in \mathbb{X}$. Nach Definition der Operatornorm folgt $\|T_n - T\| \le \varepsilon$ für alle $n \ge N$, und daher folgt die Konvergenz von (T_n) gegen T. □

Aufgabe 2.1.11 *Zeige: Sind $T_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ und $T_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{Y},\mathbb{Z})$, so ist $T_2 \circ T_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{Z})$, und es gilt $\|T_2 \circ T_1\| \le \|T_2\|\,\|T_1\|$. Diese Eigenschaft heißt* Submultiplikativität der Operatornorm.

2.2 Invertierbare Operatoren

Definition 2.2.1 *Ein $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ heißt* invertierbar, *oder auch* ein Isomorphismus, *falls ein $\tilde{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{Y},\mathbb{X})$ existiert, so dass $\tilde{T} \circ T = I_{\mathbb{X}}$ und $T \circ \tilde{T} = I_{\mathbb{Y}}$ ist, wobei $I_{\mathbb{X}}$ bzw. $I_{\mathbb{Y}}$ die identische Abbildung auf $\mathbb{X}$ bzw. $\mathbb{Y}$ bezeichnet. Wenn es in $\mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ einen Isomorphismus gibt, heißen $\mathbb{X}$ und $\mathbb{Y}$ zueinander* isomorph. *Beachte, dass ein invertierbares T immer bijektiv ist, und dass dann $\tilde{T} = T^{-1}$ die inverse Abbildung zu T ist. Allein aus der Bijektivität folgt aber nicht die Invertierbarkeit, da nicht klar ist, ob die inverse Abbildung beschränkt ist. Wir nennen T eine* lineare Isometrie *oder* linear isometrisch, *wobei das Adjektiv* linear *auch entfallen kann, falls die Linearität von T klar ist, wenn $\|T\,x\| = \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{X}$. Offenbar ist eine Isometrie immer injektiv und stetig, aber nicht notwendigerweise surjektiv.*

Beispiel 2.2.2 *Ein $T:\mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ kann bijektiv sein, ohne invertierbar zu sein: Sei $\mathbb{X}$ die Menge aller Zahlenfolgen, welche ab irgendeiner Stelle identisch verschwinden, versehen mit der $\|\cdot\|_1$-Norm, und sei $\mathbb{Y}$ dieselbe Menge, aber mit der $\|\cdot\|_\infty$-Norm. Dann ist die identische Abbildung $I: x \mapsto x$ von $\mathbb{X}$ nach $\mathbb{Y}$ stetig und bijektiv, aber die inverse Abbildung ist unbeschränkt, also unstetig.*

Beispiel 2.2.3 *Ein normierter Raum kann isomorph zu einem echten Teilraum sein: Für $x = (x_n) \in c$ sei $T\,x = (\ell,\, x_1 - \ell,\, x_2 - \ell, \ldots)$, wobei $\ell = \ell(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$ bedeutet. Dann ist $T: c \to c_0$ linear und bijektiv, und $T^{-1}\,y = (y_1 + y_2, y_1 + y_3, \ldots)$. Man findet $\|T\,x\| \le \|x\|$, $\|T^{-1}\,y\| \le 2\,\|y\|$, und daher ist T invertierbar.*

Aufgabe 2.2.4 *Zeige mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen von* Beispiel 2.1.6 Nr. 5: *Wenn $A = [a_{jk}]$ Darstellungsmatrix eines invertierbaren Operators $T \in \mathcal{L}(\ell_p, \ell_q)$ ist, und wenn $q < \infty$ ist, so hat T^{-1} eine Darstellungsmatrix $B = [b_{jk}]$, und es gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}\,b_{k\mu} \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} b_{jk}\,a_{k\mu} \;=\; \delta_{j\mu} \qquad \forall\ j,\mu \in \mathbb{N}\,.$$

Aus diesem Grund ist es gerechtfertigt, die Darstellungsmatrix von T^{-1} als die zu A inverse Matrix aufzufassen und mit A^{-1} zu bezeichnen. Überlege weiter, warum der Fall $q = \infty$ anders ist.

Definition 2.2.5 *Für $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$ sei $T^0 = I$, und für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne T^n die n-fache Hintereinanderausführung von T. Dann heißt die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ auch* Neumannsche Reihe.

Lemma 2.2.6 *Falls die Neumannsche Reihe für ein $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$ konvergiert, dann ist $I - T$ invertierbar, und es gilt*

$$(I \; - \; T)^{-1} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} T^n .$$

Ist $\mathbb{X}$ ein Banachraum, so ist die Bedingung $\|T\| < 1$ hinreichend für die Konvergenz.

Beweis: Sei die Neumannsche Reihe konvergent, und sei $\tilde{T}$ ihr Wert (in $\mathcal{L}(\mathbb{X})$). Dann folgt

$$T \circ \tilde{T} \;=\; \tilde{T} \circ T \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} T^n \;=\; \tilde{T} \; - \; I .$$

Dies ist äquivalent zu $(I - T) \circ \tilde{T} = \tilde{T} \circ (I - T) = I$. Aus Aufgabe 2.1.11 folgt $\|T^n\| \leq \|T\|^n$, und hieraus folgt dass die Neumannschen Reihe für $\|T\| < 1$ ein Cauchyreihe ist. Mit Satz 2.1.10 folgt dann die Konvergenz. $\square$

Aufgabe 2.2.7 *Sei $\mathbb{X}$ ein Banachraum. Zeige dass die Neumannsche Reihe genau dann konvergiert, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $\|T^m\| < 1$.*

Aufgabe 2.2.8 *Seien $\mathbb{X}$ und $\mathbb{Y}$ Banachräume. Zeige dass die Menge der invertierbaren T eine offene Teilmenge von $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ ist.* Anleitung: *Schreibe*

$$S \;=\; (I_{\mathbb{Y}} \; - \; (T - S) \circ T^{-1}) \circ T \;=\; T \circ (I_{\mathbb{X}} \; - \; T^{-1} \circ (T - S))$$

und benutze Lemma 2.2.6.

2.3 Endlichdimensionale Räume

Aus der Definition 2.0.6 sieht man: Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf demselben Vektorraum $\mathbb{X}$ sind genau dann äquivalent, wenn die identische Abbildung von $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_1)$ nach $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_2)$ und umgekehrt beschränkt ist. Dies wird im Beweis des nächsten Satzes benutzt.

Satz 2.3.1 *Ein normierter Vektorraum ist genau dann endlichdimensional, wenn jede abgeschlossene und beschränkte Teilmenge kompakt ist. Weiter gelten in jedem endlichdimensionalen Raum $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ folgende Aussagen:*

(a) *$(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ ist isomorph zu $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$, wobei $n = \dim \mathbb{X}$ ist.*

(b) *$(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ ist vollständig.*

(c) *Jede andere Norm auf $\mathbb{X}$ ist zu $\|\cdot\|$ äquivalent.*

Beweis: Sei $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ ein n-dimensionaler Raum, und sei $(x_1, \ldots, x_n)$ eine Basis von $\mathbb{X}$, sowie $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, x_k \in \mathbb{X}$. Dann gilt wegen der Dreiecksungleichung bzw. der Hölderschen Ungleichung:

$$\|x\| \;\leq\; \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \, \|x_k\| \;\leq\; C \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \;\leq\; C \sqrt{n} \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \right)^{1/2}, \quad C \;=\; \max \{\|x_1\|, \ldots, \|x_n\|\} .$$

Also ist die *kanonische Abbildung* $T : \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto \sum \alpha_k\, x_k$ von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{X}$ beschränkt. Weiter ist die Funktion $f(x) = \|x\|$ auf $\mathbb{X}$ stetig, und daraus folgt die Stetigkeit von $f \circ T$ auf der Einheitssphäre $S = \{\alpha : \|\alpha\|_2 = 1\}$ von $\mathbb{K}^n$. Nach dem Satz von Heine-Borel ist S kompakt, und somit existiert nach Satz 1.5.8 ein $\beta \in S$ mit $f(T(\alpha)) \geq f(T(\beta))$ für alle $\alpha \in S$. Wäre $f(T(\beta)) = 0$, also $x_0 = T(\beta) = 0$, so ergäbe sich ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der Basisvektoren, und deshalb ist $c := \|T(\beta)\| > 0$. Daraus ergibt sich die Beschränktheit von T^{-1}. Daher ist T ein Isomorphismus von $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$ auf $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$, und daraus folgt auch die Vollständigkeit von $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$. Da dies für jede Norm auf $\mathbb{X}$ gilt, sind zwei verschiedene Normen auf $\mathbb{X}$ immer äquivalent. Ist jetzt K eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{X}$, so folgen mit Aufgabe 1.5.5 immer Abgeschlossenheit und Beschränktheit von K. Wenn aber für ein $\mathbb{X}$ immer die Umkehrung gilt, so muss die Einheitskugel $\overline{B}_{\mathbb{X}}$ kompakt, also auch präkompakt sein. Dann gibt es also endlich viele $x_1, \ldots, x_n \in \overline{B}_{\mathbb{X}}$, so dass die Kugeln mit diesen Mittelpunkten und dem Radius $r = 1/2$ ganz $\overline{B}_{\mathbb{X}}$ überdecken. Sei U die lineare Hülle der Mittelpunkte $x_1, \ldots, x_n$, dann zeigt man mit Induktion dass zu jedem $x \in \overline{B}_{\mathbb{X}}$ und jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $u_m \in U$ und ein $\tilde{x}_m \in \overline{B}_{\mathbb{X}}$ existieren mit $x = u_m + 2^{-n}\tilde{x}_m$. Für $m \to \infty$ folgt $\|2^{-m}\tilde{x}_m\| = 2^{-m}\|\tilde{x}_m\| \to 0$, und deshalb konvergiert (u_m) gegen x. Da U endliche Dimension hat, ist es vollständig, also auch abgeschlossen, und deshalb folgt $x \in U$, d. h. sogar $\overline{B}_{\mathbb{X}} \subset U$. Das bedeutet aber $\mathbb{X} = U$, und deshalb ist $\dim \mathbb{X} \leq n$. □

Aufgabe 2.3.2 *Sei* $\dim \mathbb{Y} > 0$. *Zeige: Genau dann ist jede lineare Abbildung von* $\mathbb{X}$ *nach* $\mathbb{Y}$ *stetig, wenn* $\mathbb{X}$ *endlichdimensional ist.* Anleitung: *Hier darf benutzt werden, dass jeder Vektorraum eine Basis besitzt, die natürlich im Fall unendlicher Dimension auch unendlich viele Vektoren enthält.*

2.4 Reflexivität

Definition 2.4.1 *Für jeden normierten Raum* $\mathbb{X}$ *ist der Dualraum* $\mathbb{X}'$ *wegen* Satz 2.1.10 *ein Banachraum. Der Dualraum von* $\mathbb{X}'$ *heißt* Bidual *von* $\mathbb{X}$ *und wird mit* $\mathbb{X}''$ *bezeichnet. Zu jedem* $x \in \mathbb{X}$ *ist durch*

$$\forall\, f \in \mathbb{X}' : \qquad j_x(f) \;:=\; f(x)$$

ein $j_x \in \mathbb{X}''$ *gegeben, und* $\|j_x\| = \|x\|$. *Die Abbildung* $j : \mathbb{X} \to \mathbb{X}''$ *mit* $x \mapsto j_x$ *ist also eine Isometrie und wird auch* die Auswertungsabbildung *genannt. Ein normierter Vektorraum* $\mathbb{X}$ *heißt* reflexiv, *wenn die Auswertungsabbildung* j *surjektiv ist. Ist dies der Fall, so ist offenbar* $\mathbb{X}''$ *isometrisch isomorph zu* $\mathbb{X}$.

Bemerkung 2.4.2 *Ein reflexiver Raum ist isomorph zu* $\mathbb{X}''$ *und daher immer ein Banachraum. Es gibt aber Banachräume* $\mathbb{X}$, *welche zu* $\mathbb{X}''$ *isomorph, aber nicht reflexiv sind.*

Aufgabe 2.4.3 *Zeige: Die oben definierte Auswertungsabbildung ist linear und isometrisch, also insbesondere auch injektiv. Wenn* $\mathbb{X}$ *ein Banachraum ist, dann ist* $j(\mathbb{X})$ *ein abgeschlossener Unterraum von* $\mathbb{X}''$. *Benutze dies, um weiter zu zeigen: Zu jedem normierten aber nicht vollständigen Raum* $\mathbb{X}$ *gibt es einen Banachraum* $\mathbb{Y}$, *der einen dichten Teilraum* U *enthält, welcher linear isometrisch zu* $\mathbb{X}$ *ist. Man nennt einen solchen Raum* $\mathbb{Y}$ *auch* Vervollständigung *von* $\mathbb{X}$. *Etwas ungenau aber suggestiv ist es zu sagen, dass man einen nicht vollständigen normierten Raum durch Hinzunahme aller Grenzwerte von Cauchyfolgen zu einem Banachraum erweitern kann. Auch metrische Räume besitzen immer eine Vervollständigung – dies wird hier nicht bewiesen.*

2.5 Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

Definition 2.5.1 *Eine Folge* (T_n) *aus* $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *heißt* punktweise konvergent, *wenn es ein* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *gibt, für welches*

$$\forall\, x \in \mathbb{X} : \qquad \lim_{n\to\infty} T_n\, x \;=\; T\, x\,.$$

Im Unterschied hierzu nennen wir (T_n) normkonvergent *gegen* T*, falls* $\|T_n - T\| \to 0$ *für* $n \to \infty$*. Eine Teilmenge* $H \subset \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *heißt* punktweise beschränkt*, falls gilt*

$$\forall\, x \in \mathbb{X} : \qquad \sup \{ \|T\,x\| \; : \quad T \in H \} \; < \; \infty\,.$$

Dagegen heißt H gleichmäßig beschränkt*, oder auch* normbeschränkt*, oder auch einfach* beschränkt in $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$*, falls*

$$\sup \{ \|T\| \; : \quad T \in H \} \; = \; \sup \{ \|T\,x\| \; : \quad T \in H\,, \; x \in \overline{B}_{\mathbb{X}} \} \; < \; \infty\,.$$

Beispiel 2.5.2 *Wenn* (T_n) *normkonvergent gegen* T *ist, d. h., wenn gilt*

$$\|T_n \; - \; T\| \; = \; \sup_{x \in \overline{B}_{\mathbb{X}}} \; \|T_n\,x - T\,x\| \; \to \; 0 \qquad (n \to \infty)\,,$$

so folgt hieraus natürlich die punktweise Konvergenz der Folge (T_n) *gegen* T*. Die umgekehrte Implikation gilt nicht allgemein; das zeigt folgendes Beispiel: Für* $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = c_0$ *und* $n \in \mathbb{N}$ *sei*

$$\forall\; x = (x_m) \in \mathbb{X} \; : \qquad T_n\; x \; = \; (0, \ldots, 0, x_n, x_{n+1}, \ldots)\,.$$

Das bedeutet also, dass der Operator T_n *die ersten* $n-1$ *Folgenglieder durch Nullen ersetzt und die übrigen unverändert lässt. Dann sieht man*

$$\|T_n\| \; = \; \sup_{x \in B_{c_0}} \; \|T_n\,x\| \; = \; 1\,,$$

aber $\|T_n\,x\| = \sup_{k \geq n} |x_k| \to 0$ *für* $n \to \infty$ *und jedes feste* $x \in c_0$*. Also ist die Folge* (T_n) *punktweise konvergent gegen die Nullabbildung, aber nicht normkonvergent. Beachte aber auch, dass dieselben Operatoren* T_n *auf dem Raum* c *nicht punktweise konvergieren; siehe dazu die nächste Aufgabe.*

Aufgabe 2.5.3 *Sei für alle* $n \in \mathbb{N}$ *eine Folge* $x_n = (x_{n1}, x_{n2}, \ldots) \in c$ *gegeben. Zeige: Wenn die Folge* (x_n) *gegen ein* $x = (x_1, x_2, \ldots) \in c$ *konvergiert, so folgt für jedes feste* $k \in \mathbb{N}$*, dass* $\lim_{n\to\infty} x_{nk} = x_k$ *ist. Man sagt auch, dass Konvergenz in* c *die koordinatenweise Konvergenz impliziert. Benutze dies um zu zeigen, dass die Operatoren* T_n *aus dem obigen Beispiel in* c *nicht punktweise konvergieren können.*

Satz 2.5.4 *Seien* $T, T_n \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$*, und sei die Folge* (T_n) *gleichmäßig beschränkt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *Es gibt einen dichten Teilraum* $\mathbb{X}_0 \subset \mathbb{X}$*, auf dem die Folge* (T_n) *punktweise gegen* T *konvergiert.*

(b) *Die Folge* (T_n) *konvergiert auf ganz* $\mathbb{X}$ *punktweise gegen* T*.*

(c) *Auf jeder präkompakten Teilmenge* $K \subset \mathbb{X}$ *konvergiert die Folge* T_n *gleichmäßig gegen* T*, d. h.,*

$$\forall\; \varepsilon > 0 \quad \exists\; N \in \mathbb{R}_0 \quad \forall\; n \geq N\,,\; x \in K \;: \|T_n\,x - T\,x\| < \varepsilon\,.$$

Beweis: Es reicht offenbar zu zeigen, dass (c) aus (a) folgt. Dazu sei $\varepsilon > 0$ gegeben, und C sei so, dass $\|T\|, \|T_n\| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zu $\tilde{\varepsilon} = (4\,C+1)^{-1}\,\varepsilon$ gibt es $x_1, \ldots, x_m \in K$ so, dass die Kugeln um x_k mit Radius $\tilde{\varepsilon}$ die Menge K überdecken. In jeder solchen Kugel gibt es dann ein $y_k \in \mathbb{X}_0$, und dazu existiert ein N so, dass für alle $n \geq N$ folgt $\|T_n\,y_k - T\,y_k\| < \tilde{\varepsilon}$, für alle $k = 1, \ldots, m$. Zu $x \in K$ wählen wir k so, dass $\|x - x_k\| < \tilde{\varepsilon}$ ist. Dann gilt für diese n

$$\begin{aligned}
\|T_n\,x \; - \; T\,x\| \quad &\leq \quad \|T_n\,x \; - \; T_n\,x_k\| \; + \; \|T_n\,x_k \; - \; T_n\,y_k\| \; + \; \|T_n\,y_k \; - \; T\,y_k\| \\
&\qquad + \|T\,y_k \; - \; T\,x_k\| \; + \; \|T\,x_k \; - \; T\,x\| \\
&\leq \quad C\,\|x \; - \; x_k\| \; + \; C\,\|x_k \; - \; y_k\| \; + \; \tilde{\varepsilon} \\
&\qquad + C\,\|y_k \; - \; x_k\| \; + \; C\,\|x_k \; - \; x\| \; < \; (4\,C+1)\,\tilde{\varepsilon} = \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Satz 2.5.5 (Banach-Steinhaus) *Sei eine gleichmäßig beschränkte Folge (T_n) aus $\mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ gegeben. Weiter sei $\mathbb{Y}$ vollständig, und es gebe einen dichten Teilraum $\mathbb{X}_0 \subset \mathbb{X}$ derart, dass für alle $x \in \mathbb{X}_0$ die Folge $(T_n\, x)$ eine Cauchyfolge ist. Dann gibt es ein $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ für welches (T_n) auf $\mathbb{X}$ punktweise gegen T konvergiert.*

Beweis: Für jedes $x \in \mathbb{X}$ und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $y \in \mathbb{X}_0$ mit $\|x - y\| < \varepsilon$. Mit $C \geq \|T_n\|$ folgt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \|T_n\, x \;-\; T_m\, x\| &\leq \|T_n\, x \;-\; T_n\, y\| \;+\; \|T_n\, y \;-\; T_m\, y\| \;+\; \|T_m\, y \;-\; T_m\, x\| \\ &\leq 2\,C\,\|x \;-\; y\| \;+\; \varepsilon \;<\; (2\,C+1)\,\varepsilon\,, \end{aligned}$$

falls nur n und m hinreichend groß sind. Daher ist $(T_n\, x)$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{Y}$, also konvergent, und wir setzen $T\,x = \lim T_n\, x$, also $\|T\,x\| = \lim \|T_n\, x\| \leq C\,\|x\|$. Somit ist T eine beschränkte lineare Abbildung, und (T_n) konvergiert punktweise gegen T. □

Satz 2.5.6 (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit) *Sei $\mathbb{X}$ vollständig. Dann ist jede punktweise beschränkte Menge $H \subset \mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ sogar gleichmäßig beschränkt.*

Beweis: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge $A_n = \{\, x \in \mathbb{X} \,:\, \|T\,x\| \leq n \;\forall\; T \in H \,\}$ abgeschlossen in $\mathbb{X}$, und wegen der punktweisen Beschränktheit ist die Vereinigung aller dieser A_n gleich $\mathbb{X}$. Nach Satz 1.7.4 ist $\mathbb{X}$ ein Baire-Raum, und deshalb gibt es ein n so, dass A_n einen inneren Punkt hat. Das heißt mit anderen Worten: Es existiert ein $x_0 \in \mathbb{X}$ sowie ein $\varepsilon > 0$ so, dass für alle $x \in \mathbb{X}$ mit $\|x - x_0\| < \varepsilon$ gilt $\|T\,x\| \leq n$ für alle $T \in H$. Sei jetzt $y \in \overline{B}_{\mathbb{X}}$. Dann ist für $x = x_0 + (\varepsilon/2)\,y$ immer $\|x - x_0\| < \varepsilon$, und somit folgt

$$\forall\; T \in H \;:\qquad (\varepsilon/2)\,\|T\,y\| \;=\; \|T\,x - T\,x_0\| \;\leq\; \|T\,x\| \;+\; \|T\,x_0\| \;\leq 2\,n\,.$$

Daher ist H gleichmäßig beschränkt. □

Aufgabe 2.5.7 *Zeige: Ist $\mathbb{X}$ ein Banachraum, und ist die Folge (T_n) aus $\mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ so, dass für alle $x \in \mathbb{X}$ die Folge $(T_n\, x)$ konvergiert, dann ist T, definiert durch $T\,x = \lim T_n\, x$ für alle $x \in \mathbb{X}$, automatisch stetig.*

2.6 Der Satz von der offenen Abbildung und der Graphensatz

Für die folgenden Überlegungen ist es hilfreich zu definieren, was die Summe von zwei Teilmengen eines Vektorraumes ist:

Definition 2.6.1 *Sei $\mathbb{X}$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Für $A_1, A_2 \subset \mathbb{X}$ und $\Lambda \subset \mathbb{K}$ setzen wir*

$$A_1 \;\pm\; A_2 \;=\; \{a_1 \pm a_2 \;:\; a_1 \in A_1\,,\; a_2 \in A_2\}\,, \qquad \Lambda\,A_1 \;=\; \{\lambda\,a_1 \;:\; \lambda \in \Lambda\,, \quad a_1 \in A_1\}\,.$$

Ist $A_1 = \{a_1\}$ eine Menge mit nur einem Element, so schreiben wir auch $a_1 + A_2$ anstelle von $A_1 + A_2$ und $\Lambda\,a_1$ anstelle von $\Lambda\,A_1$, und wir verfahren sinngemäß, wenn Λ nur ein Element hat.

Aufgabe 2.6.2 *Wiederhole aus der linearen Algebra: Sind $U, V \subset \mathbb{X}$ Unterräume, so ist $U + V$ ebenfalls ein Unterraum von $\mathbb{X}$. Ist weiter $U \cap V = \{0\}$, so gibt es zu jedem $x \in U+V$ genau ein Paar $(u,v) \in U \times V$ mit $x = u + v$. In diesem Fall spricht man auch von einer direkten Summe und schreibt $U \oplus V$. Zeige weiter für jede lineare Abbildung T von $\mathbb{X}$ in einen zweiten Vektorraum $\mathbb{Y}$ über $\mathbb{K}$, und für alle A_1, A_2, Λ wie oben:*

$$T(A_1 \pm A_2) \;=\; T(A_1) \;\pm\; T(A_2)\,, \qquad T(\Lambda\,A_1) \;=\; \Lambda\,T(A_1)\,.$$

Beschreibe in Worten die Mengen $r\,B_{\mathbb{X}}$ für $r > 0$.

Lemma 2.6.3 *Seien $\mathbb{X}$ und $\mathbb{Y}$ Banachräume, und sei $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$. Falls es ein $r > 0$ gibt, für welches $r\,B_{\mathbb{Y}} \subset \overline{T(B_{\mathbb{X}})}$ ist, dann ist $(r/2)\,B_{\mathbb{Y}} \subset T(B_{\mathbb{X}})$.*

Beweis: Wegen Aufgabe 2.6.2 folgt aus der Voraussetzung, dass

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \qquad 2^{-n} r\, B_{\mathbb{Y}} \;\subset\; 2^{-n}\, \overline{T(B_{\mathbb{X}})}\,.$$

Sei jetzt $y \in (r/2)\,B_{\mathbb{Y}}$. Wir wollen $x_n \in 2^{-n}\,B_{\mathbb{X}}$ so wählen, dass $y_n = y - \sum_{k=1}^{n-1} T\,x_k \in 2^{-n} r\, B_{\mathbb{Y}}$ ist. Dies ist erfüllt für $n = 1$, und wenn es für irgendein n richtig ist, dann ist $y_n \in 2^{-n}\,\overline{T(B_{\mathbb{X}})}$, und deshalb gibt es ein $x_n \in 2^{-n}\,B_{\mathbb{X}}$, dessen Bild einen beliebig kleinen Abstand von y_n hat, also z. B. so, dass $\|y_n - T\,x_n\| < r\,2^{-n-1}$ ist. Also existiert eine solche Folge, und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ist absolut konvergent gegen ein $x \in \mathbb{X}$ mit $\|x\| \le \sum_n \|x_n\| < 1$. Außerdem folgt $y_n \to 0$, und daher gilt $y = T\,x$. Dies zeigt dass $y \in T(B_{\mathbb{X}})$ ist. □

Lemma 2.6.4 *Seien $\mathbb{X}$ und $\mathbb{Y}$ Banachräume, und sei $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ surjektiv. Dann gibt es ein $r > 0$, für welches $r\,B_{\mathbb{Y}} \subset T(B_{\mathbb{X}})$ ist.*

Beweis: Sei $A_n = n\,\overline{T\,B_{\mathbb{X}}} = \overline{T(n\,B_{\mathbb{X}})}$, dann folgt $\cup_n A_n = \mathbb{Y}$ wegen der Surjektivität von T. Da $\mathbb{Y}$ natürlich innere Punkte hat, ergibt sich mit Satz 1.7.4 die Existenz eines $n \in \mathbb{N}$, für welches A_n einen inneren Punkt hat. Wegen der Definition der A_n gilt dann aber dasselbe für alle A_n, also auch für $A_1 = \overline{T\,B_{\mathbb{X}}}$. Also existiert ein $y_0 \in \overline{T\,B_{\mathbb{X}}}$ und ein $r > 0$, für welches $U_{2r}(y_0) \subset \overline{T\,B_{\mathbb{X}}}$ ist. Für $y \in 2r\,B_{\mathbb{Y}}$ folgt dann $2\,y = y_0 + y - (y_0 - y) \in \overline{T\,B_{\mathbb{X}}} - \overline{T\,B_{\mathbb{X}}} \subset 2\,\overline{T\,B_{\mathbb{X}}}$, also $2r\,B_{\mathbb{Y}} \subset \overline{T\,B_{\mathbb{X}}}$. Mit dem letzten Lemma folgt daraus $r\,B_{\mathbb{Y}} \subset T(B_{\mathbb{X}})$. □

Satz 2.6.5 (von der offenen Abbildung) *Seien $\mathbb{X}$ und $\mathbb{Y}$ Banachräume, und sei $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ surjektiv. Dann ist T offen, d. h., für jede in $\mathbb{X}$ offene Menge O ist $T(O)$ offen in $\mathbb{Y}$.*

Beweis: Sei $O \subset \mathbb{X}$ offen, und sei $y \in T(O)$. Dann existiert ein $x \in O$ mit $y = T\,x$, und dazu gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass $U_\varepsilon(x) = x + \varepsilon\,B_{\mathbb{X}} \subset O$ ist. Nach dem letzten Lemma existiert ein $r > 0$ so, dass $r\,B_{\mathbb{Y}} \subset T(B_{\mathbb{X}})$, also $\varepsilon r\,B_{\mathbb{Y}} \subset T(\varepsilon\,B_{\mathbb{X}})$. Daraus folgt aber $y + \varepsilon r\,B_{\mathbb{Y}} \subset T(x) + \varepsilon r\,B_{\mathbb{Y}} \subset T(x + \varepsilon\,B_{\mathbb{X}}) \subset T(O)$. □

Als direkte Folgerung dieses Satzes ergeben sich zwei wichtige Konsequenzen:

Korollar zu Satz 2.6.5 (Satz vom inversen Operator) *Seien $\mathbb{X}$ und $\mathbb{Y}$ Banachräume, und sei $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ bijektiv. Dann ist T^{-1} stetig, also T invertierbar.*

Korollar zu Satz 2.6.5 (Äquivalenz zweier Normen) *Sei $\mathbb{X}$ ein Vektorraum, und seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf $\mathbb{X}$, für welche $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_1)$ und $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_2)$ beide vollständig sind. Falls es dann ein $c > 0$ gibt, so dass $\|x\|_1 \le c\,\|x\|_2$ für alle $x \in \mathbb{X}$ gilt, dann sind die Normen äquivalent.*

Definition 2.6.6 *Wir nennen für $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ die Menge $G(T) = \{(x, T\,x) \;:\; x \in \mathbb{X}\}$ den* Graphen *von T. Wenn $G(T)$ in dem normierten Raum $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ abgeschlossen ist, dann sagen wir kurz dass T* abgeschlossenen Graphen hat, *oder dass T* graphenabgeschlossen ist. *Das bedeutet genau dass folgendes gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \;=\; x \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} T\,x_n \;=\; y \qquad \Longrightarrow \qquad T\,x \;=\; y\,. \tag{2.6.1}$$

Siehe dazu auch die nächste Aufgabe.

Aufgabe 2.6.7 *Zeige: Auf* $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ *ist durch* $\|(x,y)\| = \|x\|_{\mathbb{X}} + \|y\|_{\mathbb{Y}}$ *eine Norm gegeben, und die beiden* Projektionen

$$P_{\mathbb{X}} \;:\; (x,y) \;\mapsto\; x\,, \qquad P_{\mathbb{Y}} \;:\; (x,y) \;\mapsto\; y$$

sind stetig. Zeige weiter:

(a) *Wenn* $\mathbb{X}$ *und* $\mathbb{Y}$ *Banachräume sind, dann ist auch* $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ *vollständig, also ein Banachraum.*

(b) *Die Abgeschlossenheit des Graphen von* $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *ist äquivalent zu* (2.6.1)*.*

(c) *Wenn* T *stetig ist, dann ist* $G(T)$ *abgeschlossen.*

(d) *Die Umkehrung der letzten Aussage gilt im Allgemeinen nicht.*

(e) *Wenn* T *linear ist, dann ist* $G(T)$ *ein Unterraum von* $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$*, also ein Banachraum, falls* $\mathbb{X}$ *und* $\mathbb{Y}$ *vollständig und* T *graphenabgeschlossen sind.*

Zwar kann man nicht allgemein aus der Abgeschlossenheit von $G(T)$ auf die Stetigkeit von T schließen, aber es gilt jedenfalls folgender wichtiger Satz:

Satz 2.6.8 (vom abgeschlossenen Graphen) *Seien* $\mathbb{X}$ *und* $\mathbb{Y}$ *Banachräume, und sei* $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *linear und graphenabgeschlossen. Dann ist* T *stetig.*

Beweis: Die Projektion $P_{\mathbb{X}} : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ ist nach Aufgabe 2.6.7 stetig, und ihre Restriktion auf den Unterraum $G(T) \subset \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ ist bijektiv. Wenn $G(T)$ abgeschlossen ist, ist es auch ein Banachraum, und deshalb folgt die Stetigkeit von $P_{\mathbb{X}}^{-1} : \mathbb{X} \to G(T)$ aus dem Satz vom inversen Operator. Daher gibt es ein $c > 0$ so, dass

$$\|x\|_{\mathbb{X}} + \|T\,x\|_{\mathbb{Y}} \;\leq\; c\,\|x\|_{\mathbb{X}} \qquad \forall\, x \in \mathbb{X}\,,$$

und daraus folgt die Beschränktheit, d. h. die Stetigkeit, von T. $\square$

Kapitel 3

Hilberträume

In der linearen Algebra betrachtet man Vektorräume mit innerem Produkt. Auch dort wird meist eine Länge eines Vektors eingeführt, welche alle Eigenschaften einer Norm im Sinne der Funktionalanalysis hat, und manchmal betrachtet man sogar sogenannte *Orthogonalreihen*. Dies soll jetzt ausführlicher geschehen. Dazu wiederholen wir einige Begriffe aus der LA, wobei wir teilweise andere Bezeichnungen benutzen.

3.1 Prä-Hilberträume

Definition 3.1.1 *Sei $\mathbb{X}$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung*

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : \ \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{K}\,, \qquad (x_1, x_2) \mapsto \langle x_1, x_2 \rangle \in \mathbb{K}$$

heißt eine zweistellige Form *auf* $\mathbb{X}$*. Die Form heißt ein* Skalarprodukt *oder* inneres Produkt *auf* $\mathbb{X}$*, wenn folgende Axiome gelten:*

(S1) $\quad \forall\, x \in \mathbb{X}: \quad \langle x, x \rangle \ \geq \ 0\,; \quad \langle x, x \rangle \ = \ 0 \iff x = 0\ .$

(S2) $\quad \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{X}: \quad \langle x_1, x_2 \rangle \ = \ \overline{\langle x_2, x_1 \rangle}\ .$

(S3) $\quad \forall\, x, x_1, x_2 \in \mathbb{X}: \quad \langle x_1 + x_2, x \rangle \ = \ \langle x_1, x \rangle \ + \ \langle x_2, x \rangle\ .$

(S4) $\quad \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{X},\ \lambda \in \mathbb{K}: \quad \langle \lambda\, x_1, x_2 \rangle \ = \ \lambda \, \langle x_1, x_2 \rangle\ .$

Falls ein solches Skalarprodukt auf $\mathbb{X}$ gegeben ist, nennen wir $\mathbb{X}$ einen Prä-Hilbertraum*, oder* euklidischen Raum*, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist. Statt $\mathbb{X}$ schreiben wir dann meistens $\mathbb{H}_p$ für einen solchen Raum.*

Bemerkung 3.1.2 *Sei jetzt $\mathbb{H}_p$ ein Prä-Hilbertraum. Aus den Axiomen folgen sofort die weiteren Regeln für das Skalarprodukt:*

$$\forall\, x, x_1, x_2 \in \mathbb{H}_p,\ \lambda \in \mathbb{K}: \quad \langle x, x_1 + x_2 \rangle \ = \ \langle x, x_1 \rangle \ + \ \langle x, x_2 \rangle\,, \quad \langle x_1, \lambda\, x_2 \rangle \ = \ \overline{\lambda}\, \langle x_1, x_2 \rangle\,.$$

Man kann also kürzer sagen, dass ein inneres Produkt eine Sesquilinearform *im Sinne von* Definition 3.10.1*, also in der ersten Stelle linear und in der zweiten Stelle semilinear ist. Dabei nennt man eine Abbildung $T: \mathbb{X} \to Y$ zwischen zwei Vektorräumen $\mathbb{X}$ und Y über $\mathbb{K}$* semilinear*, wenn sie additiv ist, wenn also $T(x_1 + x_2) = T\,x_1 + T\,x_2$ für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$ gilt, und wenn weiter $T\,(\lambda\,x) = \overline{\lambda}\,T\,x$ ist für alle $x \in \mathbb{X}$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist natürlich Semilinearität äquivalent zur Linearität. Wichtig ist auch* *der Hinweis, dass in der Literatur die Definition eines Skalarproduktes unterschiedlich ist: Während die meisten Bücher über Funktionalanalysis die gleiche Definition wie hier benutzen, ist in anderen Werken, z. B. über lineare Algebra, ein Skalarprodukt linear in der zweiten und semilinear in der ersten Stelle. Die Eigenschaft* (S1) *bezeichnet man auch als die* positive Definitheit *der Sesquilinearform. Im Fall* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ist ein Skalarprodukt immer eine reelle Zahl. Also bedeutet* (S2) *in diesem Fall einfach* $\langle x_1, x_2 \rangle = \langle x_2, x_1 \rangle$ *für alle* $x_1, x_2 \in \mathbb{H}_p$*, und man spricht dann von einer* kommutativen Bilinearform.

Beispiel 3.1.3 *Für zwei Funktionen* $f, g \in C[a, b]$ *ist ein kanonisches inneres Produkt durch*

$$\langle f, g \rangle \;=\; \int_a^b \; f(x) \; \overline{g(x)} \; dx$$

gegeben, wobei der Querstrich wegfallen kann, falls die Werte der Funktionen reell sind. Häufig gebraucht werden aber auch gewichtete innere Produkte *von Funktionen. Dabei ist eine feste* Gewichtsfunktion k *gegeben, die auf* $[a, b]$ *stetig und bis auf endlich viele Punkte positiv ist, und man setzt*

$$\langle f, g \rangle \;=\; \int_a^b \; k(x) \; f(x) \; \overline{g(x)} \; dx \,.$$

Auf der Menge der über $[a, b]$ *integrierbaren Funktionen erhält man durch die obigen Festsetzungen* keine *inneren Produkte, da* $\langle f, f \rangle = 0$ *sein kann ohne dass* $f(x) = 0$ *ist für alle* $x \in [a, b]$.

Aufgabe 3.1.4 *Sei* J *eine nicht-leere Menge, und sei* $\mathbb{K}^J$ *die Menge aller Abbildungen* f *von* J *in* $\mathbb{K}$ *mit* $f(j) \neq 0$ *höchstens für endlich viele* $j \in J$*. Zeige dass* $\mathbb{K}^J$ *ein Vektorraum über* $\mathbb{K}$ *ist, und dass durch*

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j \in J} \; f(j) \; \overline{g(j)}$$

ein inneres Produkt auf $\mathbb{K}^J$ *definiert wird. Beachte: Wenn* $J = \{1, \ldots, n\}$ *ist, dann ist* $\mathbb{K}^J$ *gerade* $\mathbb{K}^n$*, und das Skalarprodukt ist das sogenannte* kanonische Skalarprodukt.

3.2 Die induzierte Norm

Wenn nichts anderes gesagt wird, sei im Folgenden $\mathbb{H}_p$ immer ein Prä-Hilbertraum über $\mathbb{K}$.

Definition 3.2.1 *Für jedes* $x \in \mathbb{H}_p$ *heißt*

$$\|x\| \;=\; \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

die vom Skalarprodukt induzierte Norm *oder* Länge *von* x.

Aufgabe 3.2.2 *Zeige für beliebige* $x_1, x_2 \in \mathbb{H}_p$*:*

(a) *Es gilt das* Parallelogrammgesetz

$$\|x_1 + x_2\|^2 \;+\; \|x_1 - x_2\|^2 \;=\; 2\left(\|x_1\|^2 \;+\; \|x_2\|^2\right).$$

(b) *Falls* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ist, gilt*

$$\langle x_1, x_2 \rangle \;=\; \|(x_1 + x_2)/2\|^2 \;-\; \|(x_1 - x_2)/2\|^2 \,.$$

(c) *Falls* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *ist, gilt*

$$\langle x_1, x_2 \rangle \ = \ \|(x_1 + x_2)/2\|^2 \ - \ \|(x_1 - x_2)/2\|^2 + \ i\,\|(x_1 + i\,x_2)/2\|^2 \ - \ i\,\|(x_1 - i\,x_2)/2\|^2 .$$

Folgender Satz wird in der linearen Algebra bewiesen:

Satz 3.2.3 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung) *Für* $x_1, x_2 \in \mathbb{H}_p$ *gilt immer*

$$\big|\langle x_1, x_2 \rangle\big| \ \leq \ \|x_1\| \ \|x_2\| \ ,$$

und das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn x_1 *und* x_2 *linear abhängig sind.*

Korollar zu Satz 3.2.3 (Eigenschaften der Norm) *Die Abbildung* $x \mapsto \|x\|$ *ist eine Norm auf* $\mathbb{H}_p$.

Beweis: Aus obigem Satz und den Rechenregeln für ein Skalarprodukt folgt $\|x_1 + x_2\|^2 = \langle x_1 + x_2, x_1 + x_2 \rangle = \langle x_1, x_1 \rangle + \langle x_1, x_2 \rangle + \langle x_2, x_1 \rangle + \langle x_2, x_2 \rangle \leq \|x_1\|^2 + 2\,\|x_1\|\,\|x_2\| + \|x_2\|^2 = (\|x_1\| + \|x_2\|)^2$, und das ist die Dreiecksungleichung. Die anderen beiden Normeigenschaften folgen unmittelbar aus den Eigenschaften eines Skalarproduktes. □

Ein Prä-Hilbertraum $\mathbb{H}_p$ ist also immer auch ein normierter Raum, so dass Begriffe wie Stetigkeit, Konvergenz, etc. definiert sind.

Definition 3.2.4 *Ein Prä-Hilbertraum, welcher bezüglich der vom Skalarprodukt induzierten Norm vollständig ist, heißt* ein Hilbertraum. *Wir benutzen im Folgenden meistens den Buchstaben* $\mathbb{H}$ *zur Bezeichnung eines Hilbertraums.*

Aufgabe 3.2.5 (Stetigkeit des Skalarprodukts) *Zeige dass in jedem Prä-Hilbertraum* $\mathbb{H}_p$ *das Skalarprodukt auf* $\mathbb{H}_p \times \mathbb{H}_p$ *stetig ist.*

Aufgabe 3.2.6 *Wir definieren für Folgen* $a = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$, $b = (b_1, b_2, b_3, , \ldots,) \in \ell_2$

$$\langle a, b \rangle \ = \ \sum_{j=1}^{\infty} a_j\, \overline{b_j} \, .$$

Zeige die absolute Konvergenz dieser Reihe, und überprüfe, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *ein Skalarprodukt auf* ℓ_2 *ist.*

Aufgabe 3.2.7 *Zeige: Für jedes* $x_0 \in \mathbb{H}_p$ *wird durch* $f_{x_0}(x) = \langle x, x_0 \rangle$ *ein* $f_{x_0} \in \mathbb{H}_p'$ *definiert, und es gilt* $\|f_{x_0}\| = \|x_0\|$. *Zeige weiter, dass die Abbildung* $x_0 \mapsto f_{x_0}$ *semilinear und injektiv ist. Für die Surjektivität vergleiche* Satz 3.3.6 – *beachte aber, dass dort ein Hilbertraum vorausgesetzt ist.*

3.3 Orthogonalität, orthogonale Projektion

Wenn nichts anderes gesagt wird, sei im Folgenden $\mathbb{H}_p$ wieder ein Prä-Hilbertraum über $\mathbb{K}$.

Definition 3.3.1 *Zwei Vektoren* x_1, x_2 *in* $\mathbb{H}_p$ *heißen* orthogonal, *falls* $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$ *ist. Zwei nicht-leere Teilmengen* $A, B \subset \mathbb{H}_p$ *heißen zueinander orthogonal, falls jeder Vektor aus* A *zu jedem aus* B *orthogonal ist. Ist* $A \subset \mathbb{H}_p$ *nicht-leer, so heißt die Menge* $A^\perp$ *aller Vektoren aus* $\mathbb{H}_p$*, welche zu allen Vektoren aus* A *orthogonal sind, das* orthogonale Komplement *von* A*. In anderen Worten:* $A^\perp$ *ist die größte Teilmenge von* $\mathbb{H}_p$*, so dass* A *und* $A^\perp$ *zueinander orthogonal sind. Für* $A \subset \mathbb{H}_p$ *schreiben wir* $\operatorname{span} A$ *für die Menge aller Linearkombinationen von Elementen aus* A*; falls* $A = \emptyset$ *ist, dann besteht* $\operatorname{span} A$ *wegen der üblichen Konvention über die leere Summe genau aus dem Nullvektor.*

Satz 3.3.2 *Sei $A \subset \mathbb{H}_p$ nicht leer. Dann gilt:*

(a) *$A^\perp$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $\mathbb{H}_p$.*

(b) *$(A^\perp)^\perp \supset A$, also auch $(A^\perp)^\perp \supset \operatorname{span} A$.*

(c) $\operatorname{span}(A) \cap A^\perp = \{0\}$.

Beweis: Zu (a): Es ist immer $0 \in A^\perp$, also ist $A^\perp \neq \emptyset$. Weiter folgt aus den Rechenregeln für das Skalarprodukt, dass die Unterraumaxiome für $A^\perp$ erfüllt sind, und wegen der Stetigkeit des Skalarproduktes folgt, dass $A^\perp$ abgeschlossen ist. Teil (b) ist klar nach Definition von $A^\perp$. Zu (c): Sei $u \in \operatorname{span}(A)$, dann gibt es $u_1, \ldots, u_m \in A$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ mit $u = \sum_{j=1}^m \alpha_j u_j$. Also folgt für $v \in A^\perp$, dass $\langle u, v\rangle = \sum_{j=1}^m \alpha_j \langle u_j, v\rangle = 0$ ist, weil v zu allen u_j orthogonal ist. Wenn u auch zu $A^\perp$ gehört, können wir $v = u$ wählen und erhalten $\langle u, u\rangle = 0$, also $u = 0$. □

Aufgabe 3.3.3 *Sei U ein Unterraum von $\mathbb{H}_p$, und seien $u \in U$, $x \in \mathbb{H}_p$. Zeige: Genau dann ist $x - u \in U^\perp$, wenn $\|x - u\| = d(x, U)$ ist.* Anleitung: *Für die Rückrichtung zeige zunächst: Wenn $x - u \notin U^\perp$ ist, dann gibt es ein $\tilde{u} \in U$ so, dass $\langle \tilde{u}, x - u\rangle = 1$ ist. Schließe dann $\|x - u - \delta\tilde{u}\| < \|x - u\|$ für alle hinreichend kleinen $\delta > 0$.*

Satz 3.3.4 (Projektionssatz) *Für jeden vollständigen Unterraum U von $\mathbb{H}_p$ gilt immer $\mathbb{H}_p = U \oplus U^\perp$.*

Beweis: Aus Satz 3.3.2 (c) folgt $U \cap U^\perp = \{0\}$. Sei jetzt $x \in \mathbb{H}_p$, dann gibt es eine Folge (u_n) aus U mit $\|x - u_n\| \to d := d(x, U)$ für $n \to \infty$. Aus Aufgabe 3.2.2 (a) folgt für $n, m \in \mathbb{N}$:

$$\|u_n - u_m\|^2 \;=\; 2\left(\|u_n - x\|^2 \,+\, \|u_m - x\|^2\right) \,-\, \|u_n + u_m - 2x\|^2 \;\le\; 2\left(\|u_n - x\|^2 \,+\, \|u_m - x\|^2\right) \,-\, 4d^2 .$$

Daraus folgt, dass (u_n) eine Cauchyfolge in U ist, und somit gegen ein $u \in U$ konvergiert. Aus Aufgabe 3.3.3 folgt dann aber $x - u \in U^\perp$. □

Aufgabe 3.3.5 *Sei $\mathbb{H}$ ein Hilbertraum, und sei U ein Unterraum von $\mathbb{H}$. Zeige dass $\overline{U} = U^{\perp\perp}$ ist. Schließe hieraus dass U genau dann dicht in $\mathbb{H}$ ist, wenn $U^\perp = \{0\}$ ist.*

Satz 3.3.6 (von Riesz) *Sei $\mathbb{H}$ ein Hilbertraum. Dann gibt es zu jedem $f \in \mathbb{H}'$ ein eindeutiges $x_f \in \mathbb{H}$ so, dass $f(x) = \langle x, x_f\rangle$ gilt für alle $x \in \mathbb{H}$. Die Zuordnung $f \mapsto x_f$ ist isometrisch, bijektiv und semilinear.*

Beweis: Falls $f = 0$ ist, ist die Behauptung richtig für $x_f = 0$ (und dies ist auch das einzige x). Andernfalls ist $U = \operatorname{Kern} f$ ein abgeschlossener echter Teilraum von $\mathbb{H}_p$, und $U^\perp$ enthält (mindestens) einen Einheitsvektor e. Für $x \in \mathbb{H}_p$ und $\alpha = f(x)/f(e)$ folgt $f(x - \alpha e) = 0$, also $x - \alpha e \in U$. Daraus folgt aber $U^\perp = \{\alpha e \;:\; \alpha \in \mathbb{K}\}$. Für $x_f = \overline{f(e)}\, e$ folgt dann $f(x) = \langle x, x_f\rangle$. Der Rest der Behauptung folgt aus Aufgabe 3.2.7. □

Korollar zu Satz 3.3.6 *Ein Hilbertraum ist immer reflexiv.*

Aufgabe 3.3.7 *Sei $\mathbb{H}$ ein Hilbertraum. Zeige: Für alle $x \in \mathbb{H}$ ist $\|x\| = \sup\limits_{y \in B_{\mathbb{H}}} |\langle y, x\rangle|$.*

3.4 Der adjungierte Operator

Im Folgenden seien $\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2, \mathbb{H}_3$ immer Hilberträume. Beachte, dass die inneren Produkte in den drei Räumen im Folgenden immer mit dem gleichen Symbol bezeichnet werden, obwohl sie im Allgemeinen völlig unterschiedlich sein können!

Definition 3.4.1 *Sei $T : \mathbb{H}_1 \to \mathbb{H}_2$ eine lineare Abbildung. Falls es eine zweite lineare Abbildung $T^* : \mathbb{H}_2 \to \mathbb{H}_1$ gibt, so dass*

$$\forall\, x \in \mathbb{H}_1\,,\ y \in \mathbb{H}_2\ : \qquad \langle x, T^*\, y\rangle \ = \ \langle T\, x, y\rangle\,. \tag{3.4.1}$$

gilt, heißt T^* die zu T adjungierte Abbildung. *Für den Fall $\mathbb{H}_2 = \mathbb{H}_1$ spricht man auch vom adjungierten Operator.*

Es ist klar, dass T^* im Falle der Existenz eindeutig bestimmt ist, und wir werden jetzt zeigen, dass die Existenz von T^* zur Stetigkeit von T äquivalent ist:

Satz 3.4.2 *Genau dann existiert zu einer linearen Abbildung $T : \mathbb{H}_1 \to \mathbb{H}_2$ die adjungierte Abbildung T^*, wenn T stetig ist..*

Beweis: Sei T stetig. Für festes $y \in \mathbb{H}_2$ ist die Abbildung $x \mapsto \langle T\, x, y\rangle$ auf $\mathbb{H}_1$ linear und beschränkt, und daher gibt es wegen Satz 3.3.6 genau ein $\tilde{x} =: T^*\, y \in \mathbb{H}_1$, für welches (3.4.1) gilt. Mit den Rechenregeln für das innere Produkt und der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt die Linearität und Beschränktheit von T^*. Dass umgekehrt aus der Existenz von T^* die Stetigkeit von T (und damit auch die Stetigkeit von T^*) folgt, ist eine einfache Anwendung des Satzes vom abgeschlossenen Graphen; siehe dazu auch Aufgabe 3.4.7. $\square$

Aufgabe 3.4.3 *Sei $A = [a_{jk}]$ die Darstellungsmatrix eines Operators $T \in \mathcal{L}(\ell_2)$. Zeige dass der adjungierte Operator T^* die Darstellungsmatrix $A^* := \overline{A}^T = [\,\overline{a_{kj}}\,]$ hat.*

Aufgabe 3.4.4 *Beweise den folgenden Satz:*

Satz 3.4.5 (Rechenregeln für adjungierte Operatoren) *Für den adjungierten Operator gelten die folgenden Aussagen:*

(a) $\forall\ T_1, T_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)\ :\quad (T_1 + T_2)^* \ = \ T_1^* \ + \ T_2^*.$

(b) $\forall\ T \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)\ \forall\ \alpha \in \mathbb{K}\ :\quad (\alpha\, T)^* \ = \overline{\alpha}\, T^*.$

(c) $\forall\ T \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)\,,\quad U \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_2, \mathbb{H}_3) :\quad (U \circ T)^* \ = \ T^* \circ U^*.$

(d) $\forall\ T \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)\ :\quad (T^*)^* \ = \ T.$

(e) *Ist $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)$ surjektiv, so ist T^* injektiv.*

(f) *Ist $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)$ injektiv, so ist T^* surjektiv.*

(g) *Ist $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)$ bijektiv, so ist T^* bijektiv, und es gilt $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.*

Die obigen Aussagen implizieren, dass die Abbildung $T \mapsto T^*$ semilinear ist.

Bemerkung 3.4.6 *Der obige Satz entspricht genau dem für die adjungierte Matrix* $A^* = \overline{A}^T$, *aufgefasst als lineare Abbildung. Bei Banachräumen gibt es den Begriff der dualen Abbildung, die ähnliche Eigenschaften wie die adjungierte hat.*

Aufgabe 3.4.7 *Wir haben gezeigt, dass es zu jedem stetigen Operator* T *einen adjungierten Operator* T^* *gibt. Zeige mit Hilfe des Satzes vom abgeschlossenen Graphen: Sind* $\mathbb{H}_1$ *und* $\mathbb{H}_2$ *Hilberträume, und ist* T *ein lineare Abbildung von* $\mathbb{H}_1$ *nach* $\mathbb{H}_2$, *zu der es eine zweite lineare Abbildung* T^* *von* $\mathbb{H}_2$ *nach* $\mathbb{H}_1$ *gibt, so dass* (3.4.1) *gilt, dann ist* T *stetig. Dies bedeutet offenbar, dass die Existenz des adjungierten Operators zur Stetigkeit von* T *äquivalent ist. Siehe dazu auch* Aufgabe 4.5.3.

3.5 Projektionen

Definition 3.5.1 *Eine lineare Abbildung* $P : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ *eines beliebigen Vektorraums* $\mathbb{X}$ *in sich heißt* eine Projektion, *falls* $P^2 := P \circ P = P$ *ist. Sind* U, V *Unterräume von* $\mathbb{X}$, *und gilt* $\mathbb{X} = U \oplus V$, *so nennt man* U *und* V *auch* komplementär *zueinander, und die Dimension von* V *heißt auch* Kodimension von U. *Vergleiche dazu* Aufgabe 3.5.4.

Aufgabe 3.5.2 *Sei* $\mathbb{X}$ *ein beliebiger Vektorraum über* $\mathbb{K}$, *und sei* $P : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ *eine Projektion. Zeige:*

(a) $I - P$ *ist ebenfalls Projektion.*

(b) $\operatorname{Kern}(I - P) = \operatorname{Bild} P, \quad \operatorname{Bild}(I - P) = \operatorname{Kern} P.$

(c) $\mathbb{X} = \operatorname{Kern} P \oplus \operatorname{Bild} P$. *Zeige genauer: Die Gleichung* $x = x_1 + x_2$ *mit* $x_1 \in \operatorname{Bild} P$ *und* $x_2 \in \operatorname{Kern} P$ *gilt genau dann, wenn* $x_1 = P\,x$ *und* $x_2 = (I - P)\,x$ *ist.*

Aus (c) *folgt, dass eine Projektion immer eine Zerlegung von* $\mathbb{X}$ *in eine direkte Summe von Unterräumen definiert. In der nächsten Aufgabe wird umgekehrt gezeigt, dass zu einer Zerlegung auch immer eine Projektion gehört.*

Aufgabe 3.5.3 *Sei* $\mathbb{X}$ *ein beliebiger Vektorraum über* $\mathbb{K}$. *Zeige: Ist* $\mathbb{X} = U \oplus V$, *und setzt man* $P\,x = u$ *für* $x = u + v$ *mit* $u \in U$, $v \in V$, *so ist* P *eine Projektion, und* $\operatorname{Bild} P = U$, $\operatorname{Kern} P = V$. *Man nennt* P *auch* Projektion von $\mathbb{X}$ auf U entlang des Raumes V.

Aufgabe 3.5.4 (Eindeutigkeit der Kodimension) *Sei* $\mathbb{X}$ *ein beliebiger Vektorraum über* $\mathbb{K}$, *und sei* $\mathbb{X} = U \oplus V = U \oplus W$. *Dann gibt es nach der vorausgegangenen Aufgabe Projektionen* P_V *und* P_W *von* $\mathbb{X}$ *auf* V *bzw.* W *entlang des Raumes* U. *Zeige, dass* P_V *den Raum* W *in* V *abbildet, und dass die Restriktion von* P_V *auf* W *injektiv ist. Benutze dies, um zu zeigen, dass* $\dim V \geq \dim W$ *ist, und schließe hieraus dass die Kodimension von* U *eindeutig bestimmt ist.*

Satz 3.5.5 *Sei* $\mathbb{H}$ *ein Hilbertraum, und sei* U *ein abgeschlossener Unterraum von* $\mathbb{H}$. *Dann gibt es immer eine stetige Projektion* P *von* $\mathbb{H}$ *auf* U.

Beweis: Nach den Sätzen des letzten Abschnitts ist $U^\perp$ abgeschlossen, und $\mathbb{H} = U \oplus U^\perp$. Also ist nur noch zu zeigen, dass die Projektion P auf U entlang $U^\perp$ beschränkt ist. Dies ist aber klar, weil aus $x = u + v$ mit $u \in U$ und $v \in U^\perp$ folgt dass $\|x\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ ist, und deshalb folgt $\|P\,x\| \leq \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{H}$. □

Definition 3.5.6 *Wenn es eine stetige Projektion auf einen Unterraum U gibt, nennt man U auch* projizierbar*. Nach dem letzten Satz ist also jeder abgeschlossene Unterraum eines Hilbertraums projizierbar – dies gilt nicht in Banachräumen.*

3.6 Schwache Konvergenz

Definition 3.6.1 *Wir nennen eine Folge (x_n) in einem normierten Raum $\mathbb{X}$* schwach konvergent*, falls ein $x \in \mathbb{X}$ existiert, für welches gilt*

$$\forall\ f \in \mathbb{X}' \ : \qquad f(x_n) \ \longrightarrow \ f(x) \quad (n \to \infty)\,.$$

Der Vektor x heißt dann schwacher Grenzwert *der Folge, und wir schreiben auch*

$$x_n \quad \rightharpoonup \quad x \quad (n \to \infty)\,. \tag{3.6.1}$$

Zur Unterscheidung nennen wir den üblichen, d. h. von der Norm auf X induzierten Konvergenzbegriff auch manchmal die Normkonvergenz*. Auf Grund der Folgenstetigkeit von f impliziert die Normkonvergenz einer Folge ihre schwache Konvergenz, und zwar gegen denselben Grenzwert. Die Umkehrung gilt i. A. nicht.*

Satz 3.6.2 *Sei $\mathbb{H}$ ein Hilbertraum. Dann ist jede schwach konvergente Folge beschränkt, und ihr schwacher Grenzwert ist eindeutig bestimmt.*

Beweis: Sei (x_n) schwach konvergent gegen x. Wenn wir die x_n als Elemente von $\mathbb{H}_p'$ auffassen, so sind sie eine punktweise beschränkte Familie, und aus Satz 2.5.6 folgt deshalb ihre gleichmäßige Beschränktheit. Dies ist aber äquivalent zur Beschränktheit der Folge. Wenn $\tilde{x}$ ebenfalls schwacher Grenzwert der Folge ist, so folgt aus der Definition der schwachen Konvergenz, dass $x - \tilde{x}$ zu allen $y \in \mathbb{H}$ orthogonal ist, was $\tilde{x} = x$ impliziert. □

3.7 Orthogonalsysteme

Definition 3.7.1 *Ein System $(x_j)_{j \in J}$ von Vektoren in einem Raum $\mathbb{H}_p$ über $\mathbb{K}$ mit Skalarprodukt heißt* ein Orthogonalsystem*, falls keiner der Vektoren der Nullvektor ist, und wenn*

$$\forall\ j, k \in J \ : \qquad \langle x_j, x_k \rangle \ = \ 0 \quad \text{falls } j \neq k\,.$$

Falls zusätzlich gilt $\|x_j\| = 1$ für alle $j \in J$, dann sprechen wir von einem Orthonormalsystem*. Beachte, dass das leere System immer ein Orthonormalsystem ist. Falls $(x_j)_{j \in J}$ sogar eine Basis von $\mathbb{H}_p$ ist, sprechen wir von einer* Orthogonalbasis *bzw. einer* Orthonormalbasis *von $\mathbb{H}_p$.*

Aufgabe 3.7.2 *Zeige, dass in dem in* Aufgabe 3.1.4 *eingeführten Raum $\mathbb{K}^J$ das System $(f_\kappa)_{j \in J}$ mit $f_\kappa(j) = \delta_{\kappa j}$ eine Orthonormalbasis ist.*

Die nächsten Resultate werden in der linearen Algebra bewiesen; wir lassen die Beweise deshalb hier aus.

Lemma 3.7.3 *Ein Orthogonalsystem $(x_j)_{j \in J}$ ist immer linear unabhängig. Falls $(x_j)_{j \in J}$ sogar ein Orthonormalsystem ist, und falls $v = \sum_{j \in J} \alpha_j\, x_j$ ist, wobei nur endlich viele α_j von 0 verschieden sind, so folgt*

$$\alpha_j \ = \ \langle v, x_j \rangle \qquad \forall\ j \in J\,, \qquad \|v\|^2 \ = \ \sum_{j \in J} |\alpha_j|^2\,. \tag{3.7.1}$$

Satz 3.7.4 (Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren)
Sei $\mathbb{H}_p$ ein Raum über $\mathbb{K}$ mit Skalarprodukt, sei $(w_1, \ldots, w_n)$ ein linear unabhängiges System in $\mathbb{H}_p$, und sei das System $(x_1, \ldots, x_n)$ durch folgende Rekursionsgleichungen definiert:

$$\tilde{v}_k \;=\; w_k \;-\; \sum_{j=1}^{k-1} \langle w_k, x_j \rangle \, x_j \,, \quad x_k \;=\; \frac{1}{\|\tilde{v}_k\|} \, \tilde{v}_k \,, \qquad 1 \le k \le n \,,$$

wobei für $k = 1$ die leere Summe wie üblich als 0 zu interpretieren ist. Dann ist $(x_1, \ldots, x_n)$ ein Orthonormalsystem, und

$$\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_k) \;=\; \mathcal{L}(w_1, \ldots, w_k) \qquad \forall\; k = 1, \ldots, n \,.$$

Korollar zu Satz 3.7.4 *Ein endlich-dimensionaler Prä-Hilbertraum $\mathbb{H}_p$ besitzt immer eine Orthonormalbasis.*

Satz 3.7.5 (Beste Approximation)
Sei $\mathbb{H}_p$ ein Prä-Hilbertraum, und sei $(x_1, \ldots, x_n)$ ein Orthogonalsystem in $\mathbb{H}_p$. Dann gilt für jedes $v \in \mathbb{H}_p$:

(a) *Für $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ ist $\|v \;-\; \sum_{k=1}^n \alpha_k \, x_k\|$ genau dann minimal, wenn*

$$\alpha_k \;=\; \frac{\langle v, x_k \rangle}{\langle x_k, x_k \rangle} \;=\; \frac{\langle v, x_k \rangle}{\|x_k\|^2} \qquad \forall\; k \;=\; 1, \ldots, n \,. \tag{3.7.2}$$

(b) *Es gilt die* Besselsche Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|\langle v, x_k \rangle|^2}{\|x_k\|^2} \;\le\; \|v\|^2 \,. \tag{3.7.3}$$

(c) *Genau dann gilt die* Parsevalsche Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|\langle v, x_k \rangle|^2}{\|x_k\|^2} \;=\; \|v\|^2 \,, \tag{3.7.4}$$

wenn $v \in \operatorname{span}(x_1, \ldots, x_n)$ ist, und dann ist

$$v \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle v, x_k \rangle}{\|x_k\|^2} \; x_k \,.$$

Definition 3.7.6 *Sei $(x_j)_{j \in J}$ ein beliebiges Orthogonalsystem in einem Raum mit Skalarprodukt $\mathbb{H}_p$. Für ein $v \in \mathbb{H}_p$ nennt man die Zahlen*

$$\frac{\langle v, x_j \rangle}{\|x_j\|^2} \qquad \forall\; j \in J$$

die Fourierkoeffizienten von v bzgl. des Orthogonalsystems $(x_j, j \in J)$.

Korollar zu Satz 3.7.5 (Orthogonale Projektion) *Sei $\mathbb{H}_p$ ein Raum mit Skalarprodukt, und sei U ein endlich-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{H}_p$. Ist $(u_1, \ldots, u_n)$ eine Orthogonalbasis von U, so ist*

$$u \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle v, u_k \rangle}{\|u_k\|^2} \; u_k \tag{3.7.5}$$

die orthogonale Projektion von v auf U.

3.8 Orthogonalreihen

Im Folgenden sei jetzt $\mathbb{H}_p$ ein unendlich-dimensionaler Prä-Hilbert-Raum über $\mathbb{K}$, und $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ sei ein abzählbar unendliches Orthonormalsystem in $\mathbb{H}_p$.

Definition 3.8.1 *Für beliebige $\alpha_k \in \mathbb{K}$ heißt eine Reihe der Form $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k\, x_k$ eine* Orthogonalreihe *mit Koeffizienten α_k. Für $x \in \mathbb{H}_p$ heißt die Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \quad \langle x, x_k \rangle \; x_k \tag{3.8.1}$$

die (verallgemeinerte) Fourier-Reihe *des Vektors x.*

Proposition 3.8.2 *Eine Orthogonalreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k\, x_k$ ist genau dann eine Cauchy-Reihe, wenn*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|^2 \; < \; \infty \; .$$

Beweis: Mit den Regeln für ein inneres Produkt ergibt sich für beliebiges $m, p \in \mathbb{N}_0$

$$\Big\| \sum_{k=m}^{m+p} \alpha_k \; x_k \Big\|^2 \; = \; \sum_{k=m}^{m+p} |\alpha_k|^2 \; \|x_k\|^2 \; = \; \sum_{k=m}^{m+p} \; |\alpha_k|^2 \; ,$$

woraus die Behauptung folgt. □

Aufgabe 3.8.3 *Wie in der Analysis nennt man eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$, mit $x_k \in \mathbb{H}_p$,* unbedingt konvergent, *wenn jede Umordnung der Reihe ebenfalls konvergiert, und wenn der Wert der Reihe nicht von der Umordnung abhängt. Zeige, dass eine konvergente Orthogonalreihe auch unbedingt konvergiert.*

Satz 3.8.4 (Normkonvergenz von Orthogonalreihen)

(a) *Falls eine Orthogonalreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k\, x_k$ gegen einen Vektor $x \in \mathbb{H}_p$ konvergiert, dann sind die Koeffizienten α_k genau die Fourier-Koeffizienten von x; d. h., es gilt*

$$\alpha_k \; = \; \langle x, x_k \rangle \qquad \forall \; k \geq 0 \, .$$

(b) *Falls die allgemeine Fourier-Reihe* (3.8.1) *eines Vektors $x \in \mathbb{H}_p$ gegen einen Vektor $\tilde{x} \in \mathbb{H}_p$ konvergiert, dann folgt*

$$\langle x \, , \, x_k \rangle - \langle \tilde{x} \, , \, x_k \rangle \; = \; \langle x - \tilde{x} \, , \, x_k \rangle \; = \; 0 \qquad \forall \; k \in \mathbb{N}_0$$

d. h., die Vektoren x und $\tilde{x}$ haben die gleichen Fourier-Koeffizienten, oder anders ausgedrückt: die Differenz $x - \tilde{x}$ ist zu allen x_k orthogonal.

Beweis: Zu (a): Aus $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k\, x_k$ folgt mit Hilfe der Stetigkeit des Skalarproduktes und der Orthogonalität der x_k:

$$\langle x, x_j \rangle \; = \; \lim_{n\to\infty} \; \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \; \langle x_k \, , x_j \rangle \; = \; \alpha_j \; .$$

Zu (b): Wenn man in der obigen Gleichung für α_k die Fourier-Koeffizienten von x einsetzt und dann x durch $\tilde{x}$ ersetzt, so folgt die Behauptung. □

Aufgabe 3.8.5 (Orthonormalbasen in unendlichdimensionalen Räumen) *Sei $\mathbb{H}_p$ ein unendlichdimensionaler Prä-Hilbertraum, welcher eine Orthonormalbasis $(e_j)_{j\in J}$ besitzt. Zeige, dass dann $\mathbb{H}_p$ nicht vollständig ist.*

Definition 3.8.6 *Wir nennen das Orthogonalsystem (x_k)* maximal*, wenn die lineare Hülle* $\operatorname{span}\{x_k\}$ *in $\mathbb{H}_p$ dicht liegt; d. h., dass $\overline{\operatorname{span}\{x_k\}} = \mathbb{H}_p$ ist. Wir sagen weiter, dass (x_k)* vollständig *ist, wenn aus $\langle x\,,\,x_k\rangle = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ folgt, dass $x = 0$ ist. Das bedeutet also, dass die Fourierreihe eines Vektors x bei einem vollständigen Orthogonalsystem, wenn überhaupt, nur gegen x konvergieren kann.*

Satz 3.8.7 (Normkonvergenz der Fourierreihe) *Sei $\mathbb{H}_p$ ein Prä-Hilbertraum. Dann gelten immer folgende Aussagen:*

(a) *Für jedes $x \in \mathbb{H}_p$ gilt die* Besselsche Ungleichung

$$\sum_{k=0}^{\infty} \quad |\langle x, x_k\rangle|^2 \;\le\; \|x\|^2\,. \tag{3.8.2}$$

Insbesondere ist die Fourierreihe von x immer eine Cauchyreihe.

(b) *Genau dann konvergiert die Fourierreihe eines $x \in \mathbb{H}_p$ gegen x, wenn die* Parsevalsche Gleichung

$$\sum_{k=0}^{\infty} \quad |\langle x, x_k\rangle|^2 \;=\; \|x\|^2 \tag{3.8.3}$$

gilt, d. h. also, wenn in der Besselschen Ungleichung das Gleichheitszeichen eintritt.

(c) *Wenn (x_k) maximal ist, gilt* (3.8.3) *für alle $x \in \mathbb{H}_p$, und (x_k) ist auch vollständig.*

(d) *Wenn $\mathbb{H}_p$ ein Hilbert-Raum und (x_k) ein vollständiges Orthogonalsystem ist, dann ist (x_k) auch maximal, und für alle $x \in \mathbb{H}_p$ konvergiert die Fourierreihe von x gegen diesen Vektor x.*

Beweis: Aus (3.7.3) folgen für $n \to \infty$ sofort (a) und (b). Falls (x_k) maximal ist, gibt es per Definition zu jedem $x \in \mathbb{H}_p$ und jedem $\varepsilon > 0$ eine Linearkombination $\tilde{x} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k\, x_k$, mit $n = n(\varepsilon)$, für welche $\|x - \tilde{x}\| < \varepsilon$ ist. Nach Satz 3.7.5 gilt dies erst recht, wenn wir die α_k durch die allgemeinen Fourier-Koeffizienten von x ersetzen. Falls x zu allen x_k orthogonal ist, dann verschwinden alle Fourierkoeffizienten, und daher folgt (c). Die allgemeine Fourierreihe von x ist wegen der Besselschen Ungleichung und Proposition 3.8.2 ein Cauchy-Reihe, konvergiert also gegen ein $\tilde{x} \in \mathbb{H}_p$, falls $\mathbb{H}_p$ ein Hilbert-Raum ist. Nach Satz 3.8.4 ist $x - \tilde{x}$ zu allen x_k orthogonal, und daraus folgt $\tilde{x} = x$ wegen der Vollständigkeit. Also gilt (d). □

Beispiel 3.8.8 *Wir setzen $\mathbb{H}_p$ gleich der Menge aller Linearkombinationen über $\mathbb{C}$ der Folgen $x^{(k)} = (x_n^{(k)})_{n=0}^{\infty}$, mit*

$$x_n^{(0)} \;=\; \frac{1}{n+1}\,, \quad x_n^{(k)} \;=\; \delta_{nk} \;=\; \begin{cases} 1 & (n = k) \\ 0 & (n \neq k) \end{cases} \qquad \forall\, k \ge 1,\; n \ge 0\,.$$

Es folgt, dass für jedes $x = (x_n) \in \mathbb{H}_p$ entweder nur endlich viele Glieder $x_n \neq 0$ sind, oder dass gilt $x_n = 1/n$ für alle $n \ge n_0$. Als inneres Produkt zweier Folgen $x = (x_n)$, $y = (y_n)$ setzen wir

$$\langle x, y\rangle \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} x_n\, y_n\,.$$

Beachte, dass die Reihe für $x, y \in \mathbb{H}_p$ immer absolut konvergent ist, denn entweder sind nur endlich viele ihrer Glieder von 0 verschieden, oder es gilt $x_n\, y_n \;=\; 1/n^2$ für alle $n \;\ge\; n_0$. Die $(x^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ sind *ein Orthogonalsystem in* $\mathbb{H}_p$*, und aus* $\langle x, x^{(k)} \rangle = 0$ *für* $k \geq 1$ *folgt, dass alle Glieder* x_n *der Folge* x *verschwinden müssen, ausser evtl. dem Anfangsglied* x_0*. Nach Definition von* $\mathbb{H}_p$ *kann dies aber nur gelten, wenn* x *die Nullfolge ist. Das bedeutet, dass das Orthogonalsystem vollständig ist. Es ist aber nicht maximal, denn ist* $\tilde{x}$ *eine beliebige Linearkombination der* $x^{(k)}$*,* $k \geq 1$*, so beginnt die Folge* $\tilde{x}$ *mit* 0*, und deshalb ist* $\|x^{(0)} - \tilde{x}\| \geq 1$*.*

Beispiel 3.8.9 *In* $C[a,b]$*,* $a < b$*, mit dem üblichen inneren Produkt kann man mit Hilfe des Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens zu der Familie aller Monome* $(t^k)_{k=0}^{\infty}$ *ein äquivalentes Orthogonalsystem* $(p_k)_{k=0}^{\infty}$ *konstruieren. Dabei ist jedes* p_k *ein Polynom vom Grade* k*. Die Menge aller Polynome ist* dicht *in* $C[a,b]$*; dies folgt aus dem sogenannten* Weierstraßschen Approximationssatz*. Daraus wiederum ergibt sich, dass* (p_k) *ein maximales Orthogonalsystem ist. Orthogonalsysteme von Polynomen sind in verschiedenen Anwendungen wichtig. Wenn z. B.* $[a,b] = [-1,1]$ *ist, erhält man das Orthogonalsystem der* Legendre-Polynome

$$p_k(t) \;=\; \frac{1}{2^k\, k!}\, \frac{d^k}{dt^k}\, (t^2 \;-\; 1)^k \;, \qquad k \in \mathbb{N}_0 \,.$$

In der Physik und Technik ist das Orthogonalsystem der trigonometrischen Funktionen *besonders wichtig: Wir setzen*

$$f_0(t) \;\equiv\; 1\,, \quad f_{2k-1}(t) \;=\; \sin(k\,t)\,, \quad f_{2k}(t) \;=\; \cos(k\,t)\,, \qquad \forall\; k \in \mathbb{N}\,.$$

Diese Funktionen bilden auf jedem Intervall der Länge 2π *ein Orthogonalsystem, welches wir das* trigonometrische System *nennen wollen. Wir setzen weiter für eine auf dem Intervall* $[-\pi,\pi]$ *integrierbare Funktion* f

$$a_k \;=\; \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \cos(k\,t)\; dt \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0\,, \tag{3.8.4}$$

$$b_k \;=\; \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \sin(k\,t)\; dt \qquad \forall k \in \mathbb{N}\,. \tag{3.8.5}$$

Diese Zahlen nennt man die Fourierkoeffizienten *der Funktion* f*. Die Reihe*

$$\frac{a_0}{2} \;+\; \sum_{k=1}^{\infty} (a_k\, \cos(k\,t) \;+\; b_k\, \sin(k\,t)) \tag{3.8.6}$$

heißt die Fourierreihe der Funktion f*. Beachte, dass diese Reihe nichts anderes ist als die Orthogonalreihe von* f *bezüglich des trigonometrischen Systems. Siehe dazu auch die unten stehende Aufgabe.*

Aufgabe 3.8.10 *Zeige die Orthogonalität des oben eingeführten trigonometrischen Systems* $(f_k)_{k=0}^{\infty}$ *auf dem Intervall* $[-\pi,\pi]$*. Berechne* $\|f_k\|$ *und vergleiche* (3.8.4) *und* (3.8.5) *mit* (3.7.2)*.*

3.9 Separable Hilberträume

Mit Hilfe des Zornschen Lemmas kann man zeigen, dass ein Prä-Hilbertraum immer ein vollständiges Orthonormalsystem besitzt, was jedoch aus überabzählbar vielen Vektoren bestehen kann. Wir wollen uns hier aber auf separable Räume beschränken:

Satz 3.9.1 (Orthonormalsysteme im separablen Prä-Hilbertraum) *Jeder separable Prä-Hilbertraum* $\mathbb{H}_p$ *enthält ein abzählbares vollständiges Orthonormalsystem.*

Beweis: Wenn $\mathbb{H}_p$ endliche Dimension hat, dann besitzt $\mathbb{H}_p$ eine Orthonormalbasis, und diese ist zugleich ein vollständiges Orthogonalsystem. Im anderen Fall sei $\{y_n :\; n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge von $\mathbb{H}_p$. Indem man alle y_n streicht, welche von vorausgegangenen y_m, $1 \leq m < n$, linear abhängig sind, erhält man eine Folge von linear unabhängigen Vektoren $\tilde{y}_n$, deren Linearkombinationen dicht in $\mathbb{H}_p$ liegen. Mit Hilfe des Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens kann man ein abzählbar unendliches Orthogonalsystem $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstruieren, so dass die lineare Hülle der (x_n) gleich der der $(\tilde{y}_n)$ ist. Daraus folgt aber, dass die Menge aller Linearkombinationen des Orthogonalsystems dicht in $\mathbb{H}_p$ ist, und das heißt genau, dass wir ein maximales System haben. Nach Satz 3.8.7 ist aber jedes maximale System auch vollständig. □

Mit diesem Satz erhalten wir jetzt, dass es eigentlich nur einen unendlichdimensionalen separablen Hilbertraum gibt – jedenfalls wenn man isomorphe Räume identifiziert:

Korollar zu Satz 3.9.1 *Jeder unendlichdimensionale separable Hilbertraum ist isometrisch isomorph zu ℓ_2.*

Beweis: Sei $\mathbb{H}$ ein separabler Hilbertraum. Nach Satz 3.9.1 gibt es ein vollständiges Orthonormalsystem $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{H}$, und jedes $x \in \mathbb{H}$ läßt sich durch seine Fourierreihe darstellen. Mit der Besselschen Gleichung folgt, dass die Zuordnung

$$x \longmapsto (\langle x, x_k \rangle)_{n=1}^{\infty}$$

eine Isometrie von $\mathbb{H}$ nach ℓ_2 ist, welche wegen Proposition 3.8.2 surjektiv ist. □

In separablen Räumen gibt es also immer ein abzählbares vollständiges Orthonormalsystem. Dass es im allgemeinen in einem Raum Systeme jeder beliebigen Mächtigkeit gibt, zeigt die nächste Aufgabe:

Aufgabe 3.9.2 *Sei J eine beliebige nichtleere Menge, und sei $\ell_2(J)$ gleich der Menge aller Funktionen $f : J \to \mathbb{K}$, für welche $f(t) = 0$ ist für alle bis auf abzählbar viele $t \in J$, und für die $\sum_t |f(t)|^2 < \infty$ ist, wobei die Summe sich über alle $t \in J$ erstrecken kann, da ja ohnehin nur abzählbar viele Terme nicht verschwinden. Zeige: Mit der Definition*

$$\forall\ f, g \in \ell_2(J) : \qquad \langle f, g \rangle := \sum_t f(t)\,\overline{g(t)}\,,$$

wobei die absolute Konvergenz der Reihe aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt, wird $\ell_2(J)$ ein Hilbertraum, und die Funktionen f_τ mit $f_\tau(t) = \delta_{\tau t}$ sind ein vollständiges Orthonormalsystem in $\ell_2(J)$. Es gibt also Hilberträume, in denen vollständige Orthonormalsysteme einer vorgegebenen, evtl. also auch sehr großen, Mächtigkeit existieren. Schließe aus Aufgabe 3.8.5*, dass dieser Raum nur dann eine Orthonormalbasis besitzt, wenn J eine endliche Menge ist.*

Aufgabe 3.9.3 *Sei $\mathbb{H}$ ein Hilbertraum mit einem vollständigen ONS $(x_j)_{j\in J}$. Zeige dass $\mathbb{H}$ isometrisch isomorph zu $\ell_2(J)$ ist.* Anleitung: *Zeige zuerst, dass für jedes $x \in \mathbb{H}$ die Menge der $j \in J$ mit $\langle x, x_j \rangle \neq 0$ abzählbar ist, und dass $x = \sum_{j\in J} \langle x, x_j \rangle\, x_j$ ist.*

3.10 Der Satz von Lax-Milgram

Der Satz von Lax-Milgram ist eine einfache Folgerung aus Satz 3.3.6 und hat im Buch von Heuser [4] den Rang einer Übungsaufgabe. Trotzdem hat er zahlreiche Anwendungen in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen.

Definition 3.10.1 *Sei $\mathbb{X}$ ein beliebiger Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $S : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{K}$ heißt eine* Sesquilinearform*, falls für alle $x, x_1, x_2 \in \mathbb{X}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt*

(S1) $\qquad S(x, x_1 + x_2) = S(x, x_1) + S(x, x_2)\,, \quad S(x_1 + x_2, x) = S(x_1, x) + S(x_2, x),$

(S2) $\qquad S(\lambda\, x_1, x_2) \;=\; \lambda\, S(x_1, x_2)\,, \quad S(x_1, \lambda\, x_2) \;=\; \overline{\lambda}\, S(x_1, x_2).$

Die Abbildung S ist also eine zweistellige Form*, die in der ersten Stelle linear und in der zweiten semilinear ist. Falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist, ist ein solches S eine* Bilinearform*. Falls zusätzlich gilt*

(S3) $\qquad S(x_1, x_2) \;=\; \overline{S(x_2, x_1)},$

dann spricht man auch von einer hermiteschen Form*. Ein Skalarprodukt ist also eine positiv definite hermitesche Form.*

Bemerkung 3.10.2 *Eine Sesquilinearform ist, im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, durch ihre Werte auf der Diagonalen eindeutig festgelegt: Gilt nämlich $S(x, x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{X}$, und sind $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, so folgt wegen $S(x_1, x_1) = S(x_2, x_2) = 0$ mit den Axiomen*

$$0 \;=\; S(x_1 + \alpha\, x_2, x_1 + \alpha\, x_2) \;=\; \alpha\, S(x_2, x_1) \;+\; \overline{\alpha}\, S(x_1, x_2)\,.$$

Wenn man jetzt einmal $\alpha = 1$ und dann noch $\alpha = i$ einsetzt und noch durch i teilt, so erhält man

$$0 \;=\; S(x_2, x_1) \;+\; S(x_1, x_2) \;=\; S(x_2, x_1) \;-\; S(x_1, x_2)\,,$$

woraus $S(x_2, x_1) = 0$ folgt.

Aufgabe 3.10.3 (Stetigkeit von Sesquilinearformen) *Sei jetzt $\mathbb{X}$ ein normierter Raum, und sei S eine Sesquilinearform auf $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$. Zeige dass S genau dann stetig ist, wenn es ein c gibt mit*

$$|S(x_1, x_2)| \;\le c\, \|x_1\|\, \|x_2\| \qquad \forall\; x_1, x_2 \in \mathbb{X}\,.$$

Satz 3.10.4 (Lax-Milgram) *Sei $\mathbb{H}$ ein Hilbertraum über $\mathbb{K}$, und sei $S : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{K}$ eine stetige Sesquilinearform. Dann gibt es genau ein $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$ mit*

$$S(x_1, x_2) \;=\; \langle T\, x_1, x_2 \rangle \qquad \forall\; x_1, x_2 \;\in\; \mathbb{H}\,. \tag{3.10.1}$$

Wenn S koerziv ist, d. h. wenn es ein m gibt mit $|S(x, x)| \ge m\, \|x\|^2$ für alle $x \in \mathbb{H}$, dann ist dieses T sogar bijektiv, und es gilt $\|T^{-1}\| \le 1/m$.

Beweis: Für festes x_1 ist $\overline{S(x_1, \cdot)} \in \mathbb{H}'$, und daher gibt es nach Satz 3.3.6 ein $\tilde{x}_1$ mit

$$S(x_1, x_2) \;=\; \langle \tilde{x}_1, x_2 \rangle \qquad \forall\; x_2 \in \mathbb{H}\,.$$

Wenn wir $\tilde{x}_1 := T\, x_1$ setzen, erhalten wir eine lineare Abbildung T von $\mathbb{H}$ in sich. Aus Satz 3.3.6 und Aufgabe 3.10.3 folgt weiter

$$\|T\, x_1\| \;=\; \sup_{\|x_2\|=1} |\langle T\, x_1, x_2 \rangle| \;=\; \sup_{\|x_2\|=1} |S(x_1, x_1)| \;\le\; c\, \|x_1\| \qquad \forall\; x_1, x_2 \in \mathbb{H}\,.$$

Also ist die Abbildung T beschränkt. Wenn S koerziv ist, dann folgt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\|T\, x\|\, \|x\| \ge |\langle T\, x, x \rangle| \;=\; |S(x, x)| \;\ge\; m\, \|x\|^2 \qquad \forall\; x \in \mathbb{H}\,.$$

Daher ist T injektiv, und T^{-1} ist auf $U := T(\mathbb{H})$ beschränkt. Da $\mathbb{H} = T^{-1}(U)$ abgeschlossen ist, folgt die Abgeschlossenheit von U. Also ist $\mathbb{H} = U \oplus U^\perp$, und für $y \in U^\perp$ ist

$$\langle T\, x, y \rangle \;=\; S(x, y) \;=\; 0 \qquad \forall\; x \in \mathbb{H}\,.$$

Mit $x = y$ folgt dann aber $y = 0$. Also ist $U \;= \mathbb{H}$. $\square$

Kapitel 4

Spektraltheorie stetiger Operatoren

Wenn nichts anderes gesagt wird, sei im Folgenden $\mathbb{X}$ immer ein nichttrivialer Banachraum - dies soll heißen, dass $\mathbb{X}$ nicht nur aus dem Nullvektor besteht. Dabei soll allerdings erlaubt sein, dass die Dimension von $\mathbb{X}$ endlich ist, obwohl der typische Fall der eines unendlich dimensionalen Raumes ist. Weiter sei T ein fest gewählter, aber beliebiger Operator aus $\mathcal{L}(\mathbb{X})$, und b bezeichne einen festen Vektor aus $\mathbb{X}$. Wir wollen im Folgenden immer die Lösbarkeit, bzw. die Lösungsmenge, der Gleichung $T x \;=\; b$ studieren, wobei per Definition nur Lösungen $x \in \mathbb{X}$ zugelassen sind. Dies ist eine natürliche Verallgemeinerung der entsprechenden Frage für lineare inhomogene Gleichungssysteme aus der linearen Algebra. Allerdings ist es wichtig, dass wir eben nur $x \in \mathbb{X}$ als Lösungen der Gleichung $T x \;=\; b$ zulassen wollen; vergleiche hierzu auch die Beispiele im nächsten Abschnitt. Analog zur Eigenwertheorie von quadratischen Matrizen ist es auch hier sinnvoll, an Stelle der obigen inhomogenen Gleichung folgende allgemeinere Beziehung zu studieren: Für beliebiges $\lambda \in \mathbb{K}$ betrachten wir die Gleichung

$$(\lambda I \;-\; T)\, x \;=\; b\,, \tag{4.0.1}$$

und untersuchen speziell die *universelle bzw. eindeutige Lösbarkeit* von (4.0.1), d. h., die Surjektivität bzw. Injektivität des Operators $\lambda I - T$. Dabei schreibt man üblicherweise auch einfacher $\lambda - T$ an Stelle von $\lambda I - T$. Wichtig ist dabei, dass aus der Bijektivität von $\lambda - T$ mit dem Satz vom inversen Operator bereits die Stetigkeit der Umkehrabbildung $(\lambda - T)^{-1}$ folgt, so dass Bijektivität und Invertierbarkeit von $\lambda - T$ hier dasselbe bedeuten.

Aus der Dimensionsformel für lineare Abbildungen folgt: Wenn $\dim \mathbb{X} < \infty$ ist, dann ist die Surjektivität von $\lambda - T$ zur Injektivität äquivalent. Dagegen kann im Falle eines unendlichdimensionalen Raumes $\mathbb{X}$ der Operator $\lambda - T$ surjektiv aber nicht injektiv, oder auch injektiv aber nicht surjektiv sein.

4.1 Einige Beispiele

Wir betrachten erneut einige Operatoren, die bereits in Beispiel 2.1.6 vorgestellt wurden. Dabei soll insbesondere klar werden, dass die Spektraltheorie in unendlichdimensionalen Räumen deutlich von der in endlicher Dimension abweicht. Der Grund dafür liegt in der einfachen Tatsache, dass im endlichdimensionalen Fall Surjektivität und Injektivität eines linearen Operators $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$ zueinander äquivalent sind, während dies im Allgemeinen anders ist.

1. Sei $\mathbb{X} = C[a, b]$ die Menge aller stetigen Funktionen auf einem nichttrivialen abgeschlossenen Intervall $[a, b]$, und sei k eine stetige Kernfunktion. Bei gegebenem $f \in C[a, b]$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt die

Gleichung

$$\lambda\, x(s) \;=\; f(s) \;+\; \int_a^b k(s,t)\, x(t)\, dt\,, \tag{4.1.1}$$

eine *Fredholmsche Integralgleichung* für die unbekannte Funktion x. Für $\lambda = 0$ bzw. $\lambda \neq 0$ spricht man auch von einer Gleichung *erster* bzw. *zweiter Art*. Diese Gleichung lässt sich abstrakt in der Form $(\lambda - T)\, x = f$ schreiben, wobei T der durch (2.1.2) gegebene Fredholmsche Integraloperator ist. Wir werden sehen, dass Fredholmsche Integraloperatoren immer *kompakte Operatoren* sind, deren Theorie große Ähnlichkeit mit der im Fall endlicher Dimension aufweist. Tatsächlich war die Theorie der Integralgleichungen einer der Ausgangspunkte und ein starkes Motiv für die Entwicklung der modernen Funktionalanalysis, und hier speziell für die Spektraltheorie der kompakten Operatoren.

2. Wenn k der Kern eines Volterraschen Integraloperators (2.1.3) auf $C[a,b]$ ist, so heißt die zu (4.1.1) analoge Gleichung *Volterrasche Integralgleichung*. Wie wir noch sehen werden, ist ihre Theorie deutlich einfacher als die der Fredholmschen Gleichungen.

3. Sei jetzt $\mathbb{X} = \ell_p$, mit $1 \leq p < \infty$, und sei $T \in \mathcal{L}(\ell_p)$ mit der Darstellungsmatrix $A = (a_{jk})$. Die Gleichung $(\lambda - T)\, x = b$, für gegebenes $b \in \ell_p$, ist dann ein lineares inhomogenes Gleichungssystem

$$\lambda\, x_j \;-\; \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}\, x_k \quad = \; b_j \tag{4.1.2}$$

in unendlich vielen Unbekannten x_k. Dabei ist es wichtig, darauf zu achten, dass die Lösbarkeit dieses Systems nicht nur bedeutet, dass eine Folge $x = (x_k)$ existiert, welche die Gleichungen erfüllt, sondern dass x auch zu ℓ_p gehören muss. Dass dies nicht automatisch der Fall ist, zeigt das nächste Beispiel.

4. Sei der Einfachheit halber jetzt $p > 1$ vorausgesetzt, und sei der Operator T der *Linksshift* $x = (x_1, x_2, \ldots) \mapsto T\,x = (x_2, x_3, \ldots)$. In diesem Fall sind die Gleichungen (4.1.2) identisch mit der *Differenzengleichung*

$$x_{j+1} \;=\; \lambda\, x_j \;-\; b_j \qquad \forall\, j \geq 1.$$

Wählt man x_1 beliebig, so sind die übrigen x_j eindeutig bestimmt, und es folgt

$$x_j \;=\; \lambda^{j-1}\, x_1 \;-\; \sum_{k=1}^{j-1} \lambda^{j-k-1}\, b_k \qquad \forall\, j \geq 1\,. \tag{4.1.3}$$

Sei jetzt zunächst $|\lambda| \geq 1$ vorausgesetzt. Die Folge $x = (x_j)$ kann höchstens dann in ℓ_p liegen, wenn sie eine Nullfolge ist. Da $|\lambda|^j \to \infty$ für $j \to \infty$, muss also notwendigerweise $x_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k}\, b_k$ gelten, woraus $x_j = \sum_{k=j}^{\infty} \lambda^{j-k-1}\, b_k$ folgt. Das bedeutet, dass $\lambda - T$ in diesem Fall injektiv ist. Falls sogar $|\lambda| = 1$ ist, ist die Reihe für x_1 aber nicht für alle $b \in \ell_p$ konvergent, da ja $p > 1$ vorausgesetzt ist, und das bedeutet, dass die Abbildung $\lambda - T$ zwar injektiv, aber nicht surjektiv ist. Ist dagegen $|\lambda| > 1$, so konvergieren alle Reihen für die x_j absolut, und die Folge $x = (x_j)$ ist in der Tat in ℓ_p; um dies zu sehen, schreiben wir

$$x \;=\; \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda^{-\nu-1}\, T^{\nu}\, b = 1$$

und wenden die Dreiecksungleichung an. Das heißt, dass für $|\lambda| > 1$ die Abbildung $\lambda - T$ immer invertierbar ist. Wenn wir jetzt $|\lambda| < 1$ annehmen, so ist die Folge $(\lambda^{j-1}\, x_1)$ für beliebiges x_1 immer in ℓ_p. Aus diesem Grund ist $\lambda - T$ nicht injektiv. Allerdings ist die Abbildung surjektiv, wie wir jetzt zeigen wollen: Für $y = (y_k) \in \ell_{p'}$ sei $z = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1}\, T^j y$, also $z_k = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1}\, y_{j+k}$, für alle $k \geq 1$. Dann folgt $z \in \ell_{p'}$, und deshalb ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} z_k\, b_k$ absolut konvergent. Einsetzen für z_k und Vertauschen der Summationsreihenfolge zeigt aber $\sum_{k=1}^{\infty} z_k\, b_k = -\sum_{j=2}^{\infty} y_j\, x_j$, wobei $x = (x_j)$ durch (4.1.3) mit $x_1 = 0$ gegeben ist. Da dies für alle $y \in \ell_{p'}$ gilt, folgt $x \in \ell_p$.

Aufgabe 4.1.1 *Die Abbildung $x = (x_1, x_2, \ldots) \mapsto T\,x = (0, x_1, x_2, \ldots)$ wird meist als* Rechtsshift *bezeichnet. Fasse sie als Element von $\mathcal{L}(\ell_p)$ auf, finde ihre Darstellungsmatrix und untersuche, analog zum letzten Beispiel, die Invertierbarkeit von $\lambda - T$.*

4.2 Spektrum und Resolvente

Definition 4.2.1 *Die Menge $\rho(T)$ aller $\lambda \in \mathbb{K}$, für welche $\lambda - T$ invertierbar ist, heißt* die Resolventenmenge *von T, und der Operator $R(\lambda, T) = (\lambda - T)^{-1}$ heißt* die Resolvente *von T im Punkt λ. Die Menge $\sigma(T) = \mathbb{K} \setminus \rho(T)$ heißt* das Spektrum von T, *und die Zahl*

$$r(T) \;=\; \sup\;\{\;|\lambda| \;:\quad \lambda \in \sigma(T)\;\}$$

heißt der Spektralradius *von T, wobei wie üblich das Supremum der leeren Menge gleich $-\infty$ gesetzt wird.*

Aufgabe 4.2.2 *Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei $\mathbb{X}$ ein n-dimensionaler Banachraum, so dass nach* Aufgabe 2.3.2 *jede lineare Abbildung von $\mathbb{X}$ in sich stetig ist. Wiederhole aus der Vorlesung über lineare Algebra: Zu jedem $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$ gehört, nach Wahl einer Basis von $\mathbb{X}$, eine Darstellungsmatrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, und für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$ ist $\lambda - T$ genau dann invertierbar, wenn $\det(\lambda I - A) \neq 0$ ist. Also besteht das Spektrum $\sigma(T)$ genau aus den höchstens endlich vielen Nullstellen des charakteristischen Polynoms von A, soweit diese in $\mathbb{K}$ liegen, was für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nicht der Fall sein muss. Alle diese Nullstellen sind dann immer Eigenwerte von T. In jedem Fall ist die Spektraltheorie im Fall eines endlichdimensionalen Raumes $\mathbb{X}$ für uns im Grunde ohne Interesse.*

Aufgabe 4.2.3 *Finde das Spektrum des Linksshifts, aufgefasst als Abbildung von ℓ_p in sich, im Fall $1 < p < \infty$.*

Aufgabe 4.2.4 *Finde das Spektrum eines* Multiplikationsoperators *$(T_k\, f)(s) = k(s)\, f(s)$, wobei $k \in C[a, b]$, also $T_k \in \mathcal{L}(C[a, b])$ ist.*

Aufgabe 4.2.5 (Spektrum des inversen Operators) *Sei $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$ invertierbar. Zeige für $\lambda \neq 0$ dass $\lambda - T = -\lambda\, T\, (\lambda^{-1} - T^{-1})$ ist, und schließe hieraus, dass λ genau dann im Spektrum von T liegt, wenn λ^{-1} ein Spektralwert von T^{-1} ist.*

Satz 4.2.6 (Kompaktheit des Spektrums) *Die Resolventenmenge $\rho(T)$ ist offen, und der Spektralradius von T ist höchstens gleich $\|T\|$. Wenn $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist, dann ist das Spektrum nicht leer, also $r(T) \geq 0$, und es gibt $\lambda \in \sigma(T)$ mit $|\lambda| = r(T)$.*

Beweis: Aus Lemma 2.2.6 folgt dass $\lambda - T = \lambda\, (I - \lambda^{-1}\, T)$ invertierbar ist, sobald $|\lambda| > \|T\|$ ist, und wir erhalten für die Resolvente die Darstellung

$$R(\lambda, T) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1}\, T^n\,, \tag{4.2.1}$$

wobei die Reihe in der Norm auf $\mathcal{L}(\mathbb{X})$ konvergiert. Daher ist $r(T) \leq \|T\|$. Ist $\lambda_0 \in \rho(T)$, so rechnet man nach, dass $\lambda - T = (\lambda_0 - T)\,(I - (\lambda_0 - \lambda) R(\lambda_0, T))$ ist, und deshalb ist $\lambda - T$ nach demselben Lemma invertierbar, sofern nur $|\lambda - \lambda_0| < \|R(\lambda_0, T)\|^{-1}$ ist, und es gilt

$$R(\lambda, T) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n\; R(\lambda_0, T)^{n+1} \tag{4.2.2}$$

für diese λ. Das zeigt, dass die Resolventenmenge offen, also ihr Komplement $\sigma(T)$ abgeschlossen, d. h. sogar kompakt ist. Sei jetzt $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Für alle $f \in \mathbb{X}'$ und $x \in \mathbb{X}$ folgt aus (4.2.2), dass $h(\lambda) = f(R(\lambda, T)\, x)$ eine holomorphe Funktion in jedem Punkt der Resolventenmenge ist, und wegen (4.2.1) geht diese Funktion für $\lambda \to \infty$ gegen 0. Falls also $\rho(T) = \mathbb{C}$ wäre, so würde aus dem Satz von Liouville folgen, dass h für jedes $f \in \mathbb{X}'$ die Nullfunktion wäre. Daraus würde sich $R(\lambda, T) \equiv 0$ ergeben, was aber (4.2.1) widerspricht. Also ist $\sigma(T) \neq \emptyset$. Nach Definition von $r(T)$ gibt es eine Folge (λ_n) aus $\sigma(T)$, für welche $|\lambda_n|$ gegen $r(T)$ konvergiert. Diese enthält aber eine konvergente Teilfolge, und deren Grenzwert ist wegen der Abgeschlossenheit von $\sigma(T)$ selber ein Spektralwert. □

Aufgabe 4.2.7 (Vorgeschriebenes Spektrum) *Sei (t_n) eine beschränkte Folge aus $\mathbb{K}$, und sei für $x = (x_n) \in \ell_p$ definiert $T\,x = (t_n\,x_n)$. Zeige dass $T \in \mathcal{L}(\ell_p)$ ist, und bestimme das Spektrum von T. Benutze dies, um zu zeigen, dass es zu jeder kompakten Menge $\sigma \subset \mathbb{K}$ ein $T \in \mathcal{L}(\ell_p)$ gibt, welches gerade das Spektrum σ hat.*

Satz 4.2.8 (Spektralradiusformel) *Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt für den Spektralradius $r(T)$ die Formel*

$$r(T) \;=\; \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} \;=\; \inf_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n}\,.$$

Insbesondere existiert also immer der Grenzwert der Folge $(\|T^n\|^{1/n})$.

Beweis: Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ so, dass $|\lambda| > \inf_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n}$. Dann existiert also ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $\|T^m\| < |\lambda|^m$ ist. Daraus folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|T^n\|}{|\lambda|^{n+1}} \;\le\; \sum_{r=0}^{m-1} \frac{\|T^r\|}{|\lambda|^{r+1}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\|T^m\|^\nu}{|\lambda|^{m\nu}} \quad < \; \infty\,.$$

Das bedeutet, dass die Reihe (4.2.1) für solche λ absolut konvergiert, und daher ist $\lambda \in \rho(T)$. Also ist $r(T) \le \inf \|T^n\|^{1/n}$. Seien jetzt $f \in \mathbb{X}'$ und $x \in \mathbb{X}$, und sei $h(\lambda) = f((\lambda - T)\,x)$ für $\lambda \in \rho(T)$. Dann folgt aus (4.2.2), dass h holomorph im Kreisring $r(T) < |\lambda| < \infty$ ist, und deshalb lässt sich h dort in eine Laurentreihe entwickeln. Wegen (4.2.1) bzw. dem Identitätssatz für Laurentreihen folgt also

$$h(\lambda) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1}\; f(T^n\,x) \qquad \forall\; |\lambda| > r(T)\,.$$

Das notwendige Kriterium für die Konvergenz einer Reihe impliziert, dass die Folge $(\lambda^{-n}\,T^n\,x)$ schwach gegen Null konvergiert. Nach Satz 3.6.2 ist sie dann beschränkt. Also ist die Folge $(\lambda^{-n}\,T^n)$ auf $\mathbb{X}$ punktweise beschränkt, woraus aber nach Satz 2.5.6 die gleichmäßige Beschränktheit folgt. Dies heißt, dass ein $c > 0$ existiert, für welches $\|T^n\| \le c\,|\lambda|^n$ für alle $n \ge 1$ ist. Also ist $\limsup_n \|T^n\|^{1/n} \le |\lambda|$, und weil $|\lambda|$ beliebig dicht an $r(T)$ sein kann, folgt sogar $\limsup_n \|T^n\|^{1/n} \le r(T)$. Insgesamt gilt also

$$r(T) \;\le\; \inf_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n} \;\le\; \liminf_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} \;\le\; \limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} \;\le\; r(T)\,,$$

woraus die Behauptung folgt. □

Aufgabe 4.2.9 *Zeige dass für Volterrasche Integraloperatoren* (2.1.3) *immer $r(T) \le 0$ gilt. Vergleiche auch mit* Aufgabe 4.3.4.

Aufgabe 4.2.10 *Zeige, analog wie im Beweis des letzten Satzes, jedoch unter Benutzung von* (4.2.2), *dass folgendes gilt:*

$$\forall\; \lambda \in \rho(T)\;: \qquad d(\lambda, \sigma(T)) \;=\; \lim_{n\to\infty} \|R(\lambda, T)^n\|^{-1/n} \;=\; \sup_{n\in\mathbb{N}} \|R(\lambda, T)^n\|^{-1/n}\,. \tag{4.2.3}$$

Schließe hieraus: Ist (λ_n) eine Folge aus $\rho(T)$, welche gegen λ_0 konvergiert, und für welche die Folge $(R(\lambda_n, T))$ beschränkt ist, dann ist auch $\lambda_0 \in \rho(T)$.

Bemerkung 4.2.11 *Aus der Formel für den Spektralradius folgt, dass die Reihe* (4.2.1) *außerhalb des größten Kreises konvergiert, in dem das Spektrum von T enthalten ist. Genauso zeigt die letzte Aufgabe die Konvergenz von* (4.2.2) *in der größten Kreisscheibe um λ_0, welche ganz zu $\rho(T)$ gehört. Wir sehen also, dass sich diese Reihen, die allerdings im Wesentlichen nichts anderes als geometrische Reihen in $\mathcal{L}(\mathbb{X})$ sind, so verhalten, wie es die Potenzreihen holomorpher Funktionen tun. Tatsächlich gibt es eine gut entwickelte Theorie holomorpher Funktionen mit Werten in Banachräumen, die aber hier nicht besprochen werden soll.*

Aufgabe 4.2.12 *Zeige folgende* Resolventenformel: *Für $\lambda_1, \lambda_2 \in \rho(T)$ gilt immer*

$$R(\lambda_1, T) \; - \; R(\lambda_2, T) \; = \; -(\lambda_1 \; - \; \lambda_2) \; R(\lambda_1, T) \; R(\lambda_2, T) \,. \tag{4.2.4}$$

Anleitung: *Beachte $(\lambda_1 - T)\,(\lambda_2 - T) = (\lambda_2 - T)\,(\lambda_1 - T)$ und die Definition der Resolvente.*

Definition 4.2.13 *Wir nennen $\lambda \in \mathbb{K}$* einen Eigenwert von T, *wenn ein $x \in \mathbb{X} \setminus \{0\}$ existiert, für welches $T\,x = \lambda\,x$ ist. In anderen Worten ist λ genau dann ein Eigenwert von T, wenn $\lambda - T$ nicht injektiv ist. In diesem Fall heißt* Kern $(\lambda - T)$ *auch* zugehöriger Eigenraum von T, *und jedes $x \in$* Kern $(\lambda - T) \setminus \{0\}$ *heißt* ein Eigenvektor *von T zum Eigenwert λ. Die Menge aller Eigenwerte heißt auch* Punktspektrum *von T und wird mit σ_p abgekürzt.*

Aufgabe 4.2.14 (Spektrum des Rechtsshifts) *Sei der Rechtsshift T in ℓ_p wie früher definiert. Finde dessen Spektrum. Welche der Spektralwerte des Rechtsshifts sind Eigenwerte? Wie ist es beim Linksshift?*

4.3 Kompakte Operatoren und Operatoren von endlichem Rang

Im Folgenden sei $\mathbb{X}$ immer ein Banachraume, und $\mathbb{H}$ bezeichne einen beliebigen Hilbertraum.

Definition 4.3.1 *Wie in der linearen Algebra nennen wir für $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$ die Zahl* $\dim T(\mathbb{X}) = \dim \operatorname{Bild} T$ *auch* den Rang *von T. Falls diese Zahl endlich ist, heißt T ein* Operator von endlichem Rang. *Falls hingegen $T(B_{\mathbb{X}})$ präkompakt ist, nennen wir T einen* kompakten Operator. *Dies ist gleichbedeutend damit, dass $\overline{T(B_{\mathbb{X}})}$ kompakt ist. Die Menge der kompakten Operatoren bezeichnen wir mit $\mathcal{K}(\mathbb{X})$.*

Beispiel 4.3.2 *Ist k stetig auf $[a, b]^2$, $a < b$, so haben wir den Operator T, definiert durch*

$$(T\,f)(s) \;=\; \int_a^b \; k(s,t)\, f(t)\, dt\,, \quad a \le s \le b\,, \tag{4.3.1}$$

einen Fredholmschen Integraloperator genannt. Ist jetzt $H = T(B_{\mathbb{X}})$, für $\mathbb{X} = C[a, b]$, so sieht man leicht, dass H gleichmäßig beschränkt, also erst recht punktweise beschränkt ist. Da k auf $[a, b]^2$ gleichmäßig stetig ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für $s, s_0, t \in [a, b]$ mit $|s - s_0| < \delta$ gilt $|k(s, t) - k(s_0, t)| < \varepsilon$. Daraus folgt für $h = T\,f \in H$ dass $|h(s) - h(s_0)| < \varepsilon\,(b - a)$ ist. Das bedeutet, dass H gleichgradig stetig ist. Daher folgt aus dem Satz von Arzela-Ascoli die Kompaktheit von $\overline{H}$, und deshalb ist ein Fredholmscher Integraloperator immer kompakt.

Aufgabe 4.3.3 *Zeige, dass der von einem Polynom p in zwei Variablen definierte Fredholmsche Integraloperator von endlichem Rang ist. Benutze den Weierstrassschen Approximationssatz in $C[a, b]^2$, zusammen mit dem nächsten Satz, um einen zweiten Beweis für die Kompaktheit eines beliebigen Fredholmschen Integraloperators zu geben.*

Aufgabe 4.3.4 *Zeige analog wie im obigen Beispiel die Kompaktheit aller Volterraschen Integraloperatoren* (2.1.3)*. Benutze dies und* Aufgabe 4.2.9*, um zu zeigen dass für jeden Volterraschen Integraloperator* T *immer* $\sigma(T) = \{0\}$ *ist.*

Aufgabe 4.3.5 *Sei* $K \in \mathcal{K}(\mathbb{X})$*, und sei* U *ein abgeschlossener Teilraum von* $\mathbb{X}$*. Zeige die Kompaktheit der Restriktion von* K *auf* U*.*

Satz 4.3.6 (Eigenschaften kompakter Operatoren)

(a) *Wenn* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$ *von endlichem Rang ist, dann ist* $T \in \mathcal{K}(\mathbb{X})$*.*

(b) $\mathcal{K}(\mathbb{X})$ *ist ein abgeschlossener Unterraum von* $\mathcal{L}(\mathbb{X})$*.*

(c) *Aus* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$ *und* $K \in \mathcal{K}(\mathbb{X})$ *folgen* $K \circ T \in \mathcal{K}(\mathbb{X})$ *und* $T \circ K \in \mathcal{K}(\mathbb{X})$*.*

(d) *Ist* $\mathbb{H}$ *ein Hilbertraum, und ist* $K \in \mathcal{K}(\mathbb{H})$*, so ist auch* $K^* \in \mathcal{K}(\mathbb{H})$*.*

Beweis: Aussage (a) ist klar, da das Bild der Einheitskugel $B_{\mathbb{X}}$ eine beschränkte Menge in einem endlichdimensionalen Raum ist, und da nach Satz 2.3.1 die abgeschlossene Hülle von $\overline{T(B_{\mathbb{X}})}$ kompakt ist. Die Unterraumeigenschaft von $\mathcal{K}(\mathbb{X})$ folgt leicht mit der Definition. Sei jetzt $T \in \overline{\mathcal{K}(\mathbb{X})}$, und sei zu $\varepsilon > 0$ ein $S \in \mathcal{K}(\mathbb{X})$ so gewählt, dass $\|T - S\| < \varepsilon$ ist. Dann wird $S(B_{\mathbb{X}})$ von endlich vielen ε- Kugeln überdeckt, und mit der Dreiecksungleichung folgt leicht, dass dann $T(B_{\mathbb{X}})$ von den Kugeln mit gleichen Mittelpunkten, aber dem doppelten Radius $2\,\varepsilon$ überdeckt wird. Daraus folgt aber $T \in \mathcal{K}(\mathbb{X})$, und daher gilt (b). Da ein beschränkter Operator immer Kugeln um 0 in Kugeln um 0 abbildet, folgt (c) leicht mit der Definition. Um den letzten Punkt zu zeigen, beachten wir, dass $M := \overline{K(B_{\mathbb{H}})}$ ein kompakter metrischer Raum ist. Für $y \in \overline{B}_{\mathbb{H}}$ ist durch $f_y(x) = \langle y, x\rangle$ eine stetige Funktion f_y auf M gegeben. Die Menge aller dieser Funktionen ist (im Raum $C(M)$) punktweise beschränkt und gleichgradig stetig, und daher folgt mit dem Satz von Arzela-Ascoli ihre Kompaktheit. Also gibt es zu jeder Folge (y_n) aus $\overline{B}_{\mathbb{H}}$ eine Teilfolge (x_n), für welche die Funktionen f_{x_n} auf M gleichmäßig konvergieren. Daher folgt für jedes $\varepsilon > 0$ die Existenz von N, so dass für alle $n, m \geq N$ gilt

$$|\langle x_n, K\,x\rangle \;-\; \langle x_m, K\,x\rangle| \;\leq \varepsilon \qquad \forall\, x \in B_{\mathbb{H}}\,.$$

Die linke Seite dieser Ungleichung ist aber gleich $\langle K^*(x_n - x_m), x\rangle$, und durch Supremumsbildung über $x \in B_{\mathbb{H}}$ folgt daraus $\|K^*(x_n - x_m)\| \leq \varepsilon$. Daher ist $(K^*\,x_n)$ eine Cauchy-Folge, also konvergent. Damit ist $\overline{K^*(B_{\mathbb{H}})}$ (folgen-)kompakt, also $K^* \in \mathcal{K}(\mathbb{X})$. □

Aufgabe 4.3.7 *Zeige: Wenn* $\mathbb{X}$ *ein unendlichdimensionaler Banachraum ist, dann ist für jedes* $T \in \mathcal{K}(\mathbb{X})$ *immer* $0 \in \sigma(T)$*.*

Aufgabe 4.3.8 (Spektrum eines Operators von endlichem Rang) *Sei* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$ *ein Operator von endlichem Rang, und sei* $(x_1, \ldots, x_n)$ *eine Basis von* Bild T*. Für* $b \in \mathbb{X}$ *und* $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ *seien*

$$T\,b \;=\; \sum_{j=1}^{n} \beta_j\,x_j\,, \qquad T\,x_k \;=\; \sum_{j=1}^{n} a_{jk}\,x_j\,.$$

Zeige: Genau dann gilt für ein $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ *die Gleichung* $(\lambda - T)\,x = b$*, wenn* $x = \lambda^{-1}\,(b + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\,x_j)$ *ist, mit*

$$\lambda\,\alpha_j \;=\; \beta_j \;+\; \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\,\alpha_k \qquad \forall\; j = 1, \ldots, n\,.$$

Benutze dies um zu schließen, dass alle Spektralwerte $\lambda \neq 0$ *von* T *Eigenwerte sind, und dass man alle diese Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren berechnen kann, falls die Matrix* $A = [a_{jk}]$ *bekannt ist. Untersuche, inwieweit dies auch für* $\lambda = 0$ *gilt.*

4.4 Spektraltheorie kompakter Operatoren im Hilbertraum

Im Folgenden sei $\mathbb{H}$ immer ein Hilbertraum, und $K \in \mathcal{K}(\mathbb{H})$ ein kompakter Operator. Wir wollen nun das Spektrum von K untersuchen, was nach Definition darauf hinausläuft festzustellen, für welche $\lambda \in \mathbb{K}$ die Abbildung $\lambda - K$ invertierbar ist. Nach Aufgabe 4.3.7 ist dies in dem wichtigsten Fall eines unendlichdimensionalen Raumes $\mathbb{H}$ nicht so, falls $\lambda = 0$ ist, und deshalb können wir vom Gegenteil ausgehen. Es ist aber $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$ genau dann, wenn $I - \lambda^{-1} K$ invertierbar ist, und da $\lambda^{-1} K \in \mathcal{K}(\mathbb{H})$ ist, werden wir zunächst den Spezialfall $\lambda = 1$ betrachten.

Aufgabe 4.4.1 *Für $K \in \mathcal{K}(\mathbb{H})$ und $T = I - K$, zeige $T^n = I - K_n$ mit $K_n \in \mathcal{K}(\mathbb{H})$, für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Lemma 4.4.2 *Für $K \in \mathcal{K}(\mathbb{H})$ sei $T = I - K$ gesetzt. Dann ist* $\operatorname{Kern} T$ *endlichdimensional und* $\operatorname{Bild} T$ *abgeschlossen.*

Beweis: $\operatorname{Kern} T$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $\mathbb{H}$, also selber ein Hilbertraum, und die Restriktion von K auf $\operatorname{Kern} T$ ist die identische Abbildung. Diese ist aber nur dann kompakt, wenn $\operatorname{Kern} T$ endlichdimensional ist. Ein endlichdimensionaler Unterraum ist aber immer projizierbar, und daher gibt es einen abgeschlossenen Teilraum $U \subset \mathbb{H}$ so, dass $\mathbb{H} = \operatorname{Kern} T \oplus U$ ist. Die Restriktion von T auf U ist dann injektiv und hat dasselbe Bild wie T. Sei jetzt y Grenzwert einer Folge (y_n) aus $\operatorname{Bild} T$. Dann gibt es also eine (eindeutig bestimmte) Folge (x_n) aus U mit $T\,x_n = x_n - K\,x_n = y_n$ für alle $n \geq 1$. Falls (x_n) nicht beschränkt wäre, könnten wir durch Übergang zu einer Teilfolge (die wir der Einfachheit halber wieder mit (x_n) bezeichnen) erreichen, dass $\|x_n\| \to \infty$ gelten würde. Für die normierten Vektoren $u_n = \|x_n\|^{-1}\,x_n$ würde dann $u_n - K\,u_n \to 0$ für $n \to \infty$ gelten. Nach erneutem Übergang zu einer Teilfolge dürften wir wegen der Kompaktheit von K annehmen dass $u = \lim K\,u_n$ existiert, und dann würde aber $u = \lim u_n$ gelten, woraus $\|u\| = 1$ und $T\,u = 0$ folgen. Wegen der Abgeschlossenheit von U und der Tatsache dass $u_n \in U$ gilt, wäre $u \in U$ im Widerspruch zur Wahl von U. Also haben wir gezeigt, dass die Folge (x_n) beschränkt sein muss. Dann können wir wegen der Kompaktheit von K davon ausgehen, dass $(K\,x_n)$ konvergiert, denn sonst könnten wir erneut zu einer Teilfolge übergehen. Da aber $x_n - K\,x_n \to y$ gilt, muss dann auch (x_n) selber konvergieren, etwa gegen $x \in U$. Daraus folgt aber $y = T\,x$, also $y \in \operatorname{Bild} T$, was zu zeigen war. □

Der nächste Satz ist zwar für einen endlichdimensionalen Raum $\mathbb{H}$ und ein beliebiges $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$ immer trivial erfüllt, gilt aber überraschenderweise auch für allgemeines $\mathbb{H}$, wenn nur T von der im letzten Lemma betrachteten Form ist.

Satz 4.4.3 (Fredholmscher Alternativsatz) *Für $K \in \mathcal{K}(\mathbb{H})$ und $T = I - K$ ist T genau dann injektiv, wenn es surjektiv ist.*

Beweis: Sei angenommen, dass T injektiv, aber nicht surjektiv ist. Sei $\mathbb{H}_n = \operatorname{Bild} T^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Aus Aufgabe 4.4.1 und Lemma 4.4.2 folgt, dass alle $\mathbb{H}_n$ abgeschlossene Unterräume von $\mathbb{H}$ sind. Für $y \in \mathbb{H}_{n+1}$ folgt die Existenz von $x \in \mathbb{H}$ mit $y = T^{n+1}\,x = T^n(T\,x)$, und daher ist $y \in \mathbb{H}_n$. Da T nach Annahme nicht surjektiv ist, gibt es ein $x \in \mathbb{H}$ mit $x \neq T\,y$ für alle $y \in \mathbb{H}$, und wegen der Injektivität von T folgt dann auch $T^n\,x \neq T^{n+1}\,y$, und deshalb ist $x \in \mathbb{H}_n \setminus \mathbb{H}_{n+1}$. Also ist jedes $\mathbb{H}_{n+1}$ eine echte Teilmenge von $\mathbb{H}_n$, und somit gibt es nach Lemma 4.4.2 Einheitsvektoren $x_n = T^n\,y_n \in \mathbb{H}_n$ mit $d(x_n, \mathbb{H}_{n+1}) \geq 1/2$. Für $m > n \geq 1$ folgt dann $K\,x_m + T\,x_n \in \mathbb{H}_{n+1}$, und deshalb ist $\|K\,x_m - K\,x_n\| = \|K\,x_m + T\,x_n - x_n\| \geq 1/2$. Daher kann die Folge $(K\,x_n)$ keine konvergente Teilfolge besitzen, was der Kompaktheit von K widerspricht. Also folgt aus der Injektivität von T die Surjektivität. Für den Beweis der Umkehrung sei also jetzt T surjektiv. Nach Satz 3.4.5 ist dann der adjungierte Operator $T^* = I - K^*$ injektiv, und nach Satz 4.3.6 ist K^* ebenfalls kompakt. Nach dem bereits bewiesenen Teil ist also dann T^* sogar bijektiv, woraus mit Satz 3.4.5 die Bijektivität von T folgt. □

Man kann den Alternativsatz auch so formulieren, dass es entweder für gegebenes $b \in \mathbb{H}$ immer eine Lösung x der Gleichung $x = K\,x + b$ gibt (und diese ist dann sogar eindeutig bestimmt), oder dass die homogene Gleichung $x = K\,x$ nichttriviale Lösungen hat. In dieser Formulierung wird der Name des letzten Satzes besser verständlich.

Wir haben in Aufgabe 4.3.7 bereits festgestellt, dass $\lambda = 0$ für jeden kompakten Operator in einem unendlichdimensionalen Banachraum immer ein Spektralwert ist. Der folgende Satz gibt weitere Information über das Spektrum:

Satz 4.4.4 (Spektrum eines kompakten Operators) *Sei $K \in \mathcal{K}(\mathbb{H})$. Dann ist jeder Spektralwert $\lambda \neq 0$ von K ein Eigenwert. Der Eigenraum zu einem Eigenwert $\lambda \neq 0$ ist immer endlichdimensional. Das Spektrum ist immer abzählbar, und wenn es unendlich viele verschiedene Spektralwerte λ_n gibt, dann gilt* $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

Beweis: Sei $\lambda \neq 0$ kein Eigenwert von K. Dann ist $I - \lambda^{-1}\,K = \lambda^{-1}\,(\lambda - K)$ nach dem Fredholmschen Alternativsatz invertierbar, und deshalb ist λ kein Spektralwert von K. Wenn $\lambda \neq 0$ dagegen ein Eigenwert ist, ist $\mathrm{Kern}\,(\lambda - K) = \mathrm{Kern}\,(I - \lambda^{-1}\,K)$, und daher folgt aus Lemma 4.4.2 dass $\dim \mathrm{Kern}\,(\lambda - K) < \infty$ ist. Für den Rest der Behauptung genügt es zu zeigen, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ höchstens endlich viele Eigenwerte von K mit $|\lambda| \geq \varepsilon$ geben kann. Sei das Gegenteil angenommen. Dann gibt es eine Folge (λ_n) von Eigenwerten vom Betrag $\geq \varepsilon$, die wir als paarweise verschieden annehmen können, und wegen der Kompaktheit des Spektrums können wir sogar voraussetzen, dass sie gegen einen Wert λ konvergieren (sonst können wir zu einer Teilfolge übergehen). Wir wählen zu jedem λ_n einen normierten Eigenvektor e_n, und wie in der Vorlesung Lineare Algebra bewiesen wurde, sind die e_n alle linear unabhängig. Sei $\mathbb{H}_n$ die lineare Hülle von $e_1, \ldots, e_n$. Nach dem letzten Lemma gibt es normierte Vektoren $x_n \in \mathbb{H}_n$ mit $d(x_n, \mathbb{H}_{n-1}) \geq 1/2$. Aus $x_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, e_j$ folgt $u_n := (K - \lambda_n)\, x_n = \sum_{j=1}^{n-1} (\lambda_j - \lambda_n)\, \alpha_j\, e_j \in \mathbb{H}_{n-1}$. Daher gilt für $2 \leq m < n$:

$$\|\lambda_n^{-1}\, K\, x_n \;-\; \lambda_m^{-1}\, K\, x_m\| \;= \|\lambda_n^{-1}\, u_n \;-\; \lambda_m^{-1}\, K\, x_m + x_n\| \;\geq\; 1/2$$

da ja auch $K\,x_m \in \mathbb{H}_{n-1}$ ist. Somit kann $(\lambda_n^{-1}\,K\,x_n)$ keine konvergente Teilfolge besitzen, und da (λ_n) gegen $\lambda \neq 0$ konvergiert, folgt dasselbe für $(K\,x_n)$, im Widerspruch zur Kompaktheit von K. □

Definition 4.4.5 *Nach dem letzten Satz ist der Eigenraum zu einem Eigenwert $\lambda \neq 0$ bei einem beliebigen kompakten Operator immer endlichdimensional, und wir nennen seine Dimension auch die* geometrische Vielfachheit *von λ.*

Bemerkung 4.4.6 *Die Resultate dieses Abschnitts gelten auch für kompakte Operatoren in Banachräumen; die Beweise benutzen aber teilweise Eigenschaften des dualen Operators, den wir nicht eingeführt haben.*

4.5 Selbstadjungierte Operatoren

Wenn nichts anderes gesagt wird, sei $\mathbb{H}$ im Folgenden immer ein Hilbertraum.

Definition 4.5.1 (Selbstadjungierte Operatoren) *Wir nennen ein $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$* selbstadjungiert *oder* hermitesch, *falls $T^* = T$ ist.*

Aufgabe 4.5.2 *Sei $A = [a_{jk}]$ die Darstellungsmatrix eines Operators $T \in \mathcal{L}(\ell_2)$. Zeige dass der adjungierte Operator T^* die Darstellungsmatrix $A^* := \overline{A}^T = [\,\overline{a_{kj}}\,]$ hat.*

Aufgabe 4.5.3 (Satz von Hellinger-Toeplitz) *Ist $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$ selbstadjungiert, so gilt per Definition die Gleichung*

$$\forall\, x, y \in \mathbb{H} \;:\qquad \langle T\,x, y\rangle = \langle x, T\,y\rangle\ . \tag{4.5.1}$$

Folgere aus Aufgabe 3.4.7*: Ist $T : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ eine beliebige lineare Abbildung, für welche* (4.5.1) *gilt, dann ergibt sich aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen bereits die Stetigkeit von T.*

Lemma 4.5.4 *Für jedes $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$ ist $T^*\,T$ selbstadjungiert, und $\|T^*\,T\| = \|T\|^2$.*

Beweis: Für $x, y \in \mathbb{H}$ ist $\langle T^*\,T\,y, x\rangle \;=\; \langle T\,y, T\,x\rangle = \langle y, T^*\,T\,x\rangle$, und deshalb ist $T^*\,T$ selbstadjungiert. Es ist weiter $\|T^*\,T\| \le \|T^*\|\,\|T\| = \|T\|^2$, weil ja $\|T^*\| = \|T\|$ gilt. Außerdem ist

$$\|T^*\,T\| \;=\; \sup_{x,y\in B_{\mathbb{H}}} |\langle T^*\,T\,x, y\rangle| \;=\; \sup_{x,y\in B_{\mathbb{H}}} |\langle T\,x, T\,y\rangle| \;\ge\; \sup_{x\in B_{\mathbb{H}}} |\langle T\,x, T\,x\rangle| \;=\; \|T\|^2\,,$$

woraus $\|T^*\,T\| = \|T\|^2$ folgt. □

Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass hermitesche Matrizen reelle Eigenwerte haben, und dass Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten immer orthogonal sind. Der folgende Satz ist eine direkte Verallgemeinerung dieser Tatsache:

Satz 4.5.5 *Alle Eigenwerte eines selbstadjungierten Operators $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$ sind reell, und Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal. Weiter ist der Spektralradius $r(T)$ eines selbstadjungierten Operators immer gleich $\|T\|$.*

Beweis: Genau wie in der linearen Algebra zeigt man: Ist $x \in \mathbb{H}\setminus\{0\}$, so folgt aus $T\,x = \lambda\,x$ sowie der Gleichung (4.5.1) dass $\langle \lambda\,x, x\rangle = \langle x, \lambda\,x\rangle$ ist, und daher gilt $\overline{\lambda}\,\|x\|^2 = \lambda\,\|x\|^2$, woraus $\lambda \in \mathbb{R}$ folgt. Sind jetzt λ, μ zwei verschiedene reelle Zahlen, und gilt $T\,x = \lambda\,x$, $T\,y = \mu\,y$ für $x, y \in \mathbb{H}\setminus\{0\}$, so folgt

$$(\lambda - \mu)\,\langle x, y\rangle \;=\; \langle \lambda\,x, y\rangle \;-\; \langle x, \mu\,y\rangle \;=\; \langle T\,x, y\rangle \;-\; \langle x, T\,y\rangle \;=\; 0$$

und deshalb gilt $\langle x, y\rangle = 0$. Weiter folgt aus dem letzten Lemma dass $\|T^2\| = \|T\|^2$ ist, und mit Aufgabe 3.4.4 folgt dann $\|T^{2n}\| = \|T\|^{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt aber $r(T) = \|T\|$ wegen der Spektralradiusformel. □

Bemerkung 4.5.6 *Im letzten Satz haben wir nur gezeigt, dass alle Eigenwerte eines selbstadjungierten Operators reell sind. Tatsächlich ist aber sein ganzes Spektrum reell, denn es gilt folgendes Resultat: Wenn $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$ selbstadjungiert ist, dann ist*

$$\sigma(T) \;\subset\; W(T) \;\subset\; \mathbb{R}\,, \quad \text{mit} \quad W(T) \;=\; \overline{\{\,\langle T\,x, x\rangle \;:\; x \in \mathbb{H}\,,\ \|x\| = 1\,\}}\,. \tag{4.5.2}$$

Beweis: *Aus* (4.5.1) *und den Eigenschaften des Skalarproduktes folgt sofort, dass $\langle T\,x, x\rangle \in \mathbb{R}$ ist für alle $x \in \mathbb{H}$, so dass die rechte Inklusion klar ist. Sei jetzt $\lambda \in \mathbb{C}$ so, dass $d := d(\lambda, W(T)) > 0$. Dann folgt für alle $x \in \mathbb{H}$ mit $\|x\| = 1$ dass*

$$d \;\le |\lambda - \langle T\,x, x\rangle| \;=\; |\langle(\lambda - T)\,x, x\rangle| \;\le\; \|(\lambda - T)\,x\|\,.$$

Also muss $\lambda - T$ injektiv sein. Ist $U = \mathrm{Bild}\,(\lambda - T)$, so folgt aus derselben Ungleichung dass $(\lambda - T)^{-1} : U \to \mathbb{H}$ beschränkt ist, und deshalb ist U ein abgeschlossener Unterraum von $\mathbb{H}$. Falls $U \ne \mathbb{H}$ wäre, dann gäbe es ein $x_0 \in U^\perp$ mit $\|x_0\| = 1$, und

$$0 \;=\; |\langle(\lambda - T)\,x_0, x_0\rangle| \;=\; |\lambda - \langle T\,x_0, x_0\rangle| \;\ge\; d\,,$$

was ein Widerspruch zu $d > 0$ ist. Also muss $U = \mathbb{H}$ sein, und das heißt dass $\lambda \in \rho(T)$ ist. □

Bemerkung 4.5.7 *Wenn $K \in \mathcal{L}(\mathbb{H}) \setminus \{0\}$ gleichzeitig selbstadjungiert und kompakt ist, dann ist das Spektrum von K nach* Satz 4.4.4 *eine abzählbare, evtl. sogar endliche Teilmenge der reellen Zahlen, und alle $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$ sind Eigenwerte. Weil $r(T) = \|T\| > 0$ ist, ist die Menge dieser Eigenwerte nicht leer. Außerdem ist der Eigenraum zu jedem solchen λ endlichdimensional. Wir können dann zu jedem von Null verschiedenen Eigenwert von K eine Orthonormalbasis des Eigenraumes wählen,und da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten immer orthogonal sind, erhalten wir insgesamt ein abzählbares Orthonormalsystem von Eigenvektoren $(e_n)_{n\in J}$, wobei entweder $J = \mathbb{N}$ oder $J = 1, \ldots, m$ ist, mit einem $m \in \mathbb{N}$. Dabei können wir die Indizierung der e_n bzw. der Eigenwerte von K so vornehmen, dass $K\, e_n = \lambda_n\, e_n$ für alle $n \in J$ gilt, und dass die Beträge der λ_n monoton fallen; beachte aber, dass dabei die λ_n nicht unbedingt alle verschieden sind. Falls $J = \mathbb{N}$ ist, folgt aus* Satz 4.4.4 *dass die Folge (λ_n) eine Nullfolge ist. Wir wollen im Folgenden das System $(e_n, \lambda_n)_{n\in J}$ als das zu K gehörige Orthonormalsystem von Eigenvektoren und Eigenwerten bezeichnen. Beachte aber, dass auch $\lambda = 0$ ein Eigenwert von K sein kann, bzw. sogar sein muss, falls $\mathbb{H}$ unendlichdimensional ist, und dass es in diesem Fall sogar unendlich viele linear unabhängige Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 0$ gibt, welche in dem zu K gehörigen System nicht vorkommen.*

Satz 4.5.8 (Entwicklung von selbstadjungierten kompakten Operatoren) *Sei $\mathbb{H}$ ein beliebiger Hilbertraum, sei $K \in \mathcal{L}(\mathbb{H}) \setminus \{0\}$ kompakt und selbstadjungiert, und sei $(e_n, \lambda_n)_{n\in J}$ das zugehörige Orthonormalsystem von Eigenvektoren und Eigenwerten. Dann gilt*

$$\forall\, x \in \mathbb{H}: \qquad K\, x \;=\; \sum_{n\in J} \lambda_n\, \langle x, e_n\rangle\; e_n\,. \tag{4.5.3}$$

Weiter ist $\operatorname{Kern} K = \{e_n \;:\; n \in J\}^\perp$, *und $\lambda = 0$ ist genau dann ein Eigenwert von K, wenn $(e_n)_{n\in J}$ kein vollständiges Orthonormalsystem ist.*

Beweis: Sei $U = \overline{\operatorname{span}\{e_n\}}$. Dann ist U selber ein Hilbertraum, und (e_n) ist ein vollständiges Orthonormalsystem in U. Deshalb gilt für alle $u \in U$ nach Satz 3.8.7 die Darstellung $u = \sum_n \langle u, e_n\rangle\, e_n$. Daraus folgt aber $K\, u = \sum_n \langle u, e_n\rangle\, K\, e_n = \sum_n \lambda_n\, \langle u, e_n\rangle\, e_n \in U$. Jedes $x \in \mathbb{H}$ lässt sich nach Satz 3.3.4 schreiben als $x = u + v$ mit eindeutig bestimmten $u \in U$ und $v \in U^\perp$, und $\langle x, e_n\rangle = \langle u, e_n\rangle$ für alle $n \in J$. Weil $\langle u, K\, v\rangle = \langle K\, u, v\rangle = 0$ ist, da ja $K\, u \in U$ ist, folgt dass $K\, v \in U^\perp$ ist für alle $v \in U^\perp$. Deshalb ist die Restriktion K_1 von K auf $U^\perp$ ein selbstadjungierter Operator, für den $\sigma(K_1) = \{0\}$ ist, denn sonst hätte K noch einen weiteren Eigenwert, der nicht zur Folge (λ_n) gehören würde. Daraus folgt aber $\|K_1\| = r(K_1) = 0$, also $K_1 = 0$. Daher gilt $K\, v = 0$ für alle $v \in U^\perp$. Also ist

$$K\, x \;=\; K\, u \;=\; \sum_{n\in J} \langle x, e_n\rangle\, K\, e_n\,,$$

und deshalb gilt (4.5.3). □

Bemerkung 4.5.9 *Wenn der Hilbertraum $\mathbb{H}$ separabel ist, kann man das System der Eigenvektoren des Operators K durch Hinzunahme von Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 0$ zu einem vollständigen Orthonormalsystem ergänzen, und man erkennt dann, dass der letzte Satz genau dem Satz über die Hauptachsentransformation aus der* Linearen Algebra *entspricht.*

4.6 Unitäre und normale Operatoren

Definition 4.6.1 *Sei $\mathbb{H}$ ein Hilbertraum. Ein Operator $U \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$ heißt* unitär, *wenn $U\, U^* = U^*\, U = I$ gilt. In anderen Worten heißt das, dass ein unitärer Operator immer invertierbar ist, und dass sein Inverses gleich dem adjungierten Operator ist. Ein Operator $N \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$ heißt* normal, *wenn er mit seinem adjungierten Operator kommutiert, also wenn gilt $N\, N^* = N^*\, N$.*

Aufgabe 4.6.2 *Zeige, dass ein Operator $U \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$ genau dann unitär ist, wenn er surjektiv und isometrisch ist. Benutze zum Beweis der einen Richtung die* Aufgabe 3.2.2. *Zeige weiter am Beispiel des Rechtsshifts, dass ein Operator isometrisch sein kann, ohne surjektiv zu sein.*

Ein unitärer Operator ist nur dann kompakt, wenn der zugrundeliegende Raum $\mathbb{H}$ endliche Dimension hat. Deshalb können wir mit den bisher entwickelten Methoden nur relativ wenig zu seinem Spektrum sagen:

Satz 4.6.3 (Spektrum eines unitären Operators) *Sei $\mathbb{H}$ ein Hilbertraum, und sei $U \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$ unitär. Dann ist $\sigma(U)$ eine Teilmenge des Einheitskreises.*

Beweis: Da ein unitärer Operator isometrisch ist, folgt $\|U\| = 1$, und da auch $U^* = U^{-1}$ isometrisch ist, ist auch $\|U^*\| = 1$. Also folgt aus Satz 4.2.6 dass $\sigma(U)$ und $\sigma(U^*)$ Teilmengen der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe sind. Aus Aufgabe 4.2.5 folgt dann die Behauptung. □

Für normale kompakte Operatoren wollen wir ein Resultat beweisen, welches im Grunde vollkommen analog zu Satz 4.5.8 ist, mit dem Unterschied, dass die Eigenwerte eines normalen Operators nicht reell sein müssen. Wir beginnen mit einem Resultat für nicht notwendig kompakte normale Operatoren:

Satz 4.6.4 (Eigenwerte und Spektralradius eines normalen Operators) *Sei $\mathbb{H}$ ein Hilbertraum, und sei $N \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$ normal. Wenn $x \in \mathbb{H}$ ein Eigenvektor von N zum Eigenwert λ ist, dann ist dasselbe x auch Eigenvektor von N^*, aber zum Eigenwert $\overline{\lambda}$. Außerdem sind Eigenvektoren von N zu verschiedenen Eigenwerten immer orthogonal. Weiter gilt immer $r(N) = \|N\|$.*

Beweis: Sei $N\,x = \lambda\,x$, dann folgt durch eine einfache Rechnung

$$\|(N^* - \overline{\lambda})\,x\|^2 \;=\; \langle (N^* - \overline{\lambda})\,x, (N^* - \overline{\lambda})\,x\rangle \;=\; \langle x, N^*\,N\,x\rangle \;-\; \lambda\,\langle x, N\,x\rangle \;-\; \overline{\lambda}\,\langle N\,x, x\rangle \;+\; |\lambda|^2\,\|x\|^2 \;=\; 0\,,$$

so dass $N^*\,x = \overline{\lambda}\,x$ folgt. Wenn $N\,y = \mu\,y$ gilt, und wenn $\lambda \neq \mu$ ist, dann folgt durch eine ähnliche Rechnung, dass $|\lambda - \mu|^2\,\langle x, y\rangle = \langle(\lambda - \mu)\,x, (\lambda - \mu)\,y\rangle = 0$ ist, und deshalb sind x und y orthogonal. Weiter ist $\langle N^*\,x, N^*\,x\rangle = \langle N\,N^*\,x, x\rangle = \langle N^*\,N\,x, x\rangle = \langle N\,x, N\,x\rangle$, also $\|N^*\,x\| = \|N\,x\|$ für alle $x \in \mathbb{H}$. Daraus folgt $\|N\,x\|^2 = \langle N\,x, N\,x\rangle = \langle N^*\,N\,x, x\rangle \leq \|N^*\,N\,x\|\,\|x\| = \|N^2\,x\|\,\|x\| \leq \|N^2\|\,\|x\|^2$ für alle $x \in \mathbb{H}$, und das impliziert $\|N\|^2 \leq \|N^2\|$. Da die umgekehrte Ungleichung immer gilt, folgt sogar die Gleichheit, und deshalb folgt $r(N) = \|N\|$ genau wie im Beweis von Satz 4.5.5. □

Satz 4.6.5 (Entwicklung von normalen kompakten Operatoren) *Sei $\mathbb{H}$ ein Hilbertraum, und sei $K \in \mathcal{L}(\mathbb{H}) \setminus \{0\}$ kompakt. Genau dann ist K normal, wenn es ein endliches oder abzählbar unendliches Orthonormalsystem $(e_n)_{n\in J}$ sowie Zahlen $\lambda_n \neq 0$, $n \in J$, gibt, für die die Darstellung* (4.5.3) *gilt. Ist dies der Fall, dann jedes e_n Eigenvektor von K zum Eigenwert λ_n, und* $\operatorname{Kern} K = \{e_n \,:\, n \in J\}^\perp$. *Der adjungierte Operator K^* ist dann gegeben durch die Entwicklung*

$$\forall\, x \in \mathbb{H}: \qquad K^*\,x \;=\; \sum_{n\in J} \overline{\lambda_n}\,\langle x, e_n\rangle\; e_n\,. \tag{4.6.1}$$

Beweis: Sei zunächst K als normal angenommen. Dann können wir wegen Satz 4.6.4, genau wie im selbstadjungierten Fall, ein zu K gehöriges System $(e_n, \lambda_n)_{n\in J}$ von Eigenwerten $\lambda_n \neq 0$ und Eigenvektoren e_n wählen, wobei allerdings jetzt die Eigenwerte nicht unbedingt reell sein müssen. Sei $U = \overline{\operatorname{span}\{e_n\}}$. Dann zeigt man wie im Beweis von Satz 4.5.8, dass K die Räume U und $U^\perp$ in sich abbildet, so dass die Restriktion K_1 von K auf $U^\perp$ ein normaler Operator mit $\sigma(K_1) = \{0\}$ ist. Daraus folgt aber $\|K_1\| =$

$r(K_1) = 0$, also $K_1 = 0$. Daher gilt die eine Richtung der Behauptung. Zur Umkehrung sei (4.5.3) angenommen. Dann definieren wir einen Operator $\tilde{K}$ durch die Reihe in (4.6.1), welche offenbar für alle $x \in \mathbb{H}$ konvergiert. Dann folgt dass für alle $x, y \in \mathbb{H}$ gilt $\langle \tilde{K}\, x, y \rangle = \langle x, K\, y \rangle$, woraus $\tilde{K} = K^*$ folgt. Weiter folgt

$$K\,(K^*\,x) \;=\; \sum_{n \in J} |\lambda_n|^2 \;\langle x, e_n \rangle\; e_n \;=\; K^*\,(K\,x)\,,$$

und deshalb ist K normal. Durch Einsetzen von $x = e_m$ und Benutzen von $\langle e_m, e_n \rangle = \delta_{mn}$ folgt schließlich $K\, e_m = \lambda_m\, e_m$ für alle $m \in J$. □

Wenn man, wie allgemein üblich, die Darstellungsformel (4.5.3) als *unitäre Diagonalisierung von K* bezeichnet, so sagt der letzte Satz in etwa, dass ein kompakter Operator K genau dann unitär diagonalisierbar ist, wenn er normal ist. Dies entspricht genau einem Resultat aus der linearen Algebra.

Index

abgeschlossene
  Hülle, 8
  Mengen, 8
Abstand von Mengen, 13
adjungiert, 30
Äquivalenz von Normen, 16, 24
Arzela-Ascoli, 13
Auswertungsabbildung, 21
Axiome
  einer Metrik, 6
  einer Norm, 5
  einer Sesqilinearform, 38
  eines Skalarprodukts, 26

$B_{\mathbb{X}}, \overline{B}_{\mathbb{X}}$, 16
Baire, 14
Baire-Raum, 14
Banach-Steinhaus, 23
Banachraum, 15
Basis
  Orthogonal-, 32
Berührungspunkt, 8
beschränkt, 11, 22
  gleichmäßig, 22
  punktweise bzw. gleichmäßig, 13
  total, 11
Besselsche Ungleichung, 35
Bidual, 21

c, c_0, 15
$C[a, b]$, 6
$C(D)$, 15
Cauchyfolge, 10

$d(E, F), d(x, F)$, 13
Definitheit, 5, 6
dicht, 8
Dreiecksungleichung
  für Metriken, 6
  für Normen, 5
  nach unten, 7
Dualraum, 17
Durchmesser, 11

$\mathring{E}$, $\overline{E}$, 8
e_n, 18

Eigenraum, 43
Eigenvektor, 43
Eigenwert, 43
eindeutige Lösbarkeit, 39
Einheitskugel, 16
ε-Umgebung, 7
erster Art, 40
euklidische
  Norm, 6
euklidischer Raum, 26

$\mathcal{F}_\infty(D)$, 15
$\mathcal{F}_\infty(D, \mathbb{X})$, 15
Folgen
  -kompaktheit, 11
  -stetigkeit, 9
  Cauchy-, 10
Form
  Bilinear-, 38
  hermitesche, 38
  Sesqilinear-, 38
  zweistellige, 38
Fourierkoeffizienten, 36
Fourierreihe, 36
  allgemeine, 34
Fredholm, 45
Fredholmsche Integralgleichung, 40
Fredholmscher Integraloperator, 17
Funktionen von beschränkter Variation, 16

$G(T)$, 24
geometrische Vielfachheit, 46
gleichmäßige Beschränktheit, 13
Gram-Schmidtsches Orthog.-Verf., 33
Graph, 24
graphenabgeschlossen, 24
Grenzwert, 9

Häufungspunkt, 8
Heine-Borel-Eigenschaft, 13
Hellinger-Toeplitz, 47
hermitesch, 46
Hilbertraum, 28
  Prä-, 26
Homogenität, 5
Hülle (abgeschlossene), 8

I, 20
$I_{\mathbb{X}}$, 19
innerer Punkt, 8
inneres Produkt, 26
Integralgleichung
  Fredholmsche, 40
  Volterrasche, 40
invertierbar, 19
isolierter Punkt, 8
Isometrie, 19
Isomorphismus, 19

$K(x_0, \varepsilon)$, 7
Kern
  offener, 8
Kernfunktion, 17
Kodimension, 31
kompakt, 11
  folgen-, 11
  prä-, 11
komplementär, 31
Konvergenz, 9
  Norm-, 22, 32
  punktweise, 22
  schwache, 32
Kreisscheibe, 7
Kugel, 7

$\mathcal{L}(\mathbb{X})$, 17
$\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, 17
ℓ_∞, 15
ℓ_p, 10
Legendre-Polynome, 36
lineare Isometrie, 19
Linksshift, 18, 40
Lipschitz
  -konstante, 9
  -stetigkeit, 9
    lokale, 9
Lösbarkeit
  universelle, eindeutige, 39

Matrix
  Darstellungs-, 18
  inverse, 19
Mengen
  abgeschlossene, 8
  kompakte, 11
  offene, 7
Metrik, 6
  zur Norm gehörige, 6
metrischer Raum, 6
Minkowski, 6

Neumannsche Reihe, 20
Norm, 5
  p-, 6
  eines Operators, 17
  euklidische, 6
normal, 48
normbeschränkt, 22
normierter Raum, 6
normkonvergent, 22
Normkonvergenz, 32

offene Mengen, 7
offener Kern, 8
Operator
  adjungierter, 30
  beschränkter, 17
  Fredholmscher Integral-, 17
  hermitescher, 46
  invertierbarer, 19
  normaler, 48
  selbstadjungierter, 46
  unitärer, 48
  Volterrascher Integral-, 17
Operatornorm, 17
orthogonal, 28
Orthogonalbasis, 32
orthogonales Komplement, 28
Orthogonalisierung, 33
Orthogonalreihe, 34
  Normkonvergenz, 34
Orthogonalsystem, 32
  der trigonometrischen F., 36
  maximales, 35
  vollständiges, 35
  von Polynomen, 36
Orthonormalbasis, 32
Orthonormalsystem, 32

Parallellogrammgesetz, 27
Parsevalsche Gleichung, 35
p-Norm, 6
Positive Definitheit, 5, 6
Prä-Hilbertraum, 26
präkompakt, 11
Prinzip der gleichm. Beschränktheit, 23
Projektion, 31
Projektionssatz, 29
Punkt
  Berührungs-, 8
  Häufungs-, 8
  innerer, 8
  isolierter, 8
  Rand-, 8
Punktspektrum, 43
punktweise
  Beschränktheit, 13

Konvergenz, 22

$\rho(T)$, 41
$\mathrm{rd}\,(E)$, 8
Rand, 8
Randpunkt, 8
Raum
Baire-, 14
Banach-, 15
dualer, 17
euklidischer, 26
Hilbert-, 28
kompakter, 11
metrischer, 6
normierter, 6
Prä-Hilbert-, 26
reflexiv, 21
Regeln
für abgeschlossene Mengen, 8
Resolvente, 41
Resolventenmenge, 41
Riesz, 29

Satz
Fredholmscher Alternativ-, 45
Projektions-, 29
vom abgeschlossenen Graphen, 25
vom inversen Operator, 24
von Arzela-Ascoli, 13
von Baire, 14
von Banach-Steinhaus, 23
von der besten Approx., 33
von der gleichm. Beschränktheit, 23
von der offenen Abbildung, 24
von Hellinger-Toeplitz, 47
von Lax-Milgram, 38
von Riesz, 29
schwach konvergent, 32
selbstadjungiert, 46
semilinear, 26
separabel, 12
Sesquilinearform, 26, 38
Skalarprodukt, 26
$\mathrm{span}\, A$, 28
Spektralradius, 41
Spektrum, 41
Punkt-, 43
Stetigkeit, 9
Folgen-, 9
gleichmäßige, 9
Lipschitz-, 9
Submultiplikativität, 19
Symmetrie, 6
System
Orthogonal-, 32
Orthonormal-, 32

total beschränkt, 11
trigonometrisches System, 36

$U_\varepsilon(x_0)$, 7
$\mathcal{U}(x), \mathcal{U}_0(x)$, 7
Umgebung, 7
offene, 7
Ungleichung
Besselsche, 35
Dreiecks-, 5, 6
nach unten, 7
Minkowskische, 6
Vierecks-, 7
unitär, 48
universelle Lösbarkeit, 39
Unterraum, 7

Variation, 16
Vervollständigung, 21
Viereckungleichung, 7
Vollständigkeit, 10
Volterrasche Integralgleichung, 40
Volterrascher Integraloperator, 17

Zerlegung, 16
zweistellige Form, 26
zweiter Art, 40