Vorlesungsmanuskript zu

Funktionalanalysis

Werner Balser
Institut für Angewandte Analysis

Wintersemester 2008/09

Inhaltsverzeichnis

1 Metrische Räume **5**

1.1 Normierte und metrische Räume . . . 5

1.2 Topologie metrischer Räume . . . 7

1.3 Stetigkeit und Konvergenz . . . 9

1.4 Cauchyfolgen . . . 10

1.5 Vervollständigung metrischer Räume . . . 12

1.6 Der Banachsche Fixpunktsatz . . . 14

1.7 Kompaktheit . . . 15

1.8 Funktionenräume . . . 17

1.9 Gleichgradige Stetigkeit . . . 19

1.10 Der Satz von Arzela-Ascoli . . . 19

1.11 Der Bairesche Kategoriensatz . . . 20

2 Stetige lineare Abbildungen **23**

2.1 Elementare Eigenschaften . . . 24

2.2 Invertierbare Operatoren . . . 27

2.3 Fortsetzung dicht definierter Operatoren . . . 28

2.4 Endlichdimensionale Räume . . . 29

2.5 Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit und der Satz von Banach-Steinhaus . . . 30

2.6 Der Satz von der offenen Abbildung und der Graphensatz . . . 32

3 Der Fortsetzungssatz von Hahn-Banach und seine Folgen **35**

3.1 Das Zornsche Lemma . . . 35

3.2 Eine algebraische Version des Fortsetzungssatzes . . . 36

3.3 Die funktionalanalytische Version des Fortsetzungssatzes . . . 37
3.4 Dualräume konkreter Banachräume . . . 39
3.5 Der duale Operator . . . 41
3.6 Projektionen . . . 42
3.7 Quotientenräume . . . 43
3.8 Reflexive Räume . . . 44
3.9 Reflexivität konkreter Banachräume . . . 45
3.10 Schwache Konvergenz . . . 46

4 Spektraltheorie beschränkter Operatoren **48**
4.1 Einige Beispiele . . . 48
4.2 Spektrum und Resolvente . . . 50
4.3 Eigenwerte und approximative Eigenwerte . . . 52
4.4 Kompakte Operatoren und Operatoren von endlichem Rang . . . 53
4.5 Spektraltheorie kompakter Operatoren . . . 54

5 Hilberträume **57**
5.1 Prä-Hilberträume . . . 57
5.2 Die induzierte Norm eines Vektors . . . 58
5.3 Orthogonalität, orthogonale Projektion . . . 59
5.4 Orthogonalsysteme . . . 61
5.5 Orthogonalreihen . . . 62
5.6 Separable Hilberträume . . . 65
5.7 Selbstadjungierte Operatoren . . . 66
5.8 Unitäre und normale Operatoren . . . 68

6 Die Räume Lebesgue-integrierbarer Funktionen **71**
6.1 Maßräume und Maße . . . 71
6.2 Integrierbare Funktionen . . . 72
6.3 Die Konvergenzsätze . . . 73
6.4 Der Raum $L^\infty(\Omega)$ . . . 73

6.5 Die Räume $L^p(\Omega)$ 74

7 Holomorphe Funktionen mit Werten in Banachräumen **76**

7.1 Das Riemann-Integral in Banachräumen 76

7.2 Potenzreihen 78

7.3 Holomorphie 79

Kapitel 1

Metrische Räume

Inhalt der Vorlesung *Analysis* ist die Theorie der Konvergenz von Folgen und Reihen, sowie der Differentiation und Integration von Funktionen. Dabei ist der zugrundeliegende Vektorraum gleich $\mathbb{R}^n$, mit $n \in \mathbb{N}$, also endlichdimensional. In der linearen Algebra werden zwar auch unendlichdimensionale Vektorräume zugelassen, aber auch dort liegt der Schwerpunkt eher auf dem endlichdimensionalen Fall. In dieser Vorlesung werden wir jetzt hauptsächlich unendlichdimensionale Räume untersuchen und die Begriffe und Resultate der Analysis, soweit dies möglich ist, auf diesen Fall ausdehnen. Dabei ist es notwendig, dass wir die Länge eines Vektors, und damit den Abstand zweier Vektoren als die Länge des Differenzvektors, bestimmen können. Dies geschieht durch die axiomatische Einführung einer *Norm*. Da jedoch in vielen interessanten Beispielen statt einer Norm nur eine sogenannte *Metrik* gegeben ist, und da viele Resultate genausogut in dieser allgemeineren Situation gelten, werden wir zunächst vor allem *metrische Räume* studieren. Dabei werden viele Begriffe betrachtet, die so oder ähnlich zum Beispiel in Analysis II und/oder einer Vorlesung über Topologie behandelt werden, und wir werden in den ersten Abschnitten die meisten Beweise auslassen, da sie vollkommen analog zu denen in der Analysis sind.

1.1 Normierte und metrische Räume

Wenn man in der *Analysis* zeigt, dass die Summe zweier konvergenter Folgen wieder konvergiert, spielt die *Dreiecksungleichung* für reelle und komplexe Zahlen bzw. für Vektoren in $\mathbb{K}^n$ eine entscheidende Rolle. Daher ist es nicht weiter verwunderlich, dass wir bei der axiomatischen Definition für die Länge, oder besser: die Norm von Vektoren ebenfalls die Gültigkeit einer Dreiecksungleichung fordern.

Definition 1.1.1 (Normierte Räume) *Sei X ein beliebiger Vektorraum über $\mathbb{K}$, wobei $\mathbb{K}$ immer $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ bedeuten soll. Eine Abbildung*

$$\|\cdot\|: \quad X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \|x\|$$

heißt eine Norm *auf X, wenn folgendes gilt:*

(N1) $\forall\, x \in X: \quad \|x\| \geq 0\,; \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$ (Positive Definitheit)

(N2) $\forall\, x \in X \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{K}: \quad \|\alpha\, x\| = |\alpha|\, \|x\|$ (Homogenität)

(N3) $\forall\, x_1, x_2 \in X: \quad \|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$ (Dreiecksungleichung)

Das Paar $(X, \|\cdot\|)$ heißt dann ein normierter Raum.

Beispiel 1.1.2 *Für $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{K}^n$ und $1 \le p \le \infty$ sei*

$$\|x\|_p \;=\; \begin{cases} \Big(|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p\Big)^{1/p} & (p < \infty), \\[2ex] \sup\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} & (p = \infty). \end{cases}$$

Dadurch ist für jedes solche p eine Norm auf $\mathbb{K}^n$ definiert; für $p < \infty$ ist die Dreiecksungleichung äquivalent zur Minkowskischen Ungleichung. *Wir nennen* $\|\cdot\|_p$ die p-Norm auf $\mathbb{K}^n$, *und sprechen für $p = 2$ auch von der* euklidischen Norm.

Beispiel 1.1.3 *Sei $[a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall, wobei $a < b$ sei, und sei $C[a, b]$ die Menge aller dort stetigen Funktionen mit Werten in $\mathbb{K}$. Für $f \in C[a, b]$ sei*

$$\|f\|_p \;=\; \begin{cases} \Big(\displaystyle\int_a^b |f(x)|^p dx\Big)^{1/p} & (1 \le p < \infty), \\[2ex] \sup\{|f(x)| : \; a \le x \le b\} & (p = \infty). \end{cases}$$

Dies sind Normen auf $C[a, b]$, für jedes solche p; vergleiche Abschnitt 6.5 *für einen Beweis der Dreiecksungleichung. Warum erhält man aber keine Norm, wenn man statt der stetigen Funktionen die Menge aller auf $[a, b]$ Riemann- oder auch aller Lebesgue-integrierbaren Funktionen betrachtet?*

Da in vielen interessanten Beispielen und Anwendungen die Abstände von Elementen einer Menge, welche kein Vektorraum ist, eine Rolle spielen, hat man in der Mathematik auch das allgemeinere Konzept eines *metrischen Raumes* eingeführt:

Definition 1.1.4 (Metrischer Raum) *Sei X eine nicht-leere Menge. Als* Metrik auf X *bezeichnen wir eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$, für die folgende Axiome gelten:*

(M1) $\forall\, x, y \in X: \quad d(x, y) \;\ge 0, \qquad d(x, y) \;=\; 0 \iff x = y$ (Positive Definitheit)

(M2) $\forall\, x, y \in X: \quad d(x, y) \;=\; d(y, x)$ (Symmetrie)

(M3) $\forall\, x, y, z \in X: \quad d(x, z) \;\le\; d(x, y) \;+\; d(y, z)$ (Dreiecksungleichung)

Das Paar (X, d) heißt dann auch ein metrischer Raum. *Falls statt* (M1) *folgendes schwächere Axiom*

(S1) $\forall\, x, y \in X: \quad d(x, y) \;\ge 0, \quad d(x, x) \;=\; 0$ (Positive Semidefinitheit)

gilt, heißt d auch eine Semimetrik *auf X, und (X, d) heißt dann auch* ein semimetrischer Raum.

Beispiel 1.1.5 *Wenn $(X, \|\cdot\|)$ ein beliebiger normierter Raum ist, dann ist durch $d(x, y) = \|x - y\|$ für alle $x, y \in X$ eine Metrik auf X gegeben; wir sprechen dann* von der zur Norm gehörigen, oder durch die Norm induzierte Metrik. *Jeder normierte Raum ist also auch ein metrischer Raum, aber nicht umgekehrt, denn ein metrischer Raum ist im Allgemeinen kein Vektorraum, und wenn doch, dann braucht die Metrik nicht zu einer Norm zu gehören. Für $X = \mathbb{K}^n$, $1 \le p < \infty$ und $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $y = (y_1, \ldots, y_n)^T \in \mathbb{K}^n$ ist also*

$$d_p(x, y) \;=\; \left(\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^p\right)^{1/p}$$

eine Metrik. Für $p = 2$ spricht man auch von der euklidischen Metrik. *Für $p = \infty$ erhält man durch*

$$d_\infty(x, y) \;=\; \sup_{1 \le j \le n} \; |x_j - y_j|$$

ebenfalls eine Metrik auf $\mathbb{K}^n$. Dabei gilt immer

$$d_\infty(x, y) \;\le\; d_p(x, y) \;\le\; n^{1/p}\, d_\infty(x, y)\,,$$

und daher folgt $\lim_{p\to\infty} d_p(x, y) = d_\infty(x, y)$ *für alle $x, y \in \mathbb{K}^n$.*

Beispiel 1.1.6 *Eine beliebige nicht-leere Teilmenge U eines metrischen Raumes (X, d) ist offenbar selber wieder metrischer Raum, wenn man die Abbildung d auf $U \times U$ einschränkt, und wir sprechen dann auch vom* Unterraum U*, was nicht dasselbe ist wie der Unterraumbegriff bei Vektorräumen. Beachte, dass eine nicht-leere Teilmenge eines normierten Raumes natürlich im Allgemeinen kein normierter Raum, aber stets ein metrischer Raum ist.*

Beispiel 1.1.7 *Die Menge der über einem kompakten Intervall $[a, b]$ Riemann-integrierbaren Funktionen f mit*

$$d_p(f, g) \;=\; \Big(\int_a^b \; |f(t) - g(t)|^p \; dt\Big)^{1/p},$$

für ein $p \in [1, \infty)$, ist ein semimetrischer Raum.

Beispiel 1.1.8 *Sei p eine Primzahl. Dann kann jede rationale Zahl $r \ne 0$ in der Form $r = p^\nu\, a/b$ geschrieben werden, wobei $\nu \in \mathbb{Z}$ ist, während a und b nicht mehr durch p teilbar sind. Man nennt die Zahl $|r|_p = p^{-\nu}$ die* p-adische Bewertung *von r, und ergänzt diese Definition noch durch $|0|_p = 0$. Durch $d_p(r_1, r_2) = |r_1 - r_2|_p$ ist dann auf der Menge $\mathbb{Q}$ aller rationalen Zahlen eine Metrik gegeben, wobei anstelle der normalen Dreiecksungleichung die schärfere Bedingung*

$$\forall\ r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{Q}: \qquad d_p(r_1, r_2) \;\le\; \max\{d_p(r_1, r_3), d_p(r_3, r_2)\}$$

gilt. Metriken, bei welchen die Dreiecksungleichung diese schärfere Form hat, nennt man auch Ultrametriken.

Aufgabe 1.1.9 (Dreiecksungleichung nach unten – Vierecksungleichung) *Sei (X, d) ein semimetrischer Raum. Zeige:*

(a) $\qquad \forall\ x, y, z \in X: \quad \big|d(x, y) - d(y, z)\big| \;\le\; d(x, z).$

(b) $\qquad \forall\ x_1, x_2, x_3, x_4 \in X: \quad \big|d(x_1, x_2) \;-\; d(x_3, x_4)\big| \;\le\; d(x_1, x_3) \;+\; d(x_2, x_4).$

Aufgabe 1.1.10 *Sei (X, d) ein metrischer Raum, wobei die Menge X gleichzeitig ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist. Wir nennen die Metrik d* translationsinvariant*, falls für alle $x, y, z \in X$ gilt $d(x+z, y+z) = d(x, y)$, und* homogen*, falls für alle $x, y \in X$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt $d(\lambda\, x, \lambda\, y) = |\lambda|\, d(x, y)$. Zeige: Genau dann gibt es eine Norm auf X, für welche d die zugehörige Metrik ist, wenn d translationsinvariant und homogen ist. Finde für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$, bei der dies nicht der Fall ist.*

1.2 Topologie metrischer Räume

Die in diesem Abschnitt vorgestellten Begriffe sind für den Raum $\mathbb{R}^n$ aus der *Analysis* bekannt und werden in metrischen Räumen analog definiert. Wir lassen hier alle Beweise aus.

Definition 1.2.1 (Offene Mengen, Umgebungen in metrischen Räumen) *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Für $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$ heißt die Menge*

$$U_\varepsilon(x_0) \;=\; K(x_0,\varepsilon) \;=\; \{x \in X : \quad d(x,x_0) < \varepsilon\}$$

die ε-Umgebung von x_0, *oder auch* die Kugel *oder* Kreisscheibe um x_0 mit Radius ε. *Eine Teilmenge $O \subset X$ heißt* offen, *wenn folgendes gilt:*

$$\forall\; x_0 \in O \quad \exists\; \varepsilon > 0 \;:\quad U_\varepsilon(x_0) \;\subset\; O\,.$$

Eine Menge U heißt Umgebung eines Punktes $x \in X$, *falls eine offene Menge $O \subset X$ existiert, für die $x \in O \subset U$ gilt. Falls U sogar selber offen ist, sprechen wir auch von einer* offenen Umgebung *von x. Mit $\mathcal{U}(x)$ bzw. $\mathcal{U}_0(x)$ wird das System aller Umgebungen bzw. aller offenen Umgebungen von x bezeichnet. Beachte, dass in manchen Büchern, z. B. in* [10], *Umgebungen immer offen sein müssen, während dies hier anders ist.*

In der folgenden Aufgabe 1.2.2 wird gezeigt, dass alle Kugeln offen sind; dies liegt an der Dreiecksungleichung für die Metrik. Jede ε-Umgebung von x ist also auch offene Umgebung von x.

Aufgabe 1.2.2 *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Zeige:*

(a) *Für jedes $x \in X$ und jedes $\varepsilon > 0$ ist $U_\varepsilon(x)$ offen.*

(b) *Eine Menge $O \subset X$ ist genau dann offen, wenn sie Umgebung aller ihrer Punkte ist.*

Satz 1.2.3 (Eigenschaften offener Mengen) *In jedem metrischem Raum (X,d) haben die offenen Mengen immer folgende drei Eigenschaften:*

(O1) $\emptyset$ und X sind offen.

(O2) Die Vereinigung *beliebig* vieler offener Mengen ist wieder offen.

(O3) Der Durchschnitt *endlich* vieler offener Mengen ist wieder offen.

Definition 1.2.4 *Sei (X,d) metrischer Raum. Eine Menge $A \subset X$ heißt* abgeschlossen, *wenn $X \setminus A$ offen ist. Ein $x \in X$ heißt* Berührungspunkt *einer Teilmenge $E \subset X$, wenn gilt*

$$\forall\; U \in \mathcal{U}(x) \;:\qquad U \cap E \neq \emptyset\,. \tag{1.2.1}$$

Satz 1.2.5 (Eigenschaften abgeschlossener Mengen) *In jedem metrischen Raum (X,d) gilt:*

(A1) $\emptyset$ und X sind abgeschlossen.

(A2) Die Vereinigung *endlich* vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

(A3) Der Durchschnitt *beliebig* vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Definition 1.2.6 *Sei (X,d) metrischer Raum, und sei $E \subset X$. Ein $x \in E$ heißt* innerer Punkt (von E), *falls $E \in \mathcal{U}(x)$ ist. Die Menge aller inneren Punkte von E wird* offener Kern von E *genannt und mit $\overset{\circ}{E}$ bezeichnet. Die Menge aller Berührungspunkte von E heißt* die abgeschlossene Hülle von E *und wird mit $\overline{E}$ bezeichnet. Wir nennen E* dicht *in X, falls $\overline{E} = X$ ist.*

Aufgabe 1.2.7 *Finde einen metrischen Raum (X,d) sowie ein $r > 0$ und ein $x \in X$, so dass $\overline{K(x,r)} \neq \{y \in X : d(x,y) \le r\}$ ist.*

Satz 1.2.8 *In jedem metrischen Raum (X, d) gilt:*

(a) *Der offene Kern von E ist die größte offene Teilmenge von E, oder in anderen Worten: $\overset{\circ}{E}$ ist die Vereinigung aller offenen Teilmengen von E.*

(b) *Die abgeschlossene Hülle von E ist die kleinste abgeschlossene Obermenge von E, oder in anderen Worten: $\overline{E}$ ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Obermengen von E.*

(c) *E ist genau dann offen, wenn $E = \overset{\circ}{E}$ ist.*

(d) *E ist genau dann abgeschlossen, wenn $E = \overline{E}$ ist.*

(e) *Für $F = X \setminus E$ gilt $\overset{\circ}{F} = X \setminus \overline{E}$, $\overline{F} = X \setminus \overset{\circ}{E}$.*

Definition 1.2.9 *Sei (X, d) metrischer Raum, und sei $E \subset X$. Ein $x \in X$ heißt* Häufungspunkt von E, *falls gilt*

$$\forall\, U \in \mathcal{U}(x) \ : \quad \Big(U \setminus \{x\}\Big) \cap E \neq \emptyset\,.$$

Die Menge aller Häufungspunkte von E wird mit E' bezeichnet. Ein $x \in X$ heißt Randpunkt von E, *falls gilt*

$$\forall\, U \in \mathcal{U}(x) \ : \quad U \cap E \neq \emptyset\,, \quad U \cap \Big(X \setminus E\Big) \neq \emptyset\,.$$

In Worten bedeutet dies, dass Randpunkte genau diejenigen Punkte sind, welche Berührungspunkte sowohl von E als auch vom Komplement von E sind. Die Menge aller Randpunkte von E heißt der Rand *von E, in Zeichen* $\mathrm{rd}\,(E)$. *Ein Punkt $x \in E$ heißt* isolierter Punkt *von E, falls ein $U \in \mathcal{U}(x)$ existiert mit $U \cap E = \{x\}$.*

Aufgabe 1.2.10 *Gib ein Beispiel eines metrischen Raumes (X, d),in dem es ein $r > 0$ und ein $x \in X$ gibt, für die* $\mathrm{rd}\, K(x, r) \neq \{y \in X : d(x, y) = r\}$ *ist.*

Satz 1.2.11 *In jedem metrischen Raum (X, d) gilt:*

(a) $\overline{E} \ = \ E \cup E'$.

(b) $\mathrm{rd}\,(E) = \mathrm{rd}\,(X \setminus E) = \overline{E} \setminus \overset{\circ}{E}$.

1.3 Stetigkeit und Konvergenz

Auch die Definitionen der Stetigkeit von Funktionen bwz. der Konvergenz von Folgen sind in einem metrischen Raum ganz analog zu denen in *Analysis*.

Definition 1.3.1 (Stetigkeit in metrischen Räumen) *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt* stetig in einem Punkt $x_0 \in X$, *falls folgendes gilt:*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in X \ : \quad d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon\,. \tag{1.3.1}$$

Die Abbildung f heißt auf X gleichmäßig stetig, *wenn*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x_0, x \in X \ : \quad d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon\,. \tag{1.3.2}$$

Schließlich nennen wir f Lipschitzstetig *auf X, wenn es eine Konstante L gibt, für welche*

$$\forall\, x_1, x_2 \in X \ : \qquad d(f(x_1, x_2)) \ \leq \ L\, d(x_1, x_2)\,.$$

Jedes solche L heißt auch Lipschitzkonstante *für f. Klar ist, dass aus Lipschitzstetigkeit die gleichmäßige Stetigkeit folgt.*

Aufgabe 1.3.2 *Zeige: Ist* $(X, \|\cdot\|)$ *ein normierter Raum, so ist die Abbildung* $x \mapsto \|x\|$ *Lipschitzstetig auf* X.

Die obige Definition der Stetigkeit, nicht aber die der gleichmäßigen Stetigkeit, kann allein mit Hilfe offener Mengen bzw. Umgebungen formuliert werden:

Satz 1.3.3 *Seien* (X, d_X) *und* (Y, d_Y) *metrische Räume, und sei* $f : X \to Y$. *Genau dann ist* f *stetig in* $x_0 \in X$, *falls für jede Umgebung* U *von* $f(x_0)$ *die Menge* $f^{-1}(U)$ *Umgebung von* x_0 *ist. Genau dann ist* f *in jedem Punkt* $x \in X$ *stetig, wenn für jede offene Teilmenge* $O \subset Y$ *die Menge* $f^{-1}(O)$ *in* X *offen ist.*

Definition 1.3.4 *Sei* (X, d_X) *ein metrischer Raum. Eine Folge* (x_n) *heißt* konvergent *in* X, *oder einfach* konvergent, *falls ein* $x \in X$ *existiert, so dass*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{R} \quad \forall\, n \geq N : \qquad d(x_n, x) \;<\; \varepsilon\,.$$

Wir schreiben dann $x_n \to x$ *für* $n \to \infty$, *oder* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, *und nennen* x *auch* Grenzwert der Folge (x_n). *Sei* (Y, d_Y) *ein weiterer metrischer Raum, und sei* $f : X \to Y$. *Wir nennen* f folgenstetig in dem Punkt $x \in X$, *falls für jede Folge* (x_n) *aus* X *gilt*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \;=\; x \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n) \;=\; f(x)\,.$$

Lemma 1.3.5 *In einem metrischen Raum* (X, d_X) *hat jede Folge höchstens einen Grenzwert. Seien* (X, d_X) *und* (Y, d_Y) *metrische Räume, und sei* $f : X \to Y$. *Genau dann ist* f *stetig in einem Punkt* $x \in X$, *wenn es dort folgenstetig ist.*

Definition 1.3.6 *Seien* (X, d_X) *und* (Y, d_Y) *metrische Räume. Eine Abbildung* $f : X \to Y$ *heißt* ein Homöomorphismus, *wenn sie bijektiv ist, und wenn sowohl* f *als auch* f^{-1} *stetig sind. Wenn ein solcher Homömorphismus zwischen zwei metrischen Räumen existiert, dann heißen die beiden auch* homöomorph. *Wenn auf* X *zwei Metriken* d_1, d_2 *gegeben sind, so nennen wir diese* (topologisch) äquivalent, *falls ein* $O \in X$ *genau dann offen bzgl.* d_1 *ist, wenn es auch offen bzgl.* d_2 *ist. Man sagt dann auch, dass* d_1 *und* d_2 *auf* X dieselbe Topologie erzeugen.

Bemerkung 1.3.7 *Offenbar sind zwei Metriken* d_1, d_2 *auf* X *genau dann äquivalent, wenn die identische Abbildung, aufgefasst als Abbildung von* (X, d_1) *nach* (X, d_2), *ein Homöomorphismus ist. Da Stetigkeit und Folgenstetigkeit äquivalent sind, ist dies genau dann der Fall, wenn für jede Folge* (x_n) *aus* X *und jedes* $x \in X$ *gilt*

$$\lim_{n\to\infty} d_1(x_n, x) \;=\; 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} d_2(x_n, x) \;=\; 0\,.$$

Dies heißt also, dass die von d_1 *und* d_2 *induzierten Konvergenzbegriffe übereinstimmen.*

1.4 Cauchyfolgen

Definition 1.4.1 *Eine Folge* (x_n) *in einem metrischen Raum* (X, d) *heißt* Cauchyfolge, *wenn gilt*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, n, m \geq N : \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon\,.$$

Wenn jede Cauchyfolge in X *konvergiert, dann heißt* (X, d) vollständig.

Aufgabe 1.4.2 *Folgere aus* Aufgabe 1.3.2: *Ist* (x_n) *eine Cauchyfolge in einem normierten Vektorraum* $(X, \|\cdot\|)$, *so ist die Folge der Normen* $\|x_n\|$ *eine Cauchyfolge in* $\mathbb{R}$, *also insbesondere beschränkt.*

Lemma 1.4.3 *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Wenn eine Folge (x_n) in (X,d) konvergiert, dann ist sie Cauchyfolge. Wenn eine Cauchyfolge eine konvergente Teilfolge besitzt, dann ist sie konvergent.*

Beweis: Falls gilt $x_n \to x$ für $n \to \infty$, dann folgt, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq N$ gilt $d(x_n, x) < \varepsilon$. Mit der Dreiecksungleichung folgt daraus aber $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < 2\,\varepsilon$ für alle $n, m \geq N$. Das ist äquivalent zur Cauchybedingung. Sei jetzt (x_n) eine Cauchyfolge, und gelte für ein $x \in X$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, N \in \mathbb{N} \quad \exists\, n_N \geq N \ : \quad d(x, x_{n_N}) < \varepsilon\,.$$

Dies ist gerade äquivalent zur Existenz einer Teilfolge, welche gegen x konvergiert. Daraus folgt für jedes $\varepsilon > 0$, mit N wie in der Cauchybedingung: $d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_N}) + d(x_{n_N}, x) < 2\,\varepsilon$, falls $n \geq N$ ist, was zu zeigen war. □

Beispiel 1.4.4 *Sei X die Menge der komplexen Zahlenfolgen $x = (x_k)$ mit nur endlich vielen Gliedern $x_k \neq 0$, und sei für ein $p \geq 1$*

$$\|x\|_p \ = \ \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \Big)^{1/p} \qquad \forall\ x \in X\ .$$

Dann ist $(X, \|\cdot\|_p)$ ein normierter Raum, und für die Folgen $x^{(n)} = (x_k^{(n)})$ mit $x_k^{(n)} = 1/k^2$ für $1 \leq k \leq n$ bzw. $= 0$ für $k \geq n+1$ folgt dann $\|x^{(n)} - x^{(m)}\|_p \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-2p}$ für $m > n \geq 1$. Daher ist $(x^{(n)}, n \in \mathbb{N})$ eine Cauchyfolge, hat aber in X keinen Grenzwert, weil aus $x^{(n)} \to x = (x_k)$ folgen würde, dass für jedes feste k gilt $x_k^{(n)} \to x_k$ für $n \to \infty$, und dann müsste $x_k = 1/k^2$ sein für alle $k \in \mathbb{N}$; diese Folge gehört aber nicht zur Menge X. Der Ausweg aus diesem Dilemma besteht darin, die Menge X zu erweitern und statt ihrer den Raum

$$\ell_p \ = \ \big\{ (x_k) : \quad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \ < \ \infty \big\}$$

zu betrachten; in diesem Raum ist nämlich jede Cauchyfolge konvergent. Vergleiche dazu auch den nächsten Abschnitt.

Bemerkung 1.4.5 *Wir nennen eine Folge (x_n) in einem metrischen Raum (X,d)* absolut konvergent, *falls die Zahlenreihe $\sum_j d(x_j, x_{j+1})$ konvergiert. Diese Definition wird verständlich, wenn X ein normierter Vektorraum ist, denn dann ist die Konvergenz der Folge (x_n) äquivalent zur Konvergenz der Teleskopreihe $\sum_j (x_{j+1} - x_j)$. Beachte aber, dass wir nicht sagen, dass immer aus absoluter Konvergenz auf die Konvergenz der Folge geschlossen werden kann. Es gelten aber folgende beiden Aussagen:*

(a) *Eine absolut konvergente Folge ist immer eine Cauchyfolge.*

(b) *(X,d) ist genau dann vollständig, wenn jede absolut konvergente Folge konvergiert.*

Zum Beweis von (a)*, beachte dass für $m > n \geq 1$ und $\varepsilon > 0$ aus der Dreiecksungleichung folgt*

$$d(x_{m+1}, x_n) \ \leq \ d(x_{m+1}, x_m) \ + \ldots + \ d(x_{n+1}, x_n) \ \leq \ \sum_{j=n}^{\infty} d(x_j, x_{j+1}) \ < \ \varepsilon$$

falls nur n hinreichend groß ist. Um (b) *zu zeigen, sei zunächst (x_n) eine Cauchyfolge. Zu jedem $j \geq 1$ wählen wir ein $n_j \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $m \geq n_j$ gilt $d(x_m, x_{n_j}) < j^{-2}$, und o. B. d. A. seien die n_j streng monoton wachsend. Dann gilt auch $d(x_{n_j}, x_{n_{j+1}}) < j^{-2}$, und deshalb ist die Teilfolge (x_{n_j}) absolut konvergent. Also gilt die eine Richtung von* (b) *wegen* Lemma 1.4.3*. Die umgekehrte Implikation ist aber richtig wegen* (a)*.*

1.5 Vervollständigung metrischer Räume

Definition 1.5.1 *In einem metrischen Raum (X,d) heißt eine Teilmenge $Y \subset X$* vollständig*, wenn jede Cauchyfolge mit Gliedern aus Y konvergiert, und wenn ihr Grenzwert zu Y gehört. Eine nicht-leere Teilmenge Y ist also genau dann vollständig, wenn sie* als Unterraum von X *ein vollständiger metrischer Raum ist.*

Satz 1.5.2 *In einem vollständigen metrischen Raum (X,d) ist eine Teilmenge Y genau dann vollständig, wenn sie abgeschlossen ist.*

Beweis: Falls Y leer ist, ist nichts zu zeigen. Sei jetzt (x_n) eine Cauchyfolge mit Gliedern in Y. Dann ist sie in X konvergent, und wenn Y abgeschlossen ist, muss ihr Grenzwert zu Y gehören, also Y selbst vollständig sein. Umgekehrt: wenn Y vollständig und $x \in \overline{Y}$ ist, so gibt es eine in Y gelegene Folge, welche gegen x konvergiert. Diese Folge ist auch Cauchyfolge, und nach Definition der Vollständigkeit muss ihr Grenzwert zu Y gehören, woraus $Y = \overline{Y}$ folgt. □

Definition 1.5.3 *Seien (X_1,d_1) und (X_2,d_2) metrische Räume. Eine Abbildung $f: X_1 \to X_2$ heißt* längentreu *oder* eine Isometrie*, falls*

$$\forall\, x,y \in X_1: \qquad d_1(x,y) \;=\; d_2(f(x),f(y))\,.$$

Offenbar ist jede Isometrie injektiv. Die beiden Räume heißen isometrisch*, wenn es eine surjektive Isometrie $f: X_1 \to X_2$ gibt.*

Aufgabe 1.5.4 (Semimetrik und Äquivalenzrelation) *Sei X nicht leer, und sei $d: X \to \mathbb{R}$ eine Semimetrik auf X. Zeige:*

(a) *Durch $x \sim y \iff d(x,y) = 0$ wird eine Äquivalenzrelation auf X definiert, und aus $x \sim \tilde{x}$ und $y \sim \tilde{y}$ folgt $d(x,y)) = d(\tilde{x},\tilde{y})$. Man kann also d auch als eine Abbildung auf der Menge der Äquivalenzklassen auffassen.*

(b) *Die Menge aller Äquivalenzklassen für die obige Relation, zusammen mit d, ist ein metrischer Raum.*

Satz 1.5.5 (Vervollständigungssatz) *Zu jedem metrischen Raum (X,d) gibt es einen vollständigen metrischen Raum $(\hat{X},\hat{d})$ sowie eine Isometrie $f: X \to \hat{X}$ derart, dass $f(X)$ in $\hat{X}$ dicht ist.*

Beweis: Sei Y die Menge aller Cauchyfolgen in X, und seien $(x_n),(y_n) \in Y$. Wir zeigen:

(a) Beh: Der Grenzwert $d_*((x_n),(y_n)) := \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)$ existiert.

Bew: Sei $\alpha_n = d(x_n,y_n)$, dann folgt aus Aufgabe 2, dass $|\alpha_n - \alpha_m| \le d(x_n,x_m) + d(y_n,y_m)$ ist, und deshalb ist (α_n) eine Cauchyfolge reeller Zahlen, also konvergent.

(b) Beh: Auf Y ist d_* eine Semimetrik.

Bew: Zu zeigen ist nur die Dreiecksungleichung, da alles übrige direkt aus der Definition folgt. Seien deshalb $(x_n),(y_n),(z_n) \in Y$. Dann ist $d(x_n,z_n) \le d(x_n,y_n) + d(y_n,z_n)$ für alle n, und daraus folgt die Dreiecksungleichung für $n \to \infty$.

Nach Aufgabe 1.5.4 erhält man zu dieser Semimetrik eine Äquivalenzrelation, und die Menge der Äquivalenzklassen wird zu einem metrischen Raum, den wir mit $(\hat{X},\hat{d})$ bezeichnen. Wir schreiben für die

Äquivalenzklasse einer Cauchyfolge (x_n) bezüglich dieser Relation auch $\widehat{(x_n)}$, und es gilt nach Definition von $\hat{d}$ dass $\hat{d}(\widehat{(x_n)}, \widehat{(y_n)}) = d_*((x_n), (y_n))$ ist. In Worten ausgedrückt ist der Abstand zweier Äquivalenzklassen gleich dem von zwei beliebigen Repräsentanten.

(c) Beh: Die Abbildung $f : X \to \hat{X}$, die jedem $x \in X$ die Äquivalenzklasse $\widehat{(x)}$ zuordnet, in welcher die konstante Folge $(x_n = x)$ liegt, ist eine Isometrie.

Bew: Für $x, y \in X$ seien $x_n = x$, $y_n = y$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt $\hat{d}(\widehat{(x)}, \widehat{(y)}) = d_*((x_n), (y_n)) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$, also die Behauptung.

(d) Beh: $f(X)$ ist dicht in $\hat{X}$.

Bew: Sei $\widehat{(x_n)} \in \hat{X}$, und sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ für welches $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ ist für alle $n, m \geq N$. Für $x = x_N$ folgt daraus $\hat{d}(\widehat{(x)}, \widehat{(x_n)}) = d_*((x), (x_n)) = \lim_{n\to\infty} d(x, x_n) \ \leq \ \varepsilon$, woraus die Behauptung folgt.

(e) Beh: $(\hat{X}, \hat{d})$ ist vollständig.

Bew: Sei $(\widehat{(x_n)}_k)$ eine Cauchyfolge in $\hat{X}$. Für jedes (feste) $k \in \mathbb{N}$ ist also $\widehat{(x_n)}_k$ selber eine Äquivalenzklasse von Cauchyfolgen, von denen wir eine mit $(x_{nk}, n \in \mathbb{N})$ bezeichnen. Zu $\varepsilon > 0$ existiert deshalb ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $\hat{d}(\widehat{(x_n)}_k, \widehat{(x_n)}_j) = \lim_{n\to\infty} d(x_{nk}, x_{nj}) < \varepsilon \quad \forall\, k, j \geq N$. Aus (d) folgt dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $x_k \in X$ existiert, für welches

$$\hat{d}(\widehat{(x_k)}, \widehat{(x_n)}_k) \ = \ \lim_{n\to\infty} d(x_k, x_{nk}) \ \leq \ 1/k\,.$$

Die Folge (x_k) ist eine Cauchyfolge, denn $d(x_k, x_j) = \hat{d}(\widehat{(x_k)}, \widehat{(x_j)}) \leq \hat{d}(\widehat{(x_k)}, \widehat{(x_n)}_k) + \hat{d}(\widehat{(x_n)}_k, \widehat{(x_n)}_j) + \hat{d}(\widehat{(x_n)}_j, \widehat{(x_j)}) \leq 1/k + \varepsilon + 1/j \leq 2\,\varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$ und alle genügend großen $k, j \in \mathbb{N}$. Daher ist $(x_n) \in Y$ und

$$\hat{d}(\widehat{(x_n)}_k, \widehat{(x_n)}) \ = \ \lim_{n\to\infty} d(x_{nk}, x_n) \ \leq \ \limsup_{n\to\infty} \Big(d(x_{nk}, x_k) \ + \ d(x_k, x_n) \Big) < 1/k \ + \ \varepsilon \leq 2\,\varepsilon$$

falls nur k genügend groß ist. Das zeigt, dass die Folge $(\widehat{(x_n)}_k)$ für $k \to \infty$ gegen $\widehat{(x_n)}$ konvergiert. □

Definition 1.5.6 *Der Raum $(\hat{X}, \hat{d})$ aus dem letzten Satz heißt* Vervollständigung *des metrischen Raumes (X, d). Man kann zeigen, dass alle Vervollständigungen isometrisch sind.*

Bemerkung 1.5.7 *Wenn $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum ist, kann er, aufgefasst als metrischer Raum ebenfalls vervollständigt werden. Man kann zeigen, dass dann die Metrik $\hat{d}$ auf der Vervollständigung translationsinvariant und homogen ist, und somit ist die Vervollständigung selbst wieder ein normierter Raum.*

Beispiel 1.5.8 *Im Folgenden sei $1 \leq p < \infty$ fest gewählt.*

(a) *Sei X die Menge aller reellen oder komplexen Zahlenfolgen mit nur endlich vielen Gliedern $x_k \neq 0$. Wir definieren eine Norm $\|x\|_p = (\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p)^{1/p}$ für $x \in X$, wobei es wichtig ist zu beachten, dass diese Reihe konvergiert, da ja immer nur endlich viele ihrer Glieder von 0 verschieden sind. Dann ist $(X, \|\cdot\|_p)$ ein nicht vollständiger normierter Raum. Seine Vervollständigung ist, bis auf Isometrie, gleich*

$$\ell_p \ = \ \Big\{ (x_k) : \quad \sum_{k=1}^\infty |x_k|^p \ < \ \infty \Big\}\,.$$

(b) *Sei $a < b$, und sei für $f \in C[a,b]$ eine p-Norm $\|f\|_p$ wie in* Beispiel 1.1.3 *definiert. Dieser normierte Raum ist nicht vollständig. Seine Vervollständigung erhält man wie folgt: Auf der Menge aller auf $[a,b]$ definierten Funktionen f, für welche $|f|^p$ im Lebesgueschen Sinn über $[a,b]$ integrierbar ist, ist $d(f,g) = \|f-g\|_p$ eine Semimetrik und definiert daher eine Äquivalenzrelation. Die Menge aller Äquivalenzklassen wird dann zu einem vollständigen normierten Raum, den man mit $L_p[a,b]$ bezeichnet, und dieser Raum ist die gesuchte Vervollständigung.*

Für $p = \infty$, also die Supremumsnorm auf X bzw. $C[a,b]$, ist die Lage etwas anders: Man erhält im Fall (a) *als Vervollständigung den Raum c_0 aller Nullfolgen, während der Raum $C[a,b]$ bereits vollständig ist. Wir kommen später noch genauer hierauf zurück.*

1.6 Der Banachsche Fixpunktsatz

Definition 1.6.1 *Für eine beliebige Abbildung f einer nicht-leeren Menge X in sich selber schreiben wir f^n für die n-fach iterierte Abbildung $f \circ \ldots \circ f$, und setzen $f^0 = \mathrm{id}$, also gleich der identischen Abbildung. Wir nennen ein $x \in X$ einen* Fixpunkt *von f, wenn $f(x) = x$ ist. Eine Abbildung f eines metrischen Raumes (X,d) in sich selbst heißt* eine Kontraktion *oder* kontraktiv, *wenn es ein $\alpha \in (0,1)$ gibt, für welches*

$$\forall\ x,y \in X : \quad d(f(x),f(y)) \ \le\ \alpha\, d(x,y)\,. \tag{1.6.1}$$

Jedes solche α heißt dann auch Kontraktionsparameter *für f. Man sieht aus der Definition, dass eine Kontraktion auf X gleichmäßig stetig ist.*

Wir wollen den Banachschen Fixpunktsatz hier als eine Folgerung eines allgemeineren Resultates beweisen, das in ähnlicher Form von *J. Weissinger* stammt; siehe z. B. auch das Buch von *H. Heuser* [4]:

Lemma 1.6.2 (Weissingerscher Fixpunktsatz) *Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum, und sei $f : X \to X$ stetig, und so dass*

$$\forall\ x,y \in X \ : \qquad \sum_{n=0}^{\infty} d(f^n(x), f^n(y)) \ <\ \infty\,. \tag{1.6.2}$$

Dann besitzt f genau einen Fixpunkt ξ, und für jedes $x_0 \in X$ konvergiert die Folge der Iterierten (x_n), gegeben durch

$$x_n \ =\ f(x_{n-1}) \ =\ f^n(x_0)\ , \qquad n \ge 1\,,$$

gegen den Fixpunkt ξ.

Beweis: Falls x, y beides Fixpunkte von f sind, dann ist $d(f^n(x), f^n(y)) = d(x,y)$ für alle $n \ge 0$, und daher folgt aus (1.6.2) dass $d(x,y) = 0$, also $x = y$. Sei jetzt (x_n) wie im Lemma. Durch Anwendung der Bedingung (1.6.2) auf $x = x_0$ und $y = f(x_0)$ folgt dann

$$\sum_{n=0}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) \ =\ \sum_{n=0}^{\infty} d(f^n(x_0), f^n(x_1)) \ <\ \infty\,.$$

Dies ist aber genau die absolute Konvergenz, im Sinne von Bemerkung 1.4.5, der Folge (x_n). Deshalb ist diese Folge eine Cauchyfolge. Da (X,d) vollständig ist, gibt es ein $\xi \in X$ mit $\lim x_n = \xi$, und wegen der Stetigkeit von f folgt $\lim f(x_n) = f(\xi)$. Da aber $f(x_n) = x_{n+1}$ ist, muss ξ ein Fixpunkt von f sein. $\square$

Als einfache Folgerung ergibt sich jetzt der

Satz 1.6.3 (Banachscher Fixpunktsatz) *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, und sei f eine Kontraktion auf X. Dann gibt es genau einen Fixpunkt $\xi \in X$ von f, und für jedes $x_0 \in X$ konvergiert die Folge der Iterierten, definiert durch $x_n = f(x_{n-1})$, für $n \geq 1$, gegen ξ.*

Beweis: Wenn α ein Kontraktionsparameter für f ist, folgt induktiv

$$d(f^n(x), f^n(y)) \;\leq\; \alpha^n \, d(x,y) \qquad \forall\, x, y \in X\,, \quad n \geq 0\,.$$

Deshalb kann Lemma 1.6.2 angewandt werden und liefert die Behauptung. □

Aufgabe 1.6.4 *Zeige folgende Verbesserung des Banachschen Fixpunktsatzes: Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, und sei f eine stetige Abbildung von X nach X, so dass für ein $m \geq 1$ die Iterierte f^m eine Kontraktion auf X ist. Dann gibt es genau einen Fixpunkt $\xi \in X$ von f, und für jedes $x_0 \in X$ konvergiert die Folge der Iterierten, definiert durch $x_n = f(x_{n-1})$, für $n \geq 1$, gegen ξ.*

Aufgabe 1.6.5 *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, und sei $f : X \to X$, so dass*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_0 \quad \forall\, x, y \in X \;:\qquad d(f^n(x), f^n(y)) \;\leq\; d_n \, d(x,y)\,,$$

mit Konstanten $d_n \geq 0$, für welche $\sum d_n < \infty$. Folgere mit Lemma 1.6.2 *dass f genau einen Fixpunkt $\xi \in X$ besitzt, und zeige folgende Ungleichungen für die Iterierten:*

- $$\forall\, n \in \mathbb{N}_0 \;:\qquad d(x_n, \xi) \;\leq\; d(x_1, x_0) \quad \sum_{k=n}^{\infty} d_k$$ (a-priori-Abschätzung)
- $$\forall\, n \in \mathbb{N}_0 \;:\qquad d(x_n, \xi) \;\leq\; d(x_n, x_{n+1}) \quad \sum_{k=0}^{\infty} d_k$$ (a-posteriori-Abschätzung)

Welche Abschätzungen erhält man im Falle einer Kontraktion bzw. unter den Voraussetzungen der vorangegangenen Aufgabe?

1.7 Kompaktheit

Es gibt verschiedene äquivalente Definitionen der Kompaktheit; z. B. wird in [4] eine andere Definition verwendet. Die hier gegebene heißt manchmal auch *Überdeckungskompaktheit*, oder die *Heine-Borel-Eigenschaft* und ist die am meisten gebräuchliche.

Definition 1.7.1 (Kompaktheit, Folgenkompaktheit) *Eine Teilmenge K eines metrischen Raumes (X, d) heißt* kompakt, *wenn jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Das heißt genauer: Sind O_j, $j \in J$, alle offen, und ist $K \subset \cup_j O_j$, so gibt es $j_1, , \ldots, j_n \in J$ derart dass $K \subset \cup_{k=1}^n O_{j_k}$ ist. Ist dies der Fall für $K = X$, so nennen wir (X, d) auch* einen kompakten Raum. *Die Menge K heißt* folgenkompakt, *falls jede Folge mit Gliedern aus K eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert ebenfalls zu K gehört. Wir nennen K auch* präkompakt *oder* total beschränkt, *wenn gilt:*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, x_1, \ldots, x_n \in X \;:\quad K \;\subset\; \bigcup_{j=1}^{n} U_\varepsilon(x_j)\,. \tag{1.7.1}$$

Aufgabe 1.7.2 *Zeige, dass ein kompakter metrischer Raum auch präkompakt ist. Zeige weiter, dass ein folgenkompakter metrischer Raum vollständig und präkompakt ist.*

Aufgabe 1.7.3 *Zeige: Eine Teilmenge eines folgenkompakten metrischen Raumes ist genau dann selber folgenkompakt, wenn sie abgeschlossen ist.*

Aufgabe 1.7.4 *Zeige: Wenn $K \neq \emptyset$ präkompakt ist, dann gilt (1.7.1) auch, wenn wir $x_1, \ldots, x_n \in K$ verlangen.*

Aufgabe 1.7.5 *Zeige, dass in einem metrischen Raum eine kompakte Teilmenge immer abgeschlossen und beschränkt ist.*

Satz 1.7.6 *In jedem metrischen Raum (X, d) gelten folgende Aussagen für alle Teilmenge $K \subset X$:*

(a) *K ist genau dann kompakt, wenn es folgenkompakt ist.*

(b) *K ist genau dann folgenkompakt, wenn es vollständig und präkompakt ist.*

Beweis: Zu (a): Wenn K nicht folgenkompakt ist, dann gibt es eine Folge (x_n) ohne konvergente Teilfolge, und das bedeutet dass die Menge $A = \{x_n\}$ der Folgenglieder eine unendliche Menge ist (warum?), die keinen Häufungspunkt besitzt und daher abgeschlossen ist. Wir nehmen o. B. d. A. noch an, dass alle x_n verschieden sind, denn sonst könnte man zu einer Teilfolge übergehen. Dann gibt es zu jedem n ein $\varepsilon_n > 0$ derart, dass in $U_{\varepsilon_n}(x_n)$ keine weiteren Glieder der Folge liegen (wenn dies anders wäre, dann wäre x_n ein Häufungspunkt von A). Die offenen Mengen

$$U_{\varepsilon_n}(x_n)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,, \qquad O = X \setminus A$$

bilden dann eine Überdeckung von K ohne endliche Teilüberdeckung, und folglich ist K nicht kompakt. Sei umgekehrt K folgenkompakt, und seien O_j, $j \in J$, eine offene Überdeckung von K. Wir beweisen zunächst:

Beh: Es gibt ein $\varepsilon > 0$ derart, dass für alle $x \in K$ ein $j \in J$ existiert mit $(U_\varepsilon(x) \cap K) \subset O_j$.

Wenn dem nicht so wäre, dann gäbe es für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in K$ derart, dass $U_{1/n}(x_n) \cap K \not\subset O_j$ für alle $j \in J$. Die Folge (x_n) hat einen Häufungspunkt $\xi \in K$, und $\xi \in O_{j_0}$ für ein $j_0 \in J$. Daher gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(\xi) \subset O_{j_0}$, und für unendlich viele n folgt $x_n \in U_{\varepsilon/2}(\xi)$, also $U_{\varepsilon/2}(x_n) \subset O_{j_0}$. Dies widerspricht aber der Wahl der x_n.

Da aus Folgenkompaktheit (mit einer Übungsaufgabe) die Präkompaktheit folgt, gibt es zu dem ε aus obiger Behauptung endlich viele $x_1, \ldots, x_n$ so, dass die $U_\varepsilon(x_k)$ ganz K überdecken, und zu jedem k gibt es ein $j_k \in J$ mit $(K \cap U_\varepsilon(x_k)) \subset O_{j_k}$. Daher bilden die $O_{j_1}, \ldots, O_{j_n}$ die gesuchte endliche Teilüberdeckung.

Die eine Richtung von (b) wurde als Übungsaufgabe gezeigt, und daher sei jetzt K als vollständig und präkompakt vorausgesetzt. Sei (x_n) eine beliebige Folge aus K. Zu jedem $\nu \in \mathbb{N}$ gibt es endlich viele $y_{1\nu}, \ldots, y_{m\nu} \in X$ mit $X = \cup_k U_{1/\nu}(y_{k\nu})$. Für $\nu = 1$ liegen in mindestens einem $U_1(y_{k1})$ unendlich viele x_n, und wir bezeichnen die entsprechende Teilfolge mit x_{n1}. Zu dieser Folge und $\nu = 2$ gibt es wiederum ein $U_{1/2}(y_{k2})$, welches unendlich viele der x_{n1} enthält, und diese seien mit x_{n2} bezeichnet. Setzt man dies fort, so erhält man Folgen $x_{n\nu}$ mit $d(x_{n\nu}, x_{m\mu}) < 2/\nu$ für alle $n, m, \mu, \nu \in \mathbb{N}$ mit $\mu \geq \nu$. Die Diagonalfolge (x_{nn}) ist dann eine Teilfolge der Ausgangsfolge (x_n), welche Cauchyfolge ist. Also hat sie wegen der Vollständigkeit von K einen Grenzwert $\xi \in K$, was die Folgenkompaktheit von K zeigt. □

Definition 1.7.7 *Ein metrischer Raum (X, d) heißt* separabel, *wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt, d. h., wenn eine abzählbare Menge $A \subset X$ existiert mit $\overline{A} = X$.*

Satz 1.7.8 *Sei (X,d) ein kompakter metrischer Raum. Dann gilt:*

(a) *(X,d) ist separabel.*

(b) *Wenn $(Y,\tilde d)$ ein weiterer metrischer Raum und $f : X \to Y$ stetig ist, dann ist f sogar gleichmäßig stetig, und $f(X)$ ist kompakt.*

(c) *Wenn $f : X \to \mathbb{R}$ stetig ist, dann gibt es $a, b \in X$ derart, dass*

$$\forall\, x \in X : \qquad f(a) \;\le\; f(x) \;\le\; f(b)\,.$$

Insbesondere ist also f beschränkt.

Beweis: Da der Raum auch präkompakt ist, gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ endlich viele Punkte $x_{nk} \in X$ derart, dass die $U_{1/n}(x_{nk})$ eine Überdeckung von X sind. Es folgt sofort, dass alle x_{nk} zusammengenommen dicht sind, und deshalb gilt (a). Zu (b): Sei $\varepsilon > 0$, dann gibt es zu jedem $x \in X$ ein $\delta(x) > 0$, so dass (1.3.1) gilt. Die Menge der $U_{\delta(x)/2}(x)$ ist eine offene Überdeckung von X, und somit gibt es endlich viele $x_1, \ldots, x_n \in X$, so dass auch $U_{\delta(x_1)/2}(x_1), \ldots, U_{\delta(x_n)/2}(x_n)$ eine Überdeckung bilden. Seien $x, y \in X$, und sei k so, dass $x \in U_{\delta(x_k)/2}(x_k)$. Ist dann $d(x,y) < \delta := \min\{\delta(x_1)/2, \ldots, \delta(x_n)/2\}$, so folgt $x, y \in U_{\delta(x_k)}(x_k)$, und deshalb gilt

$$\tilde d(f(x), f(y)) \;\le\; \tilde d(f(x), f(x_k)) \;+\; \tilde d(f(x_k), f(y)) \;<\; 2\,\varepsilon\,.$$

Das impliziert die gleichmäßige Stetigkeit von f. Die Kompaktheit von $f(X)$ folgt leicht aus der Definition der Kompaktheit und der Charakterisierung der Stetigkeit mit Hilfe von offenen Mengen. Für (c) können wir aus (b) folgern, dass $f(X)$ eine kompakte, also eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, und jede solche Menge besitzt ein maximales und ein minimales Element. □

Definition 1.7.9 *In einem metrischen Raum (X,d) setzen wir für zwei nichtleere Teilmengen $E, F \subset X$*

$$d(E,F) \;=\; \inf\{d(x,y) \;:\; x \in E\,,\; y \in F\}$$

und interpretieren das als den Abstand der Mengen E und F. *Beachte dazu aber die nächste Aufgabe. Wenn $E = \{x\}$ nur ein Element hat, schreiben wir auch $d(x,F)$ anstatt $d(E,F)$.*

Aufgabe 1.7.10 *Seien $E, F \subset X$ zwei nichtleere Teilmengen eines metrischen Raumes (X,d). Zeige: Im Allgemeinen folgt aus $d(E,F) = 0$ nicht, dass $E \cap F \ne \emptyset$ ist, selbst wenn beide abgeschlossen sind. Wenn aber E kompakt und F abgeschlossen ist, und wenn $E \cap F = \emptyset$ ist, dann folgt in der Tat $d(E,F) > 0$.*

1.8 Funktionenräume

Lemma 1.8.1 *Sei (X,d) ein metrischer Raum, und sei $\bar d(x,y) = \min\{d(x,y), 1\}$ für alle $x, y \in X$. Dann ist $\bar d$ eine Metrik auf X und zu d äquivalent, und eine Folge (x_n) ist genau dann konvergent bzw. eine Cauchyfolge bezüglich d, wenn sie auch bezüglich $\bar d$ konvergiert bzw. Cauchyfolge ist. Insbesondere ist (X,d) genau dann vollständig, wenn auch $(X,\bar d)$ vollständig ist.*

Beweis: Offenbar erfüllt $\bar d$ die ersten beiden Axiome einer Metrik. Für $x, y, z \in X$ gilt: Falls $\bar d(x,z) + \bar d(z,y) \ge 1$ ist, dann gilt auch die Dreiecksungleichung für $\bar d$. Im anderen Fall ist aber $\bar d(x,z) = d(x,z)$ und $\bar d(z,y) = d(z,y)$, und dann folgt $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) < 1$, also $\bar d(x,y) = d(x,y)$, und die Dreiecksungleichung ist auch in diesem Fall erfüllt. Für $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$ folgt mit $\delta_1 = \varepsilon$, $\delta_2 = \min\{1, \varepsilon\}$: $d(x,x_0) < \delta_1 \implies \bar d(x,x_0) < \varepsilon$ und $\bar d(x,x_0) < \delta_2 \implies d(x,x_0) < \varepsilon$. Daraus folgt die Äquivalenz der Metriken. Da die Konvergenz einer Folge nur von der Topologie des Raumes abhängt, können wir uns jetzt

o. B. d. A. darauf beschränken, Cauchyfolgen (x_n) zu betrachten: Wegen $\bar{d}(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_m)$ ist klar, dass jede Cauchyfolge bezüglich d auch eine für $\bar{d}$ ist. Für die Umkehrung sei $\varepsilon > 0$ und $\tilde{\varepsilon} = \min\{1, \varepsilon\}$. Dann existiert nach Voraussetzung ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\bar{d}(x_n, x_m) < \tilde{\varepsilon}$ für alle $n, m \geq N$. Da in diesem Fall $d(x_n, x_m) = \bar{d}(x_n, x_m)$ ist, folgt dass $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ ist. □

Definition 1.8.2 *Seien X eine nicht-leere Menge und (Y, d) ein metrischer Raum. Wir setzen $F(X, Y)$ gleich der Menge aller Abbildungen $f : X \to Y$. Für $f, g \in F(X, Y)$ definieren wir*

$$\rho(f, g) \;=\; \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))\,,$$

wobei zu beachten ist, dass ρ auch den Wert ∞ annehmen kann. Wenn (X, d_X) ebenfalls ein metrischer Raum ist, dann bezeichne $C(X, Y)$ die Menge aller stetigen Abbildungen von X nach Y. Wir nennen $E \subset Y$ beschränkt, *falls $\sup\{d(y_1, y_2) : \; y_1, y_2 \in E\} < \infty$ ist. Beachte, dass wir d durch die äquivalente Metrik $\bar{d}$ ersetzen und dadurch erreichen können, dass alle E beschränkt sind.*

Aufgabe 1.8.3 *Sei (X, d) ein metrischer Raum, und sei $E \subset X$. Zeige: Genau dann ist E beschränkt, wenn es ein $x_0 \in X$ und ein $K \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $x \in E$ gilt $d(x, x_0) \leq K$.*

Proposition 1.8.4 *Seien X eine nicht-leere Menge und (Y, d_Y) ein beschränkter metrischer Raum. Dann ist ρ eine Metrik auf $F(X, Y)$, und falls (Y, d_Y) vollständig ist, dann ist es auch $(F(X, Y), \rho)$. Falls auch (X, d_X) ein metrischer Raum ist, dann ist $C(X, Y)$ abgeschlossen in $(F(X, Y), \rho)$, also ebenfalls vollständig, falls (Y, d_Y) vollständig ist.*

Beweis: Da (Y, d_Y) beschränkt ist, folgt $\rho(f, g) < \infty$ für alle $f, g \in F(X, Y)$. Die ersten beiden Axiome einer Metrik sind für ρ offenbar erfüllt, und die Dreiecksungleichung folgt, da

$$d_Y(f(x), g(x)) \leq d_Y(f(x), h(x)) + d_Y(h(x), g(x)) \leq \rho(f, h) + \rho(h, g) \qquad \forall\, x \in X \quad \forall\, f, g, h \in F(X, Y)\,.$$

Wenn (f_n) eine Cauchyfolge in $(F(X, Y), \rho)$ ist, dann folgt für jedes feste $x \in X$ dass $(f_n(x))$ eine Cauchyfolge in (Y, d_Y) ist. Wenn also (Y, d_Y) vollständig ist, sind alle diese Folgen konvergent gegen ein $f(x) \in Y$. Für $\varepsilon > 0$ und genügend großes $N \in \mathbb{N}$ ist $\rho(f_n, f_m) < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$, und daraus folgt für $m \to \infty$ dass $\rho(f_n, f) \leq \varepsilon$ ist für alle $n \geq N$. Also ist $(F(X, Y), \rho)$ vollständig. Um zu zeigen, dass $C(X, Y)$ in $(F(X, Y), \rho)$ abgeschlossen ist, reicht es zu beweisen, dass aus $\rho(f_n, f) \to 0$ für $n \to \infty$ folgt dass f stetig auf X sein muss, wenn nur alle f_n stetig sind. Dazu sei (x_ν) ein Folge aus X, welche gegen ein $x \in X$ konvergiert. Für $\varepsilon > 0$ sei N so, dass $\rho(f_n, f) < \varepsilon$ ist, wenn nur $n \geq N$. Für jedes feste $n \geq N$ gilt dann aber (mit der Metrik in Y)

$$d_Y(f(x), f(x_\nu)) \;\leq\; d_Y(f(x), f_n(x)) + d_Y(f_n(x), f_n(x_\nu)) + d_Y(f_n(x_\nu), f_n(x)) \;<\; 2\,\varepsilon + d_Y(f_n(x_\nu), f_n(x))\,,$$

und da $d_Y(f_n(x_\nu), f_n(x)) \to 0$ für $\nu \to \infty$ (und festes n), folgt insgesamt $d_Y(f(x), f(x_\nu)) < 3\,\varepsilon$ für alle hinreichend großen ν. Also ist f (folgen-)stetig. □

Satz 1.8.5 *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, und sei (X, d_X) kompakt sowie (Y, d_Y) vollständig. Dann ist ρ eine Metrik auf $C(X, Y)$, und $(C(X, Y), \rho)$ ist vollständig.*

Beweis: Seien $f, g \in C(X, Y)$. Die Abbildung $x \mapsto d(f(x), g(x))$ ist auf X stetig, also beschränkt nach Satz 1.7.8, und deshalb ist $\rho(f, g) < \infty$. Genauso wie im Beweis des vorherigen Satzes folgt dann die Behauptung. □

1.9 Gleichgradige Stetigkeit

Definition 1.9.1 *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Teilmenge $E \subset C(X, Y)$ heißt dann* gleichgradig stetig *in $x_0 \in X$, falls gilt*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, f \in E \quad \forall\, x \in X: \quad d_X(x, x_0) \;<\; \delta \quad \Longrightarrow \quad d_Y(f(x), f(x_0)) \;<\; \varepsilon\,.$$

Wenn dies für alle x_0 aus einer Menge $B \subset X$ erfüllt ist, nennen wir E gleichgradig stetig auf B. Beachte aber, dass das δ in der Definition durchaus von x_0 abhängen darf.

Satz 1.9.2 *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) kompakte metrische Räume. Eine Teilmenge $E \subset C(X, Y)$ ist genau dann gleichgradig stetig auf X, wenn E in dem metrischen Raum $(C(X, Y), \rho)$ präkompakt ist.*

Beweis: Sei E präkompakt, und seien $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in X$. Dann gibt es $f_1, \ldots, f_n \in E$ so, dass $E \subset \cup_k U_\varepsilon(f_k)$. Zu jedem f_k existiert ein $\delta_k > 0$ mit $d_Y(f_k(x), f_k(x_0)) < \varepsilon$ für alle x mit $d_X(x, x_0) < \delta_k$. Wir setzen $\delta = \{\min \delta_1, \ldots, \delta_n\}$. Für $f \in E$ gibt es dann ein $k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $f \in U_\varepsilon(f_k)$, und daher folgt aus $d_X(x, x_0) < \delta$ dass $d_Y(f(x), f(x_0)) \le d_Y(f(x), f_k(x)) + d_Y(f_k(x), f_k(x_0)) + d_Y(f_k(x_0), f(x_0)) < 3\,\varepsilon$ ist. Daher folgt die gleichgradige Stetigkeit von E. Umgekehrt, sei E gleichgradig stetig, und sei $\varepsilon > 0$. Zu jedem $x \in X$ gibt es dann ein $\delta(x) > 0$, für welches $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ ist für alle $f \in E$ und alle $y \in U_{\delta(x)}(x)$. Wegen der Kompaktheit von (X, d) gibt es dann $x_1, \ldots, x_n \in X$ für welche $X = \cup_j U_{\delta(x_j)}(x_j)$ ist. Da auch (Y, d) kompakt ist, gibt es $y_1, \ldots, y_m \in Y$ mit $Y = \cup_k U_\varepsilon(y_k)$. Sei α eine beliebige Abbildung von $\{1, \ldots, n\}$ nach $\{1, \ldots, m\}$. Falls es ein $f \in E$ gibt mit $f(x_j) \in U_\varepsilon(y_{\alpha(j)})$ für $j = 1, \ldots, n$, dann sei ein solches f mit f_α bezeichnet. Da es nur endlich viele Abbildungen α gibt, erhalten wir so eine endliche Teilmenge von E. Sei jetzt $f \in E$; dann gibt es ein α mit $f(x_j) \in U_\varepsilon(y_{\alpha(j)})$, für alle $j = 1, \ldots, n$. Für $x \in X$ und alle $j = 1, \ldots, n$ folgt dann

$$d(f(x), f_\alpha(x)) \;\le\; d(f(x), f(x_j)) \;+\; d(f(x_j), f_\alpha(x_j)) \;+\; d(f_\alpha(x_j), f_\alpha(x))\,.$$

Wenn wir jetzt j so wählen, dass $x \in U_{\delta(x_j)}(x_j)$ ist, so folgt $d(f(x), f(x_j)) < \varepsilon$, $d(f_\alpha(x_j), f_\alpha(x)) < \varepsilon$ und $d(f(x_j), f_\alpha(x_j)) < 2\,\varepsilon$, also $d(f(x), f_\alpha(x)) < 4\,\varepsilon$. Da x beliebig war, folgt die totale Beschränktheit der Menge E. □

1.10 Der Satz von Arzela-Ascoli

Definition 1.10.1 *Seien X eine nicht-leere Menge und (Y, d) ein metrischer Raum, und sei $E \subset F(X, Y)$. Wir nennen E* punktweise beschränkt*, falls gilt*

$$\forall\, x \in X \quad \exists\, K \in \mathbb{R} \quad \forall\, f_1, f_2 \in E: \quad d(f_1(x), f_2(x)) \;\le\; K\,.$$

Dagegen heißt E gleichmäßig beschränkt*, falls gilt*

$$\exists\, K \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in X \quad \forall\, f_1, f_2 \in E: \quad d(f_1(x), f_2(x)) \;\le\; K\,.$$

Im ersten Fall darf also K von x abhängen, im anderen Fall dagegen nicht.

Lemma 1.10.2 *Seien (X, d) ein kompakter metrischer Raum und (Y, d) ein metrischer Raum. Wenn $E \subset C(X, Y)$ gleichgradig stetig und punktweise beschränkt ist, dann ist E sogar gleichmäßig beschränkt.*

Beweis: Wegen der gleichgradigen Stetigkeit folgt für jedes $x \in X$ die Existenz eines $U_x \in \mathcal{U}(x)$ so dass für alle $f \in E$ und alle $y \in U_x$ gilt $d(f(x), f(y)) < 1$. Wegen der Kompaktheit von (X, d) gibt es

$x_1, \dots, x_n \in X$ mit $X = \cup_k U_{x_k}$, und aus der punktweisen Beschränktheit folgt die Existenz von K_k so, dass für alle $f_1, f_2 \in E$ gilt $d(f_1(x_k), f_2(x_k)) \le K_k$, für $k = 1, \dots, n$. Mit $K = 2 + \max\{K_1, \dots, K_n\}$ gilt dann: Zu $x \in X$ gibt es ein $k \in \{1, \dots, n\}$ mit $x \in U_{x_k}$, und daher ist

$$d(f_1(x), f_2(x)) \ \le\ d(f_1(x), f_1(x_k)) \ +\ d(f_1(x_k), f_2(x_k)) + d(f_2(x_k), f_2(x)) \ \le\ K_k + 2 \ \le K \quad \forall\, x \in X\,.$$

Das ist die gleichmäßige Beschränktheit. □

Definition 1.10.3 *Wir sagen dass ein metrischer Raum die* Heine-Borel-Eigenschaft *besitzt, wenn jede abgeschlossene und beschränkte Teilmenge kompakt ist.*

Satz 1.10.4 (Satz von Arzela-Ascoli) *Seien (X, d) ein kompakter metrischer Raum und (Y, d) ein metrischer Raum mit der Heine-Borel-Eigenschaft. Für eine Teilmenge $E \subset C(X, Y)$ ist $\overline{E}$ genau dann kompakt, wenn E gleichgradig stetig und punktweise beschränkt ist.*

Beweis: Wenn $\overline{E}$ kompakt ist, dann ist es total beschränkt. Somit existieren $f_1, \dots, f_n \in \overline{E}$ so, dass $E \subset \overline{E} \subset \cup_j U_1(f_j)$ ist. Also gibt es zu jedem $f \in E$ ein $k \in \{1, \dots, n\}$, für welches $\rho(f, f_k) = \sup_{x \in X} d(f(x), f_k(x)) < 1$ ist. Daher gilt für jedes feste $f_0 \in E$:

$$\forall\, f \in E \quad \forall\, x \in X: \quad d(f_0(x), f(x)) \ \le\ d(f_0(x), f_k(x)) + d(f_k(x), f(x)) \ \le\ K + 1\,,$$

mit $K = \max_{1 \le k \le n} \sup_{x \in X} d(f_0(x), f_k(x))$. Das ist die gleichmäßige Beschränktheit von E, und aus ihr folgt dass die Menge $Z = \overline{\cup_{f \in E} f(X)}$ beschränkt und somit kompakt ist, und wir haben dass alle f die Menge X in Z abbilden. Daraus folgt mit Hilfe des letzten Satzes die gleichgradige Stetigkeit von E, und die punktweise folgt trivialerweise aus der gleichmäßigen Beschränktheit. Umgekehrt, sei jetzt E gleichgradig stetig und punktweise beschränkt. Mit dem letzten Lemma folgt dann die gleichmäßige Beschränktheit von E, und dann folgt wie oben, dass die Menge Z kompakt ist. Mit dem letzten Satz folgt dann die totale Beschränktheit von E, also auch die von $\overline{E}$, und daraus folgt wiederum die Kompaktheit. □

1.11 Der Bairesche Kategoriensatz

Lemma 1.11.1 *In jedem vollständigen metrischen Raum (X, d) gilt: Sind die Mengen $A_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, alle abgeschlossen und nicht leer, und ist*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}: \qquad A_n \supset A_{n+1}\,, \qquad d(A_n) \ :=\ \sup_{x,y \in A_n} d(x, y) \ \to\ 0 \quad (n \to \infty)\,,$$

so enthält $\cap_n A_n$ genau einen Punkt $x_0 \in X$.

Beweis: Sei $x_n \in A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist für $n, p \in \mathbb{N}$ immer $x_{n+p} \in A_n$, und somit folgt $d(x_{n+p}, x_n) \le d(A_n)$. Daraus schließen wir, dass (x_n) eine Cauchyfolge ist und wegen der Vollständigkeit einen Grenzwert x_0 besitzt. Da alle A_n abgeschlossen sind, folgt $x_0 \in A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist y ebenfalls im Durchschnitt aller A_n, so folgt $d(x_0, y) \le d(A_N)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, weswegen $y = x_0$ sein muss. □

Definition 1.11.2 *Ein metrischer Raum (X, d) heißt* Baire-Raum*, falls gilt: Wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ die Menge $A_n \subset X$ abgeschlossen ist und keine inneren Punkte hat, so hat auch die Vereinigung aller A_n keine inneren Punkte.*

Beispiel 1.11.3 *Die Menge $\mathbb{Q}$ mit der euklidischen Topologie ist kein Baire-Raum, da sie die abzählbare Vereinigung von einelementigen Mengen ist. Allgemeiner ist jeder abzählbare metrische Raum kein Baire-Raum.*

Satz 1.11.4 *Vollständige metrische Räume sind immer Baire-Räume.*

Beweis: Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum mit Metrik d, und seien die Mengen $A_n \subset X$ abgeschlossen und ohne innere Punkte. Sei O offen und nicht leer. Dann wollen wir nicht-leere offene Mengen O_n mit $O_0 = O$ so wählen, dass $\overline{O}_n \subset O_{n-1}$ und $\overline{O}_n \cap A_n = \emptyset$ ist, jeweils für $n \geq 1$. Wenn $O_0, \ldots, O_{n-1}$ bereits gewählt sind, dann ist $V := O_{n-1} \cap (X \setminus A_n)$ eine offene Menge und nicht leer, denn sonst wäre $O_{n-1} \subset A_n$, was $\mathring{A}_n = \emptyset$ widerspricht. Sei $x \in V$, dann gibt es ein offenes O_n, etwa eine Kugel mit hinreichend kleinem Radius, mit $x \in O_n \subset \overline{O}_n \subset V$, und dieses O_n hat die gewünschte Eigenschaft. O. B. d. A. können wir zusätzlich O_n noch so verkleinern, dass $d(\overline{O}_n) \leq 1/n$ ist. Mit Hilfe des letzten Lemmas folgt dann dass der Durchschnitt aller $\overline{O}_n$ genau einen Punkt x enthält. Also folgt nach Wahl der O_n dass $x \in \cap_n (X \setminus A_n) = X \setminus \cup_n A_n$. Wegen $x \in \overline{O}_1 \subset O_0 = O$ folgt dass $O \not\subset \cup_n A_n$ ist. Da O eine beliebige offene Menge gewesen ist, kann $\cup_n A_n$ keine inneren Punkte haben. □

Proposition 1.11.5 *Ein metrischer Raum (X, d) ist genau dann ein Baire-Raum, wenn folgendes gilt: Sind die Mengen O_n offen und dicht in (X, d), für $n \in \mathbb{N}$, dann ist ihr Durchschnitt dicht in (X, d).*

Beweis: Ein O_n ist genau dann offen und dicht, wenn $A_n := X \setminus O_n$ abgeschlossen ist und keine inneren Punkte hat. Daraus folgt die Behauptung. □

Als eine schöne Anwendung des Baireschen Satzes zeigen wir:

Satz 1.11.6 *Sei $[a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall, seien $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ stetig und punktweise konvergent auf $[a, b]$. Dann ist die Menge aller Punkte, in denen die Grenzfunktion f stetig ist, dicht in $[a, b]$.*

Beweis: Für $n, m \in \mathbb{N}$ sei $A_{nm} = \{x \in [a, b] : \ |f_n(x) - f_{n+p}(x)| \leq 1/m \quad \forall\, p \in \mathbb{N}\}$. Wegen der Stetigkeit der Funktionen f_n folgt, dass alle A_{nm} abgeschlossen sind, und wegen der punktweisen Konvergenz ist $\cup_n A_{nm} = [a, b]$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Wir wollen zeigen, dass die Grenzfunktion f in allen Punkten $x \in B := \cap_m (\cup_n \mathring{A}_{nm})$ stetig ist. Dazu sei ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Wenn $x \in B$ ist, dann gibt es zu jedem m ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $\delta > 0$ mit $t \in A_{nm}$ für alle $t \in [a, b]$ mit $|x - t| < \delta$. Wir wählen ein m mit $1/m \leq \varepsilon/3$, und erhalten mit den dazu existierenden n und δ:

$$|f(t) - f(x)| = \lim_{p \to \infty} |f_{n+p}(t) - f_{n+p}(x)| \leq \limsup_{p \to \infty} \Big(|f_{n+p}(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_{n+p}(x)| \Big)$$

und die rechte Seite ist für x und t wie oben maximal gleich $2/m + |f_n(t) - f_n(x)| \leq 2\varepsilon/3 + |f_n(t) - f_n(x)|$. Wenn wir jetzt δ evtl. noch verkleinern, so können wir erreichen dass $|f_n(t) - f_n(x)| < \varepsilon/3$ ausfällt, was die Stetigkeit von f in x sichert.

Sei jetzt $O_{nm} = [a, b] \setminus (A_{nm} \setminus \mathring{A}_{nm})$. Dann hat $[a, b] \setminus O_{nm}$ keine inneren Punkte, was zeigt dass O_{nm} in $[a, b]$ dicht liegt. Außerdem ist O_{nm} offen, und daher folgt aus der obigen Proposition dass der Durchschnitt aller O_{nm} ebenfalls dicht in $[a, b]$ ist. Wenn aber x ein Punkt dieses Durchschnitts ist, dann folgt $x \notin (A_{nm} \setminus \mathring{A}_{nm})$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Da für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $x \in A_{nm}$, folgt für jedes m die Existenz eines n mit $x \in \mathring{A}_{nm}$. Demzufolge ist $\cap_{n,m} O_{nm} \subset B$. Daraus folgt die Behauptung. □

Definition 1.11.7 *Eine Teilmenge E eines metrischen Raumes (X, d) heißt* nirgends dicht*, falls der Abschluss von E keine inneren Punkte besitzt. Wir sagen, dass E in (X, d)* von erster Kategorie ist*, falls es Vereinigung von abzählbar vielen nirgends dichten Mengen ist. Ist dies nicht der Fall, so heißt E* von zweiter Kategorie.

Aufgabe 1.11.8 *Zeige: Eine abgeschlossene Teilmenge A eines metrischen Raumes (X, d) ist genau dann nirgends dicht, wenn ihr Komplement dicht in (X, d) ist. Zeige weiter, dass eine Vereinigung abzählbar vieler Mengen von erster Kategorie wieder von erster Kategorie ist.*

Satz 1.11.9 (Bairescher Kategoriensatz) *Ein vollständiger metrischer Raum ist von zweiter Kategorie.*

Beweis: Sei (X, d) ein metrischer Raum von erster Kategorie, also $X = \cup_n E_n$, mit nirgends dichten Mengen E_n, $n \in \mathbb{N}$. O. B. d. A. können alle E_n als abgeschlossen vorausgesetzt werden. Da X per Definition immer offen ist und deshalb innere Punkte hat, kann (X, d) kein Baire-Raum sein, und deshalb folgt die Behauptung aus Satz 1.11.4. □

Kapitel 2

Stetige lineare Abbildungen

Wenn nichts anderes gesagt wird, sind X, Y, Z im Folgenden immer normierte (Vektor-)Räume über dem gleichen Körper $\mathbb{K}$, wobei wie üblich $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sein kann. Im ersten bzw. zweiten Fall sprechen wir auch von reellen bzw. komplexen Räumen. Es ist bequem, die Normen in den Räumen X, Y, Z immer mit dem gleichen Symbol $\|\cdot\|$ zu bezeichnen; nur falls dies zu Missverständnissen führen könnte, wollen wir davon abweichen. Da jeder normierte Raum immer auch ein metrischer Raum ist, gelten alle Definitionen und Ergebnisse aus dem ersten Kapitel sinngemäß auch für normierte Räume. Insbesondere ist klar, was ein vollständiger normierter Raum ist, und jeder solche Raum wird künftig kurz als *Banachraum* bezeichnet. Wir geben noch folgende wichtige Beispiele von Banachräumen, ohne im Einzelnen ihre Vollständig zu beweisen:

- Für $p \geq 1$ ist ℓ_p wie in Beispiel 1.4.4 ein Banachraum mit der dort angegebenen Norm.
- Die Menge ℓ_∞ aller beschränkten Zahlenfolgen mit Gliedern in $\mathbb{K}$ ist ein Banachraum über $\mathbb{K}$ mit der Norm $\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|$.
- Die Menge c aller konvergenten Zahlenfolgen ist ein abgeschlossener Unterraum von ℓ_∞ und deshalb selber ein Banachraum (mit der gleichen Norm). Dasselbe gilt für die Menge c_0 aller Nullfolgen.
- Für eine beliebige nichtleere Menge D ist die Menge $\mathcal{F}_\infty(D)$ aller beschränkten Abbildungen $f : D \to \mathbb{K}$ ein Banachraum über $\mathbb{K}$ unter der Supremumsnorm

  $$\|f\| \;=\; \sup_{t\in D} |f(t)|\,.$$

  Offenbar ist ℓ_∞ ein Spezialfall dieses Raumes für $D = \mathbb{N}$. Noch allgemeiner ist die Menge $\mathcal{F}_\infty(D, X)$ aller beschränkten Abbildungen von D in einen beliebigen Banachraum X selber wieder ein Banachraum unter der Norm

  $$\|f\| \;=\; \sup_{t\in D} \|f(t)\|\,,$$

  wobei rechts die Norm in X gemeint ist.
- Für einen metrischen Raum (D, d) ist die Menge $C(D)$ aller auf D stetigen und beschränkten Abbildungen nach $\mathbb{K}$ ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{F}_\infty(D)$, also selbst ein Banachraum. Falls (D, d) kompakt ist, ist jede auf D stetige Abbildung beschränkt, und deshalb ist $C(D)$ in diesem Fall der Raum *aller auf D stetigen Abbildungen*. Für uns wird der Fall $D = [a, b]$ eine wichtige Rolle spielen, wobei $[a, b]$ immer ein nichttriviales abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$ ist, d. h. insbesondere $a < b$. Wir schreiben dann auch $C[a, b]$ an Stelle von $C(D)$, wobei in der Regel offen bleibt, ob wir als Wertebereich der Funktionen $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ betrachten.

- Die Menge $C^{(n)}[a,b]$ aller auf $[a,b]$ mindestens n-mal stetig differenzierbaren Funktionen ist ein Banachraum unter der Norm

$$\|f\| \;=\; \max_{j=0}^{n} \; \|f^{(j)}\|_\infty \,.$$

Statt dieser verwendet man auch oft die Norm

$$\|f\| \;=\; \sum_{j=0}^{n} \; \|f^{(j)}\|_\infty \,;$$

beide Normen sind äquivalent im Sinne von Abschnitt 2.4.

- Die Menge $BV[a,b]$ der Funktionen, die auf $[a,b]$ *von beschränkter Variation* sind, ist ein Banachraum unter der Norm

$$\|f\|_{BV} \;=\; |f(a)| \;+\; V_a^b(f)\,.$$

Dabei bezeichnet

$$V_a^b(f) \;=\; \sup_{\mathcal{Z}} \; \sum_{k=1}^{n} \; |f(t_k) - f(t_{k-1})|$$

die *Variation* von f über dem Intervall $[a,b]$, wobei sich das Supremum über alle Zerlegungen $\mathcal{Z} = \{a = t_0 < \ldots < t_n = b\}$ erstreckt.

2.1 Elementare Eigenschaften

Aus der linearen Algebra ist der Begriff der linearen Abbildung bekannt. Da wir jetzt normierte Räume betrachten, können wir untersuchen, welche (falls nicht alle) linearen Abbildungen stetig sind. Dazu bezeichnen wir mit $B_X = \{x \in X : \|x\| < 1\}$ bzw. $\overline{B}_X = \{x \in X : \|x\| \le 1\}$ die offene bzw. abgeschlossene *Einheitskugel* in X und schreiben für eine lineare Abbildung $T:\ X \to Y$ statt $T(x)$ kürzer $T\,x$.

Aufgabe 2.1.1 *Zeige, dass die abgeschlossene Hülle von B_X in der Tat gleich $\{x \in X : \|x\| \le 1\}$ ist. Zeige weiter, dass* $\operatorname{rd} B_X = \{x :\ \|x\| = 1\}$*, und vergleiche mit* Aufgabe 1.2.7 *und* Aufgabe 1.2.10.

Satz 2.1.2 (Stetigkeit linearer Abbildungen) *Für jede lineare Abbildung $T\ :\ X \to Y$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *Es gibt ein $x_0 \in X$ so, dass T im Punkt x_0 stetig ist.*

(b) *T ist stetig im Punkt $x_0 = 0$.*

(c) *T ist stetig auf X.*

(d) *T ist auf $\overline{B}_X$ beschränkt, d. h., es gibt ein $c \ge 0$ so, dass $\|T\,x\| \le c$ für alle $x \in \overline{B}_X$.*

(e) *Es gibt ein $c \ge 0$ derart, dass $\|T\,x\| \le c\,\|x\|$ für alle $x \in X$.*

Beweis: Da für alle $x_1, x_2 \in X$ immer $T(x_1 \pm x_2) = T\,x_1 \pm T\,x_2$ ist, folgt die Äquivalenz von (a), (b) und (c). Wegen $\|T(\lambda\,x)\| = |\lambda|\,\|T\,x\|$ für alle $x \in X$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ folgt die Äquivalenz von (d) und (e), und aus (e) folgt sogar die Lipschitzstetigkeit von T. Um (d) aus (b) zu folgern, beachte dass B_Y eine Umgebung von $y_0 = 0$ in Y ist, und somit ist $T^{-1}(B_Y)$ Umgebung von $x_0 = 0$ in X. Also existiert ein $\delta > 0$ so, dass $U_\delta(0) \subset T^{-1}(B_Y)$ ist. Für $x \in B_X$ ist $\delta\,x \in U_\delta(0)$, und daher folgt $T(\delta\,x) = \delta\,T\,x \in B_Y$, also $\|T\,x\| \;\le\; \delta^{-1}$. Da die Menge der $x \in X$ mit $\|T\,x\| \le \delta^{-1}$ abgeschlossen ist, folgt (d). $\square$

Aufgabe 2.1.3 *Zeige, dass die Aussage* (d) *des letzten Satzes auch äquivalent zur Beschränktheit auf dem Rand von* $\overline{B}_X$ *ist.*

Bemerkung 2.1.4 *Beachte, dass die Menge* $\overline{B}_X$ *im Allgemeinen nicht kompakt ist, so dass die Bedingung* (d) *des letzten Satzes nicht immer erfüllt sein muss. Tatsächlich werden wir noch sehen, dass genau dann jede lineare Abbildung* $T : X \to Y$ *stetig ist, wenn* X *endliche Dimension hat.*

Definition 2.1.5 *Mit* $\mathcal{L}(X, Y)$ *bezeichnen wir die Menge aller stetigen linearen Abbildungen von* X *nach* Y. *Offenbar ist* $\mathcal{L}(X, Y)$ *ein Vektorraum über* $\mathbb{K}$. *Jedes* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ *wird auch als* beschränkter Operator *von* X *nach* Y *bezeichnet. Falls* $Y = X$ *ist, sprechen wir auch von einem beschränkten Operator auf* X *und schreiben* $\mathcal{L}(X, Y) = \mathcal{L}(X)$. *Wir setzen noch*

$$\forall\, T \in \mathcal{L}(X, Y) : \qquad \|T\| = \sup\{\|T\,x\| \ : \ x \in \overline{B}_X\} \tag{2.1.1}$$

und nennen $\|\cdot\|$ *die* Operatornorm *auf* $\mathcal{L}(X, Y)$. *Dass dies tatsächlich eine Norm ist, wird im nächsten Satz gezeigt.*

Beispiel 2.1.6 *Die* Nullabbildung $x \mapsto 0 \in Y$ *für alle* $x \in X$ *ist immer ein beschränkter Operator von* X *nach* Y, *und die* identische Abbildung $x \mapsto x$ *für alle* $x \in X$ *ist immer in* $\mathcal{L}(X)$. *Weiter geben wir folgende wichtige Beispiele von beschränkten Operatoren in einigen der Banachräume, die oben vorgestellt wurden:*

1. Sei $X = C[a, b]$, und sei k eine sogenannte *stetige Kernfunktion* - das soll heißen, dass k eine stetige Funktion auf $[a, b]^2$ ist. Dann heißt die Abbildung T mit

$$\forall\, x \in C[a, b] : \qquad (T\,x)(s) = \int_a^b k(s, t)\, x(t)\, dt \tag{2.1.2}$$

   ein *Fredholm-Operator*. Es folgt aus der Analysis, dass $T\,x$ wieder auf $[a, b]$ stetig ist, und deshalb ist T eine lineare Abbildung von $X = C[a, b]$ in sich. Durch eine einfache Abschätzung des Integrals folgt

$$\|T\,x\|_\infty \le K\, \|x\|_\infty\,, \qquad K = \max_{s \in [a,b]} \int_a^b |k(s, t)|\, dt\,,$$

   und deshalb ist $T \in \mathcal{L}(C[a, b])$ mit $\|T\| \le K$. Ob hier sogar das Gleichheitszeichen gilt, soll nicht untersucht werden.

2. Wenn k eine stetige Funktion zweier reeller Veränderlicher auf dem Dreieck $\Delta = \{a \le t \le s \le b\}$ ist, so nennt man den Operator

$$(T\,x)(s) = \int_a^s k(s, t)\, x(t)\, dt \tag{2.1.3}$$

   auch einen *Volterraschen Operator* auf $C[a, b]$. Auch dieser Operator ist stetig.

3. Wie die Spektraltheorie zeigen wird, gibt es stetige Operatoren von $C[a, b]$ in sich, deren Eigenschaften wesentlich von denen der obigen Integraloperatoren verschieden sind; ein einfaches Beispiel ist $(T\,x)(s) = s\,x(s)$.

4. Seien p, q zwei reelle Zahlen aus dem offenen Intervall $(1, \infty)$, und sei p' so, dass $1/p' + 1/p = 1$ ist. Sei weiter $A = [a_{jk}]_{j,k=1}^\infty$ eine Matrix mit unendlich vielen Zeilen und Spalten, für welche

$$\|A\|_{p,q} := \left[\, \sum_{j=1}^\infty \left(\sum_{k=1}^\infty |a_{jk}|^{p'} \right)^{q/p'} \right]^{1/q} < \infty\,. \tag{2.1.4}$$

Sei jetzt $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_p$. Aus der *Hölderschen Ungleichung* folgt dass

$$\forall\, j \in \mathbb{N} : \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}\, x_k| \;\leq\; \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|^{p'} \Big)^{1/p'} \;\; \|x\|_p\,.$$

Daher sind die Reihen $y_j := \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}\, x_k$ für alle $j \in \mathbb{N}$ absolut konvergent, und aus (2.1.4) folgt dass $y := (y_1, y_2, \ldots) \in \ell_q$ ist. Deshalb definiert die Matrix A eine stetige lineare Abbildung T von ℓ_p nach ℓ_q mit $\|T\| \leq \|A\|_{p,q}$, und wir wollen A *Darstellungsmatrix der Abbildung* T nennen. Wir zeigen im nächsten Beispiel, dass jede lineare Abbildung $T : \ell_p \to \ell_q$ eine Darstellungsmatrix besitzt - allerdings zeigt das Beispiel des *Linksshifts*, oder auch die identische Abbildung auf ℓ_p, dass solche Matrizen i. a. nicht (2.1.4) erfüllen.

5. Für p, q mit $1 \leq p < \infty$ und $1 \leq q \leq \infty$ sei jetzt $T \in \mathcal{L}(\ell_p, \ell_q)$ ein beliebiger beschränkter Operator. Dann ist für $x = (x_k) \in \ell_p$ und $T\,x = y = (y_k) \in \ell_q$ die Abbildung $x \mapsto y_k$, als Hintereinanderausführung stetiger Abbildungen, eine stetige Abbildung von ℓ_p nach $\mathbb{K}$. Wenn wir mit $e_n = (\delta_{nk})$ die Folge bezeichnen, die an der n-ten Stelle eine 1 hat, während ihre übrigen Glieder verschwinden, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n\, e_n$, in Sinn der p-Norm, gegen die Folge x. Daraus folgt dass $y = T\,x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\, T\, e_n$ ist, und wenn man $T\, e_n = (a_{kn})_{k=1}^{\infty}$ setzt, ergibt sich

$$y_j \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}\, x_k \qquad \forall\, j \in \mathbb{N}\,. \tag{2.1.5}$$

Also gehört in der Tat zu jedem $T \in \mathcal{L}(\ell_p, \ell_q)$ eine Darstellungsmatrix A. Es ergibt sich aus den Resultaten des nächsten Kapitels, dass ein Operator $T \in \mathcal{L}(\ell_\infty, \ell_q)$ im Allgemeinen keine Darstellungsmatrix besitzt.

6. Der sogenannte *Linksshift* $x = (x_1, x_2, \ldots) \mapsto T\,x = (x_2, x_3, \ldots)$ ist ein stetiger Operator von ℓ_p in sich und hat die Darstellungsmatrix A, wobei alle $a_{jk} = 0$ sind bis auf die direkt oberhalb der Diagonale, welche gleich 1 sind. Diese Matrik erfüllt nicht (2.1.4).

Aufgabe 2.1.7 *Finde eine Bedingung, analog zu* (2.1.4), *dafür dass A Darstellungsmatrix einer stetigen linearen Abbildung T von ℓ_p nach ℓ_∞, bzw. von ℓ_∞ nach ℓ_q ist.*

Aufgabe 2.1.8 *Sei für $x = (x_1, x_2, \ldots) \in c$*

$$\ell(x) \;=\; \lim_{k\to\infty} \; x_k$$

gesetzt. Zeige dass die Abbildung $\ell\,:\; c \to \mathbb{K}$ stetig ist und berechne $\|\ell\|$.

Aufgabe 2.1.9 *Zeige für alle $T \in \mathcal{L}(X, Y)$*

$$\|T\| \;=\; \sup\{\|T\,x\| \;:\; \|x\| = 1\} \;=\; \inf\{c \geq 0 \;:\; \|T\,x\| \;\leq c\,\|x\| \quad \forall\, x \in X\}\;.$$

Folgere hieraus dass für alle $x \in X$ gilt $\|T\,x\| \leq \|T\|\,\|x\|$.

Satz 2.1.10 *Die oben definierte Operatornorm ist eine Norm auf $\mathcal{L}(X, Y)$, und falls Y ein Banachraum ist, dann ist auch $\mathcal{L}(X, Y)$ ein Banachraum.*

Beweis: Die ersten beiden Normeigenschaften folgen direkt mit der Definition. Seien jetzt $T_1, T_1 \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann gilt $\|(T_1 + T_2)\,x\| \leq \|T_1\,x\| + \|T_2\,x\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|$ für alle $x \in \overline{B}_X$, und daraus folgt die Dreiecksungleichung. Zum Beweis der Vollständigkeit sei (T_n) eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}(X, Y)$. Dann ist $\|(T_n - T_m)\,x\| \leq \|(T_n - T_m)\|\,\|x\|$ für alle $x \in X$, und deshalb ist $(T_n\,x)$ eine Cauchyfolge in Y, für alle $x \in X$. Wenn Y vollständig ist, existiert also ein Grenzwert, den wir mit $T\,x$ bezeichnen, und dadurch wird eine lineare Abbildung $T: \ X \to Y$ definiert. Da (T_n) Cauchyfolge ist, gibt es wegen Aufgabe 1.4.2 ein $c \in \mathbb{R}_+$ mit $\|T_n\| \le c$ für alle n, und daher folgt für alle $x \in \overline{B}_X$ die Ungleichung $\|T\,x\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n\,x\| \le c\,\|x\|$. Deshalb ist $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. □

Aufgabe 2.1.11 *Zeige: Sind $T_1 \in \mathcal{L}(X,Y)$ und $T_2 \in \mathcal{L}(Y,Z)$, so ist $T_2 \circ T_1 \in \mathcal{L}(X,Z)$, und es gilt $\|T_2 \circ T_1\| \le \|T_2\|\,\|T_1\|$.*

2.2 Invertierbare Operatoren

Definition 2.2.1 *Ein $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ heißt* (in $L(X,Y)$) invertierbar, *oder auch* ein Isomorphismus, *falls ein $\tilde{T} \in \mathcal{L}(Y,X)$ existiert, so dass $\tilde{T} \circ T = I_X$ und $T \circ \tilde{T} = I_Y$ ist, wobei I_X bzw. I_Y die identische Abbildung auf X bzw. Y bezeichnet. Beachte, dass ein invertierbares T immer bijektiv ist, und dass dann $\tilde{T} = T^{-1}$ die inverse Abbildung zu T ist. Allein aus der Bijektivität folgt aber nicht die Invertierbarkeit, da nicht klar ist, ob die inverse Abbildung beschränkt ist. Wir nennen T eine* lineare Isometrie *oder* linear isometrisch, *wobei das Adjektiv* linear *auch entfallen kann, falls die Linearität von T klar ist, wenn $\|T\,x\| = \|x\|$ für alle $x \in X$. Offenbar ist eine Isometrie immer injektiv und stetig, aber nicht notwendigerweise surjektiv.*

Beispiel 2.2.2 *Ein $T: X \to Y$ kann bijektiv sein, ohne invertierbar zu sein: Sei X die Menge aller Zahlenfolgen, welche ab irgendeiner Stelle identisch verschwinden, versehen mit der $\|\cdot\|_1$-Norm, und sei Y dieselbe Menge, aber mit der $\|\cdot\|_\infty$-Norm. Dann ist die Abbildung $x \mapsto x$ von X nach Y stetig und bijektiv, aber die inverse Abbildung ist unbeschränkt, also unstetig.*

Beispiel 2.2.3 *Ein normierter Raum kann isomorph zu einem echten Teilraum sein: Für $x = (x_n) \in c$ sei $T\,x = (\ell,\, x_1 - \ell,\, x_2 - \ell, \ldots)$, wobei $\ell = \ell(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$ bedeutet. Dann ist $T: c \to c_0$ bijektiv, und $T^{-1}\,y = (y_1 + y_2, y_1 + y_3, \ldots)$. Man findet also $\|T^{-1}\,y\| \le 2\,\|y\|$, und daher ist T invertierbar.*

Aufgabe 2.2.4 *Zeige mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen von* Beispiel 2.1.6 Nr. 5: *Wenn $A = [a_{jk}]$ Darstellungsmatrix eines invertierbaren Operators $T \in \mathcal{L}(\ell_p, \ell_q)$ ist, und wenn $q < \infty$ ist, so hat T^{-1} eine Darstellungsmatrix $B = [b_{jk}]$, und es gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}\, b_{k\mu} \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} b_{jk}\, a_{k\mu} \;=\; \delta_{j\mu} \qquad \forall\ j, \mu \in \mathbb{N}\,.$$

Aus diesem Grund ist es gerechtfertigt, die Darstellungsmatrix von T^{-1} als die zu A inverse Matrix aufzufassen und mit A^{-1} zu bezeichnen. Überlege weiter, warum der Fall $q = \infty$ anders ist.

Definition 2.2.5 *Für $T \in \mathcal{L}(X)$ heißt die "geometrische Reihe" $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ in $\mathcal{L}(X)$ auch* Neumannsche Reihe.

Lemma 2.2.6 *Falls die Neumannsche Reihe für ein $T \in \mathcal{L}(X)$ konvergiert, dann ist $I - T$ invertierbar, wobei $I = I_X$ die identische Abbildung auf X ist, und es gilt*

$$(I \;-\; T)^{-1} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} T^n\,.$$

Ist X ein Banachraum, so ist die Bedingung $\|T\| < 1$ hinreichend für die Konvergenz.

Beweis: Sei die Neumannsche Reihe konvergent, und sei $\tilde{T}$ ihr Wert (in $\mathcal{L}(X)$). Dann folgt

$$T \circ \tilde{T} \;=\; \tilde{T} \circ T \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} T^n \;=\; \tilde{T} \;-\; I\,.$$

Dies ist äquivalent zu $(I - T) \circ \tilde{T} = \tilde{T} \circ (I - T) = I$. Aus Aufgabe 2.1.11 folgt $\|T^n\| \leq \|T\|^n$, und hieraus folgt dass die Neumannschen Reihe für $\|T\| < 1$ ein Cauchyreihe ist. Mit Satz 2.1.10 folgt dann die Konvergenz. □

Aufgabe 2.2.7 *Sei X ein Banachraum. Zeige dass die Neumannsche Reihe genau dann konvergiert, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $\|T^m\| < 1$.*

Aufgabe 2.2.8 *Seien X und Y Banachräume. Zeige dass die Menge der invertierbaren T eine offene Teilmenge von $\mathcal{L}(X, Y)$ ist.* **Hinweis:** *Schreibe*

$$S \;=\; (I_Y \;-\; (T - S) \circ T^{-1}) \circ T \;=\; T \circ (I_X \;-\; T^{-1} \circ (T - S))$$

und benutze Lemma 2.2.6.

2.3 Fortsetzung dicht definierter Operatoren

Definition 2.3.1 *Wenn X_0 ein dichter Teilraum von X ist, dann heißt ein $T \in \mathcal{L}(X_0, Y)$ auch* dicht definiert *in X. Ein $T_f \in \mathcal{L}(X, Y)$ mit $T_f\, x = T\, x$ für alle $x \in X_0$ heißt dann* Fortsetzung *von T auf X.*

Lemma 2.3.2 (Fortsetzbarkeit dicht definierter Operatoren) *Sei Y ein Banachraum, und sei T in X dicht definiert. Dann gibt es genau eine Fortsetzung T_f von T auf X, und es gilt $\|T_f\| = \|T\|$.*

Beweis: Sei X_0 der (dichte) Definitionsbereich von T. Zu $x \in X$ gibt es also eine Folge (x_n) aus X_0 mit $x_n \to x$ für $n \to \infty$. Wegen $\|T\, x_n - T\, x_m\| \leq \|T\|\, \|x_n - x_m\|$ ist $(T\, x_n)$ Cauchyfolge, also konvergent in Y. Sei y gleich dem Grenzwert dieser Folge.

Beh: y hängt nicht von der Wahl der Folge (x_n) ab. **Bew:** Ist $(\tilde{x}_n)$ ebenfalls gegen x konvergent, so folgt $\|T\, \tilde{x}_n - T\, x_n\| \leq \|T\|\, \|\tilde{x}_n - x_n\| \to 0$ für $n \to \infty$.

Also ist es gerechtfertigt, dass wir $y = T_f\, x$ setzen. Man sieht schnell, dass $T_f : X \to Y$ linear ist, und dass $T_f = T$ auf X_0 ist wegen der Folgenstetigkeit von T. Aus $\|T_f\, x\| = \lim_{n\to\infty} \|T\, x_n\| \leq \lim_{n\to\infty} \|T\|\, \|x_n\| = \|T\|\, \|x\|$ folgt die Stetigkeit von T_f sowie $\|T_f\| = \|T\|$. □

Bemerkung 2.3.3 *Sei X ein beliebiger normierter Raum, und sei $T \in \mathcal{L}(X)$. Sei schließlich Y die Vervollständigung von X, also ein Banachraum, der einen dichten Teilraum besitzt, welcher isometrisch isomorph zu X ist, und den wir der Einfachheit halber mit X identifizieren wollen. Dann ist T in Y dicht definiert und kann deshalb auf ganz Y fortgesetzt werden. Aus diesem Grund kann man sich in der sogenannten Spektraltheorie in* Kapitel 4 *o. B. d. A. auf Operatoren auf Banachräumen beschränken.*

Aufgabe 2.3.4 *Sei $A = [a_{jk}]$ eine Matrix mit unendlich vielen Zeilen und Spalten, und gelte*

(a) $\sup\limits_{j\geq 1} \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{jk}| \;<\; \infty.$

(b) $\forall\, k \in \mathbb{N}: \qquad \lim\limits_{j\to\infty} a_{jk}$ *existiert.*

Zeige, dass dann die Abbildung $x \mapsto A\,x$ *in* $\mathcal{L}(c_0, c)$ *ist.* **Hinweis:** *Zeige zunächst, dass die Menge derjenigen Folgen, welche ab irgendeiner Stelle identisch gleich* 0 *sind, in* c_0 *dicht ist, und wende dann das letzte Lemma an.*

2.4 Endlichdimensionale Räume

Es ist naheliegend, dass wir zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf demselben Vektorraum X als äquivalent bezeichnen, wenn die von ihnen induzierten Metriken im Sinne von Definition 1.3.6 äquivalent sind. Dies ist aber gleichbedeutend mit der Aussage, dass die identische Abbildung von $(X, \|\cdot\|_1)$ nach $(X, \|\cdot\|_2)$ und umgekehrt beschränkt ist. Dies zeigt dass, anders als bei Metriken, die Äquivalenz von $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ bedeutet, dass es Zahlen $c, d > 0$ gibt, für welche

$$\forall\, x \in X: \qquad c\,\|x\|_1 \;\le\; \|x\|_2 \;\le\; d\,\|x\|_1\,. \tag{2.4.1}$$

Satz 2.4.1 *Ein normierter Vektorraum ist genau dann endlichdimensional, wenn jede abgeschlossene und beschränkte Teilmenge kompakt ist. Weiter gilt in jedem endlichdimensionalen Raum* $(X, \|\cdot\|)$*:*

(a) $(X, \|\cdot\|)$ *ist isomorph zu* $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$*, wobei* $n = \dim X$ *ist.*

(b) $(X, \|\cdot\|)$ *ist vollständig.*

(c) *Jede andere Norm auf* X *ist zu* $\|\cdot\|$ *äquivalent.*

Beweis: Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein n-dimensionaler Raum, und sei $(x_1, \ldots, x_n)$ eine Basis von X, sowie $x = \sum_{k=1}^n \alpha_k\, x_k \in X$. Dann gilt wegen der Dreiecksungleichung bzw. der Hölderschen Ungleichung:

$$\|x\| \;\le\; \sum_{k=1}^n |\alpha_k|\, \|x_k\| \;\le\; C\, \sum_{k=1}^n |\alpha_k| \;\le\; C\,\sqrt{n}\, \Big(\sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2\Big)^{1/2}, \quad C \;=\; \max\{\|x_1\|, \ldots, \|x_n\|\}\,.$$

Also ist die *kanonische Abbildung* $T: \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto \sum \alpha_k\, x_k$ von $\mathbb{K}^n$ nach X beschränkt. Weiter ist die Funktion $f(x) = \|x\|$ auf X stetig, und daraus folgt die Stetigkeit von $f \circ T$ auf der Einheitssphäre $S = \{\alpha : \|\alpha\|_2 = 1\}$ von $\mathbb{K}^n$. Nach dem Satz von Heine-Borel ist S kompakt, und somit existiert nach Satz 1.7.8 ein $\beta \in S$ mit $f(T(\alpha)) \ge f(T(\beta))$ für alle $\alpha \in S$. Wäre $f(T(\beta)) = 0$, also $x_0 = T(\beta) = 0$, so ergäbe sich ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der Basisvektoren, und deshalb ist $c := \|T(\beta)\| > 0$. Daraus ergibt sich die Beschränktheit von T^{-1}. Daher ist T ein Isomorphismus von $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$ auf $(X, \|\cdot\|)$, und daraus folgt auch die Vollständigkeit von $(X, \|\cdot\|)$. Da dies für jede Norm auf X gilt, sind zwei verschiedene Normen auf X immer äquivalent. Ist jetzt K eine kompakte Teilmenge von X, so folgen mit Aufgabe 1.7.5 immer Abgeschlossenheit und Beschränktheit von K. Wenn aber für ein X immer die Umkehrung gilt, so muss die Einheitskugel $\overline{B}_X$ kompakt, also auch präkompakt sein. Dann gibt es also endlich viele $x_1, \ldots, x_n \in \overline{B}_X$, so dass die Kugeln mit diesen Mittelpunkten und dem Radius $r = 1/2$ ganz $\overline{B}_X$ überdecken. Sei U die lineare Hülle der Mittelpunkte $x_1, \ldots, x_n$, dann zeigt man mit Induktion dass zu jedem $x \in \overline{B}_X$ und jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $u_n \in U$ und ein $\tilde{x}_n \in \overline{B}_X$ existieren mit $x = u_n + 2^{-n}\tilde{x}_n$. Für $n \to \infty$ folgt $\|2^{-n}\tilde{x}_n\| = 2^{-n}\|\tilde{x}\| \to 0$, und deshalb konvergiert (u_n) gegen x. Da U endliche Dimension hat, ist es vollständig, also auch abgeschlossen, und deshalb folgt $x \in U$, d. h. sogar $\overline{B}_X \subset U$. Das bedeutet aber $X = U$, und deshalb ist $\dim X \le n$. □

Aufgabe 2.4.2 *Sei* $\dim Y > 0$*. Zeige: Genau dann ist jede lineare Abbildung von* X *nach* Y *stetig, wenn* X *endlichdimensional ist.* **Anleitung:** *Hier darf benutzt werden, dass jeder Vektorraum eine Basis besitzt, die natürlich im Fall unendlicher Dimension auch unendlich viele Vektoren enthält.*

2.5 Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit und der Satz von Banach-Steinhaus

Definition 2.5.1 *Eine Folge (T_n) aus $\mathcal{L}(X,Y)$ heißt* punktweise konvergent*, wenn es ein $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ gibt, für welches*

$$\forall\ x \in X : \qquad \lim_{n\to\infty} T_n\, x \;=\; T\, x\,.$$

Beachte, dass in der Literatur die punktweise Konvergenz auch starke Konvergenz *genannt wird. Wir nennen (T_n)* normkonvergent *gegen T, falls $\|T_n - T\| \to 0$ für $n \to \infty$. Eine Teilmenge $H \subset \mathcal{L}(X,Y)$ heißt* punktweise beschränkt*, falls gilt*

$$\forall\ x \in X : \qquad \sup\,\{\,\|T\,x\| \;:\; T \in H\,\} \;<\; \infty\,.$$

Die Teilmenge H heißt dagegen gleichmäßig beschränkt*, oder auch* normbeschränkt*, oder auch einfach* beschränkt in $\mathcal{L}(X,Y)$*, falls*

$$\sup\,\{\,\|T\| \;:\; T \in H\,\} \;=\; \sup\,\{\,\|T\,x\| \;:\; T \in H\,,\ x \in \overline{B}_X\,\} \;<\; \infty\,.$$

Beispiel 2.5.2 *Wenn (T_n) normkonvergent gegen T ist, d. h., wenn gilt*

$$\|T_n \;-\; T\| \;=\; \sup_{x\in\overline{B}_X} \|T_n\, x - T\, x\| \;\to\; 0 \qquad (n\to\infty)\,,$$

so folgt hieraus natürlich die punktweise Konvergenz der Folge (T_n) gegen T. Die umgekehrte Implikation gilt nicht allgemein; das zeigt folgendes Beispiel: Für $X = Y = c_0$ und $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\forall\ x = (x_m) \in X \;: \qquad T_n\ x \;=\; (0,\ldots,0,x_n,x_{n+1},\ldots)\,.$$

Das bedeutet also, dass der Operator T_n die ersten $n-1$ Folgenglieder durch Nullen ersetzt und die übrigen unverändert lässt. Dann sieht man

$$\|T_n\| \;=\; \sup_{x\in B_{c_0}} \|T_n\, x\| \;=\; 1\,,$$

aber $\|T_n\, x\| = \sup_{k\geq n} |x_k| \to 0$ für $n \to \infty$ und jedes feste $x \in c_0$. Beachte aber auch, dass dieselben Operatoren T_n auf dem Raum c nicht punktweise konvergieren; siehe dazu die nächste Aufgabe.

Aufgabe 2.5.3 *Sei für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Folge $x_n = (x_{n1}, x_{n2}, \ldots) \in c$ gegeben. Zeige: Wenn die Folge (x_n) gegen ein $x = (x_1, x_2, \ldots) \in c$ konvergiert, so folgt für jedes feste $k \in \mathbb{N}$, dass $\lim_{n\to\infty} x_{nk} = x_k$ ist. Man sagt auch, dass Konvergenz in c die koordinatenweise Konvergenz impliziert. Benutze dies um zu zeigen, dass die Operatoren T_n aus dem obigen Beispiel in c nicht punktweise konvergieren können.*

Satz 2.5.4 *Seien $T, T_n \in \mathcal{L}(X,Y)$, und sei die Folge (T_n) gleichmäßig beschränkt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *Es gibt einen dichten Teilraum $X_0 \subset X$, auf dem die Folge (T_n) punktweise gegen T konvergiert.*

(b) *Die Folge (T_n) konvergiert auf ganz X punktweise gegen T.*

(c) *Auf jeder präkompakten Teilmenge $K \subset X$ konvergiert die Folge T_n gleichmäßig gegen T, d. h.,*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ N \in \mathbb{R}_0 \quad \forall\ n \geq N\,,\ x \in K \,: \|T_n\, x - T\, x\| < \varepsilon\,.$$

Beweis: Es reicht offenbar zu zeigen, dass (c) aus (a) folgt. Dazu sei $\varepsilon > 0$ gegeben, und C sei so, dass $\|T\|, \|T_n\| \le C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zu $\tilde\varepsilon = (4\,C+1)^{-1}\,\varepsilon$ gibt es $x_1, \ldots, x_m \in K$ so, dass die Kugeln um x_k mit Radius $\tilde\varepsilon$ die Menge K überdecken. In jeder solchen Kugel gibt es dann ein $y_k \in X_0$, und dazu existiert ein N so, dass für alle $n \ge N$ folgt $\|T_n\,y_k - T\,y_k\| < \tilde\varepsilon$, für alle $k = 1, \ldots, m$. Zu $x \in K$ wählen wir k so, dass $\|x - x_k\| < \tilde\varepsilon$ ist. Dann gilt für diese n

$$\begin{aligned}\|T_n\,x - T\,x\| &\le \|T_n\,x - T_n\,x_k\| + \|T_n\,x_k - T_n\,y_k\| + \|T_n\,y_k - T\,y_k\| \\ &\quad + \|T\,y_k - T\,x_k\| + \|T\,x_k - T\,x\| \\ &\le C\,\|x - x_k\| + C\,\|x_k - y_k\| + \tilde\varepsilon \\ &\quad + C\,\|y_k - x_k\| + C\,\|x_k - x\| < (4\,C+1)\,\tilde\varepsilon = \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Satz 2.5.5 (Satz von Banach-Steinhaus) *Sei eine gleichmäßig beschränkte Folge (T_n) aus $\mathcal{L}(X,Y)$ gegeben. Weiter sei Y vollständig, und es gebe einen dichten Teilraum $X_0 \subset X$ derart, dass für alle $x \in X_0$ die Folge $(T_n\,x)$ eine Cauchyfolge ist. Dann gibt es ein $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ für welches (T_n) auf X punktweise gegen T konvergiert.*

Beweis: Für jedes $x \in X$ und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $y \in X_0$ mit $\|x - y\| < \varepsilon$. Mit $C \ge \|T_n\|$ folgt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\|T_n\,x - T_m\,x\| &\le \|T_n\,x - T_n\,y\| + \|T_n\,y - T_m\,y\| + \|T_m\,y - T_m\,x\| \\ &\le 2\,C\,\|x - y\| + \varepsilon < (2\,C+1)\,\varepsilon\,,\end{aligned}$$

falls nur n und m hinreichend groß sind. Daher ist $(T_n\,x)$ eine Cauchyfolge in Y, also konvergent, und wir setzen $T\,x = \lim T_n\,x$, also $\|T\,x\| = \lim \|T_n\,x\| \le C\,\|x\|$. Somit ist T eine beschränkte lineare Abbildung, und (T_n) konvergiert punktweise gegen T. □

Satz 2.5.6 (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit) *Sei X vollständig. Dann ist jede punktweise beschränkte Menge $H \subset \mathcal{L}(X,Y)$ sogar gleichmäßig beschränkt.*

Beweis: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge $A_n = \{\, x \in X \;:\; \|T\,x\| \le n \;\forall\; T \in H \,\}$ abgeschlossen in X, und wegen der punktweisen Beschränktheit ist die Vereinigung aller dieser A_n gleich X. Nach Satz 1.11.4 ist X ein Baire-Raum, und deshalb gibt es ein n so, dass A_n einen inneren Punkt hat. Das heißt mit anderen Worten: Es existiert ein $x_0 \in X$ sowie ein $\varepsilon > 0$ so, dass für alle $x \in X$ mit $\|x - x_0\| < \varepsilon$ gilt $\|T\,x\| \le n$ für alle $T \in H$. Sei jetzt $y \in \overline{B}_X$. Dann ist für $x = x_0 + (\varepsilon/2)\,y$ immer $\|x - x_0\| < \varepsilon$, und somit folgt

$$\forall\; T \in H \;:\qquad (\varepsilon/2)\,\|T\,y\| \;=\; \|T\,x - T\,x_0\| \;\le\; \|T\,x\| + \|T\,x_0\| \;\le 2\,n\,.$$

Daher ist H gleichmäßig beschränkt. □

Aufgabe 2.5.7 *Zeige: Ist X ein Banachraum, und ist die Folge (T_n) aus $\mathcal{L}(X,Y)$ so, dass für alle $x \in X$ die Folge $(T_n\,x)$ konvergiert, dann ist T, definiert durch $T\,x = \lim T_n\,x$ für alle $x \in X$, automatisch stetig.*

Aufgabe 2.5.8 *Man nennt eine Matrix $A = [a_{jk}]_{j,k=1}^{\infty}$* permanent, *wenn für alle $x = (x_k) \in c$ die Reihen $y_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}\,x_k$ für alle $j \in \mathbb{N}$ konvergieren, wenn die Folge $y = (y_j)$ konvergiert, also wieder zu c gehört, und wenn weiter $\lim_{j\to\infty} y_j = \lim_{k\to\infty} x_k$ ist. Zeige folgenden klassischen Satz:*

Satz 2.5.9 (Toeplitzscher Permanenzsatz) *Eine Matrix $A = [a_{jk}]_{j,k=1}^{\infty}$ ist genau dann permanent, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:*

(a) $$\sup_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}| \;<\; \infty.$$

(b) $$\forall\, k \in \mathbb{N} \;: \qquad \lim_{j\to\infty} a_{jk} \;=\; 0.$$

(c) $$\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \;\to\; 1 \quad (j \to \infty).$$

Überprüfe, dass die Matrix $C_1 = [c_{jk}]$, mit $c_{jk} = 1/j$ für $1 \le k \le j$, bzw. $c_{jk} = 0$ sonst, permanent ist. **Anleitung zum Beweis des Satzes:** Zeige zunächst, dass die Konvergenz der Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}\, x_k$ für alle $x \in c$ zu (a) äquivalent ist und benutze dazu das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit für $X = c$ und $Y = \mathbb{K}$. Zeige weiter, dass die lineare Hülle der Folgen e_n, $n \in \mathbb{N}$, und $e = (1, 1, 1, \ldots)$ in c dicht liegen, und benutze dieAufgabe 2.3.4.

2.6 Der Satz von der offenen Abbildung und der Graphensatz

Für die folgenden Überlegungen ist es hilfreich zu definieren, was z. B. eine Summe von zwei Teilmengen eines Vektorraumes ist:

Aufgabe 2.6.1 *Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Für $A_1, A_2 \subset X$ und $\Lambda \subset \mathbb{K}$ setzen wir*

$$A_1 \;\pm\; A_2 \;=\; \{a_1 \pm a_2 \;:\; a_1 \in A_1\,,\; a_2 \in A_2\}\,, \qquad \Lambda\, A_1 \;=\; \{\lambda\, a_1 \;:\; \lambda \in \Lambda\,, \quad a_1 \in A_1\}\,.$$

Ist $A_1 = \{a_1\}$ eine Menge mit nur einem Element, so schreiben wir auch $a_1 + A_2$ anstelle von $A_1 + A_2$ und $\Lambda\, a_1$ anstelle von $\Lambda\, A_1$, und wir verfahren sinngemäß, wenn Λ nur ein Element hat. Wiederhole aus der linearen Algebra: Sind $U, V \subset X$ Unterräume, so ist $U + V$ ebenfalls ein Unterraum von X. Ist weiter $U \cap V = \{0\}$, so gibt es zu jedem $x \in U + V$ genau ein Paar $(u, v) \in U \times V$ mit $x = u + v$. In diesem Fall spricht man auch von einer direkten Summe und schreibt $U \oplus V$. Zeige weiter für jede lineare Abbildung T von X in einen zweiten Vektorraum Y über $\mathbb{K}$, und für alle A_1, A_2, Λ wie oben:

$$T(A_1 \pm A_2) \;=\; T(A_1) \;\pm\; T(A_2)\,, \qquad T(\Lambda\, A_1) \;=\; \Lambda\, T(A_1)\,.$$

Beschreibe in Worten die Mengen $r\, B_X$ für $r > 0$.

Lemma 2.6.2 *Seien X und Y Banachräume, und sei $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Falls es ein $r > 0$ gibt, für welches $r\, B_Y \subset \overline{T(B_X)}$ ist, dann ist $(r/2)\, B_Y \subset T(B_X)$.*

Beweis: Wegen Aufgabe 2.6.1 folgt aus der Voraussetzung, dass

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \;: \qquad 2^{-n} r\, B_Y \;\subset\; 2^{-n}\, \overline{T(B_X)}\,.$$

Sei jetzt $y \in (r/2)\, B_Y$. Wir wollen $x_n \in 2^{-n}\, B_X$ so wählen, dass $y_n = y - \sum_{k=1}^{n-1} T\, x_k \in 2^{-n} r\, B_Y$ ist. Dies ist erfüllt für $n = 1$, und wenn es für irgendein n richtig ist, dann ist $y_n \in 2^{-n}\, \overline{T(B_X)}$, und deshalb gibt es ein $x_n \in 2^{-n}\, B_X$, dessen Bild einen beliebig kleinen Abstand von y_n hat, also z. B. so, dass $\|y_n - T\, x_n\| < r\, 2^{-n-1}$ ist. Also existiert eine solche Folge, und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ist absolut konvergent gegen ein $x \in X$ mit $\|x\| \le \sum_n \|x_n\| < 1$. Außerdem folgt $y_n \to 0$, und daher gilt $y = T\, x$. Dies zeigt dass $y \in T(B_X)$ ist. $\square$

Lemma 2.6.3 *Seien X und Y Banachräume, und sei $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ surjektiv. Dann gibt es ein $r > 0$, für welches $r\, B_Y \subset \overline{T(B_X)}$ ist.*

Beweis: Sei $A_n = n\overline{T\,B_X} = \overline{T(n\,B_X)}$, dann folgt $\cup_n A_n = Y$ wegen der Surjektivität von T. Da Y natürlich innere Punkte hat, ergibt sich mit Satz 1.11.4 die Existenz eines $n \in \mathbb{N}$, für welches A_n einen inneren Punkt hat. Wegen der Definition der A_n gilt dann aber dasselbe für alle A_n, also auch für $A_1 = \overline{T\,B_X}$. Also existiert ein $y_0 \in \overline{T\,B_X}$ und ein $r > 0$, für welches $U_{2r}(y_0) \subset \overline{T\,B_X}$ ist. Für $y \in 2r\,B_Y$ folgt dann $2\,y = y_0 + y - (y_0 - y) \in \overline{T\,B_X} - \overline{T\,B_X} \subset 2\,\overline{T\,B_X}$, also $2r\,B_Y \subset \overline{T\,B_X}$. Mit dem letzten Lemma folgt daraus $r\,B_Y \subset T(B_X)$. □

Satz 2.6.4 (Satz von der offenen Abbildung) *Seien X und Y Banachräume, und sei $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ surjektiv. Dann ist T offen, d. h., für jede in X offene Menge O ist $T(O)$ offen in Y.*

Beweis: Sei $O \subset X$ offen, und sei $y \in T(O)$. Dann existiert ein $x \in O$ mit $x = T\,y$, und dazu gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass $U_\varepsilon(x) = x + \varepsilon\,B_X \subset O$ ist. Nach dem letzten Lemma existiert ein $r > 0$ so, dass $r\,B_Y \subset T(B_X)$, also $\varepsilon r\,B_Y \subset T(\varepsilon\,B_X)$. Daraus folgt aber $y + \varepsilon r\,B_Y \subset T(x) + \varepsilon r\,B_Y \subset T(x + \varepsilon\,B_X) \subset T(O)$. □

Als direkte Folgerung dieses Satzes ergeben sich zwei wichtige Konsequenzen:

Korollar zu Satz 2.6.4 (Satz vom inversen Operator) *Seien X und Y Banachräume, und sei $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ bijektiv. Dann ist T^{-1} stetig, also T invertierbar.*

Korollar zu Satz 2.6.4 (Äquivalenz zweier Normen) *Sei X ein Vektorraum, und seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf X, für welche $(X,\|\cdot\|_1)$ und $(X,\|\cdot\|_2)$ beide vollständig sind. Falls es dann ein $c > 0$ gibt, so dass $\|x\|_1 \le c\,\|x\|_2$ für alle $x \in X$ gilt, dann sind die Normen äquivalent.*

Definition 2.6.5 *Wir nennen für $T : X \to Y$ die Menge $G(T) = \{(x, T\,x) \;:\; x \in X\}$ den* Graphen *von T. Wenn $G(T)$ in dem normierten Raum $X \times Y$ abgeschlossen ist, dann sagen wir kurz dass T* abgeschlossenen Graphen hat*, oder dass T* graphenabgeschlossen ist*. Das bedeutet genau dass folgendes gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \;=\; x \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} T\,x_n \;=\; y \qquad \Longrightarrow \qquad T\,x \;=\; y\,. \tag{2.6.1}$$

Siehe dazu auch die nächste Aufgabe.

Aufgabe 2.6.6 *Zeige: Auf $X \times Y$ ist durch $\|(x,y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$ eine Norm gegeben, und die beiden* Projektionen

$$P_X \;:\; (x,y) \;\mapsto\; x\,, \qquad P_Y \;:\; (x,y) \;\mapsto\; y$$

sind stetig. Zeige weiter:

(a) *Wenn X und Y Banachräume sind, dann ist auch $X \times Y$ vollständig.*

(b) *Die Abgeschlossenheit des Graphen von $T : X \to Y$ ist äquivalent zu* (2.6.1).

(c) *Wenn T stetig ist, dann ist $G(T)$ abgeschlossen.*

(d) *Die Umkehrung der letzten Aussage gilt im Allgemeinen nicht.*

(e) *Wenn T linear ist, dann ist $G(T)$ ein Unterraum von $X \times Y$, also ein Banachraum, falls X und Y vollständig und T graphenabgeschlossen sind.*

Zwar kann man nicht allgemein aus der Abgeschlossenheit von $G(T)$ auf die Stetigkeit von T schließen, aber es gilt jedenfalls folgender wichtiger Satz:

Satz 2.6.7 (Satz vom abgeschlossenen Graphen) *Seien X und Y Banachräume, und sei $T : X \to Y$ linear und graphenabgeschlossen. Dann ist T stetig.*

Beweis: Die Projektion $P_X : X \times Y \to X$ ist nach Aufgabe 2.6.6 stetig, und ihre Restriktion auf den Unterraum $G(T) \subset X \times Y$ ist bijektiv. Wenn $G(T)$ abgeschlossen ist, ist es auch ein Banachraum, und deshalb folgt die Stetigkeit von $P_X^{-1} : X \to G(T)$ aus dem Satz vom inversen Operator. Daher gibt es ein $c > 0$ so, dass

$$\|x\|_X + \|T\,x\|_Y \;\le\; c\,\|x\|_X \qquad \forall\, x \in X\,,$$

und daraus folgt die Beschränktheit, d. h. die Stetigkeit, von T. □

Bemerkung 2.6.8 *Viele Fragen aus den Anwendungen lassen sich so formulieren, dass man für eine gegebene Abbildung $T : X \to Y$, welche allerdings oft nicht linear ist, wissen möchte, für welche $y \in Y$ die Gleichung $y = T\,x$ eine Lösung $x \in X$ besitzt, und ob diese dann womöglich sogar eindeutig festliegt bzw. zusätzliche Eigenschaften besitzt. Da in einer realen Situation die* Eingangsdaten *T und y meist nicht exakt bestimmt werden können, nennt man ein solches Problem* wohlgestellt, *wenn die Antwort auf diese Fragen unverändert bleibt, falls man T und y* etwas stört. *Der Satz von der offenen Abbildung kann dann so interpretiert werden: Sucht man unter den dort gemachten Voraussetzungen Lösungen von $y_0 = T\,x$ mit x aus einer offenen Menge O, und gibt es wenigstens eine solche Lösung, dann gibt es auch für alle y mit hinreichend kleiner Differenz $y - y_0$ solche Lösungen. Im Falle der Bijektivität von T sagt der Satz vom inversen Operator dann sogar, dass die jetzt eindeutig bestimmte Lösung sich nur gering verändert, wenn man y_0 variiert. Die* Aufgabe 2.2.8 *besagt in diesem Kontext gerade, dass die Frage nach der Bijektivität von $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, bei Banachräumen X und Y, stabil gegenüber Störungen von T ist, und der folgende Satz sagt dasselbe für die Surjektivität von T, also die universelle Lösbarkeit der Gleichung $y = T\,x$.*

Satz 2.6.9 *Seien X und Y Banachräume. Dann ist die Menge der surjektiven Abbildungen $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ offen.*

Beweis: Sei $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ surjektiv. Dann folgt aus Lemma 2.6.3 die Existenz von $\rho = 1/r > 0$, so dass $B_Y \subset \rho\,T(B_X)$ ist. Für $0 < \varepsilon < (2\rho)^{-1}$ sei $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ so, dass $\|T - S\| < \varepsilon$ ist. Für $y \in B_Y$ gibt es nach Wahl von ρ ein $x_0 \in \rho\,B_X$ mit $T\,x_0 = y$. Jetzt wollen wir induktiv für $k \ge 1$ Elemente $x_k \in \rho 2^{-k}\,B_X$ so bestimmen, dass $(T - S)\,x_{k-1} = T\,x_k$ gilt. Falls x_{k-1} schon bestimmt wurde (was für $k = 1$ erfüllt ist), dann folgt nach Wahl von S dass $\|(T - S)\,x_{k-1}\| < \varepsilon\|x_{k-1}\| < \varepsilon\rho 2^{-k+1} < 2^{-k}$ ist, und daher kann das x_k wie behauptet gewählt werden. Die Reihe $x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k$ ist dann (absolut) konvergent, und $(T - S)\,x = \sum_{k=0}^{\infty} T\,x_{k+1} = T\,(x - x_0) = T\,x - y$. Das bedeutet aber $S\,x = y$, woraus die Surjektivität von S folgt. □

Kapitel 3

Der Fortsetzungssatz von Hahn-Banach und seine Folgen

Sind $(x_j, j \in J_X)$ und $(y_k, k \in J_Y)$ Basen zweier Vektorräume X und Y über $\mathbb{K}$, so folgt mit Resultaten der linearen Algebra, dass es zu beliebigen Zahlen $\alpha_{jk} \in \mathbb{K}$ mit

$$\forall\, j \in J_X \; : \qquad \alpha_{jk} \neq 0 \quad \text{für höchstens endlich viele } k \in J_Y$$

genau eine lineare Abbildung $T : X \to Y$ gibt, so dass $T x_j = \sum_k \alpha_{jk} x_k$ für alle $j \in J_X$ ist. Das bedeutet, dass man genau versteht, wieviele solche linearen Abbildungen es gibt – allerdings ist völlig unklar, welche davon stetig sind, falls X und Y normierte Räume sind! Selbst die Frage, ob es überhaupt ein nichttriviales $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ gibt, ist für allgemeine Räume X und Y nicht klar. Der Fortsetzungsatz von Hahn-Banach ist ein Hilfsmittel um zu zeigen, dass es jedenfalls für $Y = \mathbb{K}$ sehr viele stetige lineare Abbildungen gibt! Für seinen Beweis benötigen wir das sogenannte *Zornsche Lemma*, was jetzt vorgestellt wird.

3.1 Das Zornsche Lemma

Definition 3.1.1 *Sei X eine nicht-leere Menge und „ $\leq$ “ eine Relation auf X mit folgenden Eigenschaften:*

(a) $\forall\, x \in X : \qquad x \leq x.$

(b) $\forall\, x, y \in X : \qquad (x \leq y\,,\; y \leq x) \implies x = y.$

(c) $\forall\, x, y, z \in X : \qquad (x \leq y\,,\; y \leq z) \implies x \leq z.$

Dann sprechen wir von einer teilweisen *oder* partiellen Ordnung *auf X und nennen $(X, \leq)$ auch eine* teilweise geordnete Menge, *und wir definieren $x < y$ als $x \leq y$ und $x \neq y$. Falls für eine Teilmenge $E \subset X$ gilt*

(d) $\forall\, x, y \in E : \qquad x \leq y$ oder $y \leq x,$

dann nennen wir E vollständig geordnet. *Vergleiche dazu auch die nächste Aufgabe. Falls $(X, \leq)$ eine teilweise geordnete Menge ist, dann heißt ein $x_0 \in X$ ein* maximales Element, *falls für alle $x \in X$ aus $x_0 \leq x$ folgt dass $x = x_0$ ist, und wir nennen x_0 eine* obere Schranke *für eine Teilmenge $E \subset X$, wenn für alle $x \in E$ gilt $x \leq x_0$. Entsprechend definieren wir minimale Elemente und untere Schranken.*

Aufgabe 3.1.2 *Sei $(X, \leq)$ eine teilweise geordnete Menge. Zeige, dass jede obere Schranke für X auch ein maximales Element ist. Gilt die Umkehrung?*

Aufgabe 3.1.3 *Sei X die abgeschlossene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{R}^2$, und sei*

$$(x_1, y_1)^T \;\leq\; (x_2, y_2)^T \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x_1 \;\leq\; x_2 \quad \text{und} \quad y_1 \;\leq\; y_2)\,.$$

Zeige, dass dies eine partielle Ordnung auf X ist, und finde alle maximalen Elemente und alle oberen Schranken.

Aufgabe 3.1.4 *Sei M eine beliebige Menge, und sei $\emptyset \neq \mathcal{X} \subset \mathcal{P}_M$, wobei $\mathcal{P}_M$ die Potenzmenge, also die Menge aller Teilmengen, von M bezeichnet. Zeige dass die Teilmengenrelation „$\subset$“ eine partielle Ordnung auf $\mathcal{X}$ ist. Finde im Fall $\mathcal{X} = \mathcal{P}_M$ ein maximales Element von $\mathcal{X}$.*

Das folgende *Zornsche Lemma* ist äquivalent zum Auswahlaxiom der Mengenlehre, was aber hier nicht bewiesen werden soll.

Satz 3.1.5 (Zornsches Lemma) *Sei $(X, \leq)$ eine partiell geordnete Menge. Falls jede vollständig geordnete Teilmenge von X eine obere Schranke besitzt, dann gibt es mindestens ein maximales Element von X.*

Aufgabe 3.1.6 *Zeige mit Hilfe des Zornschen Lemmas, dass ein beliebiger Vektorraum eine Basis besitzt.*
Anleitung: Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, und sei $\mathcal{X}$ die Menge aller linear unabhängigen Teilmengen von V. Dann ist die Teilmengenrelation eine partielle Ordnung auf $\mathcal{X}$. Zeige:

(a) Ist $\mathcal{X}_1$ eine vollständig geordnete Teilmenge von $\mathcal{X}$, so ist

$$A_0 = \bigcup_{A \in \mathcal{X}_1} A$$

wieder eine linear unabhängige Teilmenge von V, d. h. mit anderen Worten $A_0 \in \mathcal{X}$, und deshalb ist A_0 eine obere Schranke von $\mathcal{X}_1$.

(b) Jedes maximale Element von $\mathcal{X}$ ist ein Erzeugendensystem für V, also sogar eine Basis.

Schließe dann aus dem Zornschen Lemma auf die Existenz eines maximalen Elementes.

Aufgabe 3.1.7 *Zeige mit Hilfe des Zornschen Lemmas den* Basisergänzungssatz*: Zu jeder linear unabhängigen Teilfamilie eines Vektorraumes gibt es eine Basis, welche diese Familie enthält.*

3.2 Eine algebraische Version des Fortsetzungssatzes

Definition 3.2.1 *Eine Abbildung $p : X \to \mathbb{R}$ auf einem beliebigen Vektorraum X über $\mathbb{K}$ heißt* sublinear*, falls die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:*

$$\text{(H)} \qquad \forall\, \lambda \geq 0\,,\; x \in X\; : \qquad p(\lambda\, x) \;=\; \lambda\, p(x),$$

$$\text{(S)} \qquad \forall\, x_1, x_2 \in X\; : \qquad p(x_1 + x_2) \;\leq\; p(x_1) \;+\; p(x_2).$$

Satz 3.2.2 (Hahn-Banachscher Fortsetzungssatz) *Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, sei $p : X \to \mathbb{R}$ sublinear, und sei $U \subset X$ ein Unterraum. Wenn $f : U \to \mathbb{R}$ linear ist, so dass für alle $x \in U$ gilt $f(x) \le p(x)$, dann gibt es eine lineare Abbildung $F : X \to \mathbb{R}$ so, dass*

$$\forall\, x \in U \;:\quad F(x) \;=\; f(x)\,, \qquad\qquad \forall\, x \in X \;:\qquad F(x) \;\le\; p(x)\,.$$

Beweis: Wir wollen folgende Terminologie benutzen: Wenn $Y \subset X$ ein Unterraum ist, der U enthält, und wenn $F_Y : Y \to \mathbb{R}$ linear ist, so dass

$$\forall\, x \in U \;:\quad F_Y(x) \;=\; f(x)\,, \qquad\qquad \forall\, x \in Y \;:\qquad F_Y(x) \;\le\; p(x)\,,$$

dann nennen wir F_Y *eine Fortsetzung von f auf Y, welche von p dominiert wird.*

a): Für $x_0 \in X \setminus U$ sei $Y = U \oplus \mathbb{R}\, x_0$. Dann ist für jedes feste $\alpha \in \mathbb{R}$ durch $F(x + \lambda\, x_0) = f(x) + \alpha\, \lambda$, mit $x \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, eine lineare Fortsetzung von f auf Y definiert. Damit diese Fortsetzung von p dominiert wird, muss α so bestimmt werden, dass $f(x) + \alpha\, \lambda \le p(x + \lambda\, x_0)$ für alle $x \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt. Dies ist richtig für $\lambda = 0$, und sonst folgt mit Hilfe des Axioms (H), angewandt auf $|\lambda|$, und unter Benutzung der Linearität von f und der Unterraumeigenschaften, dass es ausreicht, wenn

$$\forall\, x \in U \;:\qquad f(x) \;+\; \alpha \;\le\; p(x + x_0)\,, \qquad f(x) \;-\; \alpha \;\le\; p(x - x_0)\,.$$

Zusammengenommen sind beide Ungleichungen äquivalent zu

$$\forall\, x, y \in U \;:\qquad f(y) \;-\; p(y - x_0) \;\le\; \alpha \;\le\; p(x + x_0) \;-\; f(x)\,. \tag{3.2.1}$$

Da f auf U von p dominiert wird, ist für alle $x, y \in U$

$$f(x) \;+\; f(y) \;=\; f(x + y) \;\le\; p(x + y) \;\le\; p(x + x_0) \;+\; p(y - x_0)\,,$$

und daher folgt $f(y) \;-\; p(y - x_0) \le p(x + x_0) \;-\; f(x)$. Das zeigt, dass die Ungleichung (3.2.1) z. B. für $\alpha = \inf_{x \in U} (p(x + x_0) - f(x))$ gilt.

b): Die Menge M aller Paare (Y, F_Y) von Fortsetzungen auf Y, welche durch p dominiert werden, wird durch

$$(Y_1, F_{Y_1}) \;\le\; (Y_2, F_{Y_2}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad Y_1 \subset Y_2\,, \quad F_{Y_1}(x) = F_{Y_2}(x) \quad \forall\, x \in Y_1$$

zu einem partiell geordneten Raum. Ist $M_1 \subset M$ vollständig geordnet, so sei

$$Y_0 \;=\; \bigcup_{(Y, F_Y) \in M_1} Y\,, \qquad F_{Y_0}(x) \;=\; F_Y(x) \quad \forall\, x \in Y\,.$$

Dann ist Y_0 ein Unterraum von X, der U enthält. Weiter ist die Definition von $F_{Y_0}(x)$ nicht von der Wahl eines $(Y, F_Y) \in M_1$ abhängig, und deshalb ist F_{Y_0} auf Y_0 wohldefiniert und linear, und außerdem dort von p dominiert. Daher ist das Paar (Y_0, F_{Y_0}) obere Schranke für M_1. Also folgt aus dem Zornschen Lemma die Existenz eines maximalen Elementes $(Y, F_Y) \in M$. Wenn Y ein echter Unteraum von X wäre, dann gäbe es nach a) eine von p dominierte Fortsetzung auf einen größeren Unterraum, was aber der Maximalität widerspricht. Also ist der Satz bewiesen. □

3.3 Die funktionalanalytische Version des Fortsetzungssatzes

Definition 3.3.1 *Eine Abbildung $p : X \to \mathbb{R}$ heißt* eine Halbnorm*, falls gilt:*

$$\forall\, x, y \in X\,, \quad \lambda \in \mathbb{K} \;:\qquad p(\lambda\, x) \;=\; |\lambda|\, p(x)\,, \quad p(x + y) \;\le\; p(x) \;+\; p(y)\,.$$

Wenn dies so ist, folgt $p(0) = p(0x) = 0$, und $0 = p(0) \leq p(x) + p(-x) = 2\,p(x)$, und deshalb hat eine Halbnorm alle Eigenschaften einer Norm, nur braucht aus $p(x) = 0$ nicht zu folgen, dass $x = 0$ ist. In jedem Fall ist aber jede Norm auch eine Halbnorm. Weiter heißt ein $f \in \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ auch kurz ein stetiges Funktional*, oder auch eine stetige Linearform auf X. Die Menge $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ bezeichnen wir auch kürzer mit X' und nennen sie den* Dualraum *von X.*

Satz 3.3.2 (Stetige Fortsetzung von Funktionalen) *Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, sei $p : X \to \mathbb{K}$ eine Halbnorm, und sei $U \subset X$ ein Unterraum. Falls dann $f : U \to \mathbb{K}$ linear ist, und falls für alle $x \in U$ gilt $|f(x)| \leq p(x)$, dann besitzt f eine lineare Fortsetzung F auf X, für die $|F(x)| \leq p(x)$ für alle $x \in X$ gilt. Ist ferner $\|\cdot\|$ eine Norm auf X, so lässt sich jedes $f \in U'$ zu einem $F \in X'$ fortsetzen, wobei $\|f\| = \|F\|$ gilt.*

Beweis: Da jede Halbnorm sublinear ist, ergibt sich im Fall von $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ aus Satz 3.2.2 die Existenz einer linearen Fortsetzung F mit $F(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$. Dann folgt aber $-F(x) = F(-x) \leq p(-x) = p(x)$ für alle x. Für den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist $f(ix) = i\,f(x)$, woraus $\operatorname{Im} f(x) = -\operatorname{Re} f(ix)$ für alle $x \in X$ folgt. Indem wir X als $\mathbb{R}$-Vektorraum auffassen, erhalten wir mit Satz 3.2.2 eine $\mathbb{R}$-lineare Fortsetzung F_r von $\operatorname{Re} f$, welche von p dominiert wird. Dann ist aber $-F_r(ix)$ auch eine $\mathbb{R}$-lineare Fortsetzung von $\operatorname{Im} f$, welche ebenfalls von p dominiert wird. Setzt man jetzt $F(x) = F_r(x) - i\,F_r(ix)$, so folgt für $\lambda = \alpha + i\,\beta$, mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dass

$$F(\lambda\,x) \;=\; F_r((\alpha + i\,\beta)x) - i\,F_r((\alpha + i\,\beta)ix) \;=\; \alpha(F_r(x) - i\,F_r(ix)) + \beta(F_r(ix) + i\,F_r(x)) \;=\; \lambda\,F(x)\,.$$

Also ist F $\mathbb{C}$-linear. Zu jedem $x \in X$ gibt es eine Zahl $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| = 1$ und $|F(x)| = a\,F(x) = F(a\,x)$. Da $F(a\,x)$ offenbar reell ist, folgt weiter $F(a\,x) = F_r(a\,x)$, also $|F(x)| = F_r(a\,x) \leq p(a\,x) = p(x)$ für alle $x \in X$. Wenn jetzt $\|\cdot\|$ eine Norm und $f \in U'$ ist, dann ist durch $p(x) := \|f\|\,\|x\|$ für alle $x \in X$ eine Halbnorm auf X gegeben. Nach Definition von $\|f\|$ folgt dass $|f(x)| \leq p(x)$ für $x \in U$ gilt, und daher lässt sich f zu einem F fortsetzen, für welches $|F(x)| \leq p(x)$ für alle $x \in X$ gilt, woraus $F \in X'$ und $\|F\| = \|f\|$ folgt. □

Korollar zu Satz 3.3.2 *Sei X normierter Vektorraum, und sei $x_0 \in X \setminus \{0\}$. Dann gibt es ein $f \in X'$ mit $\|f\| = 1$ so, dass $f(x_0) = \|x_0\|$ ist.*

Beweis: Sei $U = \mathbb{K}\,x_0$, und $f(\alpha\,x_0) = \alpha\,\|x_0\|$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann ist $|f(x)| = \|x\|$ für alle $x \in U$, also $\|f\| = 1$, und deshalb folgt die Behauptung aus Satz 3.3.2. □

Aufgabe 3.3.3 *Zeige dass der Dualraum X' im folgenden Sinn die Vektoren in X trennt:* Zu je zwei $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gibt es ein $f \in X'$ mit $f(x) \neq f(y)$.

Aufgabe 3.3.4 *Sei U ein abgeschlossener Unterraum von X, und sei $x_0 \in X \setminus U$. Zeige:*

(a) Setzt man für $u \in U$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ fest, dass $f(u + \alpha x_0) = \alpha$, so wird dadurch eine lineare Abbildung von $U \oplus \{\alpha x_0\}$ nach $\mathbb{K}$ definiert, die auf U identisch verschwindet.

(b) Die in (a) definierte Abbildung ist stetig, d. h., es gibt ein $K > 0$ so, dass für alle $u \in U$ und alle $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt
$$|\alpha| \;=\; |f(u + \alpha\,x_0)| \;\leq\; K\,\|u + \alpha\,x_0\|\,.$$

Benutze dies, um folgendes zu zeigen:

(c) Zu jedem abgeschlossenen echten Unterraum U von X gibt es ein $f \in X' \setminus \{0\}$, so dass $f(u) = 0$ ist für alle $u \in U$.

(d) Gibt es eine Folge (x_n) aus X, so dass für $f \in X'$ mit $f(x_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt, dass f das Nullfunktional ist, dann ist X separabel.

3.4 Dualräume konkreter Banachräume

Es wird sich zeigen, dass es sehr hilfreich ist, den dualen Raum eines Banachraumes *zu kennen*. Sätze, die den Dualraum beschreiben, nennt man oft auch *Darstellungssätze für lineare Funktionale*. Im Folgenden wollen wir solche Sätze für einige der auf Seite 23 zusammengestellten Banachräume kennen lernen.

- Sei $1 \leq p < \infty$. Der Raum ℓ_p enthält die Vektoren $e_n = (\delta_{nk})_{k=1}^{\infty}$; das sind die Folgen, deren Glieder alle gleich 0 sind, mit Ausnahme einer 1 an der n-ten Stelle. Jede Folge $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ lässt sich schreiben als unendliche Reihe
$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \, e_n \, , \tag{3.4.1}$$
denn es gilt offenbar für alle $m \in \mathbb{N}$:
$$\Big\| x - \sum_{n=1}^{m} x_n \, e_n \Big\|_p = \Big(\sum_{k=m+1}^{\infty} |x_k|^p \Big)^{1/p} \longrightarrow 0 \qquad \text{für} \quad m \to \infty \, .$$
Beachte aber, dass (3.4.1) nicht etwa heißt, dass die Vektoren e_n eine Basis im Sinne der LA sind! Für jedes $f \in \ell_p'$ folgt jedoch
$$\forall \, x \in \ell_p \ : \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_k \, y_k \, , \qquad y_k = f(e_k) \, , \tag{3.4.2}$$
wobei die Reihe immer absolut konvergiert, denn bei festem f, also festen Zahlen y_k, kann man immer die Folge (x_k) (bei festem $|x_k|$) so wählen, dass $x_k y_k \geq 0$ für alle $k \geq 1$ gilt. Das bedeutet, dass wir den Dualraum ℓ_p' auffassen können als die Menge aller Folgen $y = (y_k)$, für welche die Reihe (3.4.2) für alle $x \in \ell_p$ absolut konvergiert. Aus der Hölderschen Ungleichung folgt aber, dass dies genau dann der Fall ist, wenn $y \in \ell_{p'}$ ist; dabei ist p' *der zu* p *konjugierte Index*, der durch die Gleichung $1/p' + 1/p = 1$ bestimmt ist, wobei man für $p = 1$, also $1/p' = 0$, $p' = \infty$ setzen muss. Weiter folgt $|f(x)| \leq \|y\|_{p'} \, \|x\|_p$, und das Gleichheitszeichen wird für gewisse $x \in \ell_p$ angenommen. Also ist $\|f\| = \|y\|_{p'}$. Das bedeutet, dass ℓ_p' nicht wirklich gleich, aber *isometrisch isomorph zu* $\ell_{p'}$ ist.

- Für den Raum c_0 aller Nullfolgen gilt ebenfalls (3.4.1), und damit zeigt man genau wie oben dass c_0' isometrisch isomorph zu ℓ_1 ist.

- Jedes $y = (y_k) \in \ell_1$ definiert durch (3.4.2) ein $f \in \ell_\infty'$. Allerdings ist ein solches f bereits das Nullfunktional, wenn es auf dem abgeschlossenen Unterraum c_0 aller Nullfolgen verschwindet. Nach Aufgabe 3.3.4 gibt es aber auch nichttriviale $f \in \ell_\infty'$, die auf c_0 verschwinden. Daher ist ℓ_1 isometrisch zu einem abgeschlossenen echten Teilraum von ℓ_∞'.

- Für den Raum c aller konvergenten Folgen ist die Abbildung
$$x = (x_k)_{k=1} \quad \longmapsto \quad \ell(x) = \lim_{k \to \infty} x_k$$
ein stetiges Funktional, und mit $e = (1, 1, \ldots)$ folgt $x - \ell(x) \, e \in c_0$ für alle $x \in c$. Man kann jetzt zeigen, dass der Dualraum von c ebenfalls isometrisch isomorph zu ℓ_1 ist. Dies bedeutet nicht etwa, dass c und c_0 denselben Dualraum haben, sondern nur, dass ihre Dualräume isometrisch isomorph sind.

Wir wollen noch den Dualraum des Raums $C[a, b]$ aller auf einem nichttrivialen abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetigen reellwertigen Funktionen bestimmen, da im Beweis dieses Darstellungssatzes einige für diesen Teil der Funktionalanalysis typische Schlussweisen benutzt werden. In diesem Zusammenhang spielen sogenannte *Riemann-Stieltjes-Integrale* eine Rolle, deren Definition wir zunächst geben:

Definition 3.4.1 *Seien $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, sowie $\mathcal{Z} = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$ und $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_N)^T$ ein zugehöriger Zwischenpunktvektor. Die Summe*

$$S(\mathcal{Z}, \tau; f, dg) \;=\; \sum_{k=1}^{N} f(\tau_k)\;(g(t_k) \;-\; g(t_{k-1}))$$

heißt dann die zugehörige Riemann-Stieltjes-Summe. *Offenbar stimmt diese Summe für $g = id$ mit einer Riemannsumme für f überein. Wir sagen, dass das* Riemann-Stieltjes-Integral $I = \int_a^b f(t)\,dg(t)$ existiert, *wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $\mathcal{Z}_\varepsilon$ gibt, so dass für jede Verfeinerung $\mathcal{Z}$ von $\mathcal{Z}_\varepsilon$ und jeden zu $\mathcal{Z}$ gehörigen Zwischenpunktvektor τ gilt $|I - S(\mathcal{Z}, \tau; f, dg)| < \varepsilon$.*

Aufgabe 3.4.2 (Fundamentalabschätzung für Riemann-Stieltjes-Integrale) *Zeige die folgende Ungleichung für Riemann-Stieltes-Integrale durch Abschätzung der Riemann-Stieltes-Summen:*

$$\Big| \int_a^b f(t)\; g(t)\; dt \Big| \;\leq\; V_a^b(g) \sup_{a \leq t \leq b} |f(t)|\,.$$

Im folgenden Satz beschränken wir uns bei den Banachräumen $C[a,b]$ und $BV[a,b]$ auf den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so dass die auftretenden Funktionen alle reellwertig sind!

Satz 3.4.3 (Rieszscher Darstellungssatz) *Zu jedem f aus dem Dualraum von $C[a,b]$ gibt es ein $g \in BV[a,b]$ mit $g(a) = 0$ so, dass für alle $x \in C[a,b]$ gilt*

$$f(x) \;=\; \int_a^b x(t)\; dg(t)\,, \tag{3.4.3}$$

wobei die rechte Seite als Riemann-Stieltjes-Integral zu verstehen ist. Außerdem gilt $\|f\| = \|g\|_{BV}$.

Beweis: Nach dem Fortsetzungssatz von Hahn-Banach lässt sich jedes stetige lineare Funktional f vom Raum $C[a,b]$ auf den größeren Raum $B[a,b]$ aller beschränkten reellwertigen Funktionen (mit der Supremumsnorm) fortsetzen, ohne dabei $\|f\|$ zu vergrößern. In diesem Raum kann man eine stetige Funktion $x(t)$ durch Treppenfunktionen approximieren: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, dann gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass $|x(t) - x(\tau)| < \varepsilon$ ausfällt, sofern nur $|t - \tau| < \delta$ ist. Wenn jetzt $\mathcal{Z} = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$ und $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_N)^T$ ein zugehöriger Zwischenpunktvektor ist, wobei die Feinheit der Zerlegung kleiner als δ ist, dann folgt für die Treppenfunktion

$$y_{\mathcal{Z}}(t) \;=\; x(\tau_k) \qquad \text{für} \quad t_{k-1} < t \leq t_k\,,$$

ergänzt durch $y_{\mathcal{Z}}(a) = x(\tau_1)$, dass $\|x - y_{\mathcal{Z}}\|_\infty < \varepsilon$ ist. Sei jetzt $u_s(t) = 1$ für $a \leq t \leq s$ bzw. $u_s(t) = 0$ für $s < t \leq b$, mit $a < s \leq b$, und $u_a(t) \equiv 0$. Dann ist

$$y_{\mathcal{Z}} \;=\; \sum_{k=1}^{N} x(\tau_k)\, \Big(u_{t_k} \;-\; u_{t_{k-1}}\Big)\,.$$

Wir definieren jetzt $g(t) = f(u_t)$ für $t \in [a,b]$. Dann folgt dass

$$f(y_{\mathcal{Z}}) \;=\; \sum_{k=1}^{N} x(\tau_k)\, \Big(g(t_k) \;-\; g(t_{k-1})\Big)\,.$$

Dies ist gerade eine Riemann- Stieltjessumme für das Integral $\int_a^b x(t)\,dg(t)$, und es folgt $|f(x) - f(y_{\mathcal{Z}})| \leq \|f\|\,\|x - y_{\mathcal{Z}}\|_\infty < \varepsilon \|f\|$. Hieraus folgt die Existenz von $\int_a^b x(t)\,dg(t)$ sowie (3.4.3). Wählt man jetzt eine andere Treppenfunktion $y_{\mathcal{Z}}(t)$, indem man $x(\tau_k)$ durch $\operatorname{sgn}(g(t_k) - g(t_{k-1}))$ ersetzt, so folgt

$$f(y_{\mathcal{Z}}) \;=\; \sum_{k=1}^{N} |g(t_k) \;-\; g(t_{k-1})| \;\leq\; \|f\|\,.$$

Hieraus und aus der sogenannten *Fundamentalabschätzung* für Riemann-Stieltjes-Integrale folgt $\|f\| = \|g\|_{BV}$, also insbesondere $g \in BV[a,b]$. $\square$

3.5 Der duale Operator

Satz 3.5.1 *Zu jedem $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ gibt es genau ein $T' \in \mathcal{L}(Y',X')$ derart, dass*

$$\forall\, x \in X \quad \forall\, f \in Y' \;:\qquad f(T\,x) \;=\; (T'\,f)(x)\,. \tag{3.5.1}$$

Die Abbildung $T \mapsto T'$ ist linear von $\mathcal{L}(X,Y)$ nach $\mathcal{L}(Y',X')$, und es gilt immer $\|T'\| = \|T\|$, d. h., diese Abbildung ist eine Isometrie.

Beweis: Für $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ und $f \in Y'$ ist $f \circ T \in X'$, und $\|f \circ T\| \le \|f\|\,\|T\|$. Deshalb definiert (3.5.1) ein $T' \in \mathcal{L}(Y',X')$. Nach dem obigen Korollar zu Satz 3.3.2 existiert zu jedem $x \in X$ ein $f \in X'$ mit $\|f\| = 1$ und $f(T\,x) = \|T\,x\|$, und daher folgt für dieses f aus (3.5.1) dass

$$\|T\,x\| \;=\; |f(T\,x)| \;=\; |(T'\,f)(x)| \;\le \|T'\,f\|\,\|x\| \;\le\; \|T'\|\,\|x\|\,,$$

und daraus folgt $\|T\| \le \|T'\|$. Weiter gibt es aber zu jedem $f \in Y'$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $x \in X$ mit $\|x\| = 1$ derart, dass $\|T'\,f\| - \varepsilon \le |(T'\,f)(x)|$. Daraus folgt dann mit (3.5.1)

$$\|T'\,f\| - \varepsilon \;\le\; |f(T\,x)| \;\le\; \|f\|\,\|T\|\,\|x\| \;=\; \|f\|\,\|T\|\,,$$

und daher ist $\|T'\,f\| \le \|f\|\,\|T\|$, also $\|T'\| \le \|T\|$. Die Linearität der Abbildung $T \mapsto T'$ folgt direkt aus der Definition von T'. $\square$

Definition 3.5.2 *Die im letzten Satz definierte Abbildung T' heißt* der zu T duale Operator*.*

Wir wollen noch eine Reihe von Rechenregeln für duale Operatoren bereitstellen, die teilweise bereits bewiesen wurden:

Satz 3.5.3 (Rechenregeln für duale Operatoren)

(a) $\forall\, T_1, T_2 \in \mathcal{L}(X,Y) \;:\quad (T_1 + T_2)' \;=\; T_1' \;+\; T_2'$.

(b) $\forall\, T \in \mathcal{L}(X,Y)\; \forall\, \alpha \in \mathbb{K} \;:\quad (\alpha\,T)' \;= \alpha\,T'$.

(c) $\forall\, T \in \mathcal{L}(X,Y)\; \forall\, U \in \mathcal{L}(Y,Z) \;:\quad (U \circ T)' \;=\; T' \circ U'$.

(d) *Ist T surjektiv, so ist T' injektiv. Wenn $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ sogar invertierbar ist, so ist auch $T' \in \mathcal{L}(Y',X')$ invertierbar, und es gilt*
$$(T^{-1})' \;=\; (T')^{-1}\,.$$

Beweis: Die ersten beiden Aussagen sind äquivalent zur Linearität der Abbildung $T \mapsto T'$, und die dritte folgt leicht mit der Definition des dualen Operators. Zu (d): Aus $T'\,f = 0$ folgt mit der Definition des dualen Operators, dass $f(T\,x) = 0$ für alle $x \in X$. Wenn also T surjektiv ist, dann ist $f(y) = 0$ für alle $y \in Y$. Dies bedeutet aber $f = 0$, und daher ist T' injektiv. Wenn T sogar invertierbar ist, dann setzen wir $f = g \circ T^{-1}$ für ein beliebiges $g \in X'$. Somit gilt dann aber $f(T\,x) = g(x)$ für alle $x \in X$, und hieraus folgt per Definition von T' dass $g = T'\,f$ ist. Das ist aber die Surjektivität von T', und deshalb folgt die Invertierbarkeit. Weiter folgt aus (3.5.1) die Aussage

$$\forall\, y \in Y \quad \forall\, g \in X' \;:\qquad ((T')^{-1}g)(y) \;=\; g(T^{-1}y)\,,$$

und daher ist $(T')^{-1}$ der duale Operator zu T^{-1}. $\square$

Aufgabe 3.5.4 *Zeige mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen von* Beispiel 2.1.6 Nr. 5: *Wenn* $A = [a_{jk}]$ *Darstellungsmatrix eines Operators* $T \in \mathcal{L}(\ell_p, \ell_q)$ *ist, wobei* $1 < p, q < \infty$ *gelten soll, so hat der duale Operator* $T' \in \mathcal{L}(\ell_{q'}, \ell_{p'})$ *eine Darstellungsmatrix* $B = [b_{jk}]$, *und es gilt* $b_{jk} = a_{kj}$ *für alle* $j, k \in \mathbb{N}$. *Also ist* $B = A^T$ *die transponierte Matrix zu* A.

3.6 Projektionen

Definition 3.6.1 *Eine lineare Abbildung* $P : X \to X$ *eines Vektorraums* X *in sich heißt* eine Projektion, *falls* $P^2 := P \circ P = P$ *ist. Sind* U, V *Unterräume von* X, *und gilt* $X = U \oplus V$, *so nennt man* U *und* V *auch* komplementär *zueinander, und die Dimension von* V *heißt auch* Kodimension von U. *Vergleiche dazu* Aufgabe 3.6.4.

Aufgabe 3.6.2 *Sei* X *ein beliebiger Vektorraum über* $\mathbb{K}$, *und sei* $P : X \to X$ *eine Projektion. Zeige:*

(a) $I - P$ *ist ebenfalls Projektion.*

(b) $\operatorname{Kern}(I - P) = \operatorname{Bild} P, \quad \operatorname{Bild}(I - P) = \operatorname{Kern} P.$

(c) $X = \operatorname{Kern} P \oplus \operatorname{Bild} P$. *Zeige genauer: Die Gleichung* $x = x_1 + x_2$ *mit* $x_1 \in \operatorname{Bild} P$ *und* $x_2 \in KernP$ *gilt genau dann, wenn* $x_1 = P\,x$ *und* $x_2 = (I - P)\,x$ *ist.*

Aus (c) *folgt, dass eine Projektion immer eine Zerlegung von* X *in eine direkte Summe von Unterräumen definiert. In der nächsten Aufgabe wird umgekehrt gezeigt, dass zu einer Zerlegung auch immer eine Projektion gehört.*

Aufgabe 3.6.3 *Sei* X *ein beliebiger Vektorraum über* $\mathbb{K}$. *Zeige: Ist* $X = U \oplus V$, *und setzt man* $P\,x = u$ *für* $x = u + v$ *mit* $u \in U$, $v \in V$, *so ist* P *eine Projektion, und* $\operatorname{Bild} P = U$, $\operatorname{Kern} P = V$. *Man nennt* P *auch* Projektion von X auf U entlang des Raumes V.

Aufgabe 3.6.4 *Sei* X *ein beliebiger Vektorraum über* $\mathbb{K}$, *und sei* $X = U \oplus V = U \oplus W$. *Dann gibt es nach der vorausgegangenen Aufgabe Projektionen* P_V *und* P_W *von* X *auf* V *bzw.* W *entlang des Raumes* U. *Zeige, dass* P_V *den Raum* W *in* V *abbildet, und dass die Restriktion von* P_V *auf* W *injektiv ist. Benutze dies, um zu zeigen, dass* $\dim V \le \dim W$ *ist, und schließe hieraus dass die Kodimension von* U *eindeutig bestimmt ist.*

Satz 3.6.5 (Stetigkeit von Projektionen) *In einem Banachraum* X *ist eine Projektion* P *genau dann stetig, wenn* $\operatorname{Kern} P$ *und* $\operatorname{Bild} P$ *abgeschlossen sind.*

Beweis: Allgemein zeigt man leicht, dass für jedes $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ der Kern ein abgeschlossener Unterraum von X ist. Also ist für eine stetige Projektion P sowohl $\operatorname{Kern} P$ als auch $\operatorname{Bild} P = \operatorname{Kern}(I - P)$ abgeschlossen. Für die Umkehrung sei (x_n) eine Folge aus X mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim_{n\to\infty} P\,x_n = y$. Dann ist $y \in \operatorname{Bild} P$, und $x - y \in \operatorname{Kern} P$. Wegen $x = y + (x - y)$ folgt mit Aufgabe 3.6.2, Teil (c), dass $y = P\,x$ ist. Daher ist P graphenabgeschlossen und somit stetig. □

Definition 3.6.6 *Ein Unterraum* $U \subset X$ *heißt* projizierbar, *wenn es eine stetige Projektion* P *von* X *auf* U *gibt, d. h., wenn* $\operatorname{Bild} P = U$ *ist.*

Notwendig für die Projizierbarkeit ist in jedem Fall die Abgeschlossenheit von U. Wenn X ein Banachraum ist, ist ein abgeschlossener Unterraum U nach dem letzten Satz genau dann projizierbar, wenn ein abgeschlossener Unterraum V existiert, so dass $X = U \oplus V$ ist. In diesem Fall nennt man V manchmal auch *Komplement* von U, und umgekehrt ist dann U natürlich Komplement von V.

Der folgende Satz sagt, dass ein Komplement von U jedenfalls dann existiert, wenn U endlichdimensional ist, und es gibt Banachräume, in denen diese Bedingung beinahe notwendig ist in dem Sinn, dass aus der Existenz eines komplementären Raumes eines abgeschlossenen Unterrraumes U folgt, dass U endliche Dimension oder endliche Kodimension hat.

Satz 3.6.7 *Sei U ein endlichdimensionaler Unterraum eines normierten Raumes X. Dann ist U projizierbar.*

Beweis: Seien $x_1, \ldots, x_n$ eine Basis von U. Nach dem Fortsetzungssatz gibt es dann $f_1, \ldots, f_n \in X'$ so, dass $f_j(x_k) = \delta_{jk}$ ist, und wir definieren $P\,x = \sum_{j=1}^{n} f_j(x)\,x_j$. Dann ist P linear und beschränkt, also $P \in \mathcal{L}(X)$, und $P\,x_k = x_k$ für $k = 1, \ldots, n$. Daraus folgt aber $P^2 = P$ und $U = \operatorname{Bild} P$, also die Behauptung. □

Aufgabe 3.6.8 *Zeige: Ist $f \in X' \setminus \{0\}$, so ist $U = \{x \in X \;:\; f(x) = 0\}$ ein abgeschlossener Unterraum von X der Kodimension 1.*

3.7 Quotientenräume

Definition 3.7.1 *Sei X ein Vektorraum, und sei U ein Unterraum von X. Dann ist die Relation*

$$x \equiv y \bmod U \quad \Longleftrightarrow \quad x - y \in U$$

eine Äquivalenzrelation auf X. Man sagt in Worten auch: x ist kongruent y modulo U. *Die Äquivalenzklasse eines Vektors $x \in X$ ist genau die Menge $x + U$, also eine lineare Mannigfaltigkeit. Durch die Definition*

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall\, x, y \in X : \qquad (x+U) \;+\; (y+U) \;=\; x+y+U\,, \qquad \alpha(x+U) \;=\; \alpha\,x \;+\; U$$

wird die Menge der Äquivalenzklassen zu einem Vektorraum, den man mit X/U bezeichnet und den Quotientenraum *oder auch den* Faktorraum *von X über U nennt. Die lineare Abbildung $Q : x \mapsto x + U$ heißt* die Quotientenabbildung *von X auf X/U. Ist auf X eine Norm gegeben, und ist U ein abgeschlossener Unterraum von X, so ist durch*

$$\|x + U\| \;:=\; \inf\{\|x + u\| \;:\; \quad u \in U\;\}$$

eine Norm auf dem Quotientenraum X/U definiert – vergleiche dazu auch die nächste Aufgabe.

Aufgabe 3.7.2 *Zeige für jeden Vektorraum X und jeden Unterraum U:*

(a) *Die obige Definition der Addition und Multiplikation in X/U stimmt mit der in* Aufgabe 2.6.1 *gegebenen Definition der Addition und Multiplikation beliebiger Teilmengen von X überein.*

(b) *In X/U ist der Nullvektor gleich U.*

(c) *Die Quotientenabbildung ist linear.*

(d) *Falls X ein normierter Raum ist, und falls U abgeschlossen ist, ist $\|x+U\| = 0$ genau dann, wenn $x \in U$ ist, d. h., wenn $x+U = U$ ist. Zeige weiter, dass dann auch die übrigen Normaxiome erfüllt sind.*

Wiederhole, dass $\|x+U\|$ gleich dem Abstand, im Sinne von Definition 1.7.9, *von von $\{x\}$ zum Unterraum U ist.*

Aufgabe 3.7.3 *Zeige: Falls X ein normierter Vektorraum und U ein abgeschlossener Unterraum ist, gilt für die Quotientenabbildung $Q : x \mapsto x+U$ immer $\|Q(x)\| \le \|x\|$, und deshalb ist $Q \in \mathcal{L}(X, X/U)$ mit $\|Q\| = 1$.*

Satz 3.7.4 *Ist X ein Banachraum, und ist U ein abgeschlossener Unterraum von X, so ist auch X/U ein Banachraum.*

Beweis: Nach Bemerkung 1.4.5 reicht es zu zeigen, dass jede absolut konvergente Folge aus X/U auch konvergent ist. Da wir hier in einem Vektorraum arbeiten, können wir statt absolut konvergenter Folgen genausogut mit absolut konvergenten Reihen arbeiten. Sei deshalb $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + U)$ eine solche absolut konvergente Reihe, also so dass $\sum_n \|x_n + U\| < \infty$ ist. Nach Definition der Norm auf X/U gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $u_n \in U$ so, dass $\|x_n + u_n\| \le \|x_n + U\| + 2^{-n}$ ist. Daraus folgt die absolute Konvergenz (in X) der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + u_n)$, und da X vollständig ist, gibt es ein $x \in X$ mit $x = \sum_{n=1}^{\infty}(x_n + u_n)$. Da die Quotientenabbildung Q nach Aufgabe 3.7.3 stetig ist, folgt $x + U = Q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Q(x_n + u_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(x_n + U)$, also konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + U)$ gegen $x + U$. □

3.8 Reflexive Räume

Definition 3.8.1 *Für jeden normierten Raum X ist der Dualraum X' ein Banachraum nach* Satz 2.1.10. *Sein Dualraum heißt auch* Bidual *X'' von X. Zu jedem $x \in X$ ist durch*

$$\forall\ f \in X' : \qquad j_x(f) \ = \ f(x)$$

ein $j_x \in X''$ gegeben, und $\|j_x\| = \|x\|$. Man nennt $j : X \to X''$ mit $x \mapsto j_x$ auch die Auswertungsabbildung. *Ein normierter Vektorraum X heißt* reflexiv, *wenn die Auswertungsabbildung j surjektiv ist.*

Bemerkung 3.8.2 *Ein reflexiver Raum ist isomorph zu X'' und daher immer ein Banachraum. Es gibt aber Banachräume X, welche zu X'' isomorph, aber nicht reflexiv sind.*

Aufgabe 3.8.3 *Zeige, dass die oben definierte Auswertungsabbildung linear und isometrisch, also insbesondere auch injektiv ist.* **Anleitung:** *Benutze das Korollar zu* Satz 3.3.2, *um zu zeigen, dass*

$$\|j_x\| \ = \ \sup_{f \in B_{X'}} |f(x)| \ = \ \|x\| \, .$$

Aufgabe 3.8.4 *Zeige: Wenn X ein Banachraum ist, dann ist $j(X)$ ein abgeschlossener Unterraum von X''.*

Aufgabe 3.8.5 *Benutze die Auswertungsabbildung, um einen anderen Beweis dafür zu geben, dass ein normierter Raum, im Sinne von* Satz 1.5.5, *vervollständigt werden kann. Genauer: Zeige, dass es zu jedem normierten Raum X einen Banachraum Y gibt, der einen dichten Teilraum U besitzt, welcher linear isometrisch zu X ist.*

Aufgabe 3.8.6 *Seien $j : X \to X''$ und $k : Y \to Y''$ die Auswertungsabbildungen auf X und Y, und sei $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Zeige für den Operator $T'' : X'' \to Y''$ die Gleichung $T'' \circ j = k \circ T$.*

Satz 3.8.7 *Sei X reflexiv. Dann ist auch jeder abgeschlossene Teilraum $U \subset X$ sowie jeder zu X isomorphe Raum Y reflexiv.*

Beweis: Sei $\phi \in U''$. Dann ist ψ, definiert durch $\psi(f) = \phi(f_{|U})$ für alle $f \in X'$, ein Element von X''. Da X reflexiv ist, existiert also ein $x \in X$ mit $\psi(f) = f(x)$. Wäre $x \notin U$, dann gäbe es ein $f \in X'$ mit $f(x) \neq 0$, aber $f_{|U} \equiv 0$, was nicht sein kann. Also ist in der Tat $x \in U$, und somit folgt dass die Auswertungsabbildung von U nach U'' surjektiv ist. Sei jetzt $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ ein Isomorphismus. Dann ist T' nach Satz 3.5.3 ein Isomorphismus von Y' auf X', und T'' ein solcher zwischen X'' und Y''. Die Reflexivität von X bedeutet genau dasselbe wie die Aussage

$$\forall\, \phi \in X'' \quad \exists\, x \in X \quad \forall\, f \in X' \ : \qquad \phi(f) \ = \ f(x)\,. \tag{3.8.1}$$

Definiert man $\psi \in Y''$, $g \in Y'$ und $y \in Y$ durch $\psi = T''\,\phi$, $f = T'\,g$ und $y = T\,x$, so gilt nach Definition des dualen Operators $g(T\,x) = f(x)$ sowie $\phi(T'\,g) = \psi(g)$. Deshalb folgt aus (3.8.1) die Aussage $\psi(g) = g(y)$, was wegen der Bijektivität von T, T' und T'' zur Reflexivität von Y äquivalent ist. $\square$

Mit Hilfe des letzten Satzes zeigen wir jetzt:

Satz 3.8.8 *Ein Banachraum X ist genau dann reflexiv, wenn sein Dualraum X' reflexiv ist.*

Beweis: Die Reflexivität von X' ist äquivalent zu

$$\forall\, F \in X''' \quad \exists\, f \in X' \quad \forall\, \phi \in X'' \ : \qquad F(\phi) \ = \ \phi(f)\,. \tag{3.8.2}$$

Sei X reflexiv, und sei $F \in X'''$. Mit Hilfe der Auswertungsabbildung $j : X \to X''$ setzen wir $f = F \circ j$. Dann ist f linear und stetig von X nach $\mathbb{K}$, und somit ist $f \in X'$, und es gilt $f(x) = F(j_x)$ für alle $x \in X$. Da X reflexiv ist, gibt es zu jedem $\phi \in X''$ ein $x \in X$ so, dass $\phi = j_x$ ist. Daraus folgt aber $F(\phi) = F(j_x) = f(x) = j_x(f)$. Also gilt (3.8.2), und somit ist X' reflexiv. Wenn jetzt X' reflexiv ist, dann ist nach dem, was soeben bewiesen wurde, auch X'' reflexiv. Mit Hilfe von Aufgabe 3.8.4 folgt aus Satz 3.8.7 die Reflexivität von $j(X)$, und damit auch von X, da j eine Isometrie, also jedenfalls ein Isomorphismus ist. $\square$

3.9 Reflexivität konkreter Banachräume

Nachdem wir in Abschnitt 3.4 die Dualräume einiger Banachräume charakterisiert haben, ist es leicht, jetzt ihre Reflexivität zu untersuchen:

- Sei $1 < p < \infty$. Der Dualraum von ℓ_p ist isometrisch isomorph zu $\ell_{p'}$, mit $1/p + 1/p' = 1$. Also folgt, dass ℓ_p'' isometrisch isomorph zu ℓ_p selber ist, und dass die Auswertungsabbildung in der Tat surjektiv ist. Daher ist ℓ_p *reflexiv für alle p im Intervall* $1 < p < \infty$.
- Die Dualräume von c und c_0 sind beide isometrisch zu ℓ_1, und dessen Dualraum ist ℓ_∞. Mit dem Satz von Hahn-Banach ergibt sich, dass die Auswertungsabbildung nicht surjektiv sein kann, und deshalb sind c und c_0 nicht reflexiv.
- Wegen Satz 3.8.8 sind die Räume ℓ_1, als Dualraum von c oder c_0, sowie ℓ_∞, als Dualraum von ℓ_1, beide nicht reflexiv.

3.10 Schwache Konvergenz

Definition 3.10.1 *Wir nennen eine Folge (x_n) in X* schwach konvergent*, falls ein $x \in X$ existiert, für welches gilt*

$$\forall\ f \in X' : \qquad f(x_n) \longrightarrow f(x) \quad (n \to \infty)\,.$$

Der Vektor x heißt dann schwacher Grenzwert *der Folge, und wir schreiben auch*

$$x_n \quad \rightharpoonup \quad x \quad (n \to \infty)\,, \quad \text{oder} \quad \sigma(X, X') - \lim_{n\to\infty} x_n \;=\; x\,. \tag{3.10.1}$$

Zur Unterscheidung nennen wir den üblichen, d. h. von der Norm auf X induzierten Konvergenzbegriff auch manchmal die Normkonvergenz*. Wegen* Aufgabe 3.3.3 *ist klar, dass der schwache Grenzwert einer Folge eindeutig bestimmt ist. Auf Grund der Folgenstetigkeit von f impliziert die Normkonvergenz einer Folge ihre schwache Konvergenz, und zwar gegen denselben Grenzwert. Die Umkehrung gilt nach* Beispiel 3.10.2 *nicht. Weiter heißt eine Menge $A \subset X$* schwach beschränkt*, falls es zu jedem $f \in X'$ ein $K_f > 0$ gibt, für welches $|f(x)| \le K_f$ für alle $x \in A$ gilt. Eine schwach konvergente Folge ist also immer schwach beschränkt.*

Beispiel 3.10.2 *In c_0 ist die Folge der Einheitsvektoren $e_n = (\delta_{mn})_{m=0}^{\infty}$ schwach konvergent gegen die Nullfolge, während sie nicht normkonvergent ist, da ja $\|e_n\| = 1$ ist.*

Satz 3.10.3 *Eine schwach beschränkte Menge A ist auch beschränkt. Insbesondere ist jede schwach konvergente Folge beschränkt.*

Beweis: Mit Hilfe der Auswertungsabbildung j folgt aus der schwachen Beschränktheit von A die punktweise Beschränktheit von $j(A)$ im Bidual X''. Mit dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit (Satz 2.5.6) folgt die (gleichmäßige) Beschränktheit von $j(A)$, und da j eine Isometrie ist, muss A beschränkt sein. $\square$

Mittels der Auswertungsabbildung j kann man jedes $x \in X$ mit dem Element $j_x \in X''$ identifizieren, und dadurch wird die schwache Konvergenz einer Folge (x_n) dasselbe wie die punktweise Konvergenz der Folge (j_{x_n}) in X''. Eine ähnliche Definition eines schwachen Konvergenzbegriffes in X' ist die folgende:

Definition 3.10.4 *Eine Folge (f_n) heißt* schwach*-konvergent *gegen ein $f \in X'$, wenn $f_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in X$. Dies bedeutet genau, dass die Folge (f_n) punktweise gegen f konvergiert. Wir schreiben dann auch*

$$f_n \quad \overset{*}{\rightharpoonup} \quad f \quad (n \to \infty)\,, \quad \text{oder} \quad \sigma(X', X) - \lim_{n\to\infty} f_n \;=\; f\,. \tag{3.10.2}$$

Der Grenzwert einer schwach*-konvergente Folge ist immer eindeutig bestimmt, und falls X ein Banachraum ist, folgt aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit dass eine schwach*-konvergente Folge immer beschränkt ist. In X' kann man neben der Normkonvergenz und der schwach*-Konvergenz auch die schwache Konvergenz betrachten, wobei aus der schwachen Konvergenz die schwach*-Konvergenz folgt; die Umkehrung gilt nicht.

Satz 3.10.5 *Wenn X ein separabler Banachraum ist, dann besitzt jede in X' beschränkte Folge (f_n) eine schwach*-konvergente Teilfolge.*

Beweis: Sei die Folge (x_m) dicht in X. Zu x_1 existiert eine Teilfolge $(f_n^{(1)})$ von (f_n), für welche $(f_n^{(1)}(x_1))$ konvergiert. Diese enthält wiederum eine Teilfolge $(f_n^{(2)})$, für welche $(f_n^{(2)}(x_2))$ konvergiert, u. s. w. Die

Diagonalfolge $(g_j = f_j^{(j)})$ konvergiert dann an allen Stellen x_m. Sei jetzt $x \in X$ beliebig. Dann gilt für alle $n, \nu, m \in \mathbb{N}$:

$$|g_n(x) - g_\nu(x)| \;\leq\; |g_n(x) - g_n(x_m)| \;+\; |g_n(x_m) - g_\nu(x_m)| \;+\; |g_\nu(x_m) - g_\nu(x)|\,.$$

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein m so, dass $\|x - x_m\| < \varepsilon$ ist, und wegen der Beschränktheit der Folge (f_n) folgt hieraus dass der erste und dritte Term auf der rechten Seite der obigen Abschätzung durch $K\,\varepsilon$ abgeschätzt werden können, wobei K von n und ν unabhängig ist. Wenn wir dann n und ν groß machen, wird der mittlere Term kleiner als ε sein, und deshalb ist $(g_n(x))$ eine Cauchyfolge, also konvergent. □

Man kann obigen Satz so lesen, dass die Einheitskugel von X' in der schwach*-Topologie folgenkompakt ist (was sie in der von der Norm induzierten Topologie nur dann ist, wenn X endlichdimensional ist). Für die Einheitskugel von X selber gilt dasselbe in der schwachen Topologie dann, wenn X reflexiv ist; dazu beweisen wir zunächst folgenden Satz:

Satz 3.10.6 *Wenn X' separabel ist, so ist es auch X selber. Insbesondere ist ein reflexiver Raum genau dann separabel, wenn es sein Dualraum ist.*

Beweis: Sei die Folge (f_n) dicht in X'. Dann gibt es zu jedem n ein $x_n \in X$ mit $\|x_n\| = 1$ so, dass $f_n(x_n) \geq 1/2\,\|f_n\|$ ist. Sei jetzt $f \in X'$ beliebig. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein n, so dass $\|f - f_n\| < \varepsilon$ ist. Wenn $f(x_\nu) = 0$ ist für alle $\nu \in \mathbb{N}$, dann folgt

$$\|f\| \;\leq\; \|f - f_n\| \;+\; \|f_n\| \;<\; \varepsilon \;+\; 2\,f_n(x_n) \;=\; \varepsilon \;+\; 2\,(f_n - f)(x_n) \leq 3\,\varepsilon\,.$$

Hieraus folgt aber $\|f\| = 0$, und deshalb ist X nach Aufgabe 3.3.4 separabel. □

Satz 3.10.7 *Sei X ein reflexiver Banachraum. Dann hat jede beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge.*

Beweis: Sei die Folge (x_n) aus X beschränkt, und sei U die abgeschlossene Hülle der Menge aller Linearkombinationen der Folgenglieder. Dann ist U nach Satz 3.8.7 selber reflexiv und vor allem separabel, denn die Menge aller Linearkombinationen der x_n mit Koeffizienten mit rationalem Real- und Imaginärteil ist dicht in U. Da U'' isometrisch isomorph zu U ist, folgt mit dem letzten Satz, dass auch U' separabel ist. Die schwache Konvergenz in X ist (wegen der Reflexivität von X) dasselbe wie die schwach*-Konvergenz in X', und deshalb folgt die Behauptung aus Satz 3.10.5, angewandt auf U'. □

Kapitel 4

Spektraltheorie beschränkter Operatoren

Wenn nichts anderes gesagt wird, sei im Folgenden X immer ein nichttrivialer Banachraum - dies soll heißen, dass X nicht nur aus dem Nullvektor besteht. Dabei soll allerdings erlaubt sein, dass die Dimension von X endlich ist, obwohl der typische Fall der eines unendlich dimensionalen Raumes ist. Weiter sei T ein fest gewählter, aber beliebiger Operator aus $\mathcal{L}(X)$, und b bezeichne einen festen Vektor aus X. Wir wollen im Folgenden immer die Lösbarkeit, bzw. die Lösungsmenge, der Gleichung $T\,x \;=\; b$ studieren, wobei per Definition nur Lösungen $x \in X$ zugelassen sind. Dies ist eine natürliche Verallgemeinerung der entsprechenden Frage für lineare inhomogene Gleichungssysteme aus der linearen Algebra. Allerdings ist es wichtig, dass wir eben nur $x \in X$ als Lösungen der Gleichung $T\,x \;=\; b$ zulassen wollen; vergleiche hierzu auch die Beispiele im nächsten Anbschnitt. Analog zur Eigenwertheorie von quadratischen Matrizen ist es auch hier sinnvoll, an Stelle der obigen inhomogenen Gleichung folgende allgemeinere Beziehung zu studieren: Für beliebiges $\lambda \in \mathbb{K}$ betrachten wir die Gleichung

$$(\lambda\,I \;-\; T)\,x \;=\; b\,, \tag{4.0.1}$$

und untersuchen speziell die *universelle bzw. eindeutige Lösbarkeit* von (4.0.1), d. h., die Surjektivität bzw. Injektivität des Operators $\lambda\,I - T$. Dabei schreibt man üblicherweise auch einfacher $\lambda - T$ an Stelle von $\lambda\,I - T$. Wichtig ist dabei, dass aus der Bijektivität von $\lambda - T$ mit dem Satz vom inversen Operator bereits die Stetigkeit der Umkehrabbildung $(\lambda - T)^{-1}$ folgt, so dass Bijektivität und Invertierbarkeit von $\lambda - T$ hier dasselbe bedeuten. Andererseits kann im Falle eines unendlichdimensionalen Raumes X der Operator $\lambda - T$ surjektiv aber nicht injektiv, oder auch injektiv aber nicht surjektiv sein.

4.1 Einige Beispiele

Wir betrachten erneut einige Operatoren, die bereits in Beispiel 2.1.6 vorgestellt wurden. Dabei soll insbesondere klar werden, dass die Spektraltheorie in unendlichdimensionalen Räumen deutlich von der in endlicher Dimension abweicht. Der Grund dafür liegt in der einfachen Tatsache, dass im endlichdimensionalen Fall Surjektivität und Injektivität eines Operators $T \in \mathcal{L}(X)$ zueinander äquivalent sind, während dies im Allgemeinen anders ist.

1. Sei $X = C[a, b]$ die Menge aller stetigen Funktionen auf einem nichttrivialen abgeschlossenen Intervall $[a, b]$, und sei k eine stetige Kernfunktion. Bei gegebenem $f \in C[a, b]$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt die

Gleichung

$$\lambda\, x(s) \;=\; f(s) \;+\; \int_a^b \; k(s,t)\, x(t)\, dt\,, \tag{4.1.1}$$

eine *Fredholmsche Integralgleichung* für die unbekannte Funktion x. Für $\lambda = 0$ bzw. $\lambda \neq 0$ spricht man auch von einer Gleichung *erster* bzw. *zweiter Art*. Diese Gleichung lässt sich abstrakt in der Form $(\lambda - T)\, x = f$ schreiben, wobei T der durch (2.1.2) gegebene Fredholm-Operator ist. Wir werden sehen, dass Fredholm-Operatoren immer *kompakte Operatoren* sind, deren Theorie große Ähnlichkeit mit der im Fall endlicher Dimension aufweist. Tatsächlich war die Theorie der Integralgleichungen einer der Ausgangspunkte und ein starkes Motiv für die Entwicklung der modernen Funktionalanalysis, und hier speziell für die Spektraltheorie der kompakten Operatoren.

2. Wenn k der Kern eines Volterraschen Operators (2.1.3) auf $C[a,b]$ ist, so heißt die zu (4.1.1) analoge Gleichung *Volterrasche Integralgleichung*. Wie wir noch sehen werden, ist ihre Theorie deutlich einfacher als die der Fredholmschen Gleichungen.

3. Sei jetzt $X = \ell_p$, mit $1 \leq p < \infty$, und sei $T \in \mathcal{L}(\ell_p)$ mit der Darstellungsmatrix $A = (a_{jk})$. Die Gleichung $(\lambda - T)\, x = b$, für gegebenes $b \in \ell_p$, ist dann ein lineares inhomogenes Gleichungssystem

$$\lambda\, x_j \;-\; \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}\, x_k \quad = \; b_j \tag{4.1.2}$$

in unendlich vielen Unbekannten x_k. Dabei ist es wichtig, darauf zu achten, dass die Lösbarkeit dieses Systems nicht nur bedeutet, dass eine Folge $x = (x_k)$ existiert, welche die Gleichungen erfüllt, sondern dass x auch zu ℓ_p gehören muss. Dass dies nicht automatisch der Fall ist, zeigt das nächste Beispiel.

4. Sei der Einfachheit halber jetzt $p > 1$ vorausgesetzt, und sei der Operator T der *Linksshift* $x = (x_1, x_2, \ldots) \mapsto T\, x = (x_2, x_3, \ldots)$. In diesem Fall sind die Gleichungen (4.1.2) identisch mit der *Differenzengleichung*

$$x_{j+1} \;=\; \lambda\, x_j \;-\; b_j \qquad \forall\; j \geq 1.$$

Wählt man x_1 beliebig, so sind die übrigen x_j eindeutig bestimmt, und es folgt

$$x_j \;=\; \lambda^{j-1}\, x_1 \;-\; \sum_{k=1}^{j-1} \lambda^{j-k-1}\, b_k \qquad \forall\; j \geq 1\,. \tag{4.1.3}$$

Sei jetzt zunächst $|\lambda| \geq 1$ vorausgesetzt. Die Folge $x = (x_j)$ kann höchstens dann in ℓ_p liegen, wenn sie eine Nullfolge ist. Da $|\lambda|^j \to \infty$ für $j \to \infty$, muss also notwendigerweise $x_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k}\, b_k$ gelten, woraus $x_j = \sum_{k=j}^{\infty} \lambda^{j-k-1}\, b_k$ folgt. Das bedeutet, dass $\lambda - T$ in diesem Fall injektiv ist. Falls sogar $|\lambda| = 1$ ist, ist die Reihe für x_1 aber nicht für alle $b \in \ell_p$ konvergent, da ja $p > 1$ vorausgesetzt ist, und das bedeutet, dass die Abbildung $\lambda - T$ zwar injektiv, aber nicht surjektiv ist. Ist dagegen $|\lambda| > 1$, so konvergieren alle Reihen für die x_j absolut, und die Folge $x = (x_j)$ ist in der Tat in ℓ_p; um dies zu sehen, schreiben wir

$$x \;=\; \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda^{-\nu-1}\, T^{\nu}\, b = 1$$

und wenden die Dreiecksungleichung an. Das heißt, dass für $|\lambda| > 1$ die Abbildung $\lambda - T$ immer invertierbar ist. Wenn wir jetzt $|\lambda| < 1$ annehmen, so ist die Folge $(\lambda^{j-1}\, x_1)$ für beliebiges x_1 immer in ℓ_p. Aus diesem Grund ist $\lambda - T$ nicht injektiv. Allerdings ist die Abbildung surjektiv, wie wir jetzt zeigen wollen: Für $y = (y_k) \in \ell_{p'}$ sei $z = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1}\, T^j y$, also $z_k = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1}\, y_{j+k}$, für alle $k \geq 1$. Dann folgt $z \in \ell_{p'}$, und deshalb ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} z_k\, b_k$ absolut konvergent. Einsetzen für z_k und Vertauschen der Summationsreihenfolge zeigt aber $\sum_{k=1}^{\infty} z_k\, b_k = -\sum_{j=2}^{\infty} y_j\, x_j$, wobei $x = (x_j)$ durch (4.1.3) mit $x_1 = 0$ gegeben ist. Da dies für alle $y \in \ell_{p'}$ gilt, folgt $x \in \ell_p$.

Aufgabe 4.1.1 *Die Abbildung $x = (x_1, x_2, \ldots) \mapsto T\, x = (0, x_1, x_2, \ldots)$ wird meist als* Rechtsshift *bezeichnet. Fasse sie als Element von $\mathcal{L}(\ell_p)$ auf, finde ihre Darstellungsmatrix und untersuche, analog zum letzten Beispiel, die Invertierbarkeit von $\lambda - T$.*

4.2 Spektrum und Resolvente

Definition 4.2.1 *Die Menge $\rho(T)$ aller $\lambda \in \mathbb{K}$, für welche $\lambda - T$ invertierbar ist, heißt* die Resolventenmenge *von T, und der Operator $R(\lambda, T) = (\lambda - T)^{-1}$ heißt* die Resolvente *von T im Punkt λ. Die Menge $\sigma(T) = \mathbb{K} \setminus \rho(T)$ heißt* das Spektrum von T, *und die Zahl*

$$r(T) \;=\; \sup \{\, |\lambda| \;:\; \lambda \in \sigma(T) \,\}$$

heißt der Spektralradius *von T, wobei wie üblich das Supremum der leeren Menge gleich $-\infty$ interpretiert wird.*

Aufgabe 4.2.2 *Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei X ein n-dimensionaler Banachraum, so dass nach* Aufgabe 2.4.2 *jede lineare Abbildung von X in sich stetig ist. Wiederhole aus der Vorlesung über lineare Algebra: Zu jedem $T \in \mathcal{L}(X)$ gehört, nach Wahl einer Basis von X, eine Darstellungsmatrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, und für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$ ist $\lambda - T$ genau dann invertierbar, wenn $\det(\lambda I - A) = 0$ ist. Also besteht das Spektrum $\sigma(T)$ genau aus den höchstens endlich vielen Eigenwerten von A, soweit diese in $\mathbb{K}$ liegen, was natürlich höchstens dann eine Einschränkung ist, wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist. In jedem Fall ist die Spektraltheorie im Fall eines endlichdimensionalen Raumes X für uns im Grunde ohne Interesse.*

Aufgabe 4.2.3 *Finde das Spektrum des Linksshifts, aufgefasst als Abbildung von ℓ_p in sich, im Fall $1 < p < \infty$.*

Aufgabe 4.2.4 *Finde das Spektrum eines* Multiplikationsoperators *$(T_k\, f)(s) = k(s)\, f(s)$, wobei $k \in C[a, b]$, also $T_k \in \mathcal{L}(C[a, b])$ ist.*

Aufgabe 4.2.5 (Spektrum des inversen Operators) *Sei $T \in \mathcal{L}(X)$ invertierbar. Zeige für $\lambda \neq 0$ dass $\lambda - T = -\lambda T\,(\lambda^{-1} - T^{-1})$ ist, und schließe hieraus, dass λ genau dann im Spektrum von T liegt, wenn λ^{-1} ein Spektralwert von T^{-1} ist.*

Satz 4.2.6 (Kompaktheit des Spektrums) *Die Resolventenmenge $\rho(T)$ ist offen, und der Spektralradius von T ist höchstens gleich $\|T\|$. Wenn $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist, dann ist das Spektrum nicht leer, also $r(T) \geq 0$, und es gibt $\lambda \in \sigma(T)$ mit $|\lambda| = r(T)$.*

Beweis: Aus Lemma 2.2.6 folgt dass $\lambda - T = \lambda\,(I - \lambda^{-1}\,T)$ invertierbar ist, sobald $|\lambda| > \|T\|$ ist, und wir erhalten für die Resolvente die Darstellung

$$R(\lambda, T) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1}\, T^n\,, \tag{4.2.1}$$

wobei die Reihe in der Norm auf $\mathcal{L}(X)$ konvergiert. Daher ist $r(T) \leq \|T\|$. Ist $\lambda_0 \in \rho(T)$, so rechnet man nach, dass $\lambda - T = (\lambda_0 - T)\,(I - (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0, T))$ ist, und deshalb ist $\lambda - T$ nach demselben Lemma invertierbar, sofern nur $|\lambda - \lambda_0| < \|R(\lambda_0, T)\|^{-1}$ ist, und es gilt

$$R(\lambda, T) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n\; R(\lambda_0, T)^{n+1} \tag{4.2.2}$$

für diese λ. Das zeigt, dass die Resolventenmenge offen, also ihr Komplement $\sigma(T)$ abgeschlossen, d. h. sogar kompakt ist. Sei jetzt $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Für alle $f \in X'$ und $x \in X$ folgt aus (4.2.2), dass $h(\lambda) = f(R(\lambda, T)\,x)$ eine holomorphe Funktion in jedem Punkt der Resolventenmenge ist, und wegen (4.2.1) geht diese Funktion für $\lambda \to \infty$ gegen 0. Falls also $\rho(T) = \mathbb{C}$ wäre, so würde aus dem Satz von Liouville folgen, dass h für jedes $f \in X'$ die Nullfunktion wäre. Daraus würde sich $R(\lambda, T) \equiv 0$ ergeben, was aber (4.2.1) widerspricht. Also ist $\sigma(T) \neq \emptyset$. Nach Definition von $r(T)$ gibt es eine Folge (λ_n) aus $\sigma(T)$, für welche $|\lambda_n|$ gegen $r(T)$ konvergiert. Diese enthält aber eine konvergente Teilfolge, und deren Grenzwert ist wegen der Abgeschlossenheit von $\sigma(T)$ selber ein Spektralwert. □

Aufgabe 4.2.7 (Vorgeschriebenes Spektrum) *Sei (t_n) eine beschränkte Folge aus $\mathbb{K}$, und sei für $x = (x_n) \in \ell_p$ definiert $T\,x = (t_n\,x_n)$. Zeige dass $T \in \mathcal{L}(\ell_p)$ ist, und bestimme das Spektrum von T. Benutze dies, um zu zeigen, dass es zu jeder kompakten Menge $\sigma \subset \mathbb{K}$ ein $T \in \mathcal{L}(\ell_p)$ gibt, welches gerade das Spektrum σ hat.*

Satz 4.2.8 (Spektralradiusformel) *Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt für den Spektralradius $r(T)$ die Formel*

$$r(T) \;=\; \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} \;=\; \inf_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n}\,.$$

Beweis: Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ so, dass $|\lambda| > \inf_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n}$. Dann existiert also ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $\|T^m\| < |\lambda|^m$ ist. Daraus folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|T^n\|}{|\lambda|^{n+1}} \;\le\; \sum_{r=0}^{m-1} \frac{\|T^r\|}{|\lambda|^{r+1}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\|T^m\|^{\nu}}{|\lambda|^{m\nu}} \;<\; \infty\,.$$

Das bedeutet, dass die Reihe (4.2.1) für solche λ absolut konvergiert, und daher ist $\lambda \in \rho(T)$. Also ist $r(T) \le \inf \|T^n\|^{1/n}$. Seien jetzt $f \in X'$ und $x \in X$, und sei $h(\lambda) = f((\lambda - T)\,x)$ für $\lambda \in \rho(T)$. Dann folgt aus (4.2.2), dass h holomorph im Kreisring $r(T) < |\lambda| < \infty$ ist, und deshalb lässt sich h dort in eine Laurentreihe entwickeln. Wegen (4.2.1) bzw. dem Identitätssatz für Laurentreihen folgt also

$$h(\lambda) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1}\, f(T^n\,x) \qquad \forall\; |\lambda| > r(T)\,.$$

Das notwendige Kriterium für die Konvergenz einer Reihe impliziert, dass die Folge $(\lambda^{-n}\,T^n\,x)$ schwach gegen Null konvergiert. Nach Satz 3.10.3 ist sie dann beschränkt. Also ist die Folge $(\lambda^{-n}\,T^n)$ auf X punktweise beschränkt, woraus aber nach Satz 2.5.6 die gleichmäßige Beschränktheit folgt. Dies heißt, dass ein $c > 0$ existiert, für welches $\|T^n\| \le c\,|\lambda|^n$ für alle $n \ge 1$ ist. Also ist $\limsup_n \|T^n\|^{1/n} \le |\lambda|$, und weil $|\lambda|$ beliebig dicht an $r(T)$ sein kann, folgt sogar $\limsup_n \|T^n\|^{1/n} \le r(T)$. Insgesamt gilt also

$$r(T) \;\le\; \inf_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n} \;\le\; \liminf_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} \;\le\; \limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} \;\le\; r(T)\,,$$

woraus die Behauptung folgt. □

Aufgabe 4.2.9 *Zeige dass für Volterra-Operatoren* (2.1.3) *immer $r(T) \le 0$ gilt. Vergleiche auch mit* Aufgabe 4.4.4.

Aufgabe 4.2.10 *Zeige, analog wie im Beweis des letzten Satzes, jedoch unter Benutzung von* (4.2.2), *dass folgendes gilt:*

$$\forall\;\lambda \in \rho(T)\;: \qquad d(\lambda, \sigma(T)) \;=\; \lim_{n\to\infty} \|R(\lambda,T)^n\|^{-1/n} \;=\; \sup_{n\in\mathbb{N}} \|R(\lambda,T)^n\|^{-1/n}\,. \tag{4.2.3}$$

Schließe hieraus: Ist (λ_n) eine Folge aus $\rho(T)$, welche gegen λ_0 konvergiert, und für welche die Folge $(R(\lambda_n,T))$ beschränkt ist, dann ist auch $\lambda_0 \in \rho(T)$.

Bemerkung 4.2.11 *Aus der Formel für den Spektralradius folgt, dass die Reihe* (4.2.1) *außerhalb des größten Kreises konvergiert, in dem das Spektrum von T enthalten ist. Genauso zeigt die letzte Aufgabe die Konvergenz von* (4.2.2) *in der größten Kreisscheibe um λ_0, welche ganz zu $\rho(T)$ gehört. Wir sehen also, dass sich diese Reihen, die allerdings im Wesentlichen nichts anderes als geometrische Reihen in $\mathcal{L}(X)$ sind, so verhalten, wie es die Potenzreihen holomorpher Funktionen tun. Tatsächlich gibt es eine gut entwickelte Theorie holomorpher Funktionen mit Werten in Banachräumen, die aber hier nicht besprochen werden soll.*

Aufgabe 4.2.12 *Zeige folgende* Resolventenformel: *Für $\lambda_1, \lambda_2 \in \rho(T)$ gilt immer*

$$R(\lambda_1, T) \;-\; R(\lambda_2, T) \;=\; -(\lambda_1 \;-\; \lambda_2)\; R(\lambda_1, T)\; R(\lambda_2, T)\,. \tag{4.2.4}$$

Anleitung: *Beachte $(\lambda_1 - T)\,(\lambda_2 - T) = (\lambda_2 - T)\,(\lambda_1 - T)$ und die Definition der Resolvente.*

4.3 Eigenwerte und approximative Eigenwerte

Definition 4.3.1 *Wir nennen $\lambda \in \mathbb{K}$* einen Eigenwert von T, *wenn ein $x \in X \setminus \{0\}$ existiert, für welches $T\,x = \lambda\,x$ ist. In anderen Worten ist λ genau dann ein Eigenwert von T, wenn $\lambda - T$ nicht injektiv ist. In diesem Fall heißt* Kern $(\lambda - T)$ *auch* zugehöriger Eigenraum von T, *und jedes $x \in$ Kern $(\lambda - T) \setminus \{0\}$ heißt* ein Eigenvektor *von T zum Eigenwert λ. Die Menge aller Eigenwerte heißt auch* Punktspektrum *von T und wird mit σ_p abgekürzt. Allgemeiner nennt man ein $\lambda \in \mathbb{K}$ einen* approximativen Eigenwert, *falls gilt*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ x \in X \ : \qquad \|x\| = 1\,, \quad \|(\lambda - T)\,x\| < \varepsilon\,. \tag{4.3.1}$$

Die Menge aller approximativen Eigenwerte heißt das approximative Punktspektrum *und wird mit σ_{ap} abgekürzt.*

Aufgabe 4.3.2 *Zeige, dass approximative Eigenwerte immer Spektralwerte sind.*

Satz 4.3.3 *Es ist immer* $\mathrm{rd}\,\sigma(T) \subset \sigma_{ap}(T)$. *Wenn T' der zu T duale Operator ist, dann gilt*

$$\sigma(T') \;=\; \sigma(T) \;=\; \sigma_{ap}(T) \cup \sigma_p(T')\,.$$

Beweis: Sei λ ein Randpunkt von $\sigma(T)$. Dann gibt es eine Folge (λ_n) aus $\rho(T)$, welche gegen λ konvergiert. Nach Aufgabe 4.2.10 kann dann die Folge $(R(\lambda_n, T))$ nicht beschränkt, also wegen Satz 2.5.6 auch nicht punktweise beschränkt sein. Daher gibt es ein $x \in X$, für welches $(R(\lambda_n, T)\,x)$ unbeschränkt ist, und indem wir gegebenenfalls zu einer Teilfolge übergehen, können wir erreichen, dass $0 < \|R(\lambda_n, T)\,x\| \to \infty$ für $n \to \infty$. Setzt man $x_n = \|R(\lambda_n, T)\,x\|^{-1}\,R(\lambda_n, T)\,x$, so folgt

$$\|x_n\| \;=\; 1 \quad \forall\, n \geq 1\,, \qquad (\lambda - T)\,x_n = (\lambda - \lambda_n)\,x_n \;+\; \|R(\lambda_n, T)\,x\|^{-1}\,x \;\to\; 0 \qquad (n \to \infty)\,.$$

Daraus folgt (4.3.1), also $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$. Weiter folgt für beliebiges λ aus Satz 3.5.3, dass $\lambda - T$ genau dann invertierbar ist, wenn es auch sein dualer Operator ist, und dieser ist gleich $\lambda - T'$. Also folgt $\sigma(T') = \sigma(T)$. Sei jetzt $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_{ap}(T)$. Dann ist $\lambda - T$ nicht bijektiv, aber

$$\exists\ \alpha \;>\; 0 \quad \forall\ x \in X \ : \qquad \|(\lambda - T)\,x\| \;\geq\; \alpha\,\|x\|\,. \tag{4.3.2}$$

Ist (y_n) eine konvergente Folge von Vektoren aus Bild $(\lambda - T)$, dann existieren x_n mit $y_n = (\lambda - T)\,x_n$, und wegen (4.3.2) ergibt sich, dass (x_n) eine Cauchyfolge und somit konvergent ist. Aus der Stetigkeit von T folgt aber, dass der Grenzwert von (x_n) durch $\lambda - T$ auf den Grenzwert von (y_n) abgebildet wird, weswegen dieser zu Bild $(\lambda - T)$ gehört. Also ist Bild $(\lambda - T)$ ein abgeschlossener Unterraum von X, und somit gibt es ein $f \in X' \setminus \{0\}$, welches auf Bild $(\lambda - T)$ verschwindet. Aus der Definition des dualen Operators folgt aber dann $(\lambda - T')\,f = 0$, und deshalb ist $\lambda \in \sigma_p(T')$, was zu zeigen war. □

Aufgabe 4.3.4 (Spektrum des Rechtsshifts) *Sei der Linksshift T in ℓ_p wie früher definiert. Zeige, dass sein dualer Operator T' gleich dem* Rechtsshift $(T'x) = (0, x_1, x_2, \ldots)$, *und finde dessen Spektrum. Welche der Spektralwerte des Rechtsshifts sind Eigenwerte bzw. approximative Eigenwerte? Wie ist es beim Linksshift?*

4.4 Kompakte Operatoren und Operatoren von endlichem Rang

Im Folgenden seien X, Y, Z immer, nicht notwendig verschiedene, Banachräume.

Definition 4.4.1 *Wie in der linearen Algebra nennen wir für $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ die Zahl* $\dim T(X) = \dim \operatorname{Bild} T$ *auch* den Rang *von T. Falls diese Zahl endlich ist, heißt T ein* Operator von endlichem Rang. *Falls hingegen $T(B_X)$ in Y präkompakt ist, nennen wir T einen* kompakten Operator. *Da Y ein Banachraum ist, ist dies gleichbedeutend damit, dass $\overline{T(B_X)}$ kompakt ist. Die Menge der kompakten Operatoren bezeichnen wir mit $\mathcal{K}(X,Y)$, und wir schreiben auch wieder $\mathcal{K}(X)$, wenn $Y = X$ ist.*

Beispiel 4.4.2 *Ist k stetig auf $[a,b]^2$, $a < b$, so haben wir den Operator T, definiert durch*

$$(T\,f)(s) \;=\; \int_a^b k(s,t)\, f(t)\, dt\,, \quad a \le s \le b\,, \tag{4.4.1}$$

einen Fredholm-Operator genannt. Ist jetzt $H = T(B_X)$, für $X = C[a,b]$, so sieht man leicht, dass H gleichmäßig beschränkt, also erst recht punktweise beschränkt ist. Da k auf $[a,b]^2$ gleichmäßig stetig ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für $s, s_0, t \in [a,b]$ mit $|s - s_0| < \delta$ gilt $|k(s,t) - k(s_0,t)| < \varepsilon$. Daraus folgt für $h = T\,f \in H$ dass $|h(s) - h(s_0)| < \varepsilon\,(b-a)$ ist. Das bedeutet, dass H gleichgradig stetig ist. Daher folgt aus dem Satz von Arzela-Ascoli die Kompaktheit von $\overline{H}$, und deshalb ist ein Fredholm-Operator immer kompakt.

Aufgabe 4.4.3 *Zeige, dass der von einem Polynom p in zwei Variablen definierte Fredholm-Operator von endlichem Rang ist. Benutze den Weierstrassschen Approximationssatz in $C[a,b]^2$, zusammen mit dem nächsten Satz, um einen zweiten Beweis für die Kompaktheit eines beliebigen Fredholm-Operators zu geben.*

Aufgabe 4.4.4 *Zeige analog wie im obigen Beispiel die Kompaktheit aller Volterra-Operatoren* (2.1.3). *Benutze dies und* Aufgabe 4.2.9, *um zu zeigen dass für jeden Volterra-Operator T immer $\sigma(T) = \{0\}$ ist.*

Aufgabe 4.4.5 *Sei $K \in \mathcal{K}(X,Y)$, und sei U ein abgeschlossener Teilraum von X. Zeige die Kompaktheit der Restriktion von K auf U.*

Satz 4.4.6 (Eigenschaften kompakter Operatoren)

(a) *Wenn $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ von endlichem Rang ist, dann ist $T \in \mathcal{K}(X,Y)$.*

(b) *$\mathcal{K}(X,Y)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{L}(X,Y)$.*

(c) *Aus $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ und $K \in \mathcal{K}(Y,Z)$ folgt $K \circ T \in \mathcal{K}(X,Z)$.*

(d) *Aus $K \in \mathcal{K}(X,Y)$ und $T \in \mathcal{L}(Y,Z)$ folgt $T \circ K \in \mathcal{K}(X,Z)$.*

(e) *Genau dann ist $T \in \mathcal{K}(X,Y)$, wenn $T' \in \mathcal{K}(Y',X')$ ist.*

Beweis: Aussage (a) ist klar, da das Bild der Einheitskugel B_X eine beschränkte Menge in einem endlichdimensionalen Raum ist, und da nach Satz 2.4.1 die abgeschlossene Hülle von $T(B_X)$ kompakt ist. Die Unterraumeigenschaft von $\mathcal{K}(X,Y)$ folgt leicht mit der Definition. Sei jetzt $T \in \overline{\mathcal{K}(X,Y)}$, und sei zu $\varepsilon > 0$ ein $S \in \mathcal{K}(X,Y)$ so gewählt, dass $\|T - S\| < \varepsilon$ ist. Dann wird $S(B_X)$ von endlich vielen ε-Kugeln überdeckt, und mit der Dreiecksungleichung folgt leicht, dass dann $T(B_X)$ von den Kugeln mit gleichen Mittelpunkten, aber dem doppelten Radius $2\,\varepsilon$ überdeckt wird. Daraus folgt aber $T \in \mathcal{K}(X,Y)$, und daher gilt (b). Da ein beschränkter Operator immer Kugeln um 0 in Kugeln um 0 abbildet, folgen (c)und (d) leicht mit der Definition. Für den Beweis des letzten Punktes sei $T \in \mathcal{K}(X,Y)$. Dann ist $K = \overline{T(B_X)}$ ein kompakter metrischer Raum. Die Einheitskugel $B_{Y'}$, aufgefasst als Teilmenge von $C(K)$, ist punktweise beschränkt und gleichgradig stetig, denn die Funktionen erfüllen alle eine Lipschitzbedingung mit Lipschitzkonstante $L = 1$. Also ist $\overline{B}_{Y'}$ (als Teilmenge von $C(K)$) nach dem Satz von Arzela-Ascoli kompakt. Deshalb hat jede Folge (f_n) aus $\overline{B}_{Y'}$ eine Teilfolge, die wir der Einfachheit halber mit (g_n) bezeichnen, welche in der Metrik auf $C(K)$ konvergiert, was aber ihre gleichmäßige Konvergenz auf K bedeutet. Nach Definition von T' ist $(T'\,g_n)(x) = g_n(T\,x)$, und deshalb gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N derart, dass für alle $n, m \geq N$ und alle $x \in B_X$ gilt

$$\big\|(T'\,g_n)(x) \;-\; (T'\,g_m)(x)\big\| \;<\; \varepsilon\,.$$

Indem man links das Supremum über $x \in B_X$ bildet, ergibt sich hieraus $\|T'\,g_n - T'\,g_m\| \leq \varepsilon$, so dass also $(T'\,g_n)$ eine Cauchyfolge in X' ist. Das impliziert aber die (Folgen-)kompaktheit von $\overline{T'(B_{Y'})}$, und daher ist $T' \in \mathcal{K}(Y', X')$. Für die Umkehrung sei jetzt $T' \in \mathcal{K}(Y', X')$. Nach dem schon bewiesenen Teil ist dann $T'' \in \mathcal{K}(X'', Y'')$. Aus (c) folgt dass $T = T'' \circ j$ (mit der Auswertungsabbildung j auf X) in $\mathcal{K}(X, Y'')$ ist, und da Y, aufgefasst als Unterraum von Y'', abgeschlossen ist, folgt hieraus mit Hilfe von Aufgabe 3.8.6, dass $T \in \mathcal{K}(X,Y)$ ist. □

Aufgabe 4.4.7 *Zeige: Wenn X ein unendlichdimensionaler Banachraum ist, dann ist für jedes $T \in \mathcal{K}(X)$ immer $0 \in \sigma(T)$.*

Aufgabe 4.4.8 (Spektrum eines Operators von endlichem Rang) *Sei $T \in \mathcal{L}(X)$ ein Operator von endlichem Rang, und sei $(x_1, \ldots, x_n)$ eine Basis von* $\operatorname{Bild} T$. *Für $b \in X$ und $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ seien*

$$T\,b \;=\; \sum_{j=1}^{n} \beta_j\,x_j\,, \qquad T\,x_k \;=\; \sum_{j=1}^{n} a_{jk}\,x_j\,.$$

Zeige: Genau dann gilt für ein $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ die Gleichung $(\lambda - T)\,x = b$, wenn $x = \lambda^{-1}\,(b + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\,x_j)$ ist, mit

$$\lambda\,\alpha_j \;=\; \beta_j \;+\; \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\,\alpha_k \qquad \forall\ k = 1, \ldots, n\,.$$

Benutze dies um zu schließen, dass alle Spektralwerte $\lambda \neq 0$ von T Eigenwerte sind, und dass man alle diese Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren berechnen kann, falls die Matrix $A = [a_{jk}]$ bekannt ist. Untersuche, inwieweit dies auch für $\lambda = 0$ gilt.

4.5 Spektraltheorie kompakter Operatoren

Im Folgenden sei X immer ein Banachraum, und $K \in \mathcal{K}(X)$ ein kompakter Operator. Wir wollen nun das Spektrum von K untersuchen, was nach Definition darauf hinausläuft festzustellen, für welche $\lambda \in \mathbb{K}$ die Abbildung $\lambda - K$ invertierbar ist. Nach Aufgabe 4.4.7 ist dies in dem wichtigsten Fall eines unendlichdimensionalen Raumes X nicht so, falls $\lambda = 0$ ist, und deshalb können wir vom Gegenteil ausgehen. Es ist aber $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$ genau dann, wenn $I - \lambda^{-1}\,K$ invertierbar ist, und da $\lambda^{-1}\,K \in \mathcal{K}(X)$ ist, werden wir zunächst den Spezialfall $\lambda = 1$ betrachten.

Aufgabe 4.5.1 *Für $K \in \mathcal{K}(X)$ und $T = I - K$, zeige $T^n = I - K_n$ mit $K_n \in \mathcal{K}(X)$, für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Lemma 4.5.2 *Für $K \in \mathcal{K}(X)$ sei $T = I - K$ gesetzt. Dann ist* $\operatorname{Kern} T$ *endlichdimensional und* $\operatorname{Bild} T$ *abgeschlossen.*

Beweis: $\operatorname{Kern} T$ ist ein abgeschlossener Teilraum von X, also selber ein Banachraum, und die Restriktion von K auf $\operatorname{Kern} T$ ist die identische Abbildung. Diese ist aber nur dann kompakt, wenn $\operatorname{Kern} T$ endlichdimensional ist. Ein endlichdimensionaler Unterraum ist aber immer projizierbar, und daher gibt es einen abgeschlossenen Teilraum $U \subset X$ so, dass $X = \operatorname{Kern} T \oplus U$ ist. Die Restriktion von T auf U ist dann injektiv und hat dasselbe Bild wie T. Sei jetzt y Grenzwert einer Folge (y_n) aus $\operatorname{Bild} T$. Dann gibt es also eine (eindeutig bestimmte) Folge (x_n) aus U mit $T\,x_n = x_n - K\,x_n = y_n$ für alle $n \geq 1$. Falls (x_n) nicht beschränkt wäre, könnten wir durch Übergang zu einer Teilfolge (die wir der Einfachheit halber wieder mit (x_n) bezeichnen) erreichen, dass $\|x_n\| \to \infty$ gelten würde. Für die normierten Vektoren $u_n = \|x_n\|^{-1}\,x_n$ würde dann $u_n - K\,u_n \to 0$ für $n \to \infty$ gelten. Nach erneutem Übergang zu einer Teilfolge dürften wir wegen der Kompaktheit von K annehmen dass $u = \lim K\,u_n$ existiert, und dann würde aber $u = \lim u_n$ gelten, woraus $\|u\| = 1$ und $T\,u = 0$ folgen. Wegen der Abgeschlossenheit von U und der Tatsache dass $u_n \in U$ gilt, wäre $u \in U$ im Widerspruch zur Wahl von U. Also haben wir gezeigt, dass die Folge (x_n) beschränkt sein muss. Dann können wir wegen der Kompaktheit von K davon ausgehen, dass $(K\,x_n)$ konvergiert, denn sonst könnten wir erneut zu einer Teilfolge übergehen. Da aber $x_n - K\,x_n \to y$ gilt, muss dann auch (x_n) selber konvergieren, etwa gegen $x \in U$. Daraus folgt aber $y = T\,x$, also $y \in \operatorname{Bild} T$, was zu zeigen war. □

Der nächste Satz ist zwar für einen endlichdimensionalen Raum X und ein beliebiges $T \in \mathcal{L}(X)$ immer trivial erfüllt, gilt aber überraschenderweise auch für allgemeines X, wenn nur T von der im letzten Lemma betrachteten Form ist. Im Beweis benutzen wir ein Resultat, das wir jetzt zuerst zeigen:

Lemma 4.5.3 (Fast-orthogonale Vektoren) *Sei X normierter Raum, und sei U ein abgeschlossener Unterraum von X. Dann existiert zu jedem $\delta > 0$ ein $x \in X$ mit $\|x\| = 1$ so, dass*

$$d(x, U) \;=\; \inf_{u \in U} \|x - u\| \;\geq\; 1 - \delta\,.$$

Beweis: Sei $y \in X \setminus U$, also $d = d(y, U) > 0$ wegen der Abgeschlossenheit von U. Da wir o. B. d. A. annehmen können, dass $\delta < 1$ ist, gibt es ein $u_0 \in U$ mit $\|y - u_0\| < d(1-\delta)^{-1}$. Für $x = \|y - u_0\|^{-1}\,(y - u_0)$ folgt dann für alle $u \in U$, dass

$$\|x - u\| \;=\; \frac{\big\|y - (u_0 + \|y - u_0\|\,u)\big\|}{\|y - u_0\|} \;\geq\; \frac{d}{\|y - u_0\|}\,,$$

da $u_0 + \|y - u_0\|\,u \in U$ ist. Daraus folgt die Behauptung. □

Satz 4.5.4 (Fredholmscher Alternativsatz) *Für $K \in \mathcal{K}(X)$ und $T = I - K$ ist T genau dann injektiv, wenn es surjektiv ist.*

Beweis: Sei angenommen, dass T injektiv, aber nicht surjektiv ist. Sei $X_n = \operatorname{Bild} T^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Aus Aufgabe 4.5.1 und dem vorletzten Lemma folgt, dass alle X_n abgeschlossene Unterräume von X sind. Für $y \in X_{n+1}$ folgt die Existenz von $x \in X$ mit $y = T^{n+1}\,x = T^n(T\,x)$, und daher ist $y \in X_n$. Da T nach Annahme nicht surjektiv ist, gibt es ein $x \in X$ mit $x \neq T\,y$ für alle $y \in X$, und wegen der Injektivität von T folgt dann auch $T^n\,x \neq T^{n+1}\,y$, und deshalb ist $x \in X_n \setminus X_{n+1}$. Also ist jedes X_{n+1} eine echte Teilmenge von X_n, und somit gibt es nach dem letzten Lemma Einheitsvektoren $x_n = T^n\,y_n \in X_n$ mit

$d(x_n, X_{n+1}) \geq 1/2$. Für $m > n \geq 1$ folgt dann $K\,x_m + T\,x_n \in X_{n+1}$, und deshalb ist $\|K\,x_m - K\,x_n\| = \|K\,x_m + T\,x_n - x_n\| \geq 1/2$. Daher kann die Folge $(K\,x_n)$ keine konvergente Teilfolge besitzen, was der Kompaktheit von K widerspricht. Also folgt aus der Injektivität von T die Surjektivität. Für den Beweis der Umkehrung sei also jetzt T surjektiv. Nach Satz 3.5.3 ist dann der duale Operator $T' = I - K'$ injektiv, und nach Satz 4.4.6 ist K' ebenfalls kompakt. Nach dem bereits bewiesenen Teil ist also dann T' sogar bijektiv, woraus mit Satz 3.5.3 die Bijektivität von T folgt. □

Man kann den Alternativsatz auch so formulieren, dass es entweder für gegebenes $b \in X$ immer eine Lösung x der Gleichung $x = K\,x + b$ gibt (und diese ist dann sogar eindeutig bestimmt), oder dass die homogene Gleichung $x = K\,x$ nichttriviale Lösungen hat. In dieser Formulierung wird der Name des letzten Satzes besser verständlich.

Wir haben in Aufgabe 4.4.7 bereits festgestellt, dass $\lambda = 0$ für jeden kompakten Operator in einem unendlichdimensionalen Banachraum immer ein Spektralwert ist. Der folgende Satz gibt weitere Information über das Spektrum:

Satz 4.5.5 (Spektrum eines kompakten Operators) *Sei $K \in \mathcal{K}(X)$. Dann ist jeder Spektralwert $\lambda \neq 0$ von K ein Eigenwert. Der Eigenraum zu einem Eigenwert $\lambda \neq 0$ ist immer endlichdimensional. Das Spektrum ist immer abzählbar, und wenn es unendlich viele verschiedene Spektralwerte λ_n gibt, dann gilt $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.*

Beweis: Sei $\lambda \neq 0$ kein Eigenwert von K. Dann ist $I - \lambda^{-1}\,K = \lambda^{-1}\,(\lambda - K)$ nach dem Fredholmschen Alternativsatz invertierbar, und deshalb ist λ kein Spektralwert von K. Wenn $\lambda \neq 0$ dagegen ein Eigenwert ist, ist $\operatorname{Kern}(\lambda - K) = \operatorname{Kern}(I - \lambda^{-1}\,K)$, und daher folgt aus Lemma 4.5.2 dass $\dim \operatorname{Kern}(\lambda - K) < \infty$ ist. Für den Rest der Behauptung genügt es zu zeigen, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ höchstens endlich viele Eigenwerte von K mit $|\lambda| \geq \varepsilon$ geben kann. Sei das Gegenteil angenommen. Dann gibt es eine Folge (λ_n) von Eigenwerten vom Betrag $\geq \varepsilon$, die wir als paarweise verschieden annehmen können, und wegen der Kompaktheit des Spektrums können wir sogar voraussetzen, dass sie gegen einen Wert λ konvergieren (sonst können wir zu einer Teilfolge übergehen). Wir wählen zu jedem λ_n einen normierten Eigenvektor e_n, und wie in der Vorlesung Lineare Algebra bewiesen wurde, sind die e_n alle linear unabhängig. Sei X_n die lineare Hülle von $e_1, \ldots, e_n$. Nach dem letzten Lemma gibt es normierte Vektoren $x_n \in X_n$ mit $d(x_n, X_{n-1}) \geq 1/2$. Aus $x_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\,e_j$ folgt $u_n := (K - \lambda_n)\,x_n = \sum_{j=1}^{n-1} (\lambda_j - \lambda_n)\,\alpha_j\,e_j \in X_{n-1}$. Daher gilt für $2 \leq m < n$:

$$\|\lambda_n^{-1}\,K\,x_n \;-\; \lambda_m^{-1}\,K\,x_m\| \;= \|\lambda_n^{-1}\,u_n \;-\; \lambda_m^{-1}\,K\,x_m + x_n\| \;\geq\; 1/2$$

da ja auch $K\,x_m \in X_{n-1}$ ist. Somit kann $(\lambda_n^{-1}\,K\,x_n)$ keine konvergente Teilfolge besitzen, und da (λ_n) gegen $\lambda \neq 0$ konvergiert, folgt dasselbe für $(K\,x_n)$, im Widerspruch zur Kompaktheit von K. □

Definition 4.5.6 *Nach dem letzten Satz ist der Eigenraum zu einem Eigenwert $\lambda \neq 0$ bei einem beliebigen kompakten Operator immer endlichdimensional, und wir nennen seine Dimension auch die* geometrische Vielfachheit *von λ.*

Kapitel 5

Hilberträume

In der linearen Algebra betrachtet man Vektorräume mit innerem Produkt. Auch dort wird meist eine Länge eines Vektors eingeführt, welche alle Eigenschaften einer Norm im Sinne der Funktionalanalysis hat, und manchmal betrachtet man sogar sogenannte *Orthogonalreihen*. Dies soll jetzt ausführlicher geschehen. Dazu wiederholen wir einige Begriffe aus der LA, wobei wir teilweise andere Bezeichnungen benutzen.

5.1 Prä-Hilberträume

Definition 5.1.1 *Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung*

$$\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle : \; X \times X \to \mathbb{K}\,, \qquad (x_1, x_2) \mapsto \langle x_1, x_2\rangle \in \mathbb{K}$$

heißt ein Skalarprodukt *oder* inneres Produkt *auf X, wenn folgende Regeln gelten:*

(S1) $\forall\, x \in X : \quad \langle x, x\rangle \;\geq\; 0\,; \quad \langle x, x\rangle \;=\; 0 \;\iff\; x = 0\;.$

(S2) $\forall\, x_1, x_2 \in X : \quad \langle x_1, x_2\rangle \;=\; \overline{\langle x_2, x_1\rangle}\;.$

(S3) $\forall\, x, x_1, x_2 \in X : \quad \langle x_1 + x_2, x\rangle \;=\; \langle x_1, x\rangle \;+\; \langle x_2, x\rangle\;.$

(S4) $\forall\, x_1, x_2 \in X,\; \lambda \in \mathbb{K} : \quad \langle \lambda\, x_1, x_2\rangle \;=\; \lambda\,\langle x_1, x_2\rangle\;.$

Falls ein solches Skalarprodukt auf X gegeben ist, nennen wir X einen Prä-Hilbertraum*.*

Bemerkung 5.1.2 *Aus den Axiomen folgen sofort die weiteren Regeln*

$$\forall\, x, x_1, x_2 \in X,\; \lambda \in \mathbb{K} : \quad \langle x, x_1 + x_2\rangle \;=\; \langle x, x_1\rangle \;+\; \langle x, x_2\rangle\,, \quad \langle x_1, \lambda\, x_2\rangle \;=\; \overline{\lambda}\,\langle x_1, x_2\rangle\,.$$

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist ein Skalarprodukt immer eine reelle Zahl, und dann bedeutet (S2) *einfach $\langle x_1, x_2\rangle = \langle x_2, x_1\rangle$ für alle $x_1, x_2 \in X$. Man kann also sagen, dass ein inneres Produkt* in der ersten Stelle linear ist, *während es in der zweiten Stelle nur semilinear ist; dabei nennt man eine Abbildung $T : X \to Y$ zwischen zwei Vektorräumen X und Y über $\mathbb{K}$* semilinear*, wenn sie additiv ist, wenn also $T(x_1 + x_2) = T\,x_1 + T\,x_2$ für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt, und wenn weiter $T\,(\lambda\, x) = \overline{\lambda}\, T\, x$ ist für alle $x \in X$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist natürlich Semilinearität äquivalent zur Linearität. Wichtig ist auch der Hinweis, dass in der Literatur die Definition eines Skalarproduktes unterschiedlich ist: Während die meisten Bücher über Funktionalanalysis die gleiche Definition wie hier benutzen, ist in anderen Werken, z. B. über lineare Algebra, ein Skalarprodukt linear in der zweiten und semilinear in der ersten Stelle.*

Beispiel 5.1.3 *Für zwei Funktionen $f, g \in C[a,b]$ ist ein kanonisches inneres Produkt durch*

$$\langle f, g \rangle \;=\; \int_a^b f(x)\ \overline{g(x)}\ dx$$

gegeben, wobei der Querstrich wegfallen kann, falls die Werte der Funktionen reell sind. Häufig gebraucht werden aber auch gewichtete innere Produkte *von Funktionen. Dabei ist eine feste* Gewichtsfunktion *k gegeben, die bis auf endlich viele Punkte positiv und stetig auf $[a,b]$ ist, und man setzt*

$$\langle f, g \rangle \;=\; \int_a^b k(x)\ f(x)\ \overline{g(x)}\ dx\,.$$

Auf der Menge der über $[a,b]$ integrierbaren Funktionen erhält man durch die obigen Festsetzungen keine *inneren Produkte, da $\langle f, f \rangle = 0$ sein kann ohne dass $f(x) = 0$ ist für alle $x \in [a,b]$.*

Aufgabe 5.1.4 *Sei J eine nicht-leere Menge, und sei $\mathbb{K}^J$ die Menge aller Abbildungen f von J in $\mathbb{K}$ mit $f(j) \neq 0$ höchstens für endlich viele $j \in J$. Zeige dass $\mathbb{K}^J$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist, und dass durch*

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j \in J} f(j)\ \overline{g(j)}$$

ein inneres Produkt auf $\mathbb{K}^J$ definiert wird. Beachte: Wenn $J = \{1, \ldots, n\}$ ist, dann ist $\mathbb{K}^J$ gerade $\mathbb{K}^n$, und das Skalarprodukt ist das sogenannte kanonische Skalarprodukt.

5.2 Die induzierte Norm eines Vektors

Wenn nichts anderes gesagt wird, sei im Folgenden X immer ein Prä-Hilbertraum über $\mathbb{K}$.

Definition 5.2.1 *Für jedes $x \in X$ heißt*

$$\|x\| \;=\; \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

die Norm *oder* Länge *von x.*

Aufgabe 5.2.2 *Zeige für beliebige $x_1, x_2 \in X$:*

(a) *Es gilt das* Parallelogrammgesetz

$$\|x_1 + x_2\|^2 \;+\; \|x_1 - x_2\|^2 \;=\; 2\Big(\|x_1\|^2 \;+\; \|x_2\|^2\Big)\,.$$

(b) *Falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist, gilt*

$$\langle x_1, x_2 \rangle \;=\; \|(x_1 + x_2)/2\|^2 \;-\; \|(x_1 - x_2)/2\|^2\,.$$

(c) *Falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist, gilt*

$$\begin{aligned}\langle x_1, x_2 \rangle \;&=\; \|(x_1 + x_2)/2\|^2 \;-\; \|(x_1 - x_2)/2\|^2 \\ &\quad+ i\,\|(x_1 + i\,x_2)/2\|^2 \;-\; i\,\|(x_1 - i\,x_2)/2\|^2\,.\end{aligned}$$

Folgender Satz wird in der linearen Algebra bewiesen:

Satz 5.2.3 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung) *Für $x_1, x_2 \in X$ gilt immer*

$$\bigl|\langle x_1, x_2\rangle\bigr| \;\le\; \|x_1\|\;\|x_2\| \;,$$

und das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn x_1 und x_2 linear abhängig sind.

Korollar zu Satz 5.2.3 (Eigenschaften der Norm) *Die Abbildung $x \mapsto \|x\|$ ist eine Norm auf X.*

Beweis: Aus obigem Satz und den Rechenregeln für ein Skalarprodukt folgt $\|x_1+x_2\|^2 = \langle x_1+x_2, x_1+x_2\rangle = \langle x_1,x_1\rangle+\langle x_1,x_2\rangle+\langle x_2,x_1\rangle+\langle x_2,x_2\rangle \le \|x_1\|^2+2\,\|x_1\|\,\|x_2\|+\|x_2\|^2 = (\|x_1\|+\|x_2\|)^2$, und das ist die Dreiecksungleichung. Die anderen beiden Normeigenschaften folgen unmittelbar aus den Eigenschaften eines Skalarproduktes. □

Ein Prä-Hilbertraum X ist also immer auch ein normierter Raum, so dass Begriffe wie Stetigkeit, Konvergenz, etc. Sinn geben. Dabei ist insbesondere wichtig, dass das Skalarprodukt selber auf $X \times X$ stetig ist; dies ist Inhalt der folgenden Aufgabe.

Aufgabe 5.2.4 (Stetigkeit des Skalarprodukts) *Zeige dass in jedem Prä-Hilbertraum X das Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle \;:\; X \times X \to \mathbb{K}$ stetig ist.*

Aufgabe 5.2.5 *Wir definieren für Folgen $a = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$, $b = (b_1, b_2, b_3,, \ldots,) \in \ell_2$*

$$\langle a, b\rangle \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} a_j\,\overline{b_j}\,.$$

Zeige die absolute Konvergenz dieser Reihe, und überprüfe, dass $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ ein Skalarprodukt auf ℓ_2 ist.

Aufgabe 5.2.6 *Zeige: Für jedes $x_0 \in X$ wird durch $f_{x_0}(x) = \langle x, x_0\rangle$ ein $f_{x_0} \in X'$ definiert, und es gilt $\|f_{x_0}\| = \|x_0\|$. Zeige weiter, dass die Zuordnung $x_0 \mapsto f_{x_0}$* semilinear *ist; d. h., zeige*

$$\forall\ \alpha,\beta \in \mathbb{K} \quad \forall\ x_0, x_1 \in X \;\;: \qquad \alpha\, x_0 + \beta\, x_1 \;\mapsto\; \overline{\alpha}\, f_{x_0} + \overline{\beta}\, f_{x_1}\,.$$

Definition 5.2.7 *Ein Prä-Hilbertraum, welcher bezüglich der oben eingeführten Norm vollständig ist, heißt* ein Hilbertraum.

5.3 Orthogonalität, orthogonale Projektion

Wenn nichts anderes gesagt wird, sei im Folgenden X wieder ein Prä-Hilbertraum über $\mathbb{K}$.

Definition 5.3.1 *Zwei Vektoren x_1, x_2 in X heißen* orthogonal, *falls $\langle x_1, x_2\rangle = 0$ ist. Zwei nicht-leere Teilmengen $A, B \subset X$ heißen zueinander orthogonal, falls jeder Vektor aus A zu jedem aus B orthogonal ist. Ist $A \subset X$ nicht-leer, so heißt die Menge $A^\perp$ aller Vektoren aus X, welche zu allen Vektoren aus A orthogonal sind, das* orthogonale Komplement *von A. In anderen Worten: $A^\perp$ ist die größte Teilmenge von X, so dass A und $A^\perp$ zueinander orthogonal sind. Für $A \subset X$ schreiben wir* $\operatorname{span} A$ *für die Menge aller Linearkombinationen von Elementen aus A; falls $A = \emptyset$ ist, dann besteht* $\operatorname{span} A$ *genau aus dem Nullvektor.*

Satz 5.3.2 *Sei $A \subset X$ nicht leer. Dann gilt:*

(a) *$A^\perp$ ist ein abgeschlossener Unterraum von X.*

(b) $(A^\perp)^\perp \supset A$.

(c) $\operatorname{span}(A) \cap A^\perp = \{0\}$.

Beweis: Zu (a): Es ist immer $0 \in A^\perp$, also ist $A^\perp \neq \emptyset$. Weiter folgt aus den Rechenregeln für das Skalarprodukt, dass die Unterraumaxiome für $A^\perp$ erfüllt sind. Teil (b) ist klar nach Definition von $A^\perp$. Zu (c): Sei $u \in \operatorname{span}(A)$, dann gibt es $u_1, \ldots, u_m \in A$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ mit $u = \sum_{j=1}^m \alpha_j u_j$. Also folgt für $v \in A^\perp$, dass $\langle u, v\rangle = \sum_{j=1}^m \alpha_j \langle u_j, v\rangle = 0$ ist, weil v zu allen u_j orthogonal ist. Wenn u auch zu $A^\perp$ gehört, können wir $v = u$ wählen und erhalten $\langle u, u\rangle = 0$, also $u = 0$. $\square$

Aufgabe 5.3.3 *Sei U ein Unterraum von X, und seien $u \in U$, $x \in X$. Zeige: Genau dann ist $x-u \in U^\perp$, wenn $\|x-u\| = d(x, U)$ ist.* **Anleitung:** *Für die Rückrichtung zeige zunächst: Wenn $x-u \notin U^\perp$ ist, dann gibt es ein $\tilde u \in U$ so, dass $\langle \tilde u, x-u\rangle = 1$ ist. Schließe dann $\|x - u - \delta \tilde u\| < \|x-u\|$ für alle hinreichend kleinen $\delta > 0$.*

Satz 5.3.4 (Projektionssatz) *Für jeden vollständigen Unterraum U von X gilt immer $X = U \oplus U^\perp$.*

Beweis: Aus Satz 5.3.2 (c) folgt $U \cap U^\perp = \{0\}$. Sei jetzt $x \in X$, dann gibt es eine Folge (u_n) aus U mit $\|x - u_n\| \to d := d(x, U)$ für $n \to \infty$. Aus Aufgabe 5.2.2 (a) folgt für $n, m \in \mathbb{N}$:

$$\|u_n - u_m\|^2 \;=\; 2\Big(\|u_n - x\|^2 + \|u_m - x\|^2\Big) - \|u_n + u_m - 2\,x\|^2 \;\le\; 2\Big(\|u_n - x\|^2 + \|u_m - x\|^2\Big) - 4\,d^2 .$$

Daraus folgt, dass (u_n) eine Cauchyfolge in U ist, und somit gegen ein $u \in U$ konvergiert. Aus Aufgabe 5.3.3 folgt dann aber $x - u \in U^\perp$. $\square$

Bemerkung 5.3.5 *Der Projektionssatz besagt, dass in einem Prä-Hilbertraum jeder vollständige Unterraum U projizierbar ist, und man nennt die Projektion auf U entlang $U^\perp$ auch* die orthogonale Projektion *auf U. Ist $x \in X$, und ist $P\,x$ die orthogonale Projektion von x auf U, so folgt aus* Aufgabe 5.3.3 *dass $x - P\,x = d(x, U)$ ist. Also ist $P\,x$ derjenige Vektor aus U, der von x den kleinsten Abstand hat. Man nennt daher $P\,x$ manchmal auch* die beste Approximation *aus U für den Vektor x.*

Aufgabe 5.3.6 *Sei X ein Hilbertraum, und sei U ein Unterraum von X. Zeige dass $\overline{U} = U^{\perp\perp}$ ist. Schließe hieraus dass U genau dann dicht in X ist, wenn $U^\perp = \{0\}$ ist.*

Satz 5.3.7 (Satz von Riesz) *Sei X ein Hilbertraum. Dann gibt es zu jedem $f \in X'$ ein eindeutiges $x_f \in X$ so, dass $f(x) = \langle x, x_f\rangle$ gilt für alle $x \in X$. Die Zuordnung $f \mapsto x_f$ ist isometrisch und semilinear.*

Beweis: Falls $f = 0$ ist, ist die Behauptung richtig für $x_f = 0$ (und dies ist auch das einzige x). Andernfalls ist $U = \operatorname{Kern} f$ ein abgeschlossener echter Teilraum von X, und $U^\perp$ enthält (mindestens) einen Einheitsvektor e. Für $x \in X$ und $\alpha = f(x)/f(e)$ folgt $f(x - \alpha\, e) = 0$, also $x - \alpha\, e \in U$. Daraus folgt aber $U^\perp = \{\alpha\, e \;:\; \alpha \in \mathbb{K}\}$. Für $x_f = \overline{f(e)}\, e$ folgt dann $f(x) = \langle x, x_f\rangle$. Der Rest der Behauptung folgt aus Aufgabe 5.2.6. $\square$

Korollar zu Satz 5.3.7 *Ein Hilbertraum ist immer reflexiv.*

Aufgabe 5.3.8 *Sei X ein Hilbertraum. Zeige: Für alle $x \in X$ ist $\|x\| = \sup_{y \in B_X} |\langle y, x\rangle|$.*

5.4 Orthogonalsysteme

Definition 5.4.1 *Ein System $(x_j)_{j\in J}$ von Vektoren in einem Raum X über $\mathbb{K}$ mit Skalarprodukt heißt* ein Orthogonalsystem, *falls keiner der Vektoren der Nullvektor ist, und wenn*

$$\forall\ j,k \in J : \qquad \langle x_j, x_k\rangle \;=\; 0 \quad \text{falls } j \neq k\,.$$

Falls zusätzlich gilt $\|x_j\| = 1$ für alle $j \in J$, dann sprechen wir von einem Orthonormalsystem. *Beachte, dass das leere System immer ein Orthonormalsystem ist. Falls $(x_j)_{j\in J}$ sogar eine Basis von X ist, sprechen wir von einer* Orthogonalbasis *bzw. einer* Orthonormalbasis *von X.*

Aufgabe 5.4.2 *Zeige, dass in dem in* Aufgabe 5.1.4 *eingeführten Raum $\mathbb{K}^J$ das System $(f_\kappa)_{j\in J}$ mit $f_\kappa(j) = \delta_{\kappa j}$ eine Orthonormalbasis ist.*

Die nächsten Resultate werden in der linearen Algebra bewiesen; wir lassen die Beweise deshalb hier aus.

Lemma 5.4.3 *Ein Orthogonalsystem $(x_j)_{j\in J}$ ist immer linear unabhängig. Falls $(x_j)_{j\in J}$ sogar ein Orthonormalsystem ist, und falls $v = \sum_{j\in J} \alpha_j\, x_j$ ist, wobei nur endlich viele α_j von 0 verschieden sind, so folgt*

$$\alpha_j \;=\; \langle v, x_j\rangle \qquad \forall\ j \in J\,, \qquad \|v\|^2 \;=\; \sum_{j\in J} |\alpha_j|^2\,. \tag{5.4.1}$$

Satz 5.4.4 (Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren)
Sei X ein Raum über $\mathbb{K}$ mit Skalarprodukt, sei $(w_1,\dots,w_n)$ ein linear unabhängiges System in X, und sei das System $(x_1,\dots,x_n)$ durch folgende Rekursionsgleichungen definiert:

$$\tilde v_k \;=\; w_k \;-\; \sum_{j=1}^{k-1} \langle w_k, x_j\rangle\, x_j\,, \quad x_k \;=\; \frac{1}{\|\tilde v_k\|}\,\tilde v_k\,, \qquad 1 \le k \le n\,,$$

wobei für $k = 1$ die leere Summe wie üblich als 0 zu interpretieren ist. Dann ist $(x_1,\dots,x_n)$ ein Orthonormalsystem, und

$$\mathcal{L}(x_1,\dots,x_k) \;=\; \mathcal{L}(w_1,\dots,w_k) \qquad \forall\ k = 1,\dots,n\,.$$

Korollar zu Satz 5.4.4 *Ein endlich-dimensionaler Prä-Hilbertraum X besitzt immer eine Orthonormalbasis.*

Satz 5.4.5 (Beste Approximation)
Sei X ein Prä-Hilbertraum, und sei $(x_1,\dots,x_n)$ ein Orthogonalsystem in X. Dann gilt für jedes $v \in X$:

(a) *Für $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{K}$ ist $\|v - \sum_{k=1}^n \alpha_k\, x_k\|$ genau dann minimal, wenn*

$$\alpha_k \;=\; \frac{\langle v, x_k\rangle}{\langle x_k, x_k\rangle} \;=\; \frac{\langle v, x_k\rangle}{\|x_k\|^2} \qquad \forall\ k \;=\; 1,\dots,n\,. \tag{5.4.2}$$

(b) *Es gilt die* Besselsche Ungleichung

$$\sum_{k=1}^n \frac{|\langle v, x_k\rangle|^2}{\|x_k\|^2} \;\le\; \|v\|^2\,. \tag{5.4.3}$$

(c) *Genau dann gilt die* Parsevalsche Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|\langle v, x_k \rangle|^2}{\|x_k\|^2} \; = \; \|v\|^2 \, , \tag{5.4.4}$$

wenn $v \in \operatorname{span}(x_1, \ldots, x_n)$ *ist, und dann ist*

$$v \; = \; \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle v, x_k \rangle}{\|x_k\|^2} \; x_k \, .$$

Definition 5.4.6 *Sei* $(x_j)_{j \in J}$ *ein beliebiges Orthogonalsystem in einem Raum mit Skalarprodukt* X*. Für ein* $v \in X$ *nennt man die Zahlen*

$$\frac{\langle v, x_j \rangle}{\|x_j\|^2} \qquad \forall \; j \in J$$

die Fourierkoeffizienten von v bzgl. des Orthogonalsystems $(x_j, j \in J)$.

Korollar zu Satz 5.4.5 (Orthogonale Projektion) *Sei* X *ein Raum mit Skalarprodukt, und sei* U *ein endlich-dimensionaler Unterraum von* X*. Ist* $(u_1, \ldots, u_n)$ *eine Orthogonalbasis von* U*, so ist*

$$u \; = \; \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle v, u_k \rangle}{\|u_k\|^2} \; u_k \tag{5.4.5}$$

die orthogonale Projektion von v *auf* U*.*

5.5 Orthogonalreihen

Im Folgenden sei jetzt X ein unendlich-dimensionaler Prä-Hilbert-Raum über $\mathbb{K}$, und $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ sei ein abzählbar unendliches Orthonormalsystem in X.

Definition 5.5.1 *Für beliebige* $\alpha_k \in \mathbb{K}$ *heißt eine Reihe der Form* $\sum_{k=0}^{\infty} \; \alpha_k \; x_k$ *eine* Orthogonalreihe *mit Koeffizienten* α_k*. Für* $x \in X$ *heißt die Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \quad \langle x, x_k \rangle \; x_k \tag{5.5.1}$$

die (verallgemeinerte) Fourier-Reihe *des Vektors* x*.*

Proposition 5.5.2 *Eine Orthogonalreihe* $\sum_{k=0}^{\infty} \; \alpha_k \, x_k$ *ist genau dann eine Cauchy-Reihe, wenn*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|^2 \; < \; \infty \, .$$

Beweis: Mit den Regeln für ein inneres Produkt ergibt sich für beliebiges $m, p \in \mathbb{N}_0$

$$\Big\| \sum_{k=m}^{m+p} \alpha_k \; x_k \Big\|^2 \; = \; \sum_{k=m}^{m+p} |\alpha_k|^2 \; \|x_k\|^2 \; = \; \sum_{k=m}^{m+p} \; |\alpha_k|^2 \, ,$$

woraus die Behauptung folgt. □

Aufgabe 5.5.3 *Wie in der Analysis nennt man eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$, mit $x_k \in X$,* unbedingt konvergent, *wenn jede Umordnung der Reihe ebenfalls konvergiert, und wenn der Wert der Reihe nicht von der Umordnung abhängt. Zeige, dass eine konvergente Orthogonalreihe auch unbedingt konvergiert.*

Satz 5.5.4 (Normkonvergenz von Orthogonalreihen)

(a) *Falls eine Orthogonalreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x_k$ gegen einen Vektor $x \in X$ konvergiert, dann sind die Koeffizienten α_k genau die Fourier-Koeffizienten von x; d. h., es gilt*

$$\alpha_k \; = \; \langle x, x_k \rangle \qquad \forall\; k \geq 0\,.$$

(b) *Falls die allgemeine Fourier-Reihe* (5.5.1) *eines Vektors $x \in X$ gegen einen Vektor $\tilde{x} \in X$ konvergiert, dann folgt*

$$\langle x\,,\, x_k \rangle - \langle \tilde{x}\,,\, x_k \rangle \;=\; \langle x - \tilde{x}\,,\, x_k \rangle \;=\; 0 \qquad \forall\; k \in \mathbb{N}_0$$

d. h., die Vektoren x und $\tilde{x}$ haben die gleichen Fourier-Koeffizienten, oder anders ausgedrückt: die Differenz $x - \tilde{x}$ ist zu allen x_k orthogonal.

Beweis: Zu (a): Aus $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x_k$ folgt mit Hilfe der Stetigkeit des Skalarproduktes und der Orthogonalität der x_k:

$$\langle x, x_j \rangle \;=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \, \langle x_k\,, x_j \rangle \;=\; \alpha_j \;.$$

Zu (b): Wenn man in der obigen Gleichung für α_k die Fourier-Koeffizienten von x einsetzt und dann x durch $\tilde{x}$ ersetzt, so folgt die Behauptung. □

Aufgabe 5.5.5 (Orthogonalbasen in unendlichdimensionalen Räumen) *Sei X ein unendlichdimensionaler Prä-Hilbertraum, welcher eine Orthonormalbasis $(e_j)_{j\in J}$ besitzt. Zeige, dass dann X nicht vollständig ist.*

Definition 5.5.6 *Wir nennen das Orthogonalsystem (x_k)* maximal, *wenn die lineare Hülle* $\operatorname{span}\{x_k\}$ *in X dicht liegt; d. h., dass $\overline{\operatorname{span}\{x_k\}} = X$ ist. Wir sagen weiter, dass (x_k)* vollständig *ist, wenn aus $\langle x\,,\, x_k \rangle = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ folgt, dass $x = 0$ ist. Das bedeutet also, dass die Fourierreihe eines Vektors x bei einem vollständigen Orthogonalsystem, wenn überhaupt, nur gegen x konvergieren kann.*

Satz 5.5.7 (Normkonvergenz der Fourierreihe)

(a) *Für jedes $x \in X$ gilt die* Besselsche Ungleichung

$$\sum_{k=0}^{\infty} \;\; |\langle x, x_k \rangle|^2 \;\leq\; \|x\|^2\,. \tag{5.5.2}$$

Insbesondere ist die Fourierreihe von x immer eine Cauchyreihe.

(b) *Genau dann konvergiert die Fourierreihe eines $x \in X$ gegen x, wenn die* Parsevalsche Gleichung

$$\sum_{k=0}^{\infty} \;\; |\langle x, x_k \rangle|^2 \;=\; \|x\|^2 \tag{5.5.3}$$

gilt, d. h. also, wenn in der Besselschen Ungleichung das Gleichheitszeichen eintritt.

(c) *Wenn* (x_k) *maximal ist, gilt* (5.5.3) *für alle* $x \in X$*, und* (x_k) *ist auch vollständig.*

(d) *Wenn* X *ein Hilbert-Raum und* (x_k) *ein vollständiges Orthogonalsystem ist, dann ist* (x_k) *auch maximal, und für alle* $x \in X$ *konvergiert die Fourierreihe von* x *gegen diesen Vektor* x*.*

Beweis: Aus (5.4.3) folgen für $n \to \infty$ sofort (a) und (b). Falls (x_k) maximal ist, gibt es per Definition zu jedem $x \in X$ und jedem $\varepsilon > 0$ eine Linearkombination $\tilde{x} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \, x_k$, mit $n = n(\varepsilon)$, für welche $\|x - \tilde{x}\| < \varepsilon$ ist. Nach Satz 5.4.5 gilt dies erst recht, wenn wir die α_k durch die allgemeinen Fourier-Koeffizienten von x ersetzen. Falls x zu allen x_k orthogonal ist, dann verschwinden alle Fourierkoeffizienten, und daher folgt (c). Die allgemeine Fourierreihe von x ist wegen der Besselschen Ungleichung und Proposition 5.5.2 ein Cauchy-Reihe, konvergiert also gegen ein $\tilde{x} \in X$, falls X ein Hilbert-Raum ist. Nach Satz 5.5.4 ist $x - \tilde{x}$ zu allen x_k orthogonal, und daraus folgt $\tilde{x} = x$ wegen der Vollständigkeit. Also gilt (d). □

Beispiel 5.5.8 *Wir setzen* X *gleich der Menge aller Linearkombinationen über* $\mathbb{C}$ *der Folgen* $x^{(k)} = (x_n^{(k)})_{n=0}^{\infty}$*, mit*

$$x_n^{(0)} \;=\; \frac{1}{n+1}\,, \quad x_n^{(k)} \;=\; \delta_{nk} \;=\; \begin{cases} 1 & (n = k) \\ 0 & (n \neq k) \end{cases} \qquad \forall\, k \geq 1,\; n \geq 0\,.$$

Es folgt, dass für jedes $x = (x_n) \in X$ *entweder nur endlich viele Glieder* $x_n \neq 0$ *sind, oder dass gilt* $x_n = 1/n$ *für alle* $n \geq n_0$*. Als inneres Produkt zweier Folgen* $x = (x_n)$*,* $y = (y_n)$ *setzen wir*

$$\langle x, y \rangle \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} x_n \, y_n\,.$$

Beachte, dass die Reihe für $x, y \in X$ *immer absolut konvergent ist, denn entweder sind nur endlich viele ihrer Glieder von 0 verschieden, oder es gilt* $x_n \, y_n = 1/n^2$ *für alle* $n \geq n_0$*. Die* $(x^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ *sind ein Orthogonalsystem in* X*, und aus* $\langle x, x^{(k)} \rangle = 0$ *für* $k \geq 1$ *folgt, dass alle Glieder* x_n *der Folge* x *verschwinden müssen, ausser evtl. dem Anfangsglied* x_0*. Nach Definition von* X *kann dies aber nur gelten, wenn* x *die Nullfolge ist. Das bedeutet, dass das Orthogonalsystem vollständig ist. Es ist aber nicht maximal, denn ist* $\tilde{x}$ *eine beliebige Linearkombination der* $x^{(k)}$*,* $k \geq 1$*, so beginnt die Folge* $\tilde{x}$ *mit* 0*, und deshalb ist* $\|x^{(0)} - \tilde{x}\| \geq 1$*.*

Beispiel 5.5.9 *In* $C[a, b]$*,* $a < b$*, mit dem üblichen inneren Produkt kann man mit Hilfe des Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens zu der Familie aller Monome* $(t^k)_{k=0}^{\infty}$ *ein äquivalentes Orthogonalsystem* $(p_k)_{k=0}^{\infty}$ *konstruieren. Dabei ist jedes* p_k *ein Polynom vom Grade* k*. Die Menge aller Polynome ist* dicht *in* $C[a, b]$*; dies folgt aus dem sogenannten* Weierstraßschen Approximationssatz*. Daraus wiederum ergibt sich, dass* (p_k) *ein maximales Orthogonalsystem ist. Orthogonalsysteme von Polynomen sind in verschiedenen Anwendungen wichtig. Wenn z. B.* $[a, b] = [-1, 1]$ *ist, erhält man das Orthogonalsystem der* Legendre-Polynome

$$p_k(t) \;=\; \frac{1}{2^k \, k!} \, \frac{d^k}{dt^k} \, (t^2 \;-\; 1)^k\,, \qquad k \in \mathbb{N}_0\,.$$

In der Physik und Technik ist das Orthogonalsystem der trigonometrischen Funktionen *besonders wichtig: Wir setzen*

$$f_0(t) \;\equiv\; 1\,, \quad f_{2k-1}(t) \;=\; \sin(k\,t)\,, \quad f_{2k}(t) \;=\; \cos(k\,t)\,, \qquad \forall\; k \in \mathbb{N}\,.$$

Diese Funktionen bilden auf jedem Intervall der Länge 2π *ein Orthogonalsystem, welches wir das* trigonometrische System *nennen wollen. Wir setzen weiter für eine auf dem Intervall* $[-\pi, \pi]$ *integrierbare Funktion* f

$$a_k \;=\; \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \cos(k\,t)\; dt \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0\,, \tag{5.5.4}$$

$$b_k \;=\; \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \sin(k\,t)\; dt \qquad \forall k \in \mathbb{N}\,. \tag{5.5.5}$$

Diese Zahlen nennt man die Fourierkoeffizienten *der Funktion f. Die Reihe*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\,t) + b_k \sin(k\,t)) \tag{5.5.6}$$

heißt die Fourierreihe der Funktion f. *Beachte, dass diese Reihe nichts anderes ist als die Orthogonalreihe von f bezüglich des trigonometrischen Systems. Siehe dazu auch die unten stehende Aufgabe.*

Aufgabe 5.5.10 *Zeige die Orthogonalität des oben eingeführten trigonometrischen Systems $(f_k)_{k=0}^{\infty}$ auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$. Berechne $\|f_k\|$ und vergleiche* (5.5.4) *und* (5.5.5) *mit* (5.4.2).

5.6 Separable Hilberträume

Mit Hilfe des Zornschen Lemmas kann man zeigen, dass ein Prä-Hilbertraum immer ein vollständiges Orthonormalsystem besitzt, was aber aus überabzählbar vielen Vektoren bestehen kann. Wir wollen uns hier aber auf separable Räume beschränken:

Satz 5.6.1 (Orthonormalsysteme im separablen Prä-Hilbertraum) *Jeder separable Prä-Hilbertraum X enthält ein abzählbares vollständiges Orthonormalsystem.*

Beweis: Wenn X endliche Dimension hat, dann besitzt X eine Orthonormalbasis, und diese ist zugleich ein vollständiges Orthogonalsystem. Im anderen Fall sei $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge von X. Indem man alle y_n streicht, welche von vorausgegangenen y_m, $1 \le m < n$, linear abhängig sind, erhält man eine Folge von linear unabhängigen Vektoren $\tilde{y}_n$, deren Linearkombinationen dicht in X liegen. Mit Hilfe des Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens kann man ein abzählbar unendliches Orthogonalsystem $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstruieren, so dass die lineare Hülle der (x_n) gleich der der $(\tilde{y}_n)$ ist. Daraus folgt aber, dass die Menge aller Linearkombinationen des Orthogonalsystems dicht in X ist, und das heißt genau, dass wir ein maximales System haben. Nach Satz 5.5.7 ist aber jedes maximale System auch vollständig. □

Mit diesem Satz erhalten wir jetzt, dass es eigentlich nur einen unendlichdimensionalen separablen Hilbertraum gibt – jedenfalls wenn man isomorphe Räume identifiziert:

Korollar zu Satz 5.6.1 *Jeder unendlichdimensionale separable Hilbertraum ist isometrisch isomorph zu ℓ_2.*

Beweis: Sei X ein separabler Hilbertraum. Nach Satz 5.6.1 gibt es ein vollständiges Orthonormalsystem $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X, und jedes $x \in X$ läßt sich durch seine Fourierreihe darstellen. Mit der Besselschen Gleichung folgt, dass die Zuordnung

$$x \longmapsto (\langle x, x_k\rangle)_{n=1}^{\infty}$$

eine Isometrie von X nach ℓ_2 ist, welche wegen Proposition 5.5.2 surjektiv ist. □

In separablen Räumen gibt es also immer ein abzählbares vollständiges Orthonormalsystem. Dass es im allgemeinen in einem Raum Systeme jeder beliebigen Mächtigkeit gibt, zeigt die nächste Aufgabe:

Aufgabe 5.6.2 *Sei J eine beliebige nichtleere Menge, und sei X gleich der Menge aller Funktionen $f : J \to \mathbb{K}$, für welche $f(t) = 0$ ist für alle bis auf abzählbar viele $t \in J$, und für die $\sum_t |f(t)|^2 < \infty$ ist,* *wobei die Summe sich über alle $t \in J$ erstrecken kann, da ja ohnehin nur abzählbar viele Terme nicht verschwinden. Zeige: Mit der Definition*

$$\forall\ f, g \in X : \qquad \langle f, g \rangle \ = \ \sum_t \ f(t)\, \overline{g(t)}\,,$$

wobei die absolute Konvergenz der Reihe aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt, wird X ein Hilbertraum, und die Funktionen f_τ mit $f_\tau(t) = \delta_{\tau t}$ sind ein vollständiges Orthonormalsystem in X. Es gibt also Hilberträume, in denen vollständige Orthonormalsysteme einer vorgegebenen, evtl. also auch sehr großen, Mächtigkeit existieren. Schließe aus Aufgabe 5.5.5, *dass dieser Raum nur dann eine Orthonormalbasis besitzt, wenn J eine endliche Menge ist.*

5.7 Selbstadjungierte Operatoren

Wenn nichts anderes gesagt wird, sei X im Folgenden immer ein Hilbertraum.

Definition 5.7.1 (Selbstadjungierte Operatoren) *Wir haben gesehen, dass man den Dualraum eines Hilbertraumes X nach* Satz 5.3.7 *mit X identifizieren kann; allerdings ist die Zuordnung $f \mapsto x_f$ im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ nicht linear, sondern semilinear. Seien jetzt X und Y zwei Hilberträume, und sei $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Statt des dualen Operators T' betrachtet man in diesem Fall besser den sogenannten* adjungierten Operator *$T^* : Y \to X$, definiert durch*

$$\forall\, x \in X,\ y \in Y \ : \qquad \langle T^*\, y, x \rangle \ = \ \langle y, T\, x \rangle\,. \tag{5.7.1}$$

Es ergibt sich aus Satz 5.3.7, *dass die Zuordnung $T \mapsto T^*$ semilinear und isometrisch ist, dass also $\|T^*\| = \|T\|$ gilt. Insbesondere ist also $T^* \in \mathcal{L}(Y, X)$, und der zu T^* adjungierte Operator ist T. Wir nennen ein $T \in \mathcal{L}(X)$* selbstadjungiert *oder* hermitesch, *falls $T^* = T$ ist.*

Aufgabe 5.7.2 *Sei $A = [a_{jk}]$ die Darstellungsmatrix eines Operators $T \in \mathcal{L}(\ell_2)$. Zeige dass der adjungierte Operator T^* die Darstellungsmatrix $A^* := \overline{A}^T = [\,\overline{a_{kj}}\,]$ hat.*

Aufgabe 5.7.3 *Beweise, in Analogie zu* Satz 3.5.3, *folgendes Resultat:*

Satz 5.7.4 (Rechenregeln für adjungierte Operatoren)

(a) $\forall\ T_1, T_2 \in \mathcal{L}(X, Y) \ : \quad (T_1 + T_2)^* \ = \ T_1^* \ + \ T_2^*$.

(b) $\forall\ T \in \mathcal{L}(X, Y)\ \forall\ \alpha \in \mathbb{K} \ : \quad (\alpha\, T)^* \ = \overline{\alpha}\, T^*$.

(c) $\forall\ T \in \mathcal{L}(X, Y)\ \forall\ U \in \mathcal{L}(Y, Z) \ : \quad (U \circ T)^* \ = \ T^* \circ U^*$.

(d) *Ist T bijektiv, so ist T^* bijektiv, und es gilt $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.*

(e) $\forall\ T \in \mathcal{L}(X, Y) \ : \quad (T^*)^* \ = \ T$.

Benutze diese Regeln, um $\rho(T^*) = \{\overline{\lambda} \,:\, \lambda \in \rho(T)\}$ zu zeigen. Zeige weiter: Wenn $T \in \mathcal{L}(X)$ selbstadjungiert ist, dann ist es auch T^k für alle $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 5.7.5 (Satz von Hellinger-Toeplitz) *Ist $T \in \mathcal{L}(X)$ selbstadjungiert, so gilt per Definition die Gleichung*

$$\forall\ x, y \in X \ : \qquad \langle T\, x, y \rangle = \langle x, T\, y \rangle\ . \tag{5.7.2}$$

Zeige: Ist $T : X \to X$ eine beliebige lineare Abbildung, für welche (5.7.2) *gilt, dannn folgt aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen bereits die Stetigkeit von T.*

Lemma 5.7.6 *Für jedes $T \in \mathcal{L}(X)$ ist $T^* T$ selbstadjungiert, und $\|T^* T\| = \|T\|^2$.*

Beweis: Für $x, y \in X$ ist $\langle T^* T\, y, x\rangle = \langle T\, y, T\, x\rangle = \langle y, T^* T\, x\rangle$, und deshalb ist $T^* T$ selbstadjungiert. Es ist weiter $\|T^* T\| \leq \|T^*\| \, \|T\| = \|T\|^2$, weil ja $\|T^*\| = \|T\|$ gilt. Außerdem ist

$$\|T^* T\| = \sup_{x,y \in B_X} |\langle T^* T\, x, y\rangle| = \sup_{x,y \in B_X} |\langle T\, x, T\, y\rangle| \geq \sup_{x \in B_X} |\langle T\, x, T\, x\rangle| = \|T\|^2 ,$$

woraus $\|T^* T\| = \|T\|^2$ folgt. □

Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass hermitesche Matrizen reelle Eigenwerte haben, und dass Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten immer orthogonal sind. Der folgende Satz ist eine direkte Verallgemeinerung dieser Tatsache:

Satz 5.7.7 *Alle Eigenwerte eines selbstadjungierten Operators $T \in \mathcal{L}(X)$ sind reell, und Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal. Weiter ist der Spektralradius $r(T)$ eines selbstadjungierten Operators immer gleich $\|T\|$.*

Beweis: Genau wie in der linearen Algebra zeigt man: Ist $x \in X \setminus \{0\}$, so folgt aus $T\, x = \lambda\, x$ sowie der Gleichung (5.7.2) dass $\langle \lambda\, x, x\rangle = \langle x, \lambda\, x\rangle$ ist, und daher gilt $\overline{\lambda}\, \|x\|^2 = \lambda\, \|x\|^2$, woraus $\lambda \in \mathbb{R}$ folgt. Sind jetzt λ, μ zwei verschiedene reelle Zahlen, und gilt $T\, x = \lambda\, x$, $T\, y = \mu\, y$ für $x, y \in X \setminus \{0\}$, so folgt

$$(\lambda - \mu)\, \langle x, y\rangle = \langle \lambda\, x, y\rangle - \langle x, \mu\, y\rangle = \langle T\, x, y\rangle - \langle x, T\, y\rangle = 0$$

und deshalb gilt $\langle x, y\rangle = 0$. Weiter folgt aus dem letzten Lemma dass $\|T^2\| = \|T\|^2$ ist, und mit Aufgabe 5.7.3 folgt dann $\|T^{2n}\| = \|T\|^{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt aber $r(T) = \|T\|$ wegen der Spektralradiusformel. □

Bemerkung 5.7.8 *Im letzten Satz haben wir nur gezeigt, dass alle Eigenwerte eines selbstadjungierten Operators reell sind. Tatsächlich ist aber sein ganzes Spektrum reell, denn es gilt folgendes Resultat: Wenn $T \in \mathcal{L}(X)$ selbstadjungiert ist, dann ist*

$$\sigma(T) \subset W(T) \subset \mathbb{R}, \quad \text{mit} \quad W(T) = \overline{\{ \langle T\, x, x\rangle \;:\; x \in X\, ,\ \|x\| = 1\}}\, . \tag{5.7.3}$$

Beweis: *Aus* (5.7.2) *und den Eigenschaften des Skalarproduktes folgt sofort, dass $\langle T\, x, x\rangle \in \mathbb{R}$ ist für alle $x \in X$, so dass die rechte Inklusion klar ist. Sei jetzt $\lambda \in \mathbb{C}$ so, dass $d := d(\lambda, W(T)) > 0$. Dann folgt für alle $x \in X$ mit $\|x\| = 1$ dass*

$$d \leq |\lambda - \langle T\, x, x\rangle| = |\langle (\lambda - T)\, x, x\rangle| \leq \|(\lambda - T)\, x\|\, .$$

Also muss $\lambda - T$ injektiv sein. Ist $U = \operatorname{Bild}(\lambda - T)$, so folgt aus derselben Ungleichung dass $(\lambda - T)^{-1} : U \to X$ beschränkt ist, und deshalb ist U ein abgeschlossener Unterraum von X. Falls $U \neq X$ wäre, dann gäbe es ein $x_0 \in U^\perp$ mit $\|x_0\| = 1$, und

$$0 = |\langle (\lambda - T)\, x_0, x_0\rangle| = |\lambda - \langle T\, x_0, x_0\rangle| \geq d\, ,$$

was ein Widerspruch zu $d > 0$ ist. Also muss $U = X$ sein, und das heißt dass $\lambda \in \rho(T)$ ist. □

Bemerkung 5.7.9 *Wenn $K \in \mathcal{L}(X) \setminus \{0\}$ gleichzeitig selbstadjungiert und kompakt ist, dann ist das Spektrum von K nach* Satz 4.5.5 *eine abzählbare, evtl. sogar endliche Teilmenge der reellen Zahlen, und alle $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$ sind Eigenwerte. Weil $r(T) = \|T\| > 0$ ist, ist die Menge dieser Eigenwerte nicht leer. Außerdem ist der Eigenraum zu jedem solchen λ endlichdimensional. Wir können dann zu jedem* *von Null verschiedenen Eigenwert von K eine Orthonormalbasis des Eigenraumes wählen,und da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten immer orthogonal sind, erhalten wir insgesamt ein abzählbares Orthonormalsystem von Eigenvektoren $(e_n)_{n\in J}$, wobei entweder $J = \mathbb{N}$ oder $J = 1, \ldots, m$ ist, mit einem $m \in \mathbb{N}$. Dabei können wir die Indizierung der e_n bzw. der Eigenwerte von K so vornehmen, dass $K\,e_n = \lambda_n\, e_n$ für alle $n \in J$ gilt, und dass die Beträge der λ_n monoton fallen; beachte aber, dass dabei die λ_n nicht unbedingt alle verschieden sind. Falls $J = \mathbb{N}$ ist, folgt aus* Satz 4.5.5 *dass die Folge (λ_n) eine Nullfolge ist. Wir wollen im Folgenden das System $(e_n, \lambda_n)_{n\in J}$ als das zu K gehörige Orthonormalsystem von Eigenvektoren und Eigenwerten bezeichnen. Beachte aber, dass auch $\lambda = 0$ ein Eigenwert von K sein kann, bzw. sogar sein muss, falls X unendlichdimensional ist, und dass es in diesem Fall sogar unendlich viele linear unabhängige Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 0$ gibt, welche in dem zu K gehörigen System nicht vorkommen.*

Satz 5.7.10 (Entwicklung von selbstadjungierten kompakten Operatoren) *Sei X ein Hilbertraum, sei $K \in \mathcal{L}(X) \setminus \{0\}$ kompakt und selbstadjungiert, und sei $(e_n, \lambda_n)_{n\in J}$ das zugehörige Orthonormalsystem von Eigenvektoren und Eigenwerten. Dann gilt*

$$\forall\, x \in X : \qquad K\,x \;=\; \sum_{n\in J} \lambda_n\, \langle x, e_n\rangle\; e_n\,. \tag{5.7.4}$$

Weiter ist $\operatorname{Kern} K = \{e_n\ :\ n \in J\}^\perp$*, und $\lambda = 0$ ist genau dann ein Eigenwert von K, wenn $(e_n)_{n\in J}$ kein vollständiges Orthonormalsystem ist.*

Beweis: Sei $U = \overline{\operatorname{span}\{e_n\}}$. Dann ist U selber ein Hilbertraum, und (e_n) ist ein vollständiges Orthonormalsystem in U. Deshalb gilt für alle $u \in U$ nach Satz 5.5.7 die Darstellung $u = \sum_n \langle u, e_n\rangle\, e_n$. Daraus folgt aber $K\,u = \sum_n \langle u, K\,e_n\rangle\, e_n = \sum_n \lambda_n\, \langle u, e_n\rangle\, e_n \in U$. Jedes $x \in X$ lässt sich nach Satz 5.3.4 schreiben als $x = u + v$ mit eindeutig bestimmten $u \in U$ und $v \in U^\perp$, und $\langle x, e_n\rangle = \langle u, e_n\rangle$ für alle $n \in J$. Weil $\langle u, K\,v\rangle = \langle K\,u, v\rangle = 0$ ist, da ja $K\,u \in U$ ist, folgt dass $K\,v \in U^\perp$ ist für alle $v \in U^\perp$. Deshalb ist die Restriktion K_1 von K auf $U^\perp$ ein selbstadjungierter Operator, für den $\sigma(K_1) = \{0\}$ ist, denn sonst hätte K noch einen weiteren Eigenwert, der nicht zur Folge (λ_n) gehören würde. Daraus folgt aber $\|K_1\| = r(K_1) = 0$, also $K_1 = 0$. Daher gilt $K\,v = 0$ für alle $v \in U^\perp$. Also ist

$$K\,x \;=\; K\,u \;=\; \sum_{n\in J} \langle x, e_n\rangle\, K\,e_n\,,$$

und deshalb gilt (5.7.4). □

Bemerkung 5.7.11 *Wenn der Hilbertraum X separabel ist, kann man das System der Eigenvektoren des Operators K durch Hinzunahme von Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 0$ zu einem vollständigen Orthonormalsystem ergänzen, und man erkennt dann, dass der letzte Satz genau dem Satz über die Hauptachsentransformation aus der* Linearen Algebra *entspricht.*

5.8 Unitäre und normale Operatoren

Definition 5.8.1 *Sei X ein Hilbertraum. Ein Operator $U \in \mathcal{L}(X)$ heißt* unitär*, wenn $U\,U^* = U^*\,U = I$ gilt. In anderen Worten heißt das, dass ein unitärer Operator immer invertierbar ist, und dass sein Inverses gleich dem adjungierten Operator ist. Ein Operator $N \in \mathcal{L}(X)$ heißt* normal*, wenn er mit seinem adjungierten Operator kommutiert, also wenn gilt $N\,N^* = N^*\,N$.*

Aufgabe 5.8.2 *Zeige, dass ein Operator $U \in \mathcal{L}(X)$ genau dann unitär ist, wenn er surjektiv und isometrisch ist. Benutze zum Beweis der einen Richtung die* Aufgabe 5.2.2*. Zeige weiter am Beispiel des Rechtsshifts, dass ein Operator isometrisch sein kann, ohne surjektiv zu sein.*

Ein unitärer Operator ist nur dann kompakt, wenn der zugrundeliegende Raum X endliche Dimension hat. Deshalb können wir mit den bisher entwickelten Methoden nur relativ wenig zu seinem Spektrum sagen:

Satz 5.8.3 (Spektrum eines unitären Operators) *Sei X ein Hilbertraum, und sei $U \in \mathcal{L}(X)$ unitär. Dann ist $\sigma(U)$ eine Teilmenge des Einheitskreises.*

Beweis: Da ein unitärer Operator isometrisch ist, folgt $\|U\| = 1$, und da auch $U^* = U^{-1}$ isometrisch ist, ist auch $\|U^*\| = 1$. Also folgt aus Satz 4.2.6 dass $\sigma(U)$ und $\sigma(U^*)$ Teilmengen der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe sind. Aus Aufgabe 4.2.5 folgt dann die Behauptung. □

Für normale kompakte Operatoren wollen wir ein Resultat beweisen, welches im Grunde vollkommen analog zu Satz 5.7.10 ist, mit dem Unterschied, dass die Eigenwerte eines normalen Operators nicht reell sein müssen. Wir beginnen mit einem Resultat für nicht notwendig kompakte normale Operatoren:

Satz 5.8.4 (Eigenwerte und Spektralradius eines normalen Operators) *Sei X ein Hilbertraum, und sei $N \in \mathcal{L}(X)$ normal. Wenn $x \in X$ ein Eigenvektor von N zum Eigenwert λ ist, dann ist dasselbe x auch Eigenvektor von N^*, aber zum Eigenwert $\overline{\lambda}$. Außerdem sind Eigenvektoren von N zu verschiedenen Eigenwerten immer orthogonal. Weiter gilt immer $r(N) = \|N\|$.*

Beweis: Sei $N\,x = \lambda\,x$, dann folgt durch eine einfache Rechnung

$$\|(N^* - \overline{\lambda})\,x\|^2 \;=\; \langle (N^* - \overline{\lambda})\,x, (N^* - \overline{\lambda})\,x\rangle \;=\; \langle x, N^*\,N\,x\rangle \;-\; \lambda\,\langle x, N\,x\rangle \;-\; \overline{\lambda}\,\langle N\,x, x\rangle \;+\; |\lambda|^2\,\|x\|^2 \;=\; 0\,,$$

so dass $N^*\,x = \overline{\lambda}\,x$ folgt. Wenn $N\,y = \mu\,y$ gilt, und wenn $\lambda \neq \mu$ ist, dann folgt durch eine ähnliche Rechnung, dass $|\lambda - \mu|^2\,\langle x, y\rangle = \langle (\lambda-\mu)\,x, (\lambda-\mu)\,y\rangle = 0$ ist, und deshalb sind x und y orthogonal. Weiter ist $\langle N^*\,x, N^*\,x\rangle = \langle N\,N^*\,x, x\rangle = \langle N^*\,N\,x, x\rangle = \langle N\,x, N\,x\rangle$, also $\|N^*\,x\| = \|N\,x\|$ für alle $x \in X$. Daraus folgt $\|N\,x\|^2 = \langle N\,x, N\,x\rangle = \langle N^*\,N\,x, x\rangle \leq \|N^*\,N\,x\|\,\|x\| = \|N^2\,x\|\,\|x\| \leq \|N^2\|\,\|x\|^2$ für alle $x \in X$, und das impliziert $\|N\|^2 \leq \|N^2\|$. Da die umgekehrte Ungleichung immer gilt, folgt sogar die Gleichheit, und deshalb folgt $r(N) = \|N\|$ genau wie im Beweis von Satz 5.7.7. □

Satz 5.8.5 (Entwicklung von normalen kompakten Operatoren) *Sei X ein Hilbertraum, und sei $K \in \mathcal{L}(X) \setminus \{0\}$ kompakt. Genau dann ist K normal, wenn es ein endliches oder abzählbar unendliches Orthonormalsystem $(e_n)_{n\in J}$ sowie Zahlen $\lambda_n \neq 0$, $n \in J$, gibt, für die die Darstellung* (5.7.4) *gilt. Ist dies der Fall, dann jedes e_n Eigenvektor von K zum Eigenwert λ_n, und* $\operatorname{Kern} K = \{e_n \,:\, n \in J\}^\perp$. *Der adjungierte Operator K^* ist dann gegeben durch die Entwicklung*

$$\forall\, x \in X: \qquad K^*\,x \;=\; \sum_{n\in J} \overline{\lambda_n}\,\langle x, e_n\rangle\; e_n\,. \tag{5.8.1}$$

Beweis: Sei zunächst K als normal angenommen. Dann können wir wegen Satz 5.8.4, genau wie im selbstadjungierten Fall, ein zu K gehöriges System $(e_n, \lambda_n)_{n\in J}$ von Eigenwerten $\lambda_n \neq 0$ und Eigenvektoren e_n wählen, wobei allerdings jetzt die Eigenwerte nicht unbedingt reell sein müssen. Sei $U = \overline{\operatorname{span}\{e_n\}}$. Dann zeigt man wie im Beweis von Satz 5.7.10, dass K die Räume U und $U^\perp$ in sich abbildet, so dass die Restriktion K_1 von K auf $U^\perp$ ein normaler Operator mit $\sigma(K_1) = \{0\}$ ist. Daraus folgt aber $\|K_1\| = r(K_1) = 0$, also $K_1 = 0$. Daher gilt die eine Richtung der Behauptung. Zur Umkehrung sei (5.7.4) angenommen. Dann definieren wir einen Operator $\tilde{K}$ durch die Reihe in (5.8.1), welche offenbar für alle $x \in X$ konvergiert. Dann folgt dass für alle $x, y \in X$ gilt $\langle \tilde{K}\,x, y\rangle = \langle x, K\,y\rangle$, woraus $\tilde{K} = K^*$ folgt. Weiter folgt

$$K\,(K^*\,x) \;=\; \sum_{n\in J} |\lambda_n|^2\;\langle x, e_n\rangle\; e_n \;=\; K^*\,(K\,x)\,,$$

und deshalb ist K normal. Durch Einsetzen von $x = e_m$ und Benutzen von $\langle e_m, e_n \rangle = \delta_{mn}$ folgt schließlich $K\,e_m = \lambda_m\,e_m$ für alle $m \in J$. $\square$

Wenn man, wie allgemein üblich, die Darstellungsformel (5.7.4) als *unitäre Diagonalisierung von K* bezeichnet, so sagt der letzte Satz in etwa, dass ein kompakter Operator K genau dann unitär diagonalisierbar ist, wenn er normal ist. Dies entspricht genau einem Resultat aus der linearen Algebra.

Kapitel 6

Die Räume Lebesgue-integrierbarer Funktionen

Wir wollen, nach einer kurzen Zusammenfassung der Maßtheorie und der darauf aufbauenden Einführung des Lebesgue-Integrales, die in den Anwendungen besonders wichtigen Banachräume von Lebesgue-integrierbaren Funktionen besprechen. Dabei werden wir in den ersten Abschnitten viele Beweise auslassen.

6.1 Maßräume und Maße

Definition 6.1.1 *Sei Ω eine nichtleere Menge. Eine Teilmenge $\mathcal{A}$ der Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ heißt eine* σ-Algebra *auf Ω, falls folgendes gilt:*

(A1) $\Omega \in \mathcal{A}$.

(A1) $\forall\, A \in \mathcal{A} \;:\; A^c := \Omega \setminus A \;\in\; \mathcal{A}$.

(A1) $A_n \in \mathcal{A}\,, \quad n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in\; \mathcal{A}$.

Wenn Ω eine Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ ist, für irgendein $d \in \mathbb{N}$, so heißt die kleinste σ-Algebra auf Ω, welche alle offenen Teilmengen von Ω enthält, die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\Omega)$. *Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω, so heißt eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$* ein Maß *auf (Ω, σ), falls gilt:*

(M1) $\mu(\emptyset) \;=\; 0$.

(M2) $$\forall\, A_n \in \mathcal{A}\,,\; A_n \cap A_m \;=\; \emptyset\,, \quad n \neq m\,, \quad n, m \in \mathbb{N} \;:\quad \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Ein Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mit einer nichtleeren Grundmenge Ω, einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ und einem Maß μ nennt man auch einen Maßraum.

Proposition 6.1.2 (Rechenregeln für Maße) *In jedem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ gilt immer:*

(a) *Aus $A, B \in \mathcal{A}$ und $A \subset B$ folgt $\mu(A) \leq \mu(B)$. Wenn zusätzlich $\mu(B) < \infty$ ist, dann gilt sogar $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.*

(b) *Aus* $A_n \in \mathcal{A}$ *und* $A_n \subset A_{n+1}$ *für* $n \in \mathbb{N}$ *folgt*

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Big) \;=\; \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \;=\; \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \;,$$

wenn man den Grenzwert einer Folge, deren Glieder ab einer Stelle gleich ∞ *sind, als* ∞ *definiert.*

(c) *Aus* $A_n \in \mathcal{A}$ *und* $A_n \supset A_{n+1}$ *für* $n \in \mathbb{N}$ *folgt*

$$\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \Big) \;=\; \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \;=\; \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \;.$$

Satz 6.1.3 (Lebesgue-Maß) *Es gibt genau ein Maß* λ *auf* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$*, welches Intervallen* $\prod_{n=1}^d (a_n, b_n)$*, mit* $a_n \le b_n$*, den Wert* $\prod_{n=1}^d (b_n - a_n)$ *zuordnet. Es hat die weiteren Eigenschaften:*

(a) *Für* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ *und* $x \in \mathbb{R}^d$ *ist* $\lambda(x + A) = \lambda(A)$.

(b) *Für* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ *ist* $\lambda(A) = \inf\{\, \lambda(O) \,:\, O \text{ offen}\,,\ A \subset O \,\}$.

(c) *Für* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ *ist* $\lambda(A) = \sup\{\, \lambda(K) \,:\, K \text{ kompakt}\,,\ A \supset K \,\}$.

6.2 Integrierbare Funktionen

Im Folgenden betrachten wir immer einen festen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Definition 6.2.1 (Messbarkeit, Integral) *Wir schreiben hier, etwas ungenau,* $\overline{\mathbb{R}}$ *für die Menge* $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$*, und nennen eine Funktion* $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar*, falls die Mengen* $\{\, x \in \Omega \,:\, f(x) > t \,\}$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$ *immer zu* $\mathcal{A}$ *gehören. Falls* f *nur nicht-negative Werte annimmt, dann sei* $F(t) = \mu(\{\, x \in \Omega \,:\, f(x) > t \,\})$ *für* $t \ge 0$ *gesetzt. Dann ist* F *monoton fallend - allerdings kann* F *auch für* $t > 0$ *den Wert* ∞ *annehmen. Falls dies nicht so ist, dann ist* F *für jedes* $\varepsilon > 0$ *über das Intervall* $[\varepsilon, 1/\varepsilon]$ *Riemann-integrierbar, und wir definieren*

$$\int_\Omega f \; d\mu \;=\; \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^{1/\varepsilon} F(t)\; dt\,,$$

wobei allerdings der Grenzwert gleich ∞ *sein kann. Im Fall dass* $F(t) = \infty$ *ist für ein* $t > 0$*, setzen wir* $\int_\Omega f\, d\mu = \infty$*. Dadurch ist für alle* f *mit nicht-negativen Werten ein Integral über* Ω *definiert, selbst wenn* f *den Wert* ∞ *annimmt. Für allgemeines reellwertiges* f *seien* $f_+(x) = \max\{0, f(x)\}$ *und* $f_-(x) = f_+(x) - f(x)$ *für alle* $x \in \Omega$*, und*

$$\int_\Omega f \; d\mu \;=\; \int_\Omega f_+ \; d\mu \;-\; \int_\Omega f_- \; d\mu\,,$$

sofern nicht beide Integrale auf der rechten Seite gleich ∞ *sind, denn dann ist die Differenz undefiniert. Eine komplexwertige Funktion* f *nennen wir messbar, falls sowohl* Re f *als auch* Im f *messbar sind. Wenn* f *komplexe Werte hat, setzen wir*

$$\int_\Omega f \; d\mu \;=\; \int_\Omega \operatorname{Re} f \; d\mu \;+\; i \int_\Omega \operatorname{Im} f \; d\mu\,,$$

sofern die rechte Seite definiert ist. Insgesamt nennen wir eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ integrierbar über Ω*, falls sie messbar ist, und falls durch die vorausgegangenen Festlegungen das Integral* $\int_\Omega f\, d\mu$ *definiert wurde und einen endlichen Wert hat. Schließlich nennen wir* f über eine Teilmenge $A \in \mathcal{A}$ integrierbar*, wenn* $f\, 1_A$ *über* Ω *integrierbar ist; dabei bezeichnen wir mit* 1_A *die* charakteristische Funktion *von* A*, die auf* A *den Wert* 1 *annimmt und außerhalb von* A *gleich* 0 *ist.*

Aufgabe 6.2.2 (Integral von einfachen Funktionen) *Seien $A_1, \ldots, A_m$ nicht-leere paarweise disjunkte Mengen aus $\mathcal{A}$, und seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ verschiedene komplexe Zahlen. Zeige: Die* einfache Funktion *$f = \sum_{n=1}^m \alpha_n \, 1_{A_n}$ ist genau dann über Ω integrierbar, wenn $\mu(A_n) < \infty$ ist für alle $n = 1, \ldots, m$, und dann gilt*

$$\int_\Omega f \; d\mu \;=\; \sum_{n=1}^m \alpha_n \, \mu(A_n) \, .$$

Anleitung: *Überlege zunächst, warum es ausreicht, die Behauptung für den Fall zu beweisen, dass alle α_n reell sind und zusätzlich $0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_m$ ist.*

6.3 Die Konvergenzsätze

Die folgenden beiden Sätze über Vertauschung eines Grenzprozesses mit einem Integral sind von zentraler Bedeutung. Dabei erlauben wir im ersten Satz wieder, dass die auftretenden Funktionen auch den Wert ∞ annehmen können und vereinbaren, dass eine Folge, deren Glieder von einer Stelle an gleich ∞ sind, gegen ∞ konvergieren soll.

Satz 6.3.1 (Satz von Beppo Levi) *Sei (f_n) eine Folge von messbarem Funktionen mit Werten in $[0, \infty]$, und gelte $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \Omega$. Dann ist $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ messbar, und es gilt*

$$\int_\Omega f \; d\mu \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x) \; d\mu \, ,$$

wobei dieser Grenzwert auch gleich ∞ sein kann.

Satz 6.3.2 (Satz von Lebesgue) *Sei (f_n) eine Folge von über Ω integrierbaren Funktionen mit komplexen Werten, und existiere $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in \Omega$. Wenn es weiter eine über Ω integrierbare Funktion g gibt, für welche $|f_n(x)| \le g(x)$ für alle $x \in \Omega$ gilt, dann ist f über Ω integrierbar, und es gilt*

$$\int_\Omega f \; d\mu \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x) \; d\mu \, .$$

6.4 Der Raum $L^\infty(\Omega)$

Definition 6.4.1 *Wir sagen wie üblich, dass eine Aussage $A(x)$* fast überall, abgekürzt als f. ü., *gilt, wenn sie für alle $x \in \Omega \setminus N$ richtig ist, wobei die Ausnahmemenge N eine Nullmenge ist; d. h., dass $\mu(N) = 0$ ist. Wir nennen dann f und g äquivalent, wenn* f. ü. *$f(x) = g(x)$ ist. Dies ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller auf Ω definierten Funktionen, und Eigenschaften wie Messbarkeit und Integrierbarkeit sind identisch für die Funktionen innerhalb einer Äquivalenzklasse. Wir nennen eine messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{K}$* wesentlich beschränkt, *oder sprachlich besser* im wesentlichen beschränkt, *auf Ω, falls es ein $K > 0$ gibt, für welches* f. ü. *$|f(x)| \le K$ ist. Die Menge dieser Funktionen ist ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, und durch die Festsetzung*

$$\|f\|_\infty \;=\; \inf\, \{K \in \mathbb{R}_+ \;:\; \quad |f(x)| \;\le\; K \text{ f. ü.}\}$$

wird auf der Menge dieser Funktionen eine Halbnorm definiert, wobei offenbar genau dann $\|f - g\| = 0$ gilt, wenn $f(x) = g(x)$ f. ü. *ist. Genau wie bei Semimetriken folgt, dass die Menge der Äquivalenzklassen von Funktionen, mit der obigen Norm, ein normierter Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist, den wir mit $L^\infty(\Omega)$ bezeichnen.*

Satz 6.4.2 *Der Raum $L^\infty(\Omega)$ ist ein Banachraum.*

Beweis: Sei (f_n) eine Cauchyfolge. Dann gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $n_k \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n, m \geq n_k$ gilt $\|f_n - f_m\|_\infty \leq 1/k$. Genau heißt dies, dass es Nullmengen $N_{n,m}$ gibt, so dass $|f_n(x) - f_m(x)| \leq 1/k$ für alle $x \in \Omega \setminus N_{n.m}$. Wegen der σ-Additivität von μ folgt, dass $N = \cup_{n,m} N_{n,m}$ ebenfalls eine Nullmenge ist. Daher ist für jedes $x \in \Omega \setminus N$ die Folge $(f_n(x))$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}$, also konvergent gegen ein $f(x)$. Setzt man noch $f(x) = 0$ für $x \in N$, so folgt die Messbarkeit und Beschränktheit von f, und es gilt nach Definition von N dass $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ für $n \to \infty$. □

6.5 Die Räume $L^p(\Omega)$

Im Folgenden betrachten wir, neben einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, eine reelle Zahl $p \geq 1$. Weiter definieren wir wie bereits früher p' durch die Gleichung $1/p' + 1/p = 1$, wobei wir $p' = \infty$ setzen, wenn $p = 1$ ist.

Definition 6.5.1 *Für eine beliebige messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{K}$ sei*

$$\|f\|_p \;=\; \Big(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \Big)^{1/p} ,$$

wobei wir beachten, dass diese sogenannte p-Norm auch den Wert ∞ annehmen kann.

Wir wollen zeigen, dass die oben definierte Abbildung $f \mapsto \|f\|_p$, restringiert auf die Menge der f, für die ihr Wert nicht gleich ∞ ist, die Eigenschaften einer Halbnorm hat. Dazu beweisen wir zwei Ungleichungen:

Satz 6.5.2 (Höldersche Ungleichung) *Für messbare Funktionen f und g gilt immer*

$$\int_\Omega |f\,g| \, d\mu \;\leq\; \|f\|_p \, \|g\|_{p'} \,. \tag{6.5.1}$$

Ist die rechte Seite der Ungleichung endlich, so tritt für $p > 1$ genau dann das Gleichheitszeichen ein, wenn zwei nicht-negative Zahlen c, d mit $c + d > 0$ existieren, so dass

$$c\,|f(x)|^p \;=\; d\,|g(x)|^{p'} \qquad \text{f. ü.} \;,$$

während für $p = 1$ genau dann Gleichheit gilt, wenn $g(x)$ auf der Menge der x mit $f(x) \neq 0$ fast überall gleich einer Konstanten ist.

Beweis: Für $p = 1$ ist die Ungleichung klar nach Definition der $\|\cdot\|_\infty$-Norm. Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn

$$\int_\Omega \big(\|g\|_\infty \, |f| \;-\; |f\,g| \big) \, d\mu \;=\; 0 \,,$$

und da der Integrand f. ü. nicht negativ ist, gilt dies genau dann, wenn $\|g\|_\infty \, |f(x)| \;-\; |f(x)\,g(x)| = 0$ f. ü. Sei jetzt $p > 1$, und o. B. d. A. sei die rechte Seite der Ungleichung endlich und $\neq 0$. Dann können wir sogar voraussetzen, dass $\|f\|_p = \|q\|_{p'} = 1$ ist, denn andernfalls können wir f und g mit einer geeigneten Konstanten multiplizieren. Durch einfache Extremwertbetrachtung zeigt man für $a, b \in \mathbb{R}_+$ die Ungleichung $a^{1/p}\, b^{1/p'} \leq a/p + b/p'$, was auch für $a = 0$ und/oder $b = 0$ richtig bleibt, und das Gleichheitszeichen gilt genau für $a = b$. Hieraus folgt für $a = |f(x)|^p$ und $b = |g(x)|^{p'}$ durch Integration

$$\int_\Omega |f\,g| \, d\mu \;\leq\; p^{-1} \int_\Omega |f|^p \, d\mu \;+\; (p')^{-1} \int_\Omega |f|^{p'} \, d\mu \;=\; 1/p + 1/p' \;=\; 1 \,,$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn f. ü. $|f(x)|^p = |g(x)|^{p'}$ ist. Das war zu zeigen. □

Satz 6.5.3 (Minkowskische Ungleichung) *Für messbare Funktionen f und g gilt immer*

$$\|f+g\|_p \;\leq\; \|f\|_p \;+\; \|g\|_p\,. \tag{6.5.2}$$

Ist die rechte Seite der Ungleichung endlich, so tritt genau dann das Gleichheitszeichen ein, wenn zwei nicht-negative Zahlen c, d mit $c+d>0$ existieren, so dass

$$c\,f(x) \;=\; d\,g(x) \qquad \text{f. ü.}$$

Beweis: Für $p=1$ folgt die Behauptung aus Eigenschaften des Integrals. Für $p>1$ gilt wegen $(p-1)\,p'=p$ und der Hölderschen Ungleichung

$$\int_\Omega |f+g|^p\,d\mu \leq \int_\Omega |f+g|^{p-1}|f|\,d\mu \;+\; \int_\Omega |f+g|^{p-1}|g|\,d\mu \;\leq\; \Big(\|f\|_p \;+\; \|g\|_p\Big)\,\Big(\int_\Omega |f+g|^p\,d\mu\Big)^{1/p'}.$$

Hieraus folgt die Ungleichung sowie die Bemerkung hinsichtlich des Gleichheitszeichens. □

Definition 6.5.4 *Aus dem letzten Satz folgt, dass die Menge der messbaren Funktionen f, für die $\|f\|_p$ endlich ist, einen Vektorraum über $\mathbb{K}$ bildet, auf dem $\|\cdot\|$ eine Halbnorm darstellt. Außerdem ist klar dass genau dann $\|f-g\|=0$ ist, wenn* f. ü. *$f(x)=g(x)$ ist. Also wird die Menge der Äquivalenzklassen dieser Funktionen zu einem normierten Raum, den wir mit $L^p(\Omega)$ bezeichnen.*

Satz 6.5.5 *Der Raum $L^p(\Omega)$, für beliebiges $p\geq 1$, ist ein Banachraum.*

Beweis: Sei (f_n) eine Cauchyfolge. Indem wir evtl. zu einer Teilfolge übergehen, können wir erreichen, dass $\|f_n-f_{n+1}\|_p \leq 2^{-n}$ für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt. Wir definieren $g(x)=\sum_{k=1}^\infty |f_{n+1}(x)-f_n(x)|$, wobei $g(x)=\infty$ sein kann. Aus dem Satz von Beppo Levi und der Minkowskischen Ungleichung folgt

$$\int_\Omega |g|^p\;d\mu \;=\; \lim_{m\to\infty}\int_\Omega \Big(\sum_{n=1}^m\;|f_{n+1}-f_n|\Big)^p\;d\mu \;\leq\; \sup_m\;\sum_{n=1}^m \|f_{n+1}-f_n\|_p^p \;\leq\; \sum_{n=1}^\infty 2^{-np} \;<\; \infty\,,$$

und deshalb ist f. ü. $g(x)<\infty$. Daraus folgt, dass $(f_n(x))$ für fast alle $x\in\Omega$ eine Cauchyfolge ist, und wir bezeichnen den Grenwert mit $f(x)$, wobei wir $f(x)=0$ setzen, falls der Grenzwert nicht existiert. Dann ist aber f. ü. $f(x)\leq g(x)$, und deshalb folgt dass $f\in\mathcal{L}^p(\Omega)$ ist, und $\|f-f_n\|\to 0$ für $n\to\infty$ folgt mit dem Satz von Lebesgue, da $|f(x)-f_n(x)|^p\leq g(x)^p$ f. ü. □

Bemerkung 6.5.6 *Wir erwähnen noch ohne Beweis, dass der Dualraum von $L^p(\Omega)$, für alle $1<p<\infty$, isometrisch isomorph zu $L^{p'}(\Omega)$ ist. Dasselbe gilt für $p=1$, falls der zugrundeliegende Maßraum σ-endlich ist. Insebesondere ist $L^2(\Omega)$ ein Hilbertraum. Einen Beweis für diese Aussagen findet man z. B. im Buch von* Hirzebruch und Scharlau [5]. *Aus der Charakterisierung des dualen Raumes folgt dann natürlich unmittelbar die Reflexivität von $L^p(\Omega)$ für alle $1<p<\infty$.*

Kapitel 7

Holomorphe Funktionen mit Werten in Banachräumen

Wenn nichts anderes gesagt wird, seien im Folgenden wieder X und Y Banachräume über demselben Körper $\mathbb{K}$. Dabei kann in den ersten beiden Abschnitten $\mathbb{K}$ auch gleich $\mathbb{R}$ sein, während im Rest des Kapitels $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sein muss, da man nur dann von holomorphen Funktionen mit Werten in X bzw. Y sprechen kann.

7.1 Das Riemann-Integral in Banachräumen

Im Folgenden betrachten wir immer Funktionen $f : [a, b] \longrightarrow X$ mit festen reellen Zahlen $a < b$. Wir wollen die Definition eines Riemann-Integrals aus der Analysis auf den Fall von Funktionen mit Werten in X verallgemeinern, um dann mit ihrer Hilfe Kurvenintegrale über stückweise stetig differenzierbare Kurven in $\mathbb{C}$ definieren zu können.

Definition 7.1.1 *Eine Menge $\mathcal{Z} = \{t_0, \dots, t_N\}$, $N \in \mathbb{N}$, heißt* Zerlegung *von $[a, b]$, wenn gilt*

$$a = t_0 \;<\; t_1 \;< \ldots <\; t_{N-1} \;<\; t_N = b.$$

Die Zahl $|\mathcal{Z}| = \max\{t_k - t_{k-1} : 1 \leq k \leq N\}$ heißt die Feinheit *der Zerlegung, während N* die Zahl der Teilintervalle *genannt werden soll. Die Zahlen t_k heißen auch* die Teilpunkte der Zerlegung. *Ein Vektor $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)^T$ heißt ein* Zwischenpunktvektor *zu $\mathcal{Z}$, falls*

$$t_{k-1} \;\leq\; \tau_k \;\leq\; t_k \qquad \forall\, k = 1, \dots, N.$$

Für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ und jeden Zwischenpunktvektor τ zu $\mathcal{Z}$ heißt die Zahl

$$S(\mathcal{Z}, \tau) \;=\; \sum_{k=1}^{N} (t_k \;-\; t_{k-1})\, f(\tau_k)$$

die zu $\mathcal{Z}$ und τ gehörige Riemannsumme *von f. Eine Folge $(\mathcal{Z}_n)$ von Zerlegungen heißt* zulässig, *falls $|\mathcal{Z}_n| \to 0$ $(n \to \infty)$. Falls für jede zulässige Zerlegungsfolge und jede Wahl von Zwischenpunktvektoren die zugehörige Folge von Riemannsummen konvergiert, dann heißt f* über das Intervall $[a, b]$ Riemann-integrierbar. *Wie in Analysis zeigt man, dass der Grenzwert der Riemannsummen in diesem Fall nicht* *von der Wahl der Zerlegungsfolge oder der Zwischenpunktvektoren abhängt. Diesen Wert nennen wir dann das* (Riemann-)Integral *von f über $[a,b]$ und schreiben*

$$\int_a^b f(t)\,dt\,.$$

Das folgende Lemma gibt äquivalente Charakterisierungen der Integrierbarkeit:

Lemma 7.1.2 *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(a) *f ist über $[a,b]$ integrierbar.*

(b) $\exists\, x \in X \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, \mathcal{Z}\; \forall\, \tau \;:\quad |\mathcal{Z}| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|x - S(\mathcal{Z},\tau)\| < \varepsilon.$

(c) $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, \mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2\; \forall\, \tau_1, \tau_2 \;:\quad |\mathcal{Z}_1|, |\mathcal{Z}_2| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|S(\mathcal{Z}_1,\tau_1) - S(\mathcal{Z}_2,\tau_2)\| < \varepsilon.$

Im Fall dass (b) *erfüllt ist, folgt dass $x = \int_a^b f(t)\,dt$ ist.*

Beweis: Falls (b) nicht gilt, dann gibt es zu jedem $x \in X$ ein $\varepsilon > 0$ derart, dass zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung $\mathcal{Z}_n$ mit $|\mathcal{Z}_n| < 1/n$ und ein Zwischenpunktvektor τ_n existiert, für welche $\|x - S(\mathcal{Z}_n,\tau_n)\| \geq \varepsilon$ ist. Also ist diese Folge von Riemannsummen entweder nicht konvergent (und dann ist (a) sicher falsch), oder sie konvergiert gegen ein $\tilde{x} \neq x$. Zu diesem $\tilde{x}$ gibt es dann aber ebenfalls eine zulässige Zerlegungsfolge und Zwischenpunkte, so dass die Riemannsummen nicht gegen $\tilde{x}$ konvergieren, und daher ist (a) in jedem Fall nicht erfüllt. Daher folgt (b) aus (a). Wenn (b) gilt, dann folgt für dieses x und zwei Zerlegungen $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2$ mit Zwischenpunktvektoren τ_1, τ_2, dass $\|S(\mathcal{Z}_1,\tau_1) - S(\mathcal{Z}_2,\tau_2)\| \leq \|S(\mathcal{Z}_1,\tau_1) - x\| + \|x - S(\mathcal{Z}_2,\tau_2)\| < 2\varepsilon$ ist, falls nur $|\mathcal{Z}_1|, |\mathcal{Z}_2| < \delta$ gilt, und deshalb gilt (c). Schließlich folgt mit (c) dass die Riemannsummen für jede zulässige Zerlegungsfolge und jede Wahl von Zwischenpunkten immer eine Cauchyfolge sind, und daher gilt (a) auf Grund der Vollständigkeit von X. $\square$

Aufgabe 7.1.3 *Sei $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Zeige: Wenn $f : [a,b] \to X$ integrierbar ist, dann ist es auch $T \circ f : [a,b] \to Y$, und es gilt*

$$\int_a^b T(f(t))\,dt \;=\; T\left(\int_a^b f(t)\;dt \right).$$

Proposition 7.1.4

(a) **(Fundamentalabschätzung)** *Jede über $[a,b]$ integrierbare Funktion f ist dort beschränkt, und es gilt*

$$\left\| \int_a^b f(t)\,dt \right\| \;\leq\; (b \;-\; a)\;\sup\{\, \|f(t)\| : \, a \leq t \leq b \,\}.$$

(b) **(Linearität des Integrals)** *Sind f und g über $[a,b]$ integrierbar, und sind $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so ist auch $\alpha\, f + \beta\, g$ über $[a,b]$ integrierbar, und es gilt*

$$\int_a^b (\alpha\, f(t) + \beta\, g(t))\,dt \;=\; \alpha \int_a^b f(t)\,dt \;+\; \beta \int_a^b g(t)\,dt\,.$$

Beweis: Die Fundamentalabschätzung folgt, da die Norm jeder Riemannsumme höchstens gleich der rechten Seite ist – auch falls f unbeschränkt sein sollte. Sei jetzt f auf $[a,b]$ unbeschränkt, und sei $\mathcal{Z}_n$ eine zulässige Zerlegungsfolge. Für jedes n ist dann f in mindestens einem Teilintervall von $\mathcal{Z}_n$ unbeschränkt, und deshalb kann man in einem solchen Teilintervall den Zwischenpunkt so wählen, dass die Norm der zugehörigen Riemannsumme $\geq n$ ausfällt. Deshalb kann f nicht integrierbar sein. Also gilt (a). Teil (b) ist aber unmittelbar klar wegen der Definition des Integrals. $\square$

Aufgabe 7.1.5 *Zeige: Eine konstante Funktion ist über jedes abgeschlossene Intervall integrierbar. Finde den Wert des Integrals!*

Satz 7.1.6 (Integrierbarkeit stetiger Funktionen) *Wenn $f : [a, b] \to X$ stetig ist, dann ist f auch über $[a, b]$ integrierbar.*

Beweis: Da f sogar gleichmäßig stetig ist, gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, dass $\|f(t_1) - f(t_2)\| < \varepsilon$ ist, sobald $|t_1 - t_2| < \delta$. Wähle Zerlegungen $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2$ Zerlegung mit einer Feinheit $< \delta$ und beliebige zugehörige Zwischenpunktvektoren τ_1, τ_2. Wenn $\mathcal{Z}$ eine gemeinsame Verfeinerung von $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2$ ist, mit zugehörigem Zwischenpunktvektor τ, so folgt für die Riemannsummen

$$\|S(\mathcal{Z}, \tau) \; - \; S(\mathcal{Z}_j, \tau_j)\| \; \leq \varepsilon\,(b - a)\,, \qquad 1 \leq j \leq 2\,,$$

und daher gilt $\|S(\mathcal{Z}_1, \tau_1) - S(\mathcal{Z}_2, \tau_2)\| \leq 2\,\varepsilon\,(b - a)$, woraus die Integrierbarkeit von f wegen Lemma 7.1.2 (c) folgt. □

Aufgabe 7.1.7 *Zeige, dass die Abbildung $f \longmapsto \int_a^b f(t)\,dt$ von $C([a, b], X)$ nach X linear und stetig ist.*

7.2 Potenzreihen

Definition 7.2.1 *Für Vektoren $x_k \in X$ und ein $t_0 \in \mathbb{K}$ nennen wir die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (t - t_0)\, x_k$ eine* Potenzreihe *mit Koeffizienten (x_k) und Entwicklungspunkt t_0. Falls die Reihe für ein $t \in \mathbb{K}$ konvergiert, so schreiben wir $x(t)$ für ihren Wert. Die Größe*

$$R \;=\; \frac{1}{\limsup\, \|x_k\|^{1/k}}$$

heißt der Konvergenzradius *der Potenzreihe, wobei wir wie üblich hier $1/0 = \infty$ und $1/\infty = 0$ setzen wollen. Für ein $\phi \in X'$ betrachten wir auch die Zahl*

$$R_\phi \;=\; \frac{1}{\limsup\, |\phi\, x_k|^{1/k}}\;.$$

Dies ist natürlich der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} (t - t_0)^k\, \phi\, x_k$.

Satz 7.2.2 *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} (t - t_0)\, x_k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Dann gilt:*

(a) *Die Potenzreihe konvergiert absolut für $|t - t_0| < R$, und für jedes $r < R$ ist die Konvergenz gleichmäßig für $|t - t_0| \leq r$. Für $|t - t_0| > R$ sind die Glieder der Reihe keine Nullfolge.*

(b) $$R \;=\; R_s \;:=\; \inf_{\phi \in B_{X'}} R_\phi.$$

Beweis: Für $|t - t_0| > R$ gilt nach Definition von R, dass $\|x_k\|^{1/k} \geq |t - t_0|^{-1}$ ist für unendlich viele k. Daraus folgt $|t - t_0|^k\, \|x_k\| \geq 1$ für dieselben k, und deshalb sind die Glieder der Reihe keine Nullfolge. Für $|t - t_0| \leq r < R$ sei $c \in (r, R)$. Dann ist $1/c > 1/R$, und deshalb folgt $\|x_k\|^{1/k} \leq 1/c$ für alle $k \geq k_0$. Also ist

$$|t - t_0|^k\, \|x_k\| \; \leq (r/c)^k \qquad \forall\; k \geq k_0\,,$$

und daraus folgt die absolute und gleichmäßige Konvergenz. Für $\phi \in B_{X'}$ folgt $|\phi x_k| \le \|x - k\|$ für alle $k \ge 0$, und deshalb ist $R_\phi \ge R$, also auch $R_s \ge R$. Wenn $|t - t_0| < r < R_s$ ist, dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^\infty r^k \, \phi \, x_k$ konvergent, und deshalb sind ihre Glieder eine Nullfolge. Daher ist $(r^k \, x_k)$ schwach konvergent (gegen den Nullvektor), und somit beschränkt nach Satz 3.10.3. Folglich ist $((t-t_0)^k \, x_k)$ eine Nullfolge, und deshalb folgt aus Teil (a), dass $|t - t_0| \le R$ ist. Da wir aber $|t - t_0|$ beliebig dicht an R_s heranbringen können, folgt $R_s \le R$. □

Aufgabe 7.2.3 *Sei $R > 0$, und sei $x(t) = \sum_{k=0}^\infty (t - t_0) \, x_k$ für alle $t \in \mathbb{K}$ mit $|t - t_0| < R$. Zeige die Existenz des Grenzwertes*

$$x'(t_0) \; := \; \lim_{t \to t_0} \; (t - t_0)^{-1} \, \big(x(t) - x(t_0) \big) \, .$$

7.3 Holomorphie

Im Folgenden betrachten wir immer einen Banachraum X über $\mathbb{C}$.

Definition 7.3.1 *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein* Gebiet*, d. h., offen und zusammenhängend, und sei $f : G \to X$. Wir nennen f* differenzierbar im Punkt *$z \in G$, falls*

$$f'(z) \; := \; \lim_{h \to 0} \; h^{-1} \big(\, f(z+h) - f(z) \, \big)$$

existiert. Genauer heißt das, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ geben muss, so dass

$$\forall \; h \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \; : \qquad (z + h \in G \, , \; |h| < \delta) \quad \Longrightarrow \quad \Big\| f'(z) \; - \; h^{-1} \big(\, f(z+h) - f(z) \, \big) \Big\| \; < \; \varepsilon \, .$$

Falls f in allen Punkten $z \in G$ differenzierbar ist, nennen wir f kurz holomorph *in G. In jeden Fall heißt $f'(z)$ die* (erste) Ableitung *von f im Punkt z. Weiter nennt man f* schwach holomorph *in z bzw. in G, falls für jedes $\phi \in X'$ die Komposition $\phi \circ f : G \to \mathbb{C}$ holomorph in z bzw. in G im üblichen Sinne ist.*

Bemerkung 7.3.2 *Mit der Definition ergibt sich leicht, dass Holomorphie immer schwache Holomorphie impliziert. Dass auch die Umkehrung gilt, ist nicht trivial und soll jetzt gezeigt werden.*

Man kann ganz allgemein Integrale einer Funktion $f : G \to X$ entlang beliebiger Kurve in G definieren. Wir benötigen aber hier nur solche Integrale entlang stückweise differenzierbarer Kurven.

Definition 7.3.3 *Sei $z : [a, b] \to G$ die Parameterdarstellung einer Kurve γ mit einem Träger im Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, und sei f holomorph in G. Falls $z(t)$ auf $[a, b]$ stetig differenzierbar ist, setzen wir*

$$\int_\gamma f(z) \; dz \;\; = \;\; \int_a^b \; z'(t) \; f(z(t)) \; dt \, ,$$

wobei die Existenz des Riemann-Integrals rechts gesichert ist, weil der Integrand stetig ist. Falls eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ von $[a, b]$ existiert, so dass $z(t)$ wenigstens auf allen Teilintervallen $[x_{k_1}, x_k]$ stetig differenzierbar ist, dann sei

$$\int_\gamma f(z) \; dz \;\; = \;\; \sum_{k=1}^N \; \int_{x_{k_1}}^{x_k} \; z'(t) \; f(z(t)) \; dt \, .$$

Beachte, dass diese Zerlegung des Integrals in eine Summe auch im ersten Fall richtig ist. Auf diese Weise definieren wir ein Kurvenintegral von f entlang von Kurven mit einer stückweise stetig differenzierbaren Parameterdarstellung; solche Kurven wollen wir auch kurz als Wege *bezeichnen.*

Mit Hilfe solcher Kurvenintegrale zeigen wir nun folgenden zentralen Satz:

Satz 7.3.4 (Integralsatz und -formel von Cauchy) *Sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet, und sei $f : G \to X$ stetig. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *f ist schwach holomorph in G.*

(b) *f ist holomorph in C.*

(c) *Das Kurvenintegral von f über einen beliebigen geschlossenen Weg in G verschwindet.*

(d) *Für jedes $z_0 \in G$ und jeden positiv orientierten Kreis γ_r um z_0 mit Radius $r > 0$, der noch ganz zu G gehört, gilt die Cauchysche Integralformel*

$$f(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r} [w-z]^{-1}\, f(w)\, dw \qquad \forall\, z \quad \text{mit} \quad |z-z_0| < r\,. \tag{7.3.1}$$

Beweis: Wenn (a) gilt, und wenn γ ein geschlossener Weg in G ist, dann gilt für alle $\phi \in X'$ auf Grund der Ergebnisse der Funktionentheorie, sowie mit Aufgabe 7.1.3 dass

$$0 \;=\; \int_\gamma \phi(f(z))\, dz \;=\; \phi\Big(\int_\gamma f(z)\, dz \Big)\,.$$

Da ϕ völlig beliebig sein kann, folgt hieraus (c). Analog zeigt man, dass aus (a) auch (d) folgt, denn (7.3.1) gilt bekanntlich mit $\phi \circ f$ an Stelle von f, wenn f schwach holomorph ist. Gelte jetzt (d). Dann folgt für $|z - z_0| < r = |w - z_0|$

$$\frac{1}{w-z} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{(w-z_0)^{k+1}}\,,$$

wobei die Reihe gleichmäßig in w konvergiert. Setzt man dies in (7.3.1) ein, so darf man wegen Aufgabe 7.1.7 Reihe und Integral vertauschen, und erhält deshalb

$$f(z) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} (z-z_0)^k\, f_k\,, \qquad \text{mit} \qquad f_k \;=\; \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r} [w-z_0]^{-k-1}\, f(w)\, dw\,. \tag{7.3.2}$$

Aus dieser Darstellung folgt mit Aufgabe 7.2.3 die Holomorphie von f im Punkt z_0, und daher in ganz G. Wenn (c) gilt, folgt mit Aufgabe 7.1.3, dass für alle $\phi \in X'$ das Kurvenintegral von $\phi \circ f$ über γ verschwindet. Dies impliziert aber die Holomorphie von $\phi \circ f$ in G, und deshalb folgt (a). □

Wir zeigen noch folgende Version des Identitätssatzes:

Satz 7.3.5 (Identitätssatz für holomorphe Funktionen) *Sei U ein abgeschlossener Unterraum von X. Sei G ein Gebiet, und sei $f : G \to X$ holomorph in G. Falls die Menge der $z \in G$, für die $f(z) \in U$ ist, einen Häufungspunkt $z_0 \in G$ besitzt, dann folgt $f(z) \in U$ für alle $z \in G$.*

Beweis: Wenn Q die Quotientenabbildung von X auf X/U ist, dann ist $Q \circ f$ auf G holomorph, und $f(z) \in U$ ist zu $Q(f(z)) = 0$ äquivalent. Wenn $\phi \in (X/U)'$ ist, folgt aus den gemachten Voraussetzungen und dem klassischen Identitätssatz, dass $\phi \circ Q \circ f$ identisch verschwindet. Weil dies für alle ϕ gilt, folgt dass auch $Q \circ f$ identisch Null ist. □

Literaturverzeichnis

[1] **J. Appell und M. Väth**, *Elemente der Funktionalanalysis*, Vieweg, Wiesbaden, 2005. Vektorräume, Operatoren und Fixpunktsätze.

[2] **L. Collatz**, *Funktionalanalysis und numerische Mathematik*, Springer-Verlag, Berlin, 1964.

[3] **A. Y. Helemskii**, *Lectures and exercises on functional analysis*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.

[4] **H. Heuser**, *Funktionalanalysis*, B. G. Teubner, Stuttgart, vierte Aufl., 2006. Theorie und Anwendung.

[5] **F. Hirzebruch und W. Scharlau**, *Einführung in die Funktionalanalysis*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1991. Nachdruck des Originals von 1971.

[6] **L. W. Kantorowitsch und G. P. Akilow**, *Funktionalanalysis in normierten Räumen*, Verlag Harri Deutsch, Thun, 1978.

[7] **L. A. Ljusternik und W. I. Sobolew**, *Elemente der Funktionalanalysis*, Akademie-Verlag, Berlin, sechste Aufl., 1979.

[8] **B. D. MacCluer**, *Elementary functional analysis*, Springer, New York, 2009.

[9] **R. Meise und D. Vogt**, *Einführung in die Funktionalanalysis*, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1992.

[10] **J. R. Munkres**, *Topology: a first course*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.

[11] **E. Pflaumann und H. Unger**, *Funktionalanalysis. I*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1974.

[12] **S. D. Promislow**, *A first course in functional analysis*, Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], Hoboken, NJ, 2008.

[13] **F. Riesz und B. Sz.-Nagy**, *Vorlesungen über Funktionalanalysis*, Verlag Harri Deutsch, Thun, deutsche Aufl., 1982.

[14] **B. P. Rynne und M. A. Youngson**, *Linear functional analysis*, Springer-Verlag London Ltd., London, zweite Aufl., 2008.

[15] **H. Schröder**, *Funktionalanalysis*, Verlag Harri Deutsch, Thun, zweite Aufl., 2000.

[16] **D. Werner**, *Funktionalanalysis*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[17] **J. Wloka**, *Funktionalanalysis und Anwendungen*, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1971.

[18] **B. S. Wulich**, *Einführung in die Funktionalanalysis. Teil 1*, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1961.

[19] **K. Yosida**, *Functional analysis*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995. Nachdruck der 6. Auflage.

Index

$\int$, 77

$\mathcal{A}$, 71
abgeschlossene Hülle, 8
abgeschlossene Mengen, 8
Absolute Konvergenz
  von Folgen, 11
Abstand von Mengen, 17
adjungiert, 66
approximativer Eigenwert, 52
Äquivalenz
  von Metriken, 10
  von Normen, 29, 33
Arzela-Ascoli, 20
Auswertungsabbildung, 44
Axiome
  einer Metrik, 6
  einer Norm, 5

$B_X, \overline{B}_X$, 24
$\mathcal{B}(\Omega)$, 71
Baire-Raum, 20
Bairescher Kategoriensatz, 22
Banach-Steinhaus, 31
Banachraum, 23
Banachscher Fixpunktsatz, 15
Basis
  Orthogonal-, 61
Berührungspunkt, 8
beschränkt, 18, 30
  gleichmäßig, 30
  punktweise bzw. gleichmäßig, 19
  schwach, 46
  total, 15
Besselsche Ungleichung, 63
beste Approximation, 60
Bidual, 44
Borel-σ-Algebra, 71

$C(D)$, $C[a, b]$, 23
c, c_0, 23
$C[a, b]$, 6
$C(X, Y)$, 18
Cauchyfolge, 10
charakteristische Funktion, 72

$d(E, F), d(x, F)$, 17
Definitheit, 5, 6
dicht, 8
  nirgends, 22
dicht definert, 28
differenzierbar, 79
Dreiecksungleichung, 6
  für Normen, 5
  nach unten, 7
dualer Operator, 41
Dualraum, 38

$\overset{\circ}{E}, \overline{E}$, 8
e_n, 26
Eigenraum, 52
Eigenvektor, 52
Eigenwert, 52
  approximativer, 52
eindeutige Lösbarkeit, 48
einfache Funktion, 73
Einheitskugel, 24
ε-Umgebung, 8
erster Art, 49
euklidische
  Metrik, 7
  Norm, 6

$F(X, Y)$, 18
$\mathcal{F}_\infty(D)$, 23
$\mathcal{F}_\infty(D, X)$, 23
Faktorraum, 43
Feinheit, 76
Fixpunkt, 14
Fixpunktsatz, 15
Folgen
  -kompaktheit, 15
  -stetigkeit, 10
  Cauchy-, 10
Fortsetzung, 28
Fortsetzungssatz von Hahn-Banach, 37
Fourierkoeffizienten, 65
Fourierreihe, 65
  allgemeine, 62
Fredholm-Operator, 25
Fredholmsche Integralgleichung, 49
Fundamentalabschätzung, 77

Funktion
charakteristische, 72
einfache, 73
integrierbare, 72
messbare, 72
Funktional, 38
Funktionen von beschränkter Variation, 24

$G(T)$, 33
geometrische Vielfachheit, 56
gleichgradig stetig, 19
gleichmäßige
Beschränktheit, 19
Gram-Schmidtsches Orthog.-Verf., 61
Graph, 33
graphenabgeschlossen, 33
Grenzwert, 10

Hahn-Banach, 37
Halbnorm, 37
Häufungspunkt, 9
Heine-Borel-Eigenschaft, 20
hermitesch, 66
Hilbertraum, 59
Prä-, 57
Höldersche Ungleichung, 74
holomorph, 79
Homöomorphismus, 10
Homogenität, 5, 7
Hülle (abgeschlossene), 8

I, 27
I_X, 27
innerer Punkt, 8
inneres Produkt, 57
Integral, 76
Riemann-, 76
Riemann-Stieltjes, 40
Integralgleichung
Fredholmsche, 49
Volterrasche, 49
integrierbar, 72
invertierbar, 27
isolierter Punkt, 9
Isometrie, 12
lineare, 27
isometrisch, 12
Isomorphismus, 27

$K(x_0, \varepsilon)$, 8
Kategorie, 22
Kern
offener, 8
Kernfunktion, 25
Kodimension, 42

kompakt, 15
folgen-, 15
prä-, 15
komplementär, 42
Kontraktion, 14
-sparameter, 14
Konvergenz, 10
absolute, 11
Norm-, 46
punktweise, 30
schwache, 46
starke, 30
Konvergenzradius, 78
Kreisscheibe, 8
Kugel, 8
Kurvenintegral, 79

$L^\infty(\Omega)$, 73
$L^p(\Omega)$, 75
$\mathcal{L}(X)$, 25
$\mathcal{L}(X, Y)$, 25
ℓ_2, 59
ℓ_∞, 23
ℓ_p, 11
längentreu, 12
Lebesgue-Maß, 72
Legendre-Polynome, 64
lineare Isometrie, 27
Linearform, 38
Linksshift, 26, 49
Lipschitzkonstante, 9
Lipschitzstetigkeit, 9
Lösbarkeit
universelle, eindeutige, 48

μ, 71
Matrix
Darstellungs-, 26
inverse, 27
permanente, 31
transponierte, 42
maximales Element, 35
Maß, 71
Lebesgue-, 72
Rechenregeln, 71
Maßraum, 71
Mengen
abgeschlossene, 8
kompakte, 15
nirgends dichte, 22
offene, 8
vollständige, 12
messbar, 72
Metrik, 6
euklidische, 7

homogene, 7
translationsinvariante, 7
Ultra-, 7
zur Norm gehörige, 6
metrischer Raum, 6
Minkowski, 6
Minkowskische Ungleichung, 75

Neumannsche Reihe, 27
nirgends dicht, 22
Norm, 5
p-, 6
eines Operators, 25
euklidische, 6
normal, 68
normbeschränkt, 30
normierter Raum, 5
Normkonvergenz, 46

obere Schranke, 35
offene Mengen, 8
offener Kern, 8
Operator
adjungierter, 66
beschränkter, 25
dualer, 41
Fredholm-, 25
hermitescher, 66
invertierbarer, 27
normaler, 68
selbstadjungierter, 66
unitärer, 68
Operatornorm, 25
Ordnung
teilweise/partielle, 35
orthogonal, 59
Orthogonalbasis, 61
orthogonales Komplement, 59
Orthogonalisierung, 61
Orthogonalreihe, 62
Normkonvergenz, 63
Orthogonalsystem, 61
der trigonometrischen F., 64
maximales, 63
vollständiges, 63
von Polynomen, 64
Orthonormalbasis, 61
Orthonormalsystem, 61

p-adische Bewertung, 7
Parallellogrammgesetz, 58
Parsevalsche Gleichung, 63
partielle Ordnung, 35
permanent, 31
p-Norm, 6
Positive Definitheit, 5, 6
Potenzreihe, 78
Prä-Hilbertraum, 57
präkompakt, 15
Prinzip der gleichm. Beschränktheit, 31
Projektion, 42
Punkt
Berührungs-, 8
Häufungs-, 9
innerer, 8
isolierter, 9
Rand-, 9
Punktspektrum, 52
punktweise
Beschränktheit, 19
Konvergenz, 30

Quotientenabbildung, 43
Quotientenraum, 43

$\rho(T)$, 50
$\mathrm{rd}\,(E)$, 9
$\rho(f,g)$, 18
Rand, 9
Randpunkt, 9
Raum
Baire-, 20
Banach-, 23
beschränkter metrischer, 18
dualer, 38
Faktor-, 43
Hilbert-, 59
kompakter, 15
metrischer, 6
normierter, 5
Quotienten-, 43
semimetrischer, 6
reflexiv, 44
Regeln
für abgeschlossene Mengen, 8
Resolvente, 50
Resolventenmenge, 50
Riemann
-integrierbarkeit, 76
-summe, 76
Riemann-Stieltjes-Integral, 40
Riemann-Stieltjes-Summen, 40

Satz
Bairescher Kategorien-, 22
Banachscher Fixpunkt-, 15
stet. Fortsetzung von Funktionalen, 38
Stetigkeit von Projektionen, 42
Vervollständigungs-, 12
vom abgeschlossenen Graphen, 33

vom inversen Operator, 33
von Arzela-Ascoli, 20
von Banach-Steinhaus, 31
von Beppo Levi, 73
von der besten Approx., 61
von der offenen Abbildung, 33
von Hahn-Banach, 37
von Lebesgue, 73
schwach
beschränkt, 46
konvergent, 46
schwach holomorph, 79
selbstadjungiert, 66
semilinear, 57, 59
Semimetrik, 6
semimetrischer Raum, 6
separabel, 16
σ-Algebra, 71
Borel-, 71
Skalarprodukt, 57
Spektralradius, 50
Spektrum, 50
Punkt-, 52
starke Konvergenz, 30
Stetigkeit, 9
Folgen-, 10
gleichgradige, 19
gleichmäßige, 9
Lipschitz-, 9
sublinear, 36
Summe
Riemann-, 76
Riemann-Stieltjes-, 40
Symmetrie, 6
System
Orthogonal-, 61
Orthonormal-, 61

teilweise Ordnung, 35
total beschränkt, 15
translationsinvariant, 7
trigonometrisches System, 64

$U_\varepsilon(x_0)$, 8
$\mathcal{U}(x), \mathcal{U}_0(x)$, 8
Ultrametrik, 7
Umgebung, 8
offene, 8
Ungleichung
Besselsche, 63
Höldersche, 74
Minkowskische, 6, 75
unitär, 68
universelle Lösbarkeit, 48
Unterraum, 7

Variation, 24
Vervollständigung, 13
Vierecksungleichung, 7
vollständig geordnet, 35
Vollständigkeit, 10
Volterrasche Integralgleichung, 49
von erster/zweiter Kategorie, 22

Weg, 79

$\mathcal{Z}$, 76
Zerlegung, 24
eines Intervalls, 76
Feinheit einer, 76
Teilpunkte, 76
Zahl der Teilintervalle, 76
Zornsches Lemma, 36
zweiter Art, 49
Zwischenpunktvektor, 76