Vorlesungsmanuskript zur

Funktionentheorie

Werner Balser
Institut für Angewandte Analysis

Sommersemester 2010

Bücher zur Vorlesung

[1] **L. V. Ahlfors**, *Complex analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York, dritte Aufl., 1978. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, International Series in Pure and Applied Mathematics.

[2] **H. Behnke und F. Sommer**, *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen.*, Zweite veränderte Auflage. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 77, Springer-Verlag, Berlin, 1962.

[3] **J. B. Conway**, *Functions of one complex variable*, vol. 11 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, zweite Aufl., 1978.

[4] ——, *Functions of one complex variable. II*, vol. 159 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1995.

[5] **N. Dunford und J. T. Schwartz**, *Linear Operators. I. General Theory*, With the assistance of W. G. Bade and R. G. Bartle. Pure and Applied Mathematics, Vol. 7, Interscience Publishers, Inc., New York, 1958. 24

[6] **O. Forster**, *Riemannsche Flächen*, Springer-Verlag, Berlin, 1977. Heidelberger Taschenbücher, Band 184. 51

[7] ——, *Lectures on Riemann surfaces*, vol. 81 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1991.

[8] **E. Freitag und R. Busam**, *Funktionentheorie*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[9] **M. Haase**, *The functional calculus for sectorial operators*, vol. 169 of Operator Theory: Advances and Applications, Birkhäuser Verlag, Basel, 2006. 24

[10] **A. Hurwitz**, *Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen*, Springer, Berlin, 1999.

[11] **K. Knopp**, *Theory of Functions. I. Elements of the General Theory of Analytic Functions*, Dover Publications, New York, 1945.

[12] ——, *Theory of Functions. II. Applications and Continuation of the General Theory*, Dover Publications, New York, 1947.

[13] ——, *Problem Book in the Theory of Functions. Volume 1. Problems in the Elementary Theory of Functions*, Dover Publications Inc., New York, N. Y., 1948. Translated by Lipman Bers.

[14] ——, *Elements of the theory of functions*, Dover Publications Inc., New York, 1953. Translated by Frederick Bagemihl.

[15] ——, *Problem book in the theory of functions. Vol. II. Problems in the advanced theory of functions*, Dover Publications Inc., New York, N. Y., 1953. Translated by F. Bagemihl.

[16] ——, *Funktionentheorie. I. Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen*, Neunte, neubearbeitete Auflage. Sammlung Göschen Bd. 668, Walter de Gruyter and Co., Berlin, 1957.

[17] ——, *Aufgabensammlung zur Funktionentheorie. II. Aufgaben zur höheren Funktionentheorie*, 5te Aufl. Sammlung Göschen Bd. 878, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1959.

[18] ——, *Elemente der Funktionentheorie*, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1971. Achte Auflage, Sammlung Göschen, Band 1109.

[19] ——, *Aufgabensammlung zur Funktionentheorie. I. Aufgaben zur elementaren Funktionentheorie. 8. Aufl.*, Sammlung Göschen. 2127. Berlin - New York: Walter de Gruyter, 1977.

[20] ——, *Funktionentheorie. II: Anwendungen und Weiterführung der allgemeinen Theorie. 13. Aufl.*, Sammlung Göschen, 2126. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1981.

[21] **I. Laine**, *Nevanlinna theory and complex differential equations*, vol. 15 of de Gruyter Studies in Mathematics, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1993. 50

[22] **R. Remmert**, *Funktionentheorie I*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[23] ——, *Funktionentheorie II*, Springer-Verlag, Berlin, 1991. 47, 49

[24] **W. Rudin**, *Reelle und komplexe Analysis*, Oldenbourg, München, 1999.

[25] **H.-J. Runckel**, *Höhere Analysis - Funktionentheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen*, Oldenbourg, München, 2000.

[26] **D. V. Widder**, *The Laplace Transform*, Princeton University Press, Princeton, N.Y., 1941. 64

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Zahlenkugel und Möbiustransformationen

1.1 Die Riemannsche Zahlenkugel

In $\mathbb{R}^3$ betrachten wir die Kugel mit Radius $1/2$ und Mittelpunkt $(0,0,1/2)^T$, und wir identifizieren $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$ mit $(x,y,0)^T \in \mathbb{R}^3$. Den Punkt $(0,0,1)^T$ nennen wir *den Nordpol der Kugel*. Ist z eine beliebige komplexe Zahl, also hier eigentlich ein Punkt $(x,y,0)^T$, und legt man durch z und den Nordpol eine Gerade $g = g(z)$, so schneidet diese die Kugel in einem vom Nordpol verschiedenen Punkt $(\xi,\eta,\zeta)^T$. Durch diese Konstruktion wird die komplexe Ebene $\mathbb{C}$ bijektiv auf die Kugel ohne den Nordpol abgebildet. Aus naheliegenden Gründen nennen wir den Nordpol auch *den unendlich fernen Punkt* oder kürzer *den Punkt* ∞. Die oben beschriebene Kugel, zusammen mit dieser bijektiven Abbildung, heißt *die Riemannsche Zahlenkugel*, die Abbildung heißt *die stereographische Projektion*.

Aufgabe 1.1.1 *Beschreibe die Bilder von Geraden in $\mathbb{C}$ unter der stereographischen Projektion.*

Aufgabe 1.1.2 *Begründe die Aussage* „zwei Geraden in der Ebene schneiden sich im Unendlichen“. *Überlege weiter, warum es sinnvoll ist zu sagen, dass sich zwei Geraden sogar immer zweimal schneiden, wobei mindestens einer der Schnittpunkte der unendlich ferne Punkt ist.*

Aufgabe 1.1.3 *Berechne die Koordinaten ξ,η,ζ in Abhängigkeit von x,y.*

Lösung: *Parameterdarstellung der Geraden $g(z)$ ist gleich $(\xi(t),\eta(t),\zeta(t))^T = (t\,x, t\,y, 1-t)$; Gleichung der Kugel ist $\xi^2+\eta^2+(\zeta-1/2)^2 = 1/4$. Einsetzen ergibt für den Schnittpunkt die Gleichungen*

$$\xi \;=\; \frac{x}{1+x^2+y^2}\,, \quad \eta \;=\; \frac{y}{1+x^2+y^2}\,, \quad \zeta \;=\; \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\,. \tag{1.1.1}$$

□

Definition 1.1.4 *Für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ heißt der Abstand der Bildpunkte auf der Riemannschen Zahlenkugel* der chordale Abstand *von z_1 und z_2, bezeichnet mit $d(z_1,z_2)$. Man rechnet nach, dass gilt*

$$d(z_1,z_2) \;=\; \frac{|z_1-z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}}\;,$$

und wir setzen noch

$$d(z,\infty) \;=\; d(\infty,z) \;=\; \lim_{\tilde z\to\infty} d(z,\tilde z) \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}\;.$$

Definition 1.1.5 *Ein* allgemeiner Kreis *in $\mathbb{C}$ ist entweder ein Kreis oder eine Gerade in $\mathbb{C}$. Eine Abbildung $f: D \to \mathbb{C}$, mit $D \subset \mathbb{C}$ offen, heißt* kreisverwandt, *wenn sie beliebige allgemeine Kreise in D auf allgemeine Kreise abbildet. Ein solches f heißt* winkeltreu, *falls gilt: Für zwei beliebige glatte Kurven in D mit glatten[1] Parameterdarstellungen $z_j(t)$, $a \le t \le b$, $1 \le j \le 2$, welche sich in einem Punkt $z_0 \in D$ unter einem Winkel α schneiden, sind auch die Bildkurven $f(z_j(t))$ glatt und schneiden sich unter dem gleichen Winkel. Winkeltreue und Kreisverwandschaft definiert man genauso für Abbildungen $f: D \to Y$, mit $D \subset X$, wenn X, Y Vektorräume über $\mathbb{R}$ mit einem inneren Produkt sind, also z. B. für $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$, $n, m \in \mathbb{N}$, wobei ein Kreis der Durchschnitt einer Kugel mit einem zweidimensionalen affinen Unterraum ist.*

Aufgabe 1.1.6 (Allgemeine Kreise) *Zeige: Zu jedem Kreis bzw. jeder Geraden in $\mathbb{C}$ gibt es Konstanten $A, C \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{C}$, mit $A\,C < |B|^2$, derart dass die Lösungsmenge der Gleichung*

$$A\, z\, \overline{z} + B\, z + \overline{B}\, \overline{z} + C \;=\; 0, \tag{1.1.2}$$

genau dieser Kreis bzw. diese Gerade ist. Zeige umgekehrt, dass die Lösungsmenge einer solchen Gleichung immer ein allgemeiner Kreis ist und stelle fest, wann die Lösungsmenge ein Kreis bzw. eine Gerade ist.

Aufgabe 1.1.7 *Zeige: Zu drei verschiedenen Punkten in $\mathbb{C}$ gibt es genau einen allgemeinen Kreis, welcher durch diese Punkte geht.*

Satz 1.1.8 *Die stereographische Projektion ist winkeltreu und kreisverwandt.*

Beweis: Seien $z_j(t) = x_j(t) + i\, y_j(t)$ glatte Parameterdarstellungen von Kurven in $\mathbb{C}$, und seien $\vec{x}_j(t) = (\xi_j(t), \eta_j(t), \zeta_j(t))^T$ die entsprechenden Bildkurven auf der Zahlenkugel. Mit $N_j(t) = 1 + x_j^2(t) + y_j^2(t)$ gilt dann

$$\vec{x}_j\,'(t) \;=\; \frac{1}{N_j(t)^2} \begin{pmatrix} x_j'(t)\, N_j(t) - x_j(t)\, N_j'(t) \\ y_j'(t)\, N_j(t) - y_j(t)\, N_j'(t) \\ N_j'(t) \end{pmatrix}.$$

Wenn sich die Kurven schneiden, etwa für $t = t_0$, können wir der Einfachheit halber $x, y, \vec{x}, N$ statt $x_j(t_0), y_j(t_0), \vec{x}_j(t_0), N_j(t_0)$ schreiben und auch bei den Ableitungen die Abhängigkeit von t_0 nicht notieren. In diesem Fall folgt für das innere Produkt

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}_1\,', \vec{x}_2\,' \rangle \;&=\; N^{-4}\, \Big[(x_1'\, x_2' + y_1'\, y_2')\, N^2 \;-\; x\, (x_1'\, N_2' + x_2'\, N_1')\, N \\ &\qquad - \; y\, (y_1'\, N_2' + y_2'\, N_1')\, N \;+\; N\, N_1'\, N_2' \Big]. \end{aligned}$$

Wegen $N_j' = 2\,(x_j'\, x + y_j'\, y)$ vereinfacht sich dies zu

$$\langle \vec{x}_1\,', \vec{x}_2\,' \rangle \;=\; (x_1'\, x_2' + y_1'\, y_2')\, N^{-2}.$$

Genauso folgt

$$\|\vec{x}_j\,'\| \;=\; N^{-1} \sqrt{(x_j')^2 + (y_j')^2}, \quad 1 \le j \le 2.$$

Daraus folgt die Winkeltreue, denn per Definition ist der Winkel zwischen zwei Kurven gleich dem Winkel zwischen den beiden Tangenten, d. h., den Ableitungen. Zur Kreisverwandtschaft: Nach Aufgabe 1.1.6 sind allgemeine Kreise genau die Lösungsmengen von Gleichungen der Form (1.1.2) mit $A, C \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{C}$, und $A\,C < |B|^2$. Aus (1.1.1) folgt $x = \xi/(1-\zeta)$, $y = \eta/(1-\zeta)$, $x^2 + y^2 = \zeta/(1-\zeta)$, und Einsetzen in (1.1.2) ergibt mit $B = B_1 + i\, B_2$ die Gleichung

$$A\, \zeta + 2\,(B_1\, \xi - B_2\, \eta) + C\,(1 - \zeta) \;=\; 0.$$

[1] Eine Parameterdarstellung heißt *glatt*, wenn sie auf dem ganzen Parameterintervall stetig differenzierbar ist, und wenn die Ableitung niemals verschwindet. Der Schnittwinkel zweier glatter Kurven in einem gemeinsamen Punkt z_0 ist dann per Definition der Winkel zwischen den beiden Ableitungen an dieser Stelle.

Dies ist die Gleichung einer Ebene in $\mathbb{R}^3$, und die Schnittmenge mit der Kugel ist ein Kreis. $\square$

Wir definieren noch folgende Rechenregeln für das Symbol ∞:

$$\begin{aligned} \forall\, z \in \mathbb{C}: \quad z + \infty = \infty + z &= \infty\,, \\ \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}: \quad z\,\infty = \infty\, z &= \infty\,, \end{aligned}$$

$$1/\infty = 0\,, \qquad 1/0 = \infty\,, \qquad \infty\,\infty = \infty\,.$$

Aufgabe 1.1.9 *Leite aus obigen Rechenregeln für ∞ die folgenden weiteren Regeln ab:*

$$\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}: \quad z/0 = \infty, \quad z/\infty = 0.$$

Aufgabe 1.1.10 *Zeige: Die Bilder zweier $z_j \in \mathbb{C}$ auf der Riemannschen Zahlenkugel liegen sich genau dann diametral gegenüber, wenn $z_1\,\overline{z}_2 = -1$ gilt.*

1.2 Abbildungseigenschaften von Möbiustransformationen

Definition 1.2.1 *Für komplexe Zahlen a, b, c, d mit $a\,d - b\,c \neq 0$ heißt die Abbildung*

$$z \longmapsto f(z) = \frac{a\,z + b}{c\,z + d} \tag{1.2.1}$$

eine Möbiustransformation *oder auch eine* gebrochen lineare Abbildung. *Für $z = -d/c$ ($= \infty$ falls $c = 0$ ist) gilt $a\,z + b = -(a\,d - b\,c)/c \neq 0$, also ist es richtig, $f(-d/c) = \infty$ zu setzen. Außerdem sei $f(\infty) = \lim_{z\to\infty} f(z) = a/c$. Es ist deshalb sinnvoll, f als Abbildung von $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ nach $\mathbb{C}^*$ zu betrachten.*

Bemerkung 1.2.2 *Offenbar ist eine Möbiustransformation f in $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ stetig, und für $z \to -d/c$ gilt $f(z) \to \infty$. Also gilt für alle $z_0 \in \mathbb{C}^*$, dass $f(z) \to f(z_0)$ geht, wenn $z \to z_0$ strebt. Daher ist es sinnvoll zu sagen, dass f in ganz $\mathbb{C}^*$ stetig ist.*

Aufgabe 1.2.3 *Zeige: Jede Möbiustransformation f besitzt eine Darstellung wie in* (1.2.1)*, aber mit $a\,d - b\,c = 1$. Untersuche, inwieweit dann die Zahlen a, b, c, d durch f eindeutig bestimmt sind.*

Spezialfälle:

- $f(z) = z + b$ heißt *eine Translation* (Verschiebung) in $\mathbb{C}$.
- $f(z) = a\,z$, mit $a = r\,(\cos\phi + i\,\sin\phi) \neq 0$, heißt *eine Drehstreckung in $\mathbb{C}$ mit Zentrum 0, Drehwinkel ϕ und Streckungsfaktor r*. Für $r = 1$ sprechen wir auch schlicht von einer *Drehung*.
- $f(z) = 1/z$ heißt *Inversion*. Diese Abbildung hängt auch eng mit der *Spiegelung am Einheitskreis* zusammen; siehe dazu den Abschnitt über Spiegelpunkte.

Satz 1.2.4 *Jede Möbiustransformation* (1.2.1) *bildet $\mathbb{C}^*$ bijektiv auf sich ab; die Umkehrabbildung ist gleich*

$$f^{-1}(z) = \frac{-d\,z + b}{c\,z - a}\,,$$

also ebenfalls eine Möbiustranformation. Die Menge aller Möbiustransformationen ist eine nichtkommutative Gruppe bzgl. der Hintereinanderausführung als Verknüpfung. Genauer gilt:

$$f(z) \;=\; \frac{a\,z+b}{c\,z+d}\,, \quad \tilde f(z) \;=\; \frac{\tilde a\,z+\tilde b}{\tilde c\,z+\tilde d} \quad\Longrightarrow\quad (\tilde f\circ f)(z) \;=\; \frac{\hat a\,z+\hat b}{\hat c\,z+\hat d}\,,$$

mit

$$\begin{bmatrix} \hat a & \hat b \\ \hat c & \hat d \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} \tilde a & \tilde b \\ \tilde c & \tilde d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Beweis: *Definiere f^{-1} wie im Satz.* Dann gilt: Falls $z = a/c$, also $c\,z - a = 0$ ist, dann ist $(f\circ f^{-1})(z) = f(\infty) = z$. Für alle anderen $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$(f\circ f^{-1})(z) \;=\; \frac{a\,(-d\,z+b)+b\,(c\,z-a)}{c\,(-d\,z+b)+d\,(c\,z-a)} \;=\; z,$$

und schließlich gilt auch $(f\circ f^{-1})(\infty) = f(-d/c) = \infty$. Genauso zeigt man, dass $(f^{-1}\circ f)(z) = z$ für alle $z \in \mathbb{C}^*$ gilt. Also ist f bijektiv und f^{-1} die Umkehrabbildung. Der Rest der Behauptungen ist in den nächsten Übungsaufgaben enthalten. □

Aufgabe 1.2.5 *Zeige, dass zwei Quotienten der Form $(a\,z+b)/(c\,z+d)$, mit $a\,d-b\,c \neq 0$, genau dann dieselbe Möbiustransformation definieren, wenn der zweite aus dem ersten durch Erweitern mit einem Faktor $\neq 0$ entsteht.*

Aufgabe 1.2.6 *Beweise die Aussage von* Satz 1.2.4 *über die Hintereinanderausführung von Möbiustransformationen. Folgere hieraus: Die Abbildung*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad\longmapsto\quad \frac{a\,z+b}{c\,z+d}$$

ist im Sinne der Algebra eine relationstreue Abbildung der Gruppe der invertierbaren zweireihigen Matrizen auf die Menge der Möbiustransformationen mit der Hintereinanderausführung.

Aufgabe 1.2.7 *Zeige, dass die Möbiustransformationen eine nichtkommutative Gruppe bzgl. Hintereinanderausführung bilden.*

Satz 1.2.8 *Möbiustransformationen sind kreisverwandt und winkeltreu.*

Beweis: Sei $f(z) = (a\,z+b)/(c\,z+d)$, $a\,d-b\,c \neq 0$. Falls $c = 0$ ist, ist f Hintereinanderausführung einer Translation und einer Drehstreckung, und beide sind kreisverwandt, wie man z. B. durch Einsetzen in (1.1.2) nachrechnen kann. Die Winkeltreue ergibt sich in diesem Fall leicht durch die Anschauung. Im anderen Fall gilt

$$f(z) \;=\; \frac{a}{c} \;-\; \frac{a\,d-b\,c}{c}\,\frac{1}{c\,z+d}\,,$$

also ist f Hintereinanderausführung von Translationen, Drehstreckungen sowie einer Inversion. Deshalb genügt es zu zeigen, dass die Behauptung für die Inversion richtig ist. Sei deshalb jetzt $f(z) = 1/z$. Wenn man z in (1.1.2) durch $1/z$ ersetzt und mit $z\,\overline{z}$ multipliziert, erhält man

$$A + B\,\overline{z} + \overline{B}\,z + C\,z\,\overline{z} \;=\; 0,$$

was wieder die Gleichung eines allgemeinen Kreises ist. Zur Winkeltreue der Inversion: Die Abbildung $z \mapsto 1/z$, in (1.1.1) eingesetzt, ergibt $\xi \mapsto \xi$, $\eta \mapsto -\eta$ und $\zeta \mapsto 1-\zeta$, was zwei Spiegelungen auf der Zahlenkugel entspricht. Dies und die Winkeltreue der stereographischen Projektion ergibt die Behauptung. □

Aufgabe 1.2.9 *Zeige: Eine Möbiustransformation $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ ist* gleichmäßig stetig bzgl. des chordalen Abstandes, *das heißt*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\, \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}^* \ :\ d(z_1, z_2) < \delta \implies d(f(z_1), f(z_2)) < \varepsilon\,.$$

1.3 Doppelverhältnisse

Definition 1.3.1 *Ein $z \in \mathbb{C}^*$ heißt* Fixpunkt *einer Abbildung $f :\ \mathbb{C}^* \longmapsto \mathbb{C}^*$, wenn $f(z) = z$ gilt.*

Lemma 1.3.2 *Hat eine Möbiustransformation f drei verschiedene Fixpunkte, so ist f die Identität, d. h., $f(z) = z$ für alle $z \in \mathbb{C}^*$.*

Beweis: Ist $z_0 \in \mathbb{C}$ Fixpunkt von (1.2.1), so ist $c\, z_0 + d \neq 0$ und

$$c\, z_0^2 + (d - a)\, z_0 - b \ =\ 0\ .$$

Falls $c \neq 0$ ist, hat diese Gleichung höchstens zwei Lösungen in $\mathbb{C}$, und ∞ ist wegen $f(\infty) = a/c$ sicher kein Fixpunkt. Falls $c = 0$ und $d - a \neq 0$ ist, sind nur ∞ und $b/(d - a)$ Fixpunkte. Falls $c = 0$ und $d = a\, (\neq 0)$ ist, ist entweder nur ∞ Fixpunkt, oder $b = 0$, d. h., $f(z) \equiv z$. □

Definition 1.3.3 *Für vier verschiedene $z_j \in \mathbb{C}$ heißt*

$$D(z_1, z_2, z_3, z_4) \ =\ \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_3} : \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3} \quad \left(=\ \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_3}\, \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \right)$$

das Doppelverhältnis *von z_1, z_2, z_3, z_4. Durch Grenzübergang eines z_j nach ∞ erhält man noch*

$$D(\infty, z_2, z_3, z_4) \ =\ \frac{z_2 - z_3}{z_4 - z_3}\ , \qquad D(z_1, \infty, z_3, z_4) \ =\ \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_3}\ ,$$

$$D(z_1, z_2, \infty, z_4) \ =\ \frac{z_4 - z_1}{z_2 - z_1}\ , \qquad D(z_1, z_2, z_3, \infty) \ =\ \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}\ .$$

Satz 1.3.4 (Invarianz des Doppelverhältnisses)

(a) *Für vier verschiedene $z_j \in \mathbb{C}^*$ und jede Möbiustransformation f gilt stets*

$$D(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)) \ =\ D(z_1, z_2, z_3, z_4)\ , \tag{1.3.1}$$

d. h., das Doppelverhältnis ist invariant unter Möbiustransformationen.

(b) *Zu verschiedenen z_1, z_2, z_3 und verschiedenen w_1, w_2, w_3 aus $\mathbb{C}^*$ gibt es genau eine Möbiustransformation f mit*

$$f(z_j) \ =\ w_j\ , \qquad 1 \leq j \leq 3\ ,$$

und man kann f durch Auflösen der Gleichung

$$D(w_1, w_2, w_3, f(z)) \ =\ D(z_1, z_2, z_3, z)$$

nach $f(z)$ erhalten.

(c) *Vier verschiedene $z_j \in \mathbb{C}^*$ liegen genau dann auf einem allgemeinen Kreis, wenn ihr Doppelverhältnis eine reelle Zahl ist.*

Beweis: Zu (b): Durch $g_1(z) = D(z_1, z_2, z_3, z)$ ist eine Möbiustransformation gegeben, für welche gilt $g_1(z_1) = 0$, $g_1(z_2) = 1$, $g_1(z_3) = \infty$. Analog definiert $g_2(w) = D(w_1, w_2, w_3, w)$ eine Möbiustranformation mit $g_2(w_1) = 0$, $g_2(w_2) = 1$, $g_2(w_3) = \infty$. Das heißt, durch Auflösen von $D(w_1, w_2, w_3, w) = D(z_1, z_2, z_3, z)$ nach w ergibt sich die Möbiustransformation $g_2^{-1} \circ g_1$, welche z_1, z_2, z_3 auf w_1, w_2, w_3 abbildet. Somit existiert f, und mit dem obigen Lemma ergibt sich die Eindeutigkeit von f. Zu (a): Folgt aus (b). Zu (c): Die Möbiustransformation $f(z) = D(z_1, z_2, z_3, z)$ bildet den allgemeinen Kreis durch die Punkte z_1, z_2, z_3 ab auf den allgemeinen Kreis durch die Punkte $0, 1, \infty$, und dieser ist offenbar die reelle Achse. □

Aufgabe 1.3.5 *Finde eine Möbiustransformation f mit $f(0) = 1$, $f(i) = 2$, $f(-1) = 3$.*

Lösung: 1. Weg: $D(1, 2, 3, f(z)) = D(0, i, -1, z) \iff -(f(z) - 1)\,(z + 1) = z\,(f(z) - 3)\,(1 - i) \iff f(z)\,(z(2 - i) + 1) = z\,(4 - 3i) + 1 \iff f(z) = (z(4 - 3i) + 1)/(z(2 - i) + 1)$.

2. Weg: Ansatz $f(z) = (a\,z + b)/(c\,z + d)$ führt auf die Gleichungen

$$b = d,\ 2(ic + d) = ia + b,\ 3(d - c) = b - a.$$

Dies sind drei lineare Gleichungen in vier Unbekannten. *Wählt* man z. B. $b = 1$, so folgt $d = 1$, $a = 4 - 3i$, $c = 2 - i$. □

Aufgabe 1.3.6 *Bestimme eine Möbiustransformation f, welche den Einheitskreis auf die imaginäre Achse abbildet. Untersuche, wohin das Innere/Äußere des Einheitskreises abgebildet wird.*

Lösung: Die Bedingungen $f(1) = 0$, $f(i) = i$, $f(-1) = \infty$ führen auf $f(z) = (z - 1)/(z + 1)$. Wegen der Kreisverwandtschaft ist klar, dass dieses f den Einheitskreis auf den allgemeinen Kreis durch die Punkte $0, i, \infty$, also auf die imaginäre Achse abbilden muss. Wegen $f(0) = -1$ muss das Innere des EK in die linke Halbebene gehen (Begründung?) □

1.4 Spiegelpunkte

Definition 1.4.1 *Punkte $z, z^* \in \mathbb{C}^*$ heißen* Spiegelpunkte bezüglich eines allgemeinen Kreises K *oder* symmetrisch bezüglich K, *wenn für drei verschiedene Punkte z_j auf K, welche auch von z, z^* verschieden sind, gilt*

$$D(z_1, z_2, z_3, z^*) \;=\; \overline{D(z_1, z_2, z_3, z)}.$$

Die Abbildung, welche ein z auf seinen Spiegelpunkt z^* abbildet, heißt Spiegelung am allgemeinen Kreis K.

Bemerkung 1.4.2 *Für den Kreis K um z_0 mit Radius $R > 0$ gilt für drei Punkte $z_j \in K$, also $\overline{(z_j - z_0)} = R^2/(z_j - z_0)$, dass*

$$\begin{aligned}
\overline{D(z_1, z_2, z_3, z)} &= D(\overline{z_1 - z_0}, \overline{z_2 - z_0}, \overline{z_3 - z_0}, \overline{z - z_0}) \\
&= D(R^2/(z_1 - z_0), R^2/(z_2 - z_0), R^2/(z_3 - z_0), \overline{z} - \overline{z_0}) \\
&= D(z_1, z_2, z_3, z_0 + R^2/(\overline{z} - \overline{z_0})),
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung aus der Invarianz des Doppelverhältnisses gegenüber der Möbiustransformation $f(z) = z_0 + R^2/z$ folgt. Daraus lesen wir für den Spiegelpunkt z^* zu z ab:

$$z^* \;=\; z_0 + \frac{R^2}{\overline{z} - \overline{z_0}}\ , \quad \textit{also}\ |z^* - z_0| = \frac{R^2}{|z - z_0|}\ ,\ \arg(z^* - z_0) = \arg(z - z_0).$$

Insbesondere hängt z^* nicht von der Wahl der Punkte z_1, z_2, z_3 ab. Speziell ist der Spiegelpunkt des Kreismittelpunktes z_0 der Punkt ∞, und umgekehrt. Daher folgt:

Sind z_j drei verschiedene Punkte eines Kreises, so ist der Mittelpunkt z_0 gegeben durch die Formel

$$D(z_1, z_2, z_3, z_0) \;=\; \overline{D(z_1, z_2, z_3, \infty)} \;=\; \overline{\left(\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}\right)}.$$

Falls K eine Gerade ist, so stimmt die Definition eines Spiegelpunktes mit der geometrischen Anschauung überein. Insbesondere ist auch hier der Spiegelpunkt z^* zu z nicht von der Wahl der $z_1, z_2, z_3 \in K$ abhängig. Schließlich ist die Spiegelpunktdefinition reflexiv, d. h., ist z^* Spiegelpunkt zu z, so ist z wiederum der Spiegelpunkt zu z^*. *Außerdem gilt*

$$z^* \;=\; z \qquad \Longleftrightarrow \qquad z \in K.$$

Satz 1.4.3 (Symmetrieprinzip) *Seien K ein allgemeiner Kreis, f eine Möbiustransformation, und $\tilde{K} = f(K)$. Ist dann z^* Spiegelpunkt von z bzgl. K, so ist $f(z^*)$ Spiegelpunkt von $f(z)$ bzgl. $\tilde{K}$. Also: Möbiustransformationen überführen Spiegelpunkte in Spiegelpunkte.*

Beweis: Für drei verschiedene $z_j \in K$ sind $f(z_j) \in \tilde{K}$ ebenfalls verschieden, und nach Satz 1.3.4 (a) folgt:

$$\begin{aligned} D(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z)) &= D(z_1, z_2, z_3, z) \;=\; \overline{D(z_1, z_2, z_3, z^*)} \\ &= \overline{D(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z^*))}. \end{aligned}$$

Also gilt die Behauptung. □

Aufgabe 1.4.4 *Bestimme alle Möbiustransformationen f, welche die offene Einheitskreisscheibe $\mathbb{E} := \{z\,:\, |z| < 1\}$ auf sich abbilden.*

Lösung: Jedes solche f muss den Einheitskreis auf sich abbilden. Also setzen wir an: $f(1) = \mathrm{e}^{i\alpha}$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(z_0) = 0$ für ein $|z_0| < 1$. Nach dem Symmetrieprinzip ist dann $f(z_0^*) = \infty$, wobei z_0^* der Spiegelpunkt zu z_0 bzgl. des Einheitskreis ist, also $z_0^* = 1/\overline{z_0}$. Dies führt auf

$$f(z) \;=\; \mathrm{e}^{i\phi}\,\frac{z - z_0}{1 - z\,\overline{z_0}}\,, \qquad \mathrm{e}^{i\phi} \;=\; \mathrm{e}^{i\alpha}\,\frac{1 - \overline{z_0}}{1 - z_0}\,.$$

Also sind die gesuchten f genau von der Form

$$f(z) \;=\; \mathrm{e}^{i\phi}\,\frac{z - z_0}{1 - z\,\overline{z_0}}\,, \qquad \phi \in \mathbb{R},\; |z_0| < 1.$$

□

Aufgabe 1.4.5 *Bestimme alle Möbiustransformationen f, welche die obere Halbebene auf $\mathbb{E}$ abbilden.*

Lösung: Ein z_0 mit positivem Imaginärteil gehe nach 0, und 0 gehe nach $\mathrm{e}^{i\alpha}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Das Symmetrieprinzip impliziert dann $f(z_0^*) = \infty$, und $z_0^* = \overline{z_0}$. Dies ergibt: Die gesuchten f sind genau von der Form

$$f(z) \;=\; \mathrm{e}^{i\phi}\,\frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}\,, \qquad \phi \in \mathbb{R},\; \mathrm{Im}\; z_0 > 0.$$

□

Aufgabe 1.4.6 *Bestimme alle $z \in \mathbb{C}$, für die folgende Ungleichungen gelten:*

$$\text{(a)}\ \operatorname{Im}\left(\frac{z-a}{z-b}\right) > 0\ , \qquad\qquad \text{(b)}\ |z-1| \leq 2\,|z-2|\ .$$

Aufgabe 1.4.7 *Bestimme eine Möbiustransformation, die 1 als Fixpunkt hat und 0 auf $-i$ sowie ∞ auf i abbildet.*

Aufgabe 1.4.8 *Bestimme alle Möbiustransformationen, welche die reelle Gerade auf sich abbilden.*

Aufgabe 1.4.9 *Zeige, dass die Punkte 2, i, $1-i$ und $-2i/3$ auf einem Kreis liegen, und bestimme dessen Mittelpunkt.*

Aufgabe 1.4.10 *Gegeben seien drei verschiedene Punkte $z_j \in \mathbb{C}^*$. Zeige, dass es genau einen allgemeinen Kreis K durch z_1 gibt, bezüglich dessen z_2 und z_3 Spiegelpunkte sind.*

Kapitel 2

Holomorpie in Banachräumen

In den Anwendungen der Funktionentheorie auf Fragen der Funktionalanalysis benutzt man Funktionen einer komplexen Variablen mit Werten in einem Banachraum. Solche Funktionen sollen deshalb jetzt kurz untersucht werden, und bei dieser Gelegenheit wollen wir die wichtigsten Resultate aus den *Elementen der Funktionentheorie* wiederholen. Dabei werden $\mathbb{X}$ und $\mathbb{Y}$ immer fest gewählte, aber beliebige Banachräume über $\mathbb{C}$ bezeichnen. Die Menge aller stetigen linearen Abbildungen von $\mathbb{X}$ nach $\mathbb{Y}$ soll immer mit $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ bezeichnet sein. Die Menge der stetigen linearen Funktionale auf $\mathbb{X}$, d. h., die Menge $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{C})$, sei mit $\mathbb{X}'$ bezeichnet. Weiter sei G stets ein festes Gebiet in $\mathbb{C}$. Wir betrachten im Folgenden meist Funktionen, die auf irgendeiner Menge $D \subset G$ definiert sind und Werte in $\mathbb{X}$ haben. Diese werden gelegentlich auch $\mathbb{X}$-wertige Funktionen heißen, um sie von solchen mit Werten in $\mathbb{C}$ zu unterscheiden.

In der linearen Algebra ist es immer üblich, bei der Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl diese links vom Vektor zu schreiben. Hier wird es bequem sein (z. B. bei den unten eingeführten Riemann-Summen), von dieser Konvention abzuweichen und zu erlauben, dass die Zahl auch rechts stehen kann!

2.1 Das Kurvenintegral banachraumwertiger Funktionen

Definition 2.1.1 *Gegeben sei eine Kurve γ mit Parameterdarstellung $z(t)$, $a \le t \le b$, sowie eine Funktion $f : \gamma^* \to \mathbb{X}$, wobei $\gamma^* := \{z \ : \ \exists t \in [a, b] \text{ mit } z(t) = z\}$ den Träger von γ bezeichnet. Dann sagen wir, dass das* Kurvenintegral

$$I \ := \ \int_\gamma f(z)\, dz$$

von f über γ existiert, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $\mathcal{Z}_\varepsilon$ von $[a, b]$ gibt, so dass für jede Verfeinerung $\mathcal{Z} = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b\}$ von $\mathcal{Z}_\varepsilon$ und jede Wahl von Zwischenpunkten $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $1 \le k \le N$, gilt

$$\|I \ - \ S(\mathcal{Z}, \gamma)\| \ := \ \Big\|I \ - \ \sum_{k=1}^{N} f(z(\tau_k))\,\big(z(t_k) \ - \ z(t_{k-1})\big)\Big\| \ < \ \varepsilon\,.$$

Wie bei der Definition des Riemann-Integrals wollen wir die Summen $S(\mathcal{Z}, \gamma)$ wieder Riemann-Summen *nennen.*

Bemerkung 2.1.2 *Aus der Definition des Kurvenintegrals folgt die Existenz einer zulässigen Zerlegungsfolge, für welche bei beliebiger Wahl der Zwischenpunkte die Riemann-Summen gegen das Integral konvergieren. Ob dies für beliebige zulässige Zerlegungsfolgen gilt, ist nicht klar. Vergleiche hierzu auch den Beweis von* Satz 2.1.7.

Aufgabe 2.1.3 *Zeige die* Fundamentalabschätzung für Kurvenintegrale*: Wenn das Kurvenintegral existiert, gilt immer*

$$\Big\| \int_\gamma f(z)\,dz \Big\| \;\le\; \ell \sup_{z\in\gamma^*} \|f(z)\|\,, \tag{2.1.1}$$

wobei ℓ die Länge der Kurve γ ist.

Aufgabe 2.1.4 (Integral und gleichmäßige Konvergenz) *Sei γ eine rektifizierbare Kurve in $\mathbb{C}$, und seien die Funktionen $f_n : \gamma^* \to \mathbb{X}$ gleichmäßig konvergent gegen f. Zeige: Falls alle Kurvenintegrale $\int_\gamma f_n(z)\,dz$ existieren, dann existiert auch $\int_\gamma f(z)\,dz$, und es gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,dz \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz\,.$$

Aufgabe 2.1.5 *Sei $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$, und seien f und γ wie oben. Zeige: Falls das Kurvenintegral von f über γ existiert, dann existiert auch das Kurvenintegral von $T\circ f$ über γ, und es gilt*

$$\int_\gamma T(f(z))\,dz \;=\; T\Big(\int_\gamma f(z)dz\Big)\,.$$

Diese Eigenschaft des Kurvenintegrals wird einsichtig, wenn wir uns erinnern dass im Fall $\mathbb{X} = \mathbb{C}^n$ und $\mathbb{Y} = \mathbb{C}^m$ eine lineare Abbildung T der Multiplikation mit einer konstanten Matrix entspricht.

Bemerkung 2.1.6 *Für $a < b$ kann das reelle Intervall $[a,b]$ in natürlicher Weise auch als Kurve γ in $\mathbb{C}$ mit der Parameterdarstellung $z(t) = t$ aufgefasst werden, und eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{X}$ ist dann also auf dem Träger dieser Kurve definiert. Falls das Kurvenintegral von f über diese Kurve γ existiert, so schreiben wir auch*

$$\int_\gamma f(z)\,dz \;=\; \int_a^b f(t)\,dt$$

und interpretieren die rechte Seite als (Riemann-)Integral über das reelle Intervall $[a,b]$. *Man kann zeigen, dass diese Definition für $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ mit der aus* Analysis I *übereinstimmt. Für eine andere Definition des Riemann-Integrals von $\mathbb{X}$-wertigen Funktionen vergleiche ein Manuskript von* W. Arendt, *welches über seine Internetseite zu finden ist.*

Satz 2.1.7 (Existenz und Berechnung des Kurvenintegrals) *Mit den oben eingeführten Bezeichnungen und Definitionen gilt:*

(a) *Wenn die Kurve γ rektifizierbar und die Funktion $f : \gamma^* \to \mathbb{X}$ auf dem Träger von γ stetig sind, dann existiert das Kurvenintegral von f über γ, und für jede zulässige Zerlegungsfolge und jede Wahl von Zwischenpunkten konvergiert die Folge der Riemann-Summen gegen das Integral.*

(b) *Wenn das Kurvenintegral von f über γ existiert, dann hängt sein Wert nicht von der Wahl der Parameterdarstellung von γ ab.*

(c) *Wenn die Kurve γ eine stetig differenzierbare Parameterdarstellung $z(t)$, $a \le t \le b$, besitzt und die Funktion $f : \gamma^* \to \mathbb{X}$ auf dem Träger von γ stetig ist, dann gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,dz \;=\; \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt\,. \tag{2.1.2}$$

Beweis: Die Funktion $f(z(t))$ ist auf $[a,b]$ stetig, also dort sogar gleichmäßig stetig, und daher existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, dass $\|f(z(t)) - f(z(\tau))\| < \varepsilon$ gilt, falls nur $|t-\tau| < \delta$ ist (für alle $t,\tau \in [a,b]$). Sei jetzt $\mathcal{Z}_\varepsilon = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b\}$ irgendeine Zerlegung von $[a,b]$, deren Feinheit kleiner als δ ist, und $\tau_1,\ldots,\tau_N$ seien irgendwelche Zwischenpunkte. Seien weiter eine beliebige

Verfeinerung $\mathcal{Z} = \{a = u_0 < u_1 < \ldots < u_M = b\}$ von $\mathcal{Z}_\varepsilon$ und zugehörige Zwischenpunkte $\eta_1, \ldots, \eta_M$ gewählt. Für irgendein k seien $t_{k-1} = u_{j-1} < u_j < \ldots < u_m = t_k$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
&\Big\| f(z(\tau_k)) \big(z(t_k) - z(t_{k-1})\big) \quad - \quad \sum_{\nu=j}^{m} f(z(\eta_\nu)) \big(z(u_\nu) - z(u_{\nu-1})\big) \Big\| \\
&\quad = \Big\| \sum_{\nu=j}^{m} \big(f(z(\tau_k)) - f(z(\eta_\nu))\big) \big(z(u_\nu) - z(u_{\nu-1})\big) \Big\| \;\le\; \sum_{\nu=j}^{m} \big\| f(z(\tau_k)) - f(z(\eta_\nu)) \big\| \, |z(u_\nu) - z(u_{\nu-1})| \\
&\qquad < \; \varepsilon\, \ell_k \,,
\end{aligned}$$

wobei ℓ_k die Kurvenlänge der Teilkurve von γ zwischen den Punkten $z(t_{k-1})$ und $z(t_k)$ ist. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung und der Additivität der Kurvenlänge ergibt sich hieraus

$$\|S(\mathcal{Z}_\varepsilon, \gamma) - S(\mathcal{Z}, \gamma)\| \;=\; \Big\| \sum_{k=1}^{N} f(z(\tau_k)) \big(z(t_k) - z(t_{k-1})\big) \; - \sum_{\nu=1}^{M} f(z(\eta_\nu)) \big(z(u_\nu) - z(u_{\nu-1})\big) \Big\| \;<\; \varepsilon\, \ell \,,$$

mit $\ell = \ell_1 + \ldots + \ell_M$ gleich der Länge von γ. Daraus folgt: Wenn wir eine zulässige Folge von Zerlegungen wählen, dann bilden die entsprechenden Riemann-Summen für irgendeine Zwischenpunktwahl immer eine Cauchyfolge in $\mathbb{X}$, denn wenn die Feinheiten von Zerlegungen $\mathcal{Z}_n$ und $\mathcal{Z}_m$ beide kleiner als δ sind, können wir $\mathcal{Z}$ gleich der gemeinsamen Verfeinerung der beiden setzen und erhalten aus der obigen Abschätzung

$$\|S(\mathcal{Z}_n, \gamma) - S(\mathcal{Z}_m, \gamma)\| \;\le\; \|S(\mathcal{Z}_n, \gamma) - S(\mathcal{Z}, \gamma)\| \;+\; \|S(\mathcal{Z}, \gamma) - S(\mathcal{Z}_m, \gamma)\| \;<\; 2\,\varepsilon\, \ell\,.$$

Da $\mathbb{X}$ vollständig ist, hat diese Folge einen Grenzwert I, der nicht von der Wahl der Zerlegungsfolge bzw. der Zwischenpunkte abhängt, und aus der Definition folgt dass das Kurvenintegral von f über γ existiert und gleich I ist. Also gilt Aussage (a). Die Unabhängigkeit von der Wahl der Parameterdarstellung ergibt sich unmittelbar aus der Definition des Kurvenintegrals, da ein Parameterwechsel eine bijektive Abbildung der Menge aller Riemann-Summen auf sich selber definiert, wobei Verfeinerungen in Verfeinerungen übergehen. Um (c) zu beweisen, sei eine beliebige Zerlegung $\mathcal{Z} = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b\}$ mit Zwischenpunkten $\tau_1, \ldots, \tau_N$ betrachtet, und $S(\mathcal{Z}, \gamma)$ bzw. $S(\mathcal{Z})$ seien die Riemann-Summen für das Kurvenintegral bzw. das Riemann-Integral in (2.1.2). Dann folgt mit der Dreiecksungleichung und der Beschänktheit von f auf γ^*

$$\begin{aligned}
\Big\| S(\mathcal{Z}, \gamma) \; - \; S(\mathcal{Z}) \Big\| \;&\le\; \sum_{k=1}^{N} \big\| f(z(\tau_k))) \big\| \, \big| z(t_k) - z(t_{k-1}) - z'(\tau_k)\,(t_k - t_{k-1}) \big| \\
&\le\; K \sum_{k=1}^{N} \big| z(t_k) - z(t_{k-1}) - z'(\tau_k)\,(t_k - t_{k-1}) \big|\,.
\end{aligned}$$

Wir setzen $z(t) = x(t) + i\, y(t)$ und wenden den ersten Mittelwertsatz auf die reellen Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ an, und erhalten dadurch

$$\big| z(t_k) - z(t_{k-1}) - z'(\tau_k)\,(t_k - t_{k-1}) \big| \;=\; (t_k - t_{k-1}) \sqrt{\big(x'(\tilde\tau_k) - x'(\tau_k)\big)^2 + \big(y'(\hat\tau_k) - y'(\tau_k)\big)^2}\;,$$

mit geeigneten Zwischenstellen $\tilde\tau_k, \hat\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$. Da $x'(t), y'(t)$ auf $[a, b]$ gleichmäßig stetig sind, folgt zu jedem $\varepsilon > 0$ die Existenz eines $\delta > 0$ so, dass für alle Zerlegungen $\mathcal{Z}$, deren Feinheit kleiner als δ ist, dieser Term kleiner als $(t_k - t_{k-1})\,\varepsilon\,\sqrt{2}$ ist. Also ist die Differenz der beiden Riemann-Summen kleiner als $\varepsilon\,\sqrt{2}\,(b - a)$, und daraus folgt (2.1.2). □

Bemerkung 2.1.8 *Nach dem letzten Satz gilt, dass bei stetigem Integranden und rektifizierbarer Kurve die Riemann-Summen für jede zulässige Zerlegungsfolge und jede Zwischenpunktwahl konvergieren. Da wir nur solche Kurvenintegrale betrachten werden, hätten wir dies auch zur Definition machen können. Es ist aber wichtig zu wissen, dass bei allgemeinem f und einer beliebigen Kurve das Kurvenintegral existieren kann,* ohne *dass die Riemann-Summen für jede zulässige Zerlegungsfolge und jede Zwischenpunktwahl konvergieren.*

2.2 Schwache und starke Holomorphie

Definition 2.2.1 *Eine Funktion $f : G \to \mathbb{X}$ heißt* stark holomorph*, oder auch einfach* holomorph*, in G, wenn für jedes $z_0 \in G$ der Grenzwert*

$$f'(z_0) \;:=\; \lim_{z \to z_0} (z - z_0)^{-1} \big(f(z) - f(z_0)\big)$$

existiert, und in diesem Fall heißt $f'(z_0)$ die (erste) Ableitung von f an der Stelle z_0*. Wir nennen f* schwach holomorph *in G, falls für jedes $\phi \in \mathbb{X}'$ die Hintereinanderausführung $\phi \circ f : G \to \mathbb{C}$ im üblichen Sinn der Funktionentheorie holomorph in G ist. Wir sagen weiter, dass das Kurvenintegral von f in G* wegunabhängig *ist, wenn $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$ ist für jeden geschlossenen Weg*[1] *γ in G. Man kann zeigen, dass dann auch das Kurvenintegral von f über jede geschlossene rektifizierbare Kurve γ in G verschwindet.*

Bemerkung 2.2.2 *Wenn f in einem Punkt $z_0 \in G$ unstetig ist, kann der Differenzenquotient dort nicht beschränkt sein. Da aber eine schwache Cauchyfolge in einem Banachraum immer beschränkt ist, ergibt sich, dass aus der schwachen Holomorphie die Stetigkeit von f in G folgt. Dass f dann sogar stark holomorph ist, soll im Folgenden gezeigt werden.*

Im Weiteren wird oft folgendermaßen geschlossen: Falls für $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$ gilt $\phi(x_1) = \phi(x_2)$ für jedes $\phi \in \mathbb{X}'$, dann ist $x_1 = x_2$ *– dies ist eine Konsequenz des Satzes von* Hahn-Banach*.*

Aufgabe 2.2.3 (Cauchy-Gebiet) *Wir nennen G ein* Cauchy-Gebiet*, falls das Kurvenintegral über jede in G holomorphe $\mathbb{C}$-wertige Funktion wegunabhängig ist. Zeige, dass dann auch die Wegunabhängigkeit für $\mathbb{X}$-wertige holomorphe Funktionen folgt.*

Aufgabe 2.2.4 *Sei $f : G \to \mathbb{X}$ stark holomorph. Zeige: Dann ist f auch schwach holomorph in G, und für jedes $\phi \in \mathbb{X}'$ gilt*

$$\frac{d}{dz}\, \phi(f(z)) \;=\; \phi(f'(z)) \qquad \forall\, z \in G\,.$$

Genau wie beim Kurvenintegral wird diese Aussage verständlich, wenn man sich klarmacht, wie die stetigen linearen Funktionale in $\mathbb{C}^n$ aussehen.

Satz 2.2.5 *Sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$, und sei $f : G \to \mathbb{X}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *Die Funktion f ist schwach holomorph in G.*

(b) *Für jede geschlossene Kurve γ in G mit $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = 0$ für alle $z \notin G$ gilt $\displaystyle\int_\gamma f(z)\, dz = 0$.*

(c) *Für jede geschlossene Kurve γ in G mit $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = 0$ für alle $z \notin G$ gilt*

$$\forall\, z \notin \gamma^* \;: \qquad f(z) \operatorname{Ind}_\gamma(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (w - z)^{-1} f(w)\, dw\,. \tag{2.2.1}$$

(d) *Die Funktion f ist holomorph in G.*

Beweis: Sei $\phi \in \mathbb{X}'$, dann folgt aus (a) dass $\phi \circ f$ in G holomorph ist, und somit gilt nach dem Cauchyschen Integralsatz aus der Vorlesung "Elemente der Funktionentheorie", dass $\int_\gamma \phi(f(z))\, dz = 0$ ist für jede Kurve γ, welche die Voraussetzung von (b) erfüllt. Mit Aufgabe 2.1.5 folgt also, dass das Kurvenintegral $\int_\gamma f(z)\, dz$ von jedem $\phi \in \mathbb{X}'$ annulliert wird. Daraus folgt aber (b). Umgekehrt folgt aus (b) mit Hilfe der gleichen Aufgabe und dem Satz von Morera auch wieder (a). Weiter folgt aus (a) dass

[1] Ein Weg ist eine Kurve, die eine stückweise stetig differenzierbare Parameterdarstellung besitzt.

für jedes $\phi \in \mathbb{X}'$ und jede Kurve γ, welche die Voraussetzung von (c) erfüllt, die Gleichung (2.2.1) gilt, wenn man auf beiden Seiten f durch $\phi \circ f$ ersetzt. Da dies aber für beliebiges ϕ richtig ist, folgt die Gültigkeit von (2.2.1). Wenn (c) gilt, seien ein beliebiges aber festes $z_0 \in G$ und ein hinreichend kleines $r > 0$ gewählt, so dass $K(r, z_0)$ zu G gehört. Dann können wir in (2.2.1) für γ den positiv orientierten Kreis um z_0 mit Radius r benutzen und erhalten für alle z im Inneren dieses Kreises

$$(z - z_0)^{-1} \left(f(z) - f(z_0)\right) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma [(w - z)\,(w - z_0)]^{-1}\; f(w)\; dw\,.$$

Weil es ein $C > 0$ gibt, so dass $|(w - z)^{-1} - (w - z_0)^{-1}| \le C\,|z - z_0|$ für alle $w \in \gamma^*$ und alle z mit $|z - z_0| \le r/2$, erhalten wir

$$\left\| (z - z_0)^{-1} \left(f(z) - f(z_0)\right) \;-\; \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (w - z_0)^{-2} f(w)\; dw \right\| \;\le\; C\,|z - z_0| \sup_{|w - z_0| = r} \|f(w)\|\,,$$

und daraus folgt die Holomorphie von f im Punkt z_0. Da (a) wieder aus (d) folgt, ist alles bewiesen. □

Definition 2.2.6 (Stammfunktion) *Eine in G holomorphe $\mathbb{X}$-wertige Funktion F heißt* Stammfunktion *zu $f : G \to \mathbb{X}$, falls $F'(z) = f(z)$ ist für alle $z \in G$.*

Satz 2.2.7 (Berechnung von Kurvenintegralen mit Stammfunktion) *Sei $f : G \to \mathbb{X}$ stetig, und sei F Stammfunktion zu f. Dann gilt für jede rektifizerbare Kurve γ in G mit Anfangspunkt z_0 und Endpunkt z_1*

$$\int_\gamma f(z)\, dz \;=\; F(z_1) \;-\; F(z_0)\,.$$

Insbesondere ist das Kurvenintegral von f in G wegunabhängig.

Beweis: Aus Aufgabe 2.2.4 folgt, dass für jedes $\phi \in \mathbb{X}'$ die Funktion $\phi \circ F$ Stammfunktion zu $\phi \circ f$ ist, und deshalb gilt

$$\int_\gamma \phi(f(z))\, dz \;=\; \phi(F(z_1)) \;-\; \phi(F(z_0)) \;\Big(=\; \phi\big(F(z_1) - F(z_0)\big)\;\Big)\,.$$

Da ϕ ein beliebiges stetiges lineares Funktional ist, folgt daraus die Behauptung mit Aufgabe 2.1.5. □

Definition 2.2.8 *Eine Reihe $\sum_n x_n$, mit $x_n \in \mathbb{X}$, heißt* absolut konvergent, *falls $\sum_n \|x_n\|$ konvergiert.*

Aufgabe 2.2.9 *Zeige dass jede absolut konvergente Reihe $\sum_n x_n$ mit Gliedern $x_n \in \mathbb{X}$ konvergent ist. Zeige weiter, dass für jedes $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X}) := \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{X})$ die Reihe*

$$\mathrm{e}^T \;:=\; \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\, T^n$$

absolut konvergent ist.

Satz 2.2.10 (Potenzreihenentwicklung) *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und sei f schwach holomorph in G. Für $z_0 \in G$ und genügend kleines $r > 0$ seien*

$$f_n \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_{|z - z_0| = r} (z - z_0)^{-n-1}\; f(z)\; dz \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Dann gilt für alle z aus der größten offenen Kreisscheibe um z_0, welche noch ganz in G liegt, dass

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^\infty (z - z_0)^n\, f_n\,,$$

wobei die Reihe absolut und auf jedem Kompaktum innerhalb dieser Kreisscheibe auch gleichmäßig konvergiert.

Beweis: Genau wie im Fall $\mathbb{X} = \mathbb{C}$ geht man von der Formel (2.2.1) aus, wobei γ der positiv orientierte Kreis um z_0 mit Radius r ist, und entwickelt $(w-z)^{-1} = w^{-1}\,(1-z/w)^{-1}$ in die geometrische Reihe. Diese konvergiert auf γ^* gleichmäßig, und deshalb kann man Reihe und Integral vertauschen. Die absolute bzw. gleichmäßige Konvergenz folgt genau wie für $\mathbb{X} = \mathbb{C}$. $\square$

Aufgabe 2.2.11 *Seien $f_n \in \mathbb{X}$ so, dass die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n f_n$ für alle z mit $|z-z_0| < r$ konvergiert. Zeige die starke Holomorphie der Grenzfunktion.*

2.3 Wegekomplexe und Zyklen von Wegen

Für das Folgende ist es bequem, statt nur eines Weges endlich viele Wege $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ in einem Gebiet G simultan zu betrachten. Dabei soll auch erlaubt sein, dass ein Weg mehrmals aufteten kann, und deshalb ist es formal nicht richtig, von einer Menge von Wegen zu sprechen. Statt dessen sprechen wir von einem *Wegekomplex* $\mathcal{K}$, bestehend aus den Wegen $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, und schreiben

$$\mathcal{K} \;=\; <\gamma_1, \ldots, \gamma_n> \;.$$

Wir nennen $\mathcal{K}^* = \cup_{j=1}^{n}\gamma_j^*$ den Träger des Wegekomplexes. Falls die Kurvenitegrale von $f : \mathcal{K}^* \to \mathbb{X}$ über alle γ_j existieren, setzen wir

$$\int_{\mathcal{K}} f(z)\,dz \;=\; \sum_{j=1}^{n} \quad \int_{\gamma_j} f(z)\,dz. \tag{2.3.1}$$

Wir betrachten auch den *leeren Wegekomplex* und setzen $\int_{\emptyset} f(z)\,dz = 0$ für beliebiges f. Zwei Wegekomplexe $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$ heißen *äquivalent* oder einfacher *gleich*, wenn für *jede* auf $\mathcal{K}_1^* \cup \mathcal{K}_2^*$ stetige $\mathbb{C}$-wertige Funktion f gilt

$$\int_{\mathcal{K}_1} f(z)\,dz \;=\; \int_{\mathcal{K}_2} f(z)\,dz\,. \tag{2.3.2}$$

Ist dies der Fall, dann gilt dasselbe sogar für alle $\mathbb{X}$-wertigen stetigen Funktionen. Ist z. B. ein Weg $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, so gilt (2.3.2) für $\mathcal{K}_1 =<\gamma>$ und $\mathcal{K}_2 =<\gamma_1, \gamma_2>$. Gilt $\gamma_1 = -\gamma_2$, so darf man diese beiden Wege zu einem Wegekomplex hinzufügen, ohne diesen zu ändern, und insbesondere ist $<\gamma_1, \gamma_2>$ äquivalent zum leeren Wegekomplex. Außerdem sind Wegekomplexe äquivalent, wenn sie sich nur durch die Reihenfolge der Wege unterscheiden. Ein Wegekomplex heißt *ein Zyklus*, wenn er gleich einem Wegekomplex aus lauter geschlossenen Wegen ist. D. h., jeder Komplex aus lauter geschlossenen Wegen ist ein Zyklus, aber auch $\mathcal{K} =<\gamma_1, \gamma_2>$, wenn $\gamma_1 + \gamma_2$ geschlossen ist. Der *Index* eines Zyklus $\mathcal{K}$ bzgl. eines $z \notin \mathcal{K}^*$ sei gleich

$$\mathrm{Ind}_{\mathcal{K}}(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{K}} \frac{dw}{w-z} \quad .$$

Ist $\mathcal{K} =<\gamma_1, \ldots, \gamma_n>$, so sei $-\mathcal{K} =<-\gamma_1, \ldots, -\gamma_n>$. Daher gilt

$$\int_{-\mathcal{K}} f(z)\,dz \;=\; -\int_{\mathcal{K}} f(z)\,dz.$$

Schließlich sei für $\mathcal{K}_j =<\gamma_1^{(j)}, \ldots, \gamma_{n_j}^{(j)}>$ noch

$$\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 =<\gamma_1^{(1)}, \ldots, \gamma_{n_1}^{(1)}, \gamma_1^{(2)}, \ldots, \gamma_{n_2}^{(2)}>$$

gesetzt, und dann gilt

$$\int_{\mathcal{K}_1+\mathcal{K}_2} f(z)\,dz \;=\; \int_{\mathcal{K}_1} f(z)\,dz \;+\; \int_{\mathcal{K}_2} f(z)\,dz\,,$$

wenn f auf $\mathcal{K}_1^* \cup \mathcal{K}_2^*$ stetig ist.

Aufgabe 2.3.1 *Zeige dass ein Wegekomplex sich im Allgemeinen ändert, wenn man einen der Wege, aus denen er besteht, ein zweites Mal hinzunimmt.*

Aufgabe 2.3.2 *Wie sollte man sinnvollerweise $\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_2$ für Wegekomplexe $\mathcal{K}_j$ definieren?*

Aufgabe 2.3.3 *Bestimme die Indexfunktion für einen Wegekomplex aus zwei konzentrischen positiv orientierten Kreisen.*

Aufgabe 2.3.4 *Zeige für die Indexfunktion die Regeln*

(a) $\mathrm{Ind}_{-\mathcal{K}}(z) = -\,\mathrm{Ind}_{\mathcal{K}}(z)$,

(b) $\mathrm{Ind}_{\mathcal{K}_1 \pm \mathcal{K}_2}(z) = \mathrm{Ind}_{\mathcal{K}_1} \pm \mathrm{Ind}_{\mathcal{K}_2}(z)$.

2.4 Die allgemeine Form des Cauchyschen Integralsatzes

Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung der Aussagen (b) und (c) von Satz 2.2.5. Beachte, dass er nicht direkt aus diesen folgt, da die einzelnen Wege eines Zyklus i. A. nicht die dort gemachte Voraussetzung erfüllen werden!

Satz 2.4.1 (Integralsatz und -formel für Zyklen) *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und sei $f : G \to \mathbb{X}$ holomorph. Dann gilt:*

(a) *Für jeden Zyklus $\mathcal{K}$ in G mit*

$$\mathrm{Ind}_{\mathcal{K}}(z) \;=\; 0 \qquad \forall\, z \notin G \tag{2.4.1}$$

ist immer $\displaystyle\int_{\mathcal{K}} f(z)\,dz \;=\; 0$, *und es gilt die allgemeine Cauchy-Formel*

$$f(z)\,\mathrm{Ind}_{\mathcal{K}}(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{K}} (w-z)^{-1}\, f(w)\; dw \qquad \forall\, z \in G \setminus \mathcal{K}^*.$$

(b) *Für zwei Zyklen $\mathcal{K}_j$ in G mit*

$$\mathrm{Ind}_{\mathcal{K}_1}(z) \;=\; \mathrm{Ind}_{\mathcal{K}_2}(z) \qquad \forall\, z \notin G \tag{2.4.2}$$

ist immer $\displaystyle\int_{\mathcal{K}_1} f(z)\; dz \;=\; \int_{\mathcal{K}_2} f(z)\; dz$.

Beweis: Wir betrachten zunächst den Fall $\mathbb{X} = \mathbb{C}$. Für $z, w \in G$ sei

$$g(z,w) \;=\; \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \quad \text{für } w \neq z\,, \quad g(z,z) \;=\; f'(z)\,. \tag{2.4.3}$$

Dann ist g auf $G \times G$ stetig, und wir können $h : G \to \mathbb{C}$ durch

$$h(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{K}} g(z,w)\; dw \qquad \forall\, z \in G$$

definieren. Dies ist eine stetige Funktion auf G. Für ein Dreieck $\Delta \subset G$ kann man daher nach dem Satz von Fubini schließen, dass

$$\int_{\partial\Delta} h(z)\,dz \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{K}} \left(\int_{\partial\Delta} g(z,w)\,dz \right) dw\,.$$

Da g für festes w in der Variablen z holomorph ist, verschwindet das innere Integral, und somit folgt aus dem Satz von Morera, dass h in G holomorph ist. Sei jetzt $O = \{z : \mathrm{Ind}_{\mathcal{K}}(z) = 0\}$. Wegen

$$h(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{K}} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \;-\; f(z)\,\mathrm{Ind}_{\mathcal{K}}(z) \qquad \forall\, z \in G\setminus \mathcal{K}^*$$

folgt für

$$h_1(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{K}} \frac{f(w)}{w-z}\,dw\,,$$

dass $h_1(z) = h(z)$ auf $G \cap O$ gilt. Definiert man $g(z) = h(z)$ auf G, bzw. $= h_1(z)$ auf O, so ist g holomorph auf $G \cup O$. Nach Voraussetzung ist $\mathbb{C}\setminus G \subset O$, und daher ist $G \cup O = \mathbb{C}$, d. h., g ist eine ganze Funktion. Die unbeschränkte Komponente des Komplements von $\mathcal{K}^*$ gehört zu O, und dort strebt $g = h_1$ gegen 0 für $z \to \infty$. Deshalb folgt aus dem Liouvilleschen Satz, dass g konstant, ja sogar gleich der Nullfunktion ist. Daraus folgt die Integralformel. Setze jetzt $F(z) = (z-z_0)\,f(z)$ für ein $z_0 \in G \setminus \mathcal{K}^*$ und $z \in G$. Aus der Integralformel folgt dann wegen $F(z_0) = 0$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{K}} f(z)\,dz \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{K}} \frac{F(z)}{z-z_0}\,dz \;=\; F(z_0)\,\mathrm{Ind}_{\mathcal{K}}(z_0) \;=\; 0\,.$$

Seien jetzt $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ wie im Satz. Setzt man $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 + (-\mathcal{K}_2)$ so folgt aus der Definition des Index und (2.4.2), dass $\mathrm{Ind}_{\mathcal{K}}(z) = \mathrm{Ind}_{\mathcal{K}_1}(z) - \mathrm{Ind}_{\mathcal{K}_2}(z) = 0$ im Komplement von G gilt, und daraus folgt der Rest der Behauptung für $\mathbb{X} = \mathbb{C}$. Für allgemeines $\mathbb{X}$ gelten die gemachten Aussagen, wenn wir f durch $\phi \circ f$ mit beliebigem $\phi \in \mathbb{X}'$ ersetzen, und daraus folgt wie üblich die Richtigkeit des Satzes auch im allgemeinen Fall. □

Aufgabe 2.4.2 *Sei f holomorph im Kreisring $K(z_0, r, R)$, und sei γ_ρ der positiv orientierte Kreis um z_0 mit Radius ρ, $r < \rho < R$. Benutze* Satz 2.4.1 *um zu zeigen, dass $\int_\gamma f(z)\,dz$ nicht von ρ abhängt.*

2.5 Funktionen eines Operators

In LA II betrachtet man Funktionen einer Matrix; hier wollen wir kurz eine Formel ableiten, die für holomorphe Funktionen gilt und sich auf Operatoren in einem Banachraum verallgemeinert. Dabei setzen wir folgende Ergebnisse der Funktionalanalysis voraus: Für beliebiges $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X}) := \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{X})$ gilt immer dass

- das Spektrum $\sigma(T)$, also die Menge aller $\lambda \in \mathbb{C}$, für welche $\lambda - T$ nicht invertierbar ist, immer kompakt ist. Hierbei schreiben wir der Einfachheit halber λ anstatt $\lambda\, I$, wobei I die identische Abbildung auf $\mathbb{X}$ bezeichnet.
- die Resolvente $(\lambda - T)^{-1}$ eine holomorphe Funktion von λ auf der Resolventenmenge ist – dies folgt durch Verwendung der Neumannschen Reihe

$$(\lambda - T)^{-1} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n\,(\lambda_0 - T)^{-n-1}$$

  für jedes λ_0 aus der Resolventenmenge $\rho(T) = \mathbb{C}\setminus\sigma(T)$ und alle λ aus der größten Kreisscheibe um λ_0, die noch ganz zu $\rho(T)$ gehört.

Beachte auch, dass $\mathcal{L}(\mathbb{X})$ mit der Operatornorm $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T\,x\|$ wieder ein Banachraum ist.

Definition 2.5.1 *Seien G und $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$ so, dass $\sigma(T) \subset G$ ist. Sei $\mathcal{K}$ ein Zyklus in $G \setminus \sigma(T)$ mit $\operatorname{Ind}_{\mathcal{K}}(z) = 1$ für alle $z \in \sigma(T)$, sowie $\operatorname{Ind}_{\mathcal{K}}(z) = 0$ für alle $z \notin G$. Dann definieren wir für eine beliebige $\mathbb{C}$-wertige in G holomorphe Funktion f*

$$f(T) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{K}} f(z)\, (z - T)^{-1}\, dz\,. \tag{2.5.1}$$

Dass es immer einen Zyklus gibt, der die gemachten Voraussetzungen erfüllt, soll hier nicht gezeigt werden.

Aufgabe 2.5.2 *Zeige dass die obige Definition von $f(T)$ nicht von der Wahl des Zyklus $\mathcal{K}$ abhängt.*

Für ein Polynom $p(z) = \sum_{n=0}^{d} p_n\, z^n$ können wir immer $p(T) = \sum_{n=0}^{d} p_n\, T^n$ setzen, wobei T^n die n-fache Hintereinanderausführung von T und T^0 die Identität ist. Wir wollen jetzt zeigen, dass dies mit der obigen Definition von $p(T)$ übereinstimmt. Allgemeiner zeigen wir:

Satz 2.5.3 *Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, (z - z_0)^n$ konvergent für $|z - z_0| < r$, und sei das Spektrum von $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$ in dieser Kreisscheibe enthalten. Dann ist*

$$f(T) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, (T - z_0)^n$$

wobei die Reihe absolut konvergiert.

Beweis: In dieser Situation kann man in (2.5.1) über einen positiv orientierten Kreis $|z - z_0| = \rho$ integrieren, wobei $r - \rho$ positiv und hinreichend klein ist. Auf dieser Kurve konvergiert die Potenzreihe für f gleichmäßig und kann deshalb gliedweise integriert werden. Also folgt

$$f(T) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} (z - z_0)^n\, (z - T)^{-1}\, dz\,.$$

Um die verbleibenden Integrale zu berechnen, können wir über jeden Kreis um z_0 mit einem beliebig großen Radius ρ integrieren, und dann verwenden wir die Neumannsche Reihe in der Form

$$(z - T)^{-1} \;=\; -\sum_{m=0}^{\infty} (z_0 - z)^{-m-1}\, (z_0 - T)^m\,, \qquad \|z_0 - T\| \;<\; |z_0 - z|\; (=\; \rho)\,,$$

und wenn wir erneut Summe und Integral vertauschen, folgt die Behauptung, da

$$\int_{|z-z_0|=\rho} (z - z_0)^{n-m-1}\, dz \;=\; \delta_{nm}\,.$$

□

Um zu zeigen, dass unsere Definition von $f(T)$ bei Matrizen mit der aus LA II übereinstimmt, zeigen wir noch

Satz 2.5.4 *Sei $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$ ein Operator mit endlichem Spektrum $\sigma(T) = \{z_1, \ldots z_\mu\} \subset G$. Seien weiter f und g zwei $\mathbb{C}$-wertige holomorphe Funktionen in G, für welche $(f(z) - g(z))\,(z - T)^{-1}$ beschränkt bleibt wenn $z \to z_\nu$, für alle $\nu = 1, \ldots, \mu$. Dann folgt $f(T) = g(T)$.*

Beweis: Für hinreichend kleines $r > 0$ sei $\mathcal{K}$ der Zyklus aus den positiv orientierten Kreisen um die Punkte des Spektrums mit dem Radius r. Dann folgt

$$f(T) \;-\; g(T) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{K}} \big(f(z) - g(z)\big)\, (z - T)^{-1}\, dz\,.$$

Mit der Fundamentalabschätzung für Kurvenintegrale folgt dass die rechte Seite gegen 0 geht, wenn $r \to 0$, und daher gilt die Behauptung. $\square$

Für den Fall $\mathbb{X} = \mathbb{C}^d$, mit $d \in \mathbb{N}$, ist jede lineare Abbildung stetig und durch eine quadratische d-reihige Matrix gegeben. Eine solche hat immer endliches Spektrum, und mit Hilfe der Jordanschen Normalform sieht man, dass die Voraussetzungen des letzten Satzes genau dann erfüllt sind, wenn f und g die Bedingungen

$$f^{(j)}(z_k) \;=\; g^{(j)}(z_k) \qquad \forall\, j = 0, \ldots, \mu_k - 1\,, \quad \forall\, k = 1, \ldots, \mu\,,$$

erfüllen, wobei μ_k die Vielfachheit des Eigenwertes z_k im Minimalpolynom von T ist. Daraus folgt, dass unsere Definition von $f(T)$ im Fall von Matrizen mit der aus der Vorlesung LA II übereinstimmt.

Wir haben hier nur wenig zu der Theorie der Funktionen von Operatoren gesehen – die in den Anwendungen interessantesten Fälle befassen sich meist mit unbeschränkten Operatoren. Eine gute Einführung findet sich z. B. in dem Buch von *Dunford und Schwartz* [5, Abschnitt VII.3]. Eine Verallgemeinerung auf unbeschränkte Operatoren gibt die Monographie von *M. Haase* [9].

Kapitel 3

Unendliche Produkte

Die Theorie der unendlichen Produkte ist weitgehend analog zu der von Reihen - allerdings muss man die Definition der Konvergenz richtig fassen, um auszuschließen, dass ein Produkt bereits (gegen den Wert 0) konvergiert, wenn ein Faktor verschwindet, unabhängig von der Größe der übrigen Faktoren. Außerdem möchte man sicher stellen, dass der Wert eines Produktes gleich 0 ist genau dann, wenn wenigstens einer der Faktoren verschwindet. Im Prinzip kann man kurz sagen, dass ein unendliches Produkt genau dann konvergiert, wenn die Reihe aus den Logarithmen der Faktoren konvergent ist, und der Wert der Reihe der Logarithmen ist gleich dem Logarithmus des Wertes des Produkts.

3.1 Definition und einfache Eigenschaften

Definition 3.1.1 (Unendliches Produkt) *Für eine Folge* $(f_\nu)_{\nu=k}^\infty$ *heißt die* Folge der Partialprodukte $(\Pi_m := \prod_{\nu=k}^m f_\nu)_{m=k}^\infty$ *ein* unendliches Produkt *mit den* Faktoren f_ν*, und wir schreiben auch*

$$\prod_{\nu=k}^\infty f_\nu\,, \qquad \text{oder} \quad \prod_{\nu\geq k} f_\nu\,, \qquad \text{oder} \quad \prod f_\nu\,.$$

Das unendliche Produkt heißt konvergent*, falls es ein* $m \geq k$ *gibt, für welches die Folge* $(\Pi_{mn} := \prod_{\nu=m}^n f_\nu)_{n=m}^\infty$ *für* $n \to \infty$ *einen Grenzwert* $g_m \neq 0$ *hat. In diesem Fall ist die Zahl* $g := g_m\,\Pi_{m-1}$ *nicht von* m *abhängig und heißt* Grenzwert *oder* Wert *des Produktes. Wir schreiben dann kurz*

$$g \;=\; \prod_{\nu=k}^\infty f_\nu \;\left(\; = \;\prod_{\nu\geq k} f_\nu \;=\; \prod f_\nu\;\right).$$

Lemma 3.1.2 *Gegeben sei ein unendliches Produkt* $\prod_{\nu=k}^\infty f_\nu$*.*

(a) *Falls das Produkt konvergiert, so konvergieren auch alle Produkte der Form* $\prod_{\nu=m}^\infty f_\nu$ *mit* $m \geq k$*, und es gilt*

$$\lim_{m\to\infty} \prod_{\nu=m}^\infty f_\nu \;=\; 1\,, \qquad \lim_{m\to\infty} f_m \;=\; 1\,. \tag{3.1.1}$$

(b) *Falls das Produkt gegen den Wert* g *konvergiert, so ist* $g = 0$ *genau dann, wenn mindestens ein Faktor* $f_\nu = 0$ *ist.*

Beweis: Aus der Konvergenz folgt, dass höchstens endlich viele der Faktoren f_ν verschwinden können, und daraus folgt leicht die Konvergenz der Produkte $\prod_{\nu=m}^\infty f_\nu$ mit $m \geq k$. Wenn g_m deren Wert bezeichnet, so ist $g_m \neq 0$ für alle $m \geq m_0$, und es folgt dass $\lim_{n\to\infty} g_m \,/\, \Pi_{mn} = 1$ ist. Weil $g_m \,/\, \Pi_{mn} = \prod_{\nu=n}^\infty f_\nu$

und $f_n = g_n/g_{n+1}$ ist, folgt (a). Teil (b) ergibt sich aus $g = g_m \prod_{\nu=k}^{m-1} f_\nu$ und der Tatsache, dass $g_m \neq 0$ ist für alle $m \geq m_0$. □

Im Folgenden schreiben wir oft die Faktoren eines Produktes in der Form $f_\nu = 1 + a_\nu$, und dann sagt das obige Lemma, dass die Bedingung $a_\nu \to 0$ notwendig für die Konvergenz eines unendlichen Produktes ist.

Beispiel 3.1.3 (a) *Es gilt offenbar*

$$\prod_{\nu=2}^{n} \left(1 - 1/\nu^2 \right) = \frac{\Big(\prod_{\nu=2}^{n} (\nu - 1) \Big) \Big(\prod_{\nu=2}^{n} (\nu + 1) \Big)}{\Big(\prod_{\nu=2}^{n} \nu \Big)^2} = (1 + 1/n)/2 \to 1/2 \qquad (n \to \infty)\,,$$

und deshalb ist das unendliche Produkt $\prod_{\nu=2}^{\infty} (1 - 1/\nu^2)$ *konvergent gegen* $1/2$*. Auch das Produkt* $\prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - 1/\nu^2)$ *ist konvergent, aber gegen* 0*. Das Produkt* $\prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - (-1)^\nu)$ *dagegen ist divergent.*

(b) *Es ist*

$$\prod_{\nu=2}^{n} \left(1 - 1/\nu \right) = \frac{\prod_{\nu=2}^{n} (\nu - 1)}{\prod_{\nu=2}^{n} \nu} = 1/n \to 0 \qquad (n \to \infty)\,,$$

und deshalb ist das unendliche Produkt $\prod_{\nu=2}^{\infty} (1 - 1/\nu)$ nicht konvergent.

(c) *In Verallgemeinerung von* (b) *zeigen wir:* Wenn $1 - a_\nu > 0$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu = \infty$ ist, dann ist das Produkt $\prod_{\nu=2}^{\infty} (1 - a_\nu)$ nicht konvergent.
Beweis: *Aus der Ungleichung* $t \leq \mathrm{e}^{t-1}$ *folgt* $0 < \prod_{\nu=2}^{n} (1 - a_\nu) \leq \exp[- \sum_0^n a_\nu] \to 0$*, und daher gilt die Behauptung.*

3.2 Kompakte und normale Konvergenz von Produkten

Im Folgenden sei G immer ein Gebiet in $\mathbb{C}$, und die Funktionen $f_\nu(z) = 1 + a_\nu(z)$ seien für $\nu \geq 0$ in G holomorph.

Definition 3.2.1 *Das unendliche Produkt* $\prod_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(z)$ *heißt* auf G kompakt konvergent, *wenn es zu jedem Kompaktum* $K \subset G$ *ein* m_0 *gibt, für welches die Folge* $(\prod_{\nu=m_0}^{n} f_\nu)$ *auf* K *gleichmäßig gegen eine auf* K *nullstellenfreie Funktion* g_m *konvergiert. Insbesondere ist dann für alle* $z \in G$ *das Produkt* $\prod_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(z)$ *im oben definierten Sinn konvergent, was wir als* punktweise Konvergenz *bezeichnen wollen.*

Lemma 3.2.2 *Wenn ein Produkt* $\prod_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(z)$ *holomorpher Funktionen auf* G *kompakt konvergiert, dann ist der Wert des Produktes eine auf* G *holomorphe Funktion, und die Folge* $(f_\nu(z))$ *der Faktoren sowie die Folge der Funktionen* $g_n(z) = \prod_n^{\infty} f_\nu(z)$ *konvergieren auf* G *kompakt gegen die Funktion* $\equiv 1$*.*

Beweis: Der erste Teil der Aussage ist klar nach einem Satz aus *Elemente der Funktionentheorie*, und der zweite Teil ergibt sich aus dem Beweis von Lemma 3.1.2. □

Definition 3.2.3 *Die Reihe* $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z)$ *heißt in* G normal konvergent, *falls für jedes Kompaktum* $K \subset G$ *und* $\|a\|_K := \sup_K |a(z)|$ *gilt* $\sum_{\nu=0}^{\infty} \|a_\nu\|_K < \infty$*. Im Sinn der Funktionalanalysis bedeutet dies die absolute Konvergenz der Reihe im Sinn der Norm* $\| \cdot \|_K$*. Ist dies der Fall, dann nennen wir auch das*

Produkt $\prod_{\nu=0}^{\infty}(1+a_\nu(z))$ *in* G *normal konvergent. Beachte dass jede Umordnung einer normal konergenten Reihe, und damit auch des Produktes, wieder normal konvergiert. Es ist aber momentan noch nicht klar, ob ein normal konvergentes Produkt kompakt, oder auch nur punktweise konvergiert; dies wird aber gleich bewiesen.*

Aufgabe 3.2.4 *Zeige: Wenn die Reihe* $\sum_{\nu=0}^{\infty}\log(1+a_\nu(z))$ *auf einem Kompaktum* $K \subset G$ *gleichmäßig konvergiert, so tut dies auch das Produkt* $\prod_{\nu=0}^{\infty}(1+a_\nu(z))$*, und es gilt*

$$\prod_{\nu=0}^{\infty}(1+a_\nu(z)) \;=\; \exp\Big[\sum_{\nu=0}^{\infty}\log(1+a_\nu(z))\Big].$$

Satz 3.2.5 (Umordnungssatz) *Für* G *und* a_ν *wie oben sei das Produkt* $\prod_{\nu=0}^{\infty}(1+a_\nu(z))$ *in* G *normal konvergent. Dann ist für jede Bijektion* $\pi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ *das umgeordnete Produkt* $\prod_{\nu=0}^{\infty}(1+a_{\pi(\nu)}(z))$ *in* G *kompakt konvergent, und sein Wert ist von* π *unabhängig.*

Beweis: Sei $K \subset G$ kompakt, dann folgt aus der Definition der normalen Konvergenz die gleichmäßige Konvergenz der Folge $(a_\nu(z))$ auf K gegen die Nullfunktion. Daher existiert ein ν_0 so, dass $|f_\nu(z)| \le 1/2$ ist für alle $z \in K$ und alle $\nu \ge \nu_0$. Also können wir den Hauptzweig von $\log(1+a_\nu(z))$ mittels der Potenzreihe definieren und erhalten durch deren Abschätzung die Ungleichung

$$|\log(1+a_\nu(z))| \;\le\; 2\,|a_\nu(z)| \qquad \forall\, z \in K\,.$$

Es reicht aus, den Satz für alle Bijektionen, welche die ersten ν_0 Indizes ungeändert lassen, zu beweisen, denn eine solche unterscheidet sich von einer allgemeinen nur durch eine Permutation von endlich vielen Indizes, und diese hat keinen Einfluss auf die Konvergenz von Reihen bzw. Produkten. Sei also jetzt π eine solche Bijektion. Dann ist die Reihe $\sum_{\nu=\nu_0}^{\infty}\log(1+a_{\pi(\nu)}(z))$ nach dem Majorantenkriterium auf K absolut und gleichmäßig konvergent, und nach Aufgabe 3.2.4 folgt die gleichmäßige Konvergenz von $\prod_{\nu=\nu_0}^{\infty}(1+a_{\pi(\nu)}(z))$. Da der Wert der Reihe wegen ihrer absoluten Konvergenz nicht von π abhängt, gilt dasselbe auch für das Produkt. □

Satz 3.2.6 (Nullstellensatz) *Unter den Voraussetzungen des Umordnungssatzes sei* $f(z)$ *der Wert des Produktes. Dann ist die Nullstellenmenge von* f *die Vereinigung der Nullstellenmengen der Faktoren* f_ν*, und es gilt weiter: Ist* z_0 *Nullstelle von* f *der Ordnung* n*, so ist* z_0 *Nullstelle der* f_ν *der Ordnungen* n_ν*, wobei nur endlich viele der* n_ν *positiv sind, und* $n = \sum_\nu n_\nu$*.*

Beweis: Nach Definition der Konvergenz gibt es zu jedem $z_0 \in G$ ein ν_0 so, dass $f_\nu(z_0) \neq 0$ für $\nu \ge \nu_0$ ist. Daraus folgt die Behauptung. □

3.3 Die logarithmische Ableitung

Definition 3.3.1 *Sei* f *nicht identisch Null und holomorph in einem Gebiet* G*. Dann ist* $f'(z)/f(z)$ *meromorph in* G*, d. h., jede Stelle in* G *ist entweder ein Holomorphiepunkt oder ein Pol der Funktion, und* $f'(z)/f(z)$ *heißt* logarithmische Ableitung *von* f*.*

Satz 3.3.2 (Differentiationssatz) *Sei* G *ein Gebiet, seien* f_ν *holomorph in* G*, und sei das Produkt* $f(z) = \prod_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(z)$ *in* G *normal konvergent. Dann ist*

$$\frac{f'(z)}{f(z)} \;=\; \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{f_\nu'(z)}{f_\nu(z)}\,, \qquad z \in G\setminus N\,, \quad N \;:=\; \{z \in G : f(z) = 0\}\,, \tag{3.3.1}$$

wobei die Reihe in $G \setminus N$ *normal konvergiert.*

Beweis: Zu einem Kompaktum $K \subset G$ sei m so, dass $g_n(z) = \prod_n^\infty f_\nu(z)$ für $n \geq m$ auf K nullstellenfrei ist, und dann konvergiert die Folge $(g_n(z))$ nach Lemma 3.2.2 auf K gleichmäßig gegen 1. Daraus folgt durch Verwendung der Cauchyschen Integralformel für die Ableitung die kompakte Konvergenz von $(g_n'(z)$ auf dem offenen Kern O von K gegen die Nullfunktion, und wegen

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{f_\nu'(z)}{f_\nu(z)} + \frac{g_n'(z)}{g_n(z)}$$

ist nur noch die normale Konvergenz der Reihe (3.3.1) zu zeigen. Daher sei jetzt K ein Kompaktum in $G \setminus N$. Dort konvergiert die Folge $(f_\nu(z))$ gleichmäßig gegen 1, und daher gibt es ein ν_0 so, dass $|f_\nu(z)| \geq 1/2$ ist für alle $\nu \geq \nu_0$ und alle $z \in K$. Für $f_\nu(z) = 1 + a_\nu(z)$ geht die Folge $(a_\nu(z))$ auf K gleichmäßig gegen die Nullfunktion. Sei $\delta > 0$ so klein, dass

$$L := \overline{\bigcup_{z \in K} U_\delta(z)} \subset G \setminus N\,.$$

Mit der Cauchyschen Integralformel für die Ableitung ergibt sich dann $\|a_\nu'\|_K \leq M\,\|a_\nu\|_L$ für ein genügend großes M, welches nicht von ν abhängt. Daraus und der Tatsache, dass $\sum_0^\infty \|a_\nu\|_L < \infty$ ist, folgt dann die Behauptung. □

3.4 Die Produktdarstellung der Sinusfunktion

Als ein erstes wichtiges Beispiel der sogenannten Produktdarstellung ganzer Funktionen zeigen wir:

Satz 3.4.1 *Das unendliche Produkt $\prod_1^\infty (1 - z^2/\nu^2)$ ist in $\mathbb{C}$ normal konvergent, und es gilt*

$$\sin(\pi z) = \pi\, z \prod_{\nu=1}^\infty (1 - z^2/\nu^2) \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}\,. \tag{3.4.1}$$

Beweis: Die normale Konvergenz ist klar. Wir definieren $f(z) := \pi\, z\, \prod_1^\infty\, (1 - z^2/\nu^2)$ und folgern aus dem Differentiationssatz dass

$$c(z) := \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{\nu=1}^\infty \frac{2\,z}{z^2 - \nu^2} \qquad \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\,.$$

Die Funktion $c(z)$ ist offenbar ungerade und meromorph (in $\mathbb{C}$), mit Polen an den Stellen $z_m = m \in \mathbb{Z}$ und zugehörigen Hauptteilen $(z - m)^{-1}$. Aus

$$c_n(z) := \frac{1}{z} + \sum_{\nu=1}^n \frac{2\,z}{z^2 - \nu^2} = \sum_{\nu=-n}^n \frac{1}{z + \nu}$$

folgt dass $c_n(z) + c_n(z + 1/2) - 2\,c_{2n}(2z) = 2/(2\,z + 2\,n + 1)$, woraus für $n \to \infty$ folgt

$$c(z) + c(z + 1/2) = 2\,c(2\,z) \qquad \forall\, z \quad \text{mit} \quad 2\,z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\,.$$

Die Funktion $\pi\, \cot(\pi\, z)$ ist ebenfalls ungerade, hat dieselben Pole und Hauptteile, und erfüllt die gleiche Funktionalgleichung. Daher ist $d(z) := c(z) - \pi\, \cot(\pi\, z)$ eine ganze Funktion, ungerade, und erfüllt genauso die Gleichung $d(z) + d(z + 1/2) = 2\,d(2z)$. Falls $d(z) \not\equiv 0$ wäre, könnte $d(z)$ nicht konstant sein, und dann gäbe es nach dem Maximumprinzip ein z_0 mit $|z_0| = 2$, für welches $|d(z)| < |d(z_0)|$ sein müsste für alle z mit $|z| < 2$. Mit der Dreiecksungleichung folgt hieraus $|d(z_0/2) + d((z_0 + 1)/2)| < 2\,|d(z_0)|$, was der Funktionalgleichung widerspricht. Somit ist also $f'(z)/f(z) = \pi \cot(\pi z)$, was die logarithmische Ableitung von $\sin(\pi z)$ ist. Daraus folgt aber für ein $c \in \mathbb{C}$ die Gleichung $f(z) = c \sin(\pi z)$, und da gilt

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{\pi z} = 1 = \lim_{z\to 0} \frac{\sin(\pi z)}{\pi z},$$

muss $c = \pi$ sein. □

Korollar zu Satz 3.4.1 (Wallis-Produkt) *Für $z = 1/2$ folgt aus der Produktdarstellung der Sinusfunktion, dass*

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{(2\nu)^2}{(2\nu-1)(2\nu+1)}.$$

Aufgabe 3.4.2 (Produktdarstellung der Kosinusfunktion)
Benutze die Identität $\sin(\pi z)\cos(\pi z) = \sin(2\pi z)/2$ und die Produktdarstellung der Sinusfuktion, um zu zeigen dass

$$\cos(\pi z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \Big(1 - z^2/(\nu - 1/2)^2\Big) \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

3.5 Die Produktdarstellung der Gammafunktion

Eine weitere wichtige Formel soll jetzt gezeigt werden. Dazu benötigen wir ein Produkt, dessen Konvergenz wir zuerst zeigen:

Proposition 3.5.1 *Das Produkt $\prod_1^\infty (1+z/\nu)\,\mathrm{e}^{-z/\nu}$ ist in $\mathbb{C}$ normal konvergent. Die Funktion*

$$H(z) = z \prod_{\nu=1}^{\infty} (1+z/\nu)\,\mathrm{e}^{-z/\nu} \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

ist also ganz und hat die Nullstellen $z_\mu = -\mu$, mit $\mu \in \mathbb{N}_0$, welche alle einfach sind. Weiter ist

$$-H(z)\,H(-z) = \frac{z}{\pi}\sin(\pi z), \qquad H(1) = \mathrm{e}^{-\gamma}, \qquad \gamma := \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{\nu=1}^{n} 1/\nu - \log n\Big).$$

Beweis: Aus der Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion folgt für alle w im abgeschlossenen Einheitskreis die Ungleichung $|1-(1-w)\,\mathrm{e}^w| \le |w|^2$. Daraus ergibt sich für $n \in \mathbb{N}$ und $|z| \le n$

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} \sup_{|z|\le n} \Big|1-(1+z/\nu)\,\mathrm{e}^{-z/\nu}\Big| \le |z|^2 \sum_{\nu=n}^{\infty} \nu^{-2} < \infty.$$

Daher konvergiert das Produkt wie behauptet. Durch Multiplikation der Produktdarstellungen von $H(z)$ und $H(-z)$ und Vergleich mit der Darstellung der Sinusfunktion folgt die erste der Identitäten. Aus

$$H(1) = \lim_{n\to\infty} \prod_{\nu=1}^{n} (1+1/\nu)\ \exp\Big[-\sum_{\nu=1}^{n} 1/\nu\Big] = \lim_{n\to\infty} \exp\Big[\log(n+1) - \sum_{\nu=1}^{n} 1/\nu\Big]$$

und der Folgenstetigkeit von Exponentialfunktion und Logarithmus ergibt sich die Existenz von

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{\nu=1}^{n} 1/\nu - \log n\Big) = -\lim_{n\to\infty} \Big[\log(n/(n+1)) + \log(n+1) - \sum_{\nu=1}^{n} 1/\nu\Big],$$

was noch zu zeigen war. □

Definition 3.5.2 *Die oben definierte Zahl γ heißt* Eulersche Konstante. *Ihr Wert ist $\gamma = 0,5772....$ Wir definieren weiter*

$$\Delta(z) \;=\; e^{\gamma z}\, H(z)\,, \qquad \Gamma(z) \;=\; \frac{1}{\Delta(z)}\,,$$

wobei aus der vorangegangenen Proposition folgt, dass Δ ganz ist. Dagegen ist Γ meromorph in $\mathbb{C}$, mit Polen erster Ordnung an den Stellen $z_\mu = -\mu$, mit $\mu \in \mathbb{N}_0$. Weitere Eigenschaften folgen, und insbesondere zeigen wir, dass die hier gegebene Definition der Gammafunktion mit der sonst üblichen durch die Integraldarstellung übereinstimmt.

Satz 3.5.3 *Die oben definierte Funktion $\Gamma(z)$ hat folgende Eigenschaften:*

(a) $$\mathrm{Res}_{z=-n}\, \Gamma(z) \;=\; \frac{(-1)^n}{n!}\,, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_0\ .$$

(b) $$\Gamma(z) \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^z}{z\,(z+1)\cdot\ldots\cdot(z+n)}\,, \qquad \forall\ -z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{N}_0\ .$$

(c) $$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) \;=\; \frac{\pi}{\sin(\pi z)}\,, \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}\ .$$

(d) $$\Gamma(\overline{z}) \;=\; \overline{\Gamma(z)}\,, \qquad \forall\ -z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{N}_0\ .$$

(e) $$\Gamma(x) \;>\; 0\,, \qquad \forall\, x > 0\ .$$

(f) $$\Gamma(1+z) \;=\; z\,\Gamma(z)\,, \qquad \forall\ -z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{N}_0\ .$$

(g) $$\Gamma(z) \;=\; \int_0^\infty t^{z-1}\, e^{-t}\, dt\,, \qquad \forall\, z \in \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \mathrm{Re}\, z > 0\ .$$

Beweis: Aus

$$z \prod_{\nu=1}^{n} (1 + z/\nu)\, e^{-z/\nu} \;=\; \frac{z\,(z+1)\cdot\ldots\cdot(z+n)}{n!\, n^z}\ \exp[z\,(\log n - \sum_{\nu=1}^{n} 1/\nu)]$$

ergibt sich (b), und daraus folgt $z\,\Gamma(z)/\Gamma(1+z) = \lim_{n\to\infty}(z+n+1)/n = 1$, also (f). Hieraus wiederum schließt man für $n \in \mathbb{N}_0$

$$(z+n)\,\Gamma(z) \;=\; \frac{\Gamma(z+n+1)}{z\,(z+1)\cdot\ldots\cdot(z+n-1)} \;\to\; \frac{\Gamma(1)}{(-n)\cdot\ldots\cdot(-1)} \qquad \text{für} \quad z \to -n\,,$$

und da $\Gamma(1) = 1/\Delta(1) = 1$, folgt (a). Die sogenannte *Ergänzungsformel* (c) folgt aus den Produktdarstellungen der Kehrwerte der drei Terme, und (d), (e) ergeben sich aus (b) und der Tatsache, dass Γ als Kehrwert einer ganzen Funktion keine Nullstellen haben kann. Schließlich zeigt man durch Induktion über n für $n \geq 1$

$$\int_0^n t^{z-1}\,(1-t/n)^n\, dt \;=\; n^z \int_0^1 u^{z-1}\,(1-u)^n\, du \;=\; \frac{n!\, n^z}{z\,(z+1)\cdot\ldots\cdot(z+n)}\,.$$

Die Folge $(1-t/n)^n$ ist für $n \geq t$ monoton wachsend und strebt gegen e^{-t}, und dann zeigt z. B. der Satz von Beppo-Levi, für $z = x > 0$, dass man Grenzwert und Integral vertauschen darf. Der Identitätssatz für holomorphe Funktionen zeigt dann die Gültigkeit von (g), da das Integral in der rechten Halbebene absolut und kompakt konvergent ist und also eine holomorphe Funktion darstellt. □

Kapitel 4

Ganze Funktionen mit vorgegebenen Nullstellen

In diesem Kapitel wollen wir die Existenz von ganzen Funktionen mit vorgeschriebenen Nullstellen zeigen. Da sich diese Nullstellen nirgends in $\mathbb{C}$ häufen können (außer im trivialen Fall der Nullfunktion), sei im Folgenden immer eine feste Folge $(z_k)_{k=1}^{\infty}$ betrachtet, deren Glieder alle $\neq 0$ sein sollen (da wir häufig ihre Kehrwerte bilden wollen), und die gegen Unendlich gehen sollen. Dabei können wir noch o. B. d. A. annehmen, dass eventuell gleiche Folgenglieder hintereinander stehen mögen, und dass die Folge ihrer Beträge monoton wachsend sei. Dies wird aber meistens keine Rolle spielen.

4.1 Weierstraß-Faktoren

Definition 4.1.1 *Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $z \in \mathbb{C}$ heißt die Funktion*

$$E_n(z) \;=\; (1-z)\, \mathrm{e}^{p_n(z)}\,, \qquad p_n(z) \;=\; \sum_{\nu=1}^{n} z^\nu/\nu\,, \tag{4.1.1}$$

Weierstraß-Faktor *der Ordnung n. Wir nennen $p_n(z)$ auch n-*tes Weierstraß-Polynom.

Bemerkung 4.1.2 *Beachte dass $p_n(z)$ gerade das n-te Taylorpolynom von $-\log(1-z)$ ist, so dass für $|z|<1$ die Konvergenz von $E_n(z)$ gegen die Einsfunktion folgt. Vergleiche dazu auch die unten stehenden Abschätzungen.*

Lemma 4.1.3 *Für die oben definierten Weierstraß-Faktoren gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $z \in \mathbb{C}$:*

(a) $\quad E_n'(z) \;=\; -z^n\, \mathrm{e}^{p_n(z)}\,,$

(b) $$E_n(z) \;=\; 1 \;-\; \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu\, z^\nu\,, \qquad a_\nu \;>\; 0 \qquad \forall\, \nu \geq n+1\,, \quad \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu \;=\; 1\,,$$

(c) $\quad |E_n(z) \;-\; 1| \;\leq\; |z|^{n+1}$ *falls $|z| \leq 1$ ist.*

Beweis: Teil (a) folgt durch Nachrechnen, und da $E_n(0)=1$ ist, folgt dass in der Potenzreihenentwicklung von $E_n(z)$ die Koeffizienten $a_1 = \ldots = a_n = 0$ sind. Weil alle Koeffizienten der Potenzreihe für $\mathrm{e}^{z^\nu/\nu}$ nicht-negativ sind, folgt mit Induktion über n aus der Faltungsformel dass die übrigen Koeffizienten a_ν alle positiv sind. Weil $E_n(1)=0$ ist, folgt die letzte Beziehung in (b), und daraus folgt (c). $\square$

4.2 Der Weierstraßche Produktsatz

Lemma 4.2.1 *Wenn die Zahlen $k_\nu \in \mathbb{N}_0$ so sind dass*

$$\forall\ r > 0 : \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} |r/z_\nu|^{k_\nu+1} \ < \ \infty\,,$$

dann konvergiert das Produkt

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} E_{k_\nu}(z/z_\nu) \ = \ \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - z/z_\nu)\ \exp\,[\ \sum_{\mu=1}^{k_\nu} (z/z_\nu)^\mu\ ] \tag{4.2.1}$$

normal in $\mathbb{C}$, und sein Wert ist eine ganze Funktion, deren Nullstellen genau die Zahlen z_ν sind.

Beweis: Für $r > 0$ und $|z| \le r$, sowie ν_0 so, dass $|z_\nu| \ge r$ für $\nu \ge \nu_0$ gilt, folgt

$$|1 \ - \ E_{k_\nu}(z/z_\nu)| \ \le \ \Big(r/|z_\nu|\Big)^{k_\nu+1} \qquad \forall\ \nu \ge \nu_0\,,$$

woraus die Behauptung folgt. □

Die Nullstellenmenge einer nicht trivialen ganzen Funktion f kann leer wie bei $f(z) = \mathrm{e}^z$, oder eine endliche Menge wie im Fall eines Polynoms, oder eine abzählbar unendliche Menge wie bei $f(z) = \sin z$ sein. Im letzten Fall ist ∞ der einzige Häufungspunkt der Nullstellenmenge, und wir sagen kurz so, dass die Nullstellenmenge einer ganzen Funktion $f(z) \not\equiv 0$ immer eine *diskrete Menge* ist. Dass *jede* diskrete Menge als Nullstellenmenge auftreten kann, und dass jede dieser Nullstellen auch eine beliebig vorgegebene Vielfachheit haben kann, ist für eine unendliche Menge nicht trivial, soll aber jetzt gezeigt werden. Dazu sei $N \subset \mathbb{C}$ diskret, also eine abzählbar unendliche Menge ohne endlichen Häufungspunkt, und $v : \mathbb{C} \to \mathbb{N}_0$ so, dass genau dann $v(z) = 0$ ist wenn $z \notin N$ liegt. Die Zahl 0 kann in N liegen oder auch nicht, und wir assoziieren mit N und v eine Folge $(z_\nu)_{\nu\ge 1}$ so, dass alle $z_\nu \in N \setminus \{0\}$ sind, und dass jedes $z \in N \setminus \{0\}$ genau $v(z)$-mal als Folgenglied auftritt. Wir können uns o. B. d. A. vorstellen, dass die Folge $(|z_\nu|)_{\nu\ge1}$ monoton wächst, und dass insbesondere gleiche Glieder z_ν unmittelbar hintereinanderkommen.

Satz 4.2.2 (Weierstraßscher Produktsatz) *Zu N und v wie oben beschrieben gibt es eine ganze Funktion f, die genau die Zahlen $z \in N$ als Nullstellen der Vielfachheit $v(z)$ hat. Ist (z_ν) eine Folge wie oben beschrieben, dann hat z. B.*

$$f(z) \ = \ z^{v(0)} \prod_{\nu=1}^{\infty} E_{k_\nu}(z/z_\nu) \ = \ z^{v(0)} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - z/z_\nu)\ \exp\,[\ \sum_{\mu=1}^{k_\nu} (z/z_\nu)^\mu\ ] \tag{4.2.2}$$

die gewünschte Eigenschaft, wobei die Zahlen k_ν immer so gewählt werden können, dass das Produkt in $\mathbb{C}$ normal konvergiert.

Beweis: Sei zu $r > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $|z_\nu| > 2\,r$ gilt sofern nur $\nu \ge m+1$ ist. Dann folgt

$$\sum_{\nu=m+1}^{\infty} \big|\, r/z_\nu \big|^\nu \ < \ \sum_{\nu=m+1}^{\infty} (1/2)^\nu \ < \ \infty\,,$$

und deshalb ist Lemma 4.1.3 mit $k_\nu = \nu - 1$ anwendbar und liefert die Behauptung. □

Bemerkung 4.2.3 *Die im Beweis des letzten Satzes gewählte Folge von Zahlen k_ν ist* nicht *optimal, was hier aber keine Rolle spielt. Außerdem ist klar, dass es nicht nur eine ganze Funktion f gibt, welche die im Satz vorgegebenen Nullstellen besitzt, denn man kann natürlich f immer mit einer ganzen Funktion h* ohne Nullstellen *multiplizieren. Wenn umgekehrt g eine weitere ganze Funktion mit denselben Nullstellen derselben Vielfachheiten wie f ist, dann hat die Funktion $h(z) = g(z)/f(z)$ an den Nullstellen von f immer hebbare Singulariäten und ist deshalb eine ganze Funktion ohne Nullstellen. Wie die allgemeinste ganze Funktion ohne Nullstellen aussieht, ist Inhalt des nächsten Lemmas.*

Lemma 4.2.4 (Ganze Funktionen ohne Nullstellen) *Zu jeder ganzen Funktion h ohne Nullstellen gibt es eine andere ganze Funktion a so, dass $h(z) = \mathrm{e}^{a(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ ist. Umgekehrt ist bei gegebener ganzer Funktion a die Funktion $h(z) = \mathrm{e}^{a(z)}$, $z \in \mathbb{C}$, ganz und hat keine Nullstellen.*

Beweis: Es genügt, die eine Richtung zu zeigen. Sei also h gegeben. Dann ist auch die logarithmische Ableitung h'/h ganz, und da das Kurvenintegral in $\mathbb{C}$ wegunabhängig ist, folgt für beliebiges $a \in \mathbb{C}$ dass

$$a(z) \;:=\; a \;+\; \int_0^z \frac{h'(w)}{h(w)}\,dw \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

eine weitere ganze Funktion ist. Man rechnet nach, dass die Ableitung von $h(z)\,\mathrm{e}^{-a(z)}$ die Nullfunktion ist, so dass die Funktion selber konstant ist. Wenn man jetzt $a = \log(h(0))$ wählt, wobei man einen beliebigen Zweig der Logarithmusfunktion benutzen kann, dann folgt dass $h(z) \equiv \mathrm{e}^{a(z)}$ ist, was zu zeigen war. □

4.3 Quotienten ganzer Funktionen

Ein Quotient ganzer Funktionen ist immer eine in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion. Der nächste Satz zeigt die Umkehrung:

Satz 4.3.1 *Zu jeder in $\mathbb{C}$ meromorphen Funktion $h \not\equiv 0$ gibt es immer zwei ganze Funktionen f und g ohne gemeinsame Nullstellen, so dass $h(z) = f(z)/g(z)$ ist für alle $z \in \mathbb{C}$, welche keine Nullstellen des Nenners sind. Insbesondere ist z_0 eine Nullstelle von f bzw. g der Vielfachheit v genau dann, wenn z_0 Nullstelle bzw. Polstelle von h der Vielfachheit bzw. der Ordnung v ist.*

Beweis: Die Nullstellen- und die Polstellenmenge von h sind zwei diskrete, abzälbare und disjunkte Mengen in $\mathbb{C}$, und daher gibt es ganze Funktionen f und g, für welche die zweite Aussage des Satzes richtig ist (auch falls eine der beiden Mengen endlich ist, denn dann kann die entsprechende ganze Funktion als ein Polynom gewählt werden). Die Funktion $\tilde{h} = f/g$ ist dann ebenfalls meromorph und hat die gleichen Nullstellen und Pole mit denselben Vielfachheiten bzw. Ordnungen wie h. Also ist $F := h/\tilde{h}$ eine ganze Funktion ohne Nullstellen, und $h = f\,F/g$. Also gilt der Satz mit $f\,F$ an Stelle von f. □

Bemerkung 4.3.2 *In der Sprache der Algebra ist die Menge der ganzen Funktionen ein Integritätsbereich, d. h., ein kommutativer Ring mit Einselement ohne Nullteiler.* Satz 4.3.1 *besagt genau dass die meromorphen Funktionen der zugehörige Quotientenkörper sind.*

4.4 Existenz von Wurzeln ganzer Funktionen

Wir wollen untersuchen, wann die n-te Wurzel einer ganzen Funktion wieder ganz ist; dass dies nicht immer so ist, sieht man an dem trivialen Beispiel $\sqrt[n]{z}$.

Satz 4.4.1 *Für jede ganze Funktion und jedes $n \in \mathbb{N}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *Es gibt eine ganze Funktion g mit $f = g^n$.*

(b) *Jede Nullstelle von f hat eine Vielfachheit, welche durch n teilbar ist.*

Beweis: Wenn (a) gilt, ist (b) offenbar erfüllt. Umgekehrt gibt es nach Satz 4.2.2 zu gegebenem f, für welches (b) richtig ist, eine ganze Funktion h, welche die gleichen Nullstellen wie f, aber mit Vielfachheiten $v(z)/n$ hat. Dann ist f/h^n eine ganze Funktion ohne Nullstellen, also von dern Form $\mathrm{e}^{a(z)}$ mit einer ganzen Funktion a. Mit $g(z) = h(z)\,\mathrm{e}^{a(z)/n}$ folgt die Behauptung. □

4.5 Die Weierstraßsche p-Funktion

Die Weierstraßsche $\wp$-Funktion ist eine sogenannte *doppeltperiodische Funktion*. Sie hängt von zwei komplexen Parametern ω_1, ω_2 ab, und wenn wir diese Zahlen als Punkte in $\mathbb{R}^2$ auffassen, ist klar, was wir mit linearer Unabhängigkeit über $\mathbb{R}$ meinen. Wir zeigen jetzt:

Lemma 4.5.1 (Linear unabhängige Perioden) *Genau dann sind $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$, wenn beide nicht $= 0$ sind, und wenn $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$ ist.*

Beweis: Falls eine der Zahlen $= 0$ ist, liegt immer lineare Abhängigkeit vor. Im anderen Fall sind sie genau dann linear abhängig, wenn es eine reelle Zahl $\alpha \neq 0$ gibt, so dass $\omega_1 = \alpha\,\omega_2$ ist, und daraus folgt die Behauptung. □

Zwei linear unabhängige Zahlen $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ definieren ein *ganzzahliges Gitter*

$$\Omega \ := \ \{\, \omega := n_1\,\omega_1 \ + \ n_2\,\omega_2\,, \quad n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\,\}\,. \tag{4.5.1}$$

Da sich das Gitter nicht ändert, wenn wir z. B. ω_1 durch $-\omega_1$ ersetzen, können wir immer annehmen, dass der Quotient ω_1/ω_2 in der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ liegt. Die Menge der Paare (ω_1, ω_2) mit $\omega_1/\omega_2 \in \mathbb{H}$ ist offen und soll mit $\mathbb{O}$ bezeichnet werden. Um die Konvergenz einiger wichtiger Reihen zeigen zu können, beweisen wir folgendes Hilfsresultat:

Lemma 4.5.2 *Für jedes $\alpha > 2$ und jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{O}$ gibt es ein $M = M(\alpha, K) > 0$ so, dass*

$$\forall\ (\omega_1, \omega_2)\ \in\ K\ : \qquad \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} |\omega|^{-\alpha} \ \le M\,. \tag{4.5.2}$$

Für $\alpha \le 2$ dagegen ist die Reihe in (4.5.2) *divergent.*

Beweis: Die Funktion $q(x, y, \omega_1, \omega_2) := |x\,\omega_1 + y\,\omega_2|/\sqrt{(x^2 + y^2)}$ ist für $(x, y, \omega_1, \omega_2) \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}^2$ stetig und nimmt deshalb auf $S_1 \times K$, mit $S_1 = \{x^2 + y^2 = 1\}$, ein Maximum T und ein Minimum t an. Da q keine Nullstelle haben kann, folgt $t > 0$, und weil $q(r\,x, r\,y, \omega_1, \omega_2) = q(x, y, \omega_1, \omega_2)$ ist für alle $r > 0$, folgt

$$t \ \le\ q(x, y, \omega_1, \omega_2) \ \le\ T \qquad \forall\ (x, y, \omega_1, \omega_2) \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times K\,.$$

Daraus ergibt sich unmittelbar

$$\forall\ \omega = n_1\,\omega_1 \ + \ n_2 \ \in\ \Omega\ : \qquad t\,\sqrt{(n_1^2 + n_2^2)} \ \le\ |\omega| \ \le\ T\,\sqrt{(n_1^2 + n_2^2)}\,.$$

Daher lässt sich die Reihe $\sum_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}} |\omega|^{-\alpha}$ nach oben bzw. unten durch $t^{-\alpha}$ bzw. $T^{-\alpha}$ multipliziert mit der Reihe

$$\sum_{(n_1,n_2)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}} \frac{1}{(n_1^2+n_2^2)^{\alpha/2}} \;=\; 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha} \;+\; 4\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+m^2)^{\alpha/2}}$$

abschätzen. Weil $(n_1-n_2)^2 = n_1^2+n_2^2-2\,n_1\,n_2 \ge 0$ ist, folgt dass

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+m^2)^{\alpha/2}} \;\le\; \sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{(2\,n\,m)^{\alpha/2}} \;=\; 2^{-\alpha/2}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha/2}}\Big)\Big(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{\alpha/2}}\Big),$$

und die rechte Seite ist endlich für $\alpha > 2$. Für $\alpha = 2$ dagegen ist

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+m^2} \;\ge\; \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{n^2+m^2} \;\ge\; \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2\,n^2} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2\,n^2} = \infty\,.$$

Also gilt die Behauptung des Lemmas. □

Definition 4.5.3 *Sei $G\subset\mathbb{C}^n$, $n\in\mathbb{N}$, ein Gebiet. Eine Funktion $f:\ G\to\mathbb{C}$ von n komplexen Variablen $z_1,\dots,z_n$ heißt* holomorph *in G, falls sie für jedes $j\in\{1,\dots,n\}$, bei festen, aber beliebigen Werten von z_k für alle $k\ne j$, und z_j so dass $(z_1,\dots,z_n)^T\in G$ ist, eine holomorphe Funktion der Variablen z_j ist.*

Beachte, dass sich die Definition der normalen Konvergenz von Folgen und Reihen auf Funktionen mehrerer Variabler verallgemeinern läßt, und dass Satz 3.2.5 auch für diese Situation gilt. Deshalb können wir jetzt folgendes Ergebnis zeigen:

Satz 4.5.4 *Das Produkt*

$$\sigma(z) \;=\; \sigma(z;\omega_1,\omega_2) \;:=\; z\prod_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}}(1-z/\omega)\,\exp[z/\omega+(1/2)\,(z/\omega)^2]$$

konvergiert auf $\mathbb{C}\times\mathbb{O}$ normal, und daher ist σ dort eine holomorphe Funktion dreier Variabler. Insbesondere ist σ eine ganze Funktion in z, für jedes feste Paar $(\omega_1,\omega_2)\in\mathbb{O}$.

Beweis: Wegen $|1-E_2(z)|\le|z|^3$ folgt die Behauptung aus Lemma 4.5.2. □

Definition 4.5.5 *Aus* Lemma 4.5.2 *folgt auch die Divergenz des Produktes*

$$\prod_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}}(1-z/\omega)\,\exp[z/\omega]\,,$$

und daher ist σ in gewissem Sinn die einfachste ganze Funktion, welche die Gitterpunkte ω als Nullstellen hat. Sie heißt die Weierstraßsche σ-Funktion. *Ihre logarithmische Ableitung nach z*

$$\zeta(z) \;=\; \frac{\sigma(z)'}{\sigma(z)} \;=\; \frac{1}{z} \;+\; \sum_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}}\Big(\frac{1}{z-\omega} \;+\; \frac{1}{\omega} \;+\; \frac{z}{\omega^2}\Big)\,,$$

hat einfache Polen an den Gitterpunkten. Sie heißt Eisenstein-Weierstraßsche ζ-Funktion. *Nochmaliges Differenzieren führt auf die Funktion*

$$\wp(z) \;=\; -\zeta(z)' \;=\; \frac{1}{z^2} \;+\; \sum_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}}\Big(\frac{1}{(z-\omega)^2} \;-\; \frac{1}{\omega^2}\Big) \tag{4.5.3}$$

Sie heißt Weierstraßsche $\wp$-Funktion.

Satz 4.5.6 *Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ gilt*

$$\wp(z+\omega_1) \;=\; \wp(z+\omega_2) \;=\; \wp(z)\,. \tag{4.5.4}$$

Beweis: Nochmaliges Differenzieren ergibt

$$\wp(z)' \;=\; \frac{-2}{z^3} \;+\; \sum_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}} \frac{-2}{(z-\omega)^3} \;=\; -2\sum_{\omega\in\Omega} \frac{1}{(z-\omega)^3}\,,$$

und aus dieser Darstellung ergibt sich dass $\wp(z+\omega_1)' = \wp(z)'$ ist. Daher ist $\wp(z+\omega_1)-\wp(z)$ konstant, sagen wir: $= c$. Es folgt aber aus (4.5.3), dass $\wp$ eine gerade Funktion ist, dass also speziell $\wp(\omega_1/2) = \wp(-\omega_1/2)$ ist, und daher folgt $c = 0$. Durch Vertauschen von ω_2 und ω_1 folgt dann, dass (4.5.4) gilt. □

Wegen der Eigenschaft (4.5.4) heißt $\wp$ auch *doppeltperiodische Funktion*.

Kapitel 5

Meromorphe Funktionen mit vorgegebenen Hauptteilen

Im Folgenden sei $(z_k)_{k\geq 0}$ eine gegebene Zahlenfolge ohne endlichen Häufungspunkt, wobei noch gelten soll, dass alle ihre Glieder paarweise verschieden sind und dass $z_0 = 0$ ist. Weiter seien rationale Funktionen der Form

$$h_k(z) \;=\; \sum_{j=1}^{n_k} \frac{h_{kj}}{(z-z_k)^j}\,, \qquad h_{kj} \in \mathbb{C}\,,$$

gegeben, wobei noch angenommen sei, dass für $k \geq 1$ die Zahlen $h_{kn_k} \neq 0$ seien. Daher sind die $h_k(z)$ für $k \geq 1$ nicht trivial, während $h_0(z) \equiv 0$ erlaubt sein soll. Gesucht ist dann eine meromorphe Funktion $f(z)$, welche genau an den Zahlen z_k Pole haben soll, und zwar so dass $h_k(z)$ der Hauptteil der Laurentreihe von f um den Punkt z_k ist – falls $h_0(z) \equiv 0$ sein sollte, dann ist der Nullpunkt eine hebbare Singularität von f.

5.1 Der Satz von Mittag–Leffler

Definition 5.1.1 *Für $k \geq 1$ ist der Hauptteil $h_k(z)$ im Nullpunkt holomorph, und wir bezeichnen mit*

$$p_{kd}(z) \;=\; \sum_{j=0}^{d-1} \frac{h^{(j)}(0)}{j!}\; z^j \qquad (d \in \mathbb{N})$$

das Taylorpolynom von $h_k(z)$ vom Grad $d-1$ und setzen noch $p_{k0}(z) \equiv 0$. Weiter sei $M = \{z_1,\, z_2\, \ldots\}$.

Lemma 5.1.2 *Falls die Zahlen $d_k \in \mathbb{N}_0$ so sind, dass die Reihe $\sum_k (h_k(z) - p_{kd_k}(z))$ in $\mathbb{C}\setminus M$ normal konvergiert, dann ist die Funktion*

$$f(z) \;:=\; h_0(z) \;+\; \sum_{k=1}^{\infty} \big(h_k(z) - p_{kd_k}(z)\big) \qquad z \neq z_0,\, z_1\, z_2 \ldots \tag{5.1.1}$$

in $\mathbb{C}$ meromorph, mit Polen lediglich an den Stellen z_k, $k \in \mathbb{N}_0$, und den Hauptteilen $h_k(z)$.

Beweis: Für ein $n \geq 2$ sei $f_n(z) = \sum_{k\geq n}(h_k(z) - p_{kd_k}(z))$. Diese Reihe ist ebenfalls in $\mathbb{C}\setminus M$ normal konvergent, und daher ist f_n dort holomorph. Für $r > 0$ und n so groß, dass $|z_k| > r$ ist falls $k \geq n$, folgt aus dem Maximumprinzip dass die Reihe auf der Kreisscheibe $|z| \leq r$ gleichmäßig konvergiert, und daher ist f_n an den Stellen z_j, die in dieser Kreisscheibe liegen, ebenfalls holommorph. Also ist f selber in $|z| < r$ meromorph und hat dort die "richtigen" Pole und Hauptteile. Da aber r beliebig groß sein kann, folgt die Behauptung. □

Es bleibt jetzt zu klären, ob es immer möglich ist, die Zahlen d_k so zu wählen, dass (5.1.1) normal konvergiert. Dies wird jetzt gezeigt:

Satz 5.1.3 (Mittag-Leffler) *Es ist immer möglich, die Zahlen d_k so zu wählen, dass* (5.1.1) *normal konvergiert, und deshalb gibt es immer eine in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion, die genau an den Stellen z_k Pole mit den Hauptteilen $h_k(z)$ hat.*

Beweis: Für jedes $k \geq 1$ ist die Folge $(p_{kd}(z))$ der Taylorpolynome auf $\{|z| < |z_k|\}$ kompakt konvergent gegen $h_k(z)$, und deshalb existiert ein d_k mit

$$\Big| h_k(z) \;-\; p_{kd_k}(z) \Big| \;\leq\; 2^{-k} \qquad \text{für} \quad |z| \leq |z_k|/2 \,.$$

Für jedes Kompaktum $K \subset \mathbb{C} \setminus M$ können wir n so wählen dass $z_k/2 \notin K$ für $k \geq n$ gilt, und dann erhalten wir die Abschätzung

$$\sum_{k \geq n} \sup_{z \in K} \Big| h_k(z) - p_{kd_k}(z) \Big| \;\leq\; \sum_{k \geq n} 2^{-k} \;<\; \infty \,,$$

woraus die Behauptung folgt. □

5.2 Beispiele

Einige Beispiele von Reihen der Form (5.1.1) sind uns schon begegnet: Die Darstellungen für die ζ-Funktion und die $\wp$-Funktion sowie deren Ableitung sind solche *Mittag-Leffler-Reihen*. Gleiches gilt für die im Beweis von Satz 3.4.1 gefundene Darstellung der Kotangensfunktion, wenn man sie folgendermaßen umformt:

$$\pi \cot(\pi z) \;=\; \frac{1}{z} \;+\; \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \nu^2} \;=\; \frac{1}{z} \;+\; \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \Big(\frac{1}{z+k} \;-\; \frac{1}{k} \Big) \,.$$

Allgemein ist die logarithmische Ableitung eines Produktes der Form (4.2.2) gleich der Mittag-Leffler-Reihe

$$\frac{f(z)'}{f(z)} \;=\; \frac{v(0)}{z} \;+\; \sum_{\nu=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{z - z_\nu} \;+\; \sum_{\mu=0}^{k_\nu - 1} \frac{z^\mu}{z_\nu^{\mu+1}} \Big) \,.$$

Schließlich folgt durch logarithmisches Differenzieren der Produktdarstellung der Gammafunktion

$$\frac{\Gamma(z)'}{\Gamma(z)} \;+\; \gamma \;=\; -\,\frac{1}{z} \;-\; \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{z+k} \;-\; \frac{1}{k} \Big)$$

also eine weitere Mittag-Leffler-Reihe. Wenn man die Darstellung der Kotangensfunktion ein– bzw. zweimal differenziert, findet man

$$\frac{\pi^2}{(\sin(\pi z))^2} \;=\; \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z+k)^2} \,, \qquad \frac{\pi^3 \cot(\pi z)}{(\sin(\pi z))^2} \;=\; \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z+k)^3} \,.$$

Durch Einsetzen spezieller Werte für z erhält man Darstellungen der Zahl π, die allerdings nicht besonders schnell konvergieren!

5.3 Herleitung des Produktsatzes

Aus dem Mittag-Lefflerschen Satz kann man den Produktsatz herleiten – wir deuten dies nur kurz an für den Fall, dass alle Nullstellen einfach sind:

Die Funktion

$$a(z) \;:=\; \frac{1}{z} \;+\; \sum_{\nu=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{z-z_\nu} \;+\; \sum_{\mu=0}^{k_\nu-1}\frac{z^\mu}{z_\nu^{\mu+1}}\Big)$$

hat die Stammfunktion

$$A(z) \;=\; \log z \;+\; \sum_{\nu=1}^{\infty}\Big(\log(1-z/z_\nu) \;+\; \sum_{\mu=1}^{k_\nu}\frac{(z/z_\nu)^\mu}{\mu}\Big)\;,$$

wobei immer der Hauptwert des Logarithmus genommen werden muss, damit die Reihe konvergiert. Aus $f(z)' = a(z)\,f(z)$ folgt dann, bis auf eine multiplikative Konstante, dass

$$f(z) \;=\; z\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-z/z_\nu)\,\exp\big[\sum_{\mu=1}^{k_\nu}\frac{(z/z_\nu)^\mu}{\mu}\big]\;,$$

wobei auch die Konvergenz des Produktes folgt.

Kapitel 6

Der Riemannsche Abbildungssatz

Gelegentlich ist es wichtig zu wissen, ob es für zwei Gebiete G_j eine in G_1 *biholomorphe*, d. h., eine holomorphe und bijektive Abbildung nach G_2 gibt. Während dies für allgemeine Gebiete unklar ist, werden wir zeigen, dass es bei einfach zusammenhängenden Gebieten immer ein solches f gibt, außer wenn genau eines der Gebiete die ganze Ebene ist. Dies ist eine Konsequenz aus dem Riemannschen Abbildungssatz, welcher aussagt, dass jedes einfach zusammenhängende Gebiet G, welches nicht die ganze Ebene ist, biholpmorph (d. h., durch eine auf g holomorphe und injektive Funktion) auf die offene Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$ abgebildet werden kann. Dass dieser Ausnahmefall auftritt, liegt am Liouvilleschen Satz, denn eine holomorphe Abbildung von $\mathbb{C}$ in $\mathbb{E}$ ist ganz und beschränkt, also konstant, und kann deshalb nicht bijektiv sein.

6.1 Einfach zusammenhängende Gebiete

Definition 6.1.1 *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet.*

1. Zwei geschlossene Kurven γ_j in G heißen *homotop*, wenn eine stetige Funktion $h : [0,1] \times [0,1] \to G$ mit folgenden Eigenschaften existiert:
   (a) Für alle $s \in [0,1]$ gilt $h(0,s) = h(1,s)$. Mit anderen Worten: Für jedes feste $s \in [0,1]$ ist $h(\cdot, s)$ Parameterdarstellung einer geschlossenen Kurve in G.
   (b) Die Kurven γ_1 bzw. γ_2 haben $h(\cdot, 0)$ bzw. $h(\cdot, 1)$ als Parameterdarstellungen.
2. Wenn der Träger einer Kurve γ nur aus einem Punkt besteht (wenn also eine konstante Funktion Parameterdarstellung ist), dann heißt γ *Einpunktkurve*.
3. Wenn γ eine geschlossene Kurve in G ist, welche zu einer Einpunktkurve homotop ist, dann heißt γ *nullhomotop*.
4. Das Gebiet G heißt *einfach zusammenhängend*, wenn jede geschlossene Kurve in G nullhomotop ist.

Lemma 6.1.2 *Seien $z_j : [0,1] \to \mathbb{C}$ Parameterdarstellungen zweier geschlossener Wege γ_j. Wenn für ein $z_0 \in \mathbb{C}$ gilt*

$$|z_1(t) - z_2(t)| < |z_0 - z_1(t)| + |z_0 - z_2(t)| \quad \forall\, t \in [0,1],$$

dann folgt $z_0 \notin \gamma_1^* \cup \gamma_2^*$, und es gilt $\operatorname{Ind}_{\gamma_1}(z_0) = \operatorname{Ind}_{\gamma_2}(z_0)$.

Beweis: Wäre $z_2(t) = z_0$ für irgendein $t \in [0,1]$, so wäre $|z_1(t) - z_0| < |z_0 - z_1(t)|$, was nicht sein kann. Also ist $z_0 \notin \gamma_1^*$, und genauso folgt $z_0 \notin \gamma_2^*$. Für den Beweis beschränken wir uns auf stückweise stetig differenzierbare Wege (allgemeine Wege können durch solche approximiert werden, ohne dass sich die Integrale ändern!) Für solche folgt für die Funktion

$$z(t) \;=\; \frac{z_2(t) - z_0}{z_1(t) - z_0}\,, \qquad 0 \le t \le 1\,,$$

dass

$$\frac{z'(t)}{z(t)} \;=\; \frac{z_2'(t)}{z_2(t) - z_0} \;-\; \frac{z_1'(t)}{z_1(t) - z_0}$$

bis auf solche t, für die $z'(t)$ undefiniert ist. Daraus folgt aber

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_2}(z_0) \;-\; \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z_0) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{z'(t)}{z(t)}\,dt = \mathrm{Ind}_\gamma(0)$$

für die Kurve γ mit Parameterdarstellung $z(t)$. Es folgt aber aus der Voraussetzung, dass $|z(t)-1| < 1 + |z(t)|$ für alle t gilt. Das bedeutet, dass γ die negativ-reelle Achse nicht schneidet. Nach dem Cauchyschen Integralsatz ist deshalb $\mathrm{Ind}_\gamma(0) = 0$. □

Satz 6.1.3 *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann gilt für zwei homotope geschlossene Wege γ_j in G*

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z) \;=\; \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(z) \qquad \forall\, z \notin G.$$

Beweis: Seien $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ und h wie in der Homotopiedefinition. Da I^2 kompakt ist, ist auch das Bild $h(I^2)$ kompakt. Daher gibt es zu einem $z \notin G$ ein $\varepsilon > 0$ derart, dass $|z - h(t,s)| > 2\varepsilon$ für alle $(t,s) \in I^2$. Weiter ist h gleichmäßig stetig, und deshalb existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$|h(t,s) \;-\; h(\tilde t, \tilde s)| \;<\; \varepsilon \quad \forall\, |s - \tilde s| \;+\; |t - \tilde t| \;\le\; 1/n\,.$$

Definiere $z_k(t)$, $0 \le k \le n$, wie folgt:

$$z_k(t) \;=\; (n\,t \;+\; 1 - j)\,h(j/n, k/n) \;+\; (j \;-n\,t)\,h([j-1]/n, k/n)\,,$$

für $(j-1)/n \le t \le j/n$ und $1 \le j \le n$. Dann ist jedes z_k Parameterdarstellung eines Polygonzugs, also eines stückweise glatten Weges β_k in G, und es gilt

$$|z_k(t) \;-\; h(t, k/n)| \;<\; \varepsilon \qquad \forall\, t \in [0,1],\; 0 \le k \le n\,,$$

und (für die gleichen t und k)

$$|z \;-\; z_k(t)| \;> |z \;-\; h(t,k/n)| \;-\; |h(t,k/n) \;-\; z_k(t)| \;>\; \varepsilon.$$

Schließlich zeigt man noch, dass

$$|z_k(t) \;-\; z_{k-1}(t)| \;<\; \varepsilon\,, \qquad \forall\, t \in [0,1],\; 1 \le k \le n\,.$$

Daher sind die Voraussetzungen des Lemma 6.1.2 für je zwei aufeinander folgende Wege β_k erfüllt, und deshalb haben alle dieselbe Windungszahl bzgl. z. Genauso schließt man, dass die Windungszahl von β_1 bzw. β_n gleich der von γ_1 bzw. γ_2 ist, und daraus folgt die Behauptung. □

Satz 6.1.4 *Jedes einfach zusammenhängende Gebiet ist ein Cauchy-Gebiet.*

Beweis: Jeder geschlossene Weg in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G ist nach Definition nullhomotop. Nach dem vorausgegangenen Satz ist also seine Windungszahl bzgl. eines $z \notin G$ gleich der einer Einpunktkurve, also eines Weges der Länge $\ell = 0$, und diese Windungszahl verschwindet offenbar. Also folgt die Behauptung aus Satz 2.4.1. □

Aufgabe 6.1.5 *Zeige: Jedes sternförmige Gebiet ist einfach zusammenhängend.*

Aufgabe 6.1.6 *Zeige: Ein Kreisring ist nicht einfach zusammenhängend.*

Aufgabe 6.1.7 *Seien G_j Gebiete in $\mathbb{C}$, und sei $f : G_1 \longrightarrow G_2$* bistetig, *d. h., f ist bijektiv, und f und f^{-1} stetig auf G_1 bzw. G_2. Zeige: Genau dann ist G_1 einfach zusammenhängend, wenn dies auch für G_2 gilt.*

6.2 Normale Familien und der Montelsche Satz

Definition 6.2.1 *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine Familie $\mathcal{F}$ von in G holomorphen Funktionen heißt dort* lokal beschränkt, *falls*

$$\forall\ z_0 \in G \quad \exists\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ M \in \mathbb{R}_+ \quad \forall\ f \in \mathcal{F} \quad \forall\ z \in U_\varepsilon(z_0) \cap G : \quad |f(z)| \ \le\ M\,.$$

Weiter nennen wir $\mathcal{F}$ in G lokal gleichgradig stetig, *wenn*

$$\forall\ z_0 \in G \quad \forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad \forall\ f \in \mathcal{F} \quad \forall\ z \in U_\delta(z_0) \cap G : \quad |f(z) - f(z_0)| \ \le\ \varepsilon\,.$$

Im Unterschied zur Definition der gleichmäßigen Stetigkeit darf also hier das δ von z_0, nicht aber von f abhängen.

Lemma 6.2.2 *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und sei $\mathcal{F}$ eine lokal beschränkte Familie von in G holomorphen Funktionen. Dann ist $\mathcal{F}$ auch lokal gleichgradig stetig.*

Beweis: Seien $z_0 \in G$ und $r > 0$ so, dass $\overline{U_{2r}(z_0)} \subset G$ ist. Wenn wir r eventuell noch verkleinern, damit wir in der Definition der lokalen Beschränktheit $\varepsilon = r$ setzen können, dann folgt für alle z mit $|z - z_0| \le r$:

$$|f(z) \ - \ f(z_0)| \ = \ \Big| \frac{z - z_0}{2\pi i} \oint_{|w-z_0|=2r} \frac{f(w)}{(w-z)\,(w-z_0)}\, dw \Big| \ \le\ |z - z_0|\, \frac{M}{r}\,,$$

woraus die Behauptung folgt. □

Satz 6.2.3 (Montel) *Jede in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ lokal beschränkte Folge holomorpher Funktionen enthält eine kompakt konvergente Teilfolge.*

Beweis: Sei A eine abzählbare dichte Teilmenge von G, und sei die Folge (f_n) in G holomorph und lokal beschränkt. Wir nehmen o. B. d. A. an, dass die Folge auf A punktweise konvergiert – falls dies nicht so ist, kann man mit dem Cantorschen Diagonalfolgenprinzip eine entsprechende Teilfolge wählen. Sei weiter (z_n) eine Folge in G, welche gegen ein $z^* \in G$ konvergiert. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es dann wegen Lemma 6.2.2 ein $\delta > 0$ derart, dass aus $z, w \in U_\delta(z^*)$ folgt $|f_n(z) - f_n(w)| \le \varepsilon$ für alle $n \ge 1$. Sei $a \in U_\delta(z^*) \cap A$, und sei n_0 so, dass für alle $n \ge n_0$ gilt $z_n \in U_\delta(z^*)$. Außerdem gelte für $n, m \ge n_0$ dass $|f_n(a) - f_m(a)| \le \varepsilon$ ist; dies kann erreicht werden, wenn wir n_0 eventuell noch vergrößern. Dann erhalten wir

$$|f_m(z_m) - f_n(z_n)| \le |f_m(z_m) - f_m(a)| + |f_m(a) - f_n(a)| + |f_n(a) - f_n(z_n)| \le 3\,\varepsilon \qquad \forall\ n, m \ge n_0\,.$$

Also ist die Folge $(f_n(z_n))$ konvergent, und durch "Mischen" von verschiedenen Folgen mit gleichem Grenzwert z^* zeigt man, dass der Grenzwert $f(z^*) := \lim f_n(z_n)$ nicht von der Wahl der Folge (z_n) abhängen kann. Weil wir auch die konstante Folge $(z_n \equiv z^*)$ benutzen können, schließen wir dass $\lim f_n(z^*) = f(z^*)$

gilt, d. h. dass die Folge (f_n) auf G punktweise konvergiert. Wir zeigen jetzt die (Folgen-)Stetigkeit von f: Sei wieder $\lim z_n = z^*$. Für $\varepsilon > 0$ und $k \geq 1$ folgt mit der punktweisen Konvergenz von (f_n) die Existenz von n_k mit $|f_{n_k}(z_k) - f(z_k)| < \varepsilon/2$, und o. B. d. A. seien die n_k streng monoton wachsend gewählt. Weil $\lim f_{n_k}(z_k) = f(z^*)$ ist, folgt dass $|f_{n_k}(z_k) - f(z^*)| \leq \varepsilon/2$ ist, sofern nur k hinreichend groß ist. Also gilt

$$|f(z_k) - f(z^*)| \leq |f(z_k) - f_{n_k}(z_k)| + |f_{n_k}(z_k) - f(z^*)| < \varepsilon$$

falls k groß genug ist, und das ist die Folgenstetigkeit im Punkt z^*. Wenn wir annehmen, dass die Folge (f_n) nicht kompakt gegen f konvergiert, dann gibt es ein Kompaktum $K \subset G$ und ein $\varepsilon > 0$ derart, dass eine Teilfolge (f_{n_k}) sowie eine Punktfolge (z_k) in K existieren, für welche $|f(z_k) - f_{n_k}(z_k)| \geq \varepsilon$ ist, für alle $k \geq 1$. Da K kompakt und damit auch folgenkompakt ist, können wir o. B. d. A. davon ausgehen, dass die Folge (z_k) gegen ein $z^* \in K$ konvergiert, und daraus folgt ein Widerspruch, denn da f stetig ist, konvergiert $f(z_k)$ gegen $f(z^*)$, und auch $f_{n_k}(z_k)$ hat diesen Grenzwert. □

Den Satz von Montel findet man oft auch in einer anderen Formulierung, welche den folgenden Begriff verwendet:

Definition 6.2.4 (Normale Familien) *Eine Familie $\mathcal{F}$ von in einem Gebiet G holomorphen Funktionen heißt* in G normal*, falls jede Folge aus $\mathcal{F}$ eine kompakt konvergente Teilfolge enthält.*

Mit Hilfe dieses Begriffes kann man den Satz von Montel auch so aussprechen:

Satz 6.2.5 *Jede in einem Gebiet G lokal beschränkte Familie holomorpher Funktionen ist dort normal.*

6.3 Einheiten und Quadratwurzeln

Definition 6.3.1 *Die Menge $\mathcal{H}(G)$ aller in einem Gebiet G holomorphen Funktionen ist, genau wie die Menge der ganzen Funktionen, ein Integritätsbereich. Wir nennen deshalb, wie in der Algebra üblich, ein $f \in \mathcal{H}(G)$ eine* Einheit*, falls es ein $g \in \mathcal{H}(G)$ gibt, für welches $f(z)\,g(z) = 1$ ist für alle $z \in G$, und dies gilt genau dann, wenn f keine Nullstelle in G hat. Wir sagen weiter, dass ein $f \in \mathcal{H}(G)$ die* Quadratwurzeleigenschaft besitzt*, wenn ein $g \in \mathcal{H}(G)$ existiert, für welches $f = g^2$ ist.*

Lemma 6.3.2 *Ist G ein einfach zusammenhängendes Gebiet, dann hat jede Einheit die Quadratwurzeleigenschaft.*

Beweis: Sei f eine Einheit in $\mathcal{H}(G)$. Da G einfach zusammenhängend ist, ist das Kurvenintegral der logarithmischen Ableitung von f wegunabhängig, und daher ist für festes $z_0 \in G$ durch

$$h(z) := \int_{z_0}^{z} \frac{f'(w)}{f(w)}\, dw \qquad \forall\, z \in G$$

eine in G holomorphe Funktion definiert, und wegen der Tatsache, dass die Ableitung von $f(z)\,\mathrm{e}^{-h(z)}$ die Nullfunktion ist, folgt $f(z) = f(z_0)\,\mathrm{e}^{h(z)}$. Die Funktion $g(z) := f(z_0)^{1/2}\,\mathrm{e}^{h(z)/2}$ ist dann ebenfalls in G holomorph, und es folgt $g^2 = f$. □

Definition 6.3.3 (Q–Gebiet) *Wir wollen im Folgenden ein Gebiet G als* Q–Gebiet *bezeichnen, wenn $0 \in G$ ist, und wenn jede Einheit die Quadratwurzeleigenschaft hat. Jedes einfach zusammenhängende Gebiet, welches den Nullpunkt enthält, ist also ein Q–Gebiet. Dass umgekehrt jedes Q–Gebiet auch einfach zusammenhängend ist, wird sich später ergeben.*

6.4 Holomorphe Injektionen

Bevor wir den Riemannschen Abbildungssatz beweisen können, zeigen wir zuerst folgendes wesentlich schwächere Resultat:

Lemma 6.4.1 *Zu jedem Q–Gebiet G, welches nicht die gesamte Ebene ist, gibt es eine injektive holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{E}$ mit $f(0) = 0$.*

Beweis: Für ein $a \notin G$ ist $h(z) := z - a$ eine Einheit in $\mathcal{H}(G)$, und hat deshalb die Quadratwurzeleigenschaft. Somit gibt es ein $v \in \mathcal{H}(G)$ mit $v^2(z) = z - a$ für $z \in G$, und dieses v ist offenbar injektiv, da ja h injektiv ist. Weiter ist $v(G) \cap (-v(G)) = \emptyset$, denn aus $z_1,\, z_2 \in G$ und $v(z_1) = -v(z_2)$ folgt $z_1 - a = z_2 - a$, also $z_1 = z_2$ und daher $v(z_1) = v(z_2) = 0$, was nicht sein kann. Nach dem Satz von der offenen Abbildung ist $-v(G)$ offen und nicht leer, enthält also eine abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{K(z_0, r)}$ mit $r > 0$. Also folgt $v(G) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{K(z_0, r)}$. Die Funktion

$$g(z) \;:=\; \frac{r}{2} \left(\frac{1}{z - z_0} \;-\; \frac{1}{v(0) - z_0} \right)$$

ist dann auf $\mathbb{C} \setminus \overline{K(z_0, r)}$ holomorph und injektiv, und erfüllt dort die Abschätzung

$$|g(z)| \;\leq\; \frac{r}{2} \left(\frac{1}{|z - z_0|} \;+\; \frac{1}{|v(0) - z_0|} \right) \;<\; 1\,.$$

Daher ist $f := g \circ v$ injektiv und holomorph in G, und $|f(z)| < 1$ für alle $z \in G$. Weiter ist $f(0) = 0$, was noch zu zeigen war. $\Box$

6.5 Dehnungen

Definition 6.5.1 *Sei G ein Gebiet mit $0 \in G \subset \mathbb{E}$. Eine holomorphe Abbildung $\kappa : G \to \mathbb{E}$ mit*

$$\kappa(0) \;=\; 0\,; \qquad |\kappa(z)| \;>\; |z| \qquad \forall\; z \in G \setminus \{0\}$$

heißt (echte) Dehnung *in G.*

Lemma 6.5.2

(a) *Für jedes $c \in \mathbb{E}$ wird durch $g_c(z) = (z - c)\,(\overline{c}\, z - 1)^{-1}$ eine bijektive Abbildung von $\mathbb{E}$ auf sich definiert, welche zu sich selber invers ist.*

(b) *Für jedes $c \in \mathbb{E}$ ist die Abbildung*

$$\psi_c(z) \;=\; g_{c^2}\big(g_c(z)^2\big)$$

holomorph in $\mathbb{E}$ und erfüllt

$$\psi_c(0) \;=\; 0\,, \qquad |\psi_c(z)| \;<\; |z| \qquad \forall\; z \in \mathbb{E} \setminus \{0\}\,.$$

(c) *Sei $G \subset \mathbb{E}$ ein Q-Gebiet, und sei $c \in \mathbb{E}$ so, dass $c^2 \notin G$ ist. Sei weiter $v \in \mathcal{H}(G)$ diejenige Quadratwurzel der Restriktion von g_{c^2} auf G, welche $v(0) = c$ erfüllt. Dann ist durch $\kappa(z) := g_c(v(z))$ eine Dehnung in G gegeben, und es gilt $\psi_c(\kappa(z)) = z$ für alle $z \in G$.*

Beweis: Die Behauptung (a) folgt durch Nachrechnen oder aus Ergebnissen für sogenannte *Möbiustransformationen*, auch *gebrochen-lineare Abbildungen* genannt. Wegen (a) ist klar, dass $|\psi_c(z)| \le 1$ ist für alle $z \in \mathbb{E}$, sowie $\psi_c(0) = 0$, und deshalb folgt aus dem *Schwarzschen Lemma* dass (b) gilt, da ψ_c keine Drehung ist. Um (c) zu zeigen, beachten wir, dass g_{c^2} eine Einheit in $\mathcal{H}(G)$ ist, und dass $g_{c^2}(0) = c^2$ ist. Daher gibt es eine Quadratwurzel v mit der gewünschten Eigenschaft, und damit ist κ in G holomorph mit Werten in $\mathbb{E}$. Außerdem ist $\kappa(0) = 0$. Nach Definition von v folgt dann $\psi_c(\kappa(z)) = z$ auf G, und somit ist κ injektiv. Mit (b) folgt dann $|z| = |\psi_c(\kappa(z))| < |\kappa(z)|$ für $z \in G \setminus \{0\}$. □

6.6 Der Injektionssatz von Hurwitz

Lemma 6.6.1 (Hurwitz) *Sei G ein Gebiet, und sei (f_n) eine Folge aus $\mathcal{H}(G)$, welche in G kompakt gegen eine nicht konstante Grenzfunktion f konvergiert. Dann gibt es zu jedem $z_0 \in G$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ sowie eine Folge (z_n) in G, so dass*

$$\lim_{n\to\infty} z_n \;=\; z_0\,, \qquad f_n(z_n) \;=\; f(z_0) \quad \forall\; n \ge n_0\,.$$

Beweis: Sei $z_0 \in G$ gegeben, und o. B. d. A. sei $f(z_0) = 0$ angenommen; dann ist f nach Voraussetzung nicht die Nullfunktion. Also existiert ein $r > 0$ derart, dass $K := \{|z - z_0| \le r\} \subset G$, und $f(z) \ne 0$ für $z \in K \setminus \{z_0\}$. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Folge auf K gibt es ein n_0 so, dass $|f_n(z_0)| < \min\{|f_n(z)| \,:\, |z - z_0| = r\}$ für alle $n \ge n_0$, denn andernfalls müsste eine Teilfolge (f_{n_k}) existieren, für welche es Randpunkte z_k gäbe mit $\lim f_{n_k}(z_k) = 0$, und mit dem üblichen Kompaktheitsargument würde die Existenz einer Nullstelle von f auf dem Rand von K folgen, was nicht sein kann. Also liegt für $n \ge n_0$ das Minimum von $|f_n|$ im Inneren von K, woraus mit dem Minimumprinzip die Existenz einer Nullstelle z_n von f_n im Inneren folgt. Es muss dann $\lim z_n = z_0$ sein, denn andernfalls gäbe es eine Teilfolge, welche gegen eine andere Nullstelle von f konvergieren würde, was nicht sein kann. □

Satz 6.6.2 (Injektionssatz) *Seien G_1, G_2 Gebiete, und sei (f_n) eine Folge von in G_1 holomorphen Funktionen mit Werten in G_2, welche in G_1 kompakt gegen ein f konvergiert. Falls f nicht konstant und alle f_n injektiv sind, dann ist auch f injektiv und hat ebenfalls Werte in G_2.*

Beweis: Für ein $z_0 \in G_1$ folgt mit Lemma 6.6.1 dass alle bis auf endlich viele der f_n den Wert $f(z_0)$ annehmen, und deshalb muss $f(z_0) \in G_2$ sein. Also liegen alle Werte von f in G_2. Da alle f_n injektiv sein sollen, folgt dass die Funktionen $f_n(z) - f_n(z_0)$ in $G_1 \setminus \{z_0\}$ nullstellenfrei sind, und wie oben gilt dasselbe dann für die Grenzfunktion, woraus die Injektivität von f folgt. □

6.7 Der Abbildungssatz

Satz 6.7.1 (Riemannscher Abbildungssatz) *Jedes einfach zusammenhängende Gebiet $G \ne \mathbb{C}$ lässt sich biholomorph auf den Einheitskreis $\mathbb{E}$ abbilden.*

Beweis: O. B. d. A. sei $0 \in G$, d. h., G ein Q-Gebiet. Sei $p \in G \setminus \{0\}$, und sei $\mathcal{F} := \{f \in \mathcal{H}(G) \,:\, f \text{ injektiv},\; f(0) = 0,\; f : G \to \mathbb{E}\}$: Wegen Lemma 6.4.1 ist $\mathcal{F} \ne \emptyset$, und daher ist

$$\mu \;:=\; \sup\,\{\,|f(p)| \,:\, f \in \mathcal{F}\,\} \;>\; 0\,.$$

Sei (f_n) eine Folge aus $\mathcal{F}$ mit $\lim |f_n(p)| = \mu$. Nach dem Satz von Montel gibt es eine Teilfolge (h_n), welche in G kompakt gegen ein $h \in \mathcal{H}(G)$ konvergiert, und dann folgt $h(0) = 0$, $|h(p)| = \mu$, so dass h insbesondere nicht konstant ist. Nach dem Injektionssatz ist h injektiv mit Werten in $\mathbb{E}$, d. h., $h \in \mathcal{F}$. Man zeigt leicht, dass $h(G)$ wieder ein Q-Gebiet ist, und wenn es nicht gleich $\mathbb{E}$ wäre, dann gäbe es nach Lemma 6.5.2 (c) eine Dehnung $\kappa : h(G) \to \mathbb{E}$, und $g := \kappa \circ h$ wäre in $\mathcal{F}$, woraus wegen $|g(p)| = |\kappa(h(p))| > |h(p)|$ ein Widerspruch folgen würde. Also ist $h(G) = \mathbb{E}$, und damit ist h die gesuchte Funktion. $\square$

Kapitel 7

Die Picardschen Sätze

In diesem Kapitel halten wir uns sehr eng an das Buch von *R. Remmert* [23]. Unser Ziel sind dabei die beiden Sätze von *E. Picard*, die wichtige Aussagen über die Werte ganzer Funktionen, oder allgemeiner Funktionen in der Nähe einer wesentlichen Singularität treffen.

7.1 Der Satz von Bloch

Definition 7.1.1 *Sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$. Eine Abbildung $f : G \to \mathbb{C}$ heißt* offen, *falls das Bild jeder offenen Teilmenge von G wieder offen ist.*

Lemma 7.1.2 *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, und sei $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ stetig, sowie $f_{|G}$ offen. Sei weiter $a \in G$ so, dass*

$$s := \inf_{z \in \partial G} |f(z) - f(a)| \;>\; 0\,.$$

Dann folgt

$$K(f(a), s) \;:=\; \{z : |z - f(a)| < s\} \;\subset f(G)\,.$$

Beweis: Da $\partial f(G)$ kompakt ist, gibt es ein $w_* \in \partial G$, so dass $d(\partial f(G), f(a)) := \inf_{w \in \partial f(G)} |w - f(a)| = |w_* - f(a)|$ ist. Nach Definition des Infimums bzw. des Randes einer Menge gibt es eine Punktfolge (z_ν) in G derart, dass $(f(z_\nu))$ gegen w_* konvergiert. Weil $\overline{G}$ kompakt, also auch folgenkompakt ist, muss eine Teilfolge gegen ein $z_* \in \overline{G}$ konvergieren, und wir nehmen o. B. d. A. an, dass dies für die gesamte Folge gilt. Also folgt wegen der Stetigkeit von f dass $f(z_*) = w_*$ ist. Da f offen ist, muss z_* ein Randpunkt von G sein, und daraus folgt $|w_* - f(a)| \ge s$, also die Behauptung. □

Definition 7.1.3 *Für eine nichtleere Teilmenge $D \subset \mathbb{C}$ sei $\mathcal{H}(\overline{D})$ die Menge aller Funktionen, welche auf irgendeiner offenen Obermenge von $\overline{D}$ holomorph sind.*

Lemma 7.1.4 *Für $a \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ sei $V := K(a, r)$, und sei $f \in \mathcal{H}(\overline{V})$ nicht konstant, mit*

$$\|f'\|_V \;:=\; \sup_{z \in V} |f'(z)| \;\le\; 2\,|f'(a)|\,.$$

Dann folgt $K(f(a), R) \subset f(V)$ für $R := (3 - 2\sqrt{2})\, r\, |f'(a)|$.

Beweis: O. B. d. A. sei $a = f(a) = 0$ angenommen. Für $g(z) = f(z) - f'(0)\,z = \int_0^z (f'(w) - f'(0))\,dw$ folgt $|g(z)| \le |z| \int_0^1 |f'(tz) - f'(0)|\,dt$. Mit der Cauchyschen Integralformel finden wir

$$|f'(w) - f'(0)| \;=\; \Big| \frac{w}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f'(z)}{z(z-w)}\,dz \Big| \;\le\; \frac{|w|}{r - |w|}\,\|f'\|_V\,.$$

Damit folgt

$$|g(z)| \;\le\; |z| \int_0^1 \frac{|tz|}{r - |tz|}\,\|f'\|_V\,dt \;\le\; \frac{|z|^2}{r - |z|}\,\|f'\|_V \int_0^1 t\,dt \;=\; \frac{|z|^2/2}{r - |z|}\,\|f'\|_V \;\le\; \frac{|z|^2}{r - |z|}\,|f'(0)|\,.$$

Hieraus folgt für alle z mit $|z| = \rho \in (0, r)$:

$$\rho\,|f'(0)| \;-\; |f(z)| \;\le\; |g(z)| \le \; \frac{\rho^2}{r - \rho}\,|f'(0)|\,,$$

oder anders geschrieben: $|f(z)| \ge h(\rho)\,|f'(0)|$, mit $h(\rho) = \rho\,(r - 2\rho)/(r - \rho)$. Die Funktion h nimmt bei $\rho_0 = (1 - 1/\sqrt{2})\,r$ das Maximum $(3 - 2\sqrt{2})\,r$ an, und für die entsprechenden z gilt daher $|f(z)| \ge R$. Durch Anwendung von Lemma 7.1.2 auf $G = K(0, \rho_0)$ folgt die Behauptung. □

Satz 7.1.5 (Satz von Bloch) *Sei $f \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{E}})$, und sei $f'(0) = 1$. Dann enthält das Bild $f(\mathbb{E})$ eine Kreisscheibe mit einem Radius $3/2 - \sqrt{2}$.*

Beweis: Die in $\overline{\mathbb{E}}$ stetige Funktion $|f'(z)|\,(1 - |z|)$ nimmt in einem Punkt $a \in \mathbb{E}$ ihr Maximum M an, und mit $r = (1 - |a|)/2$ gelten

$$M \;=\; 2\,r\,|f'(a)| \;\ge\; 1\,, \quad K(a, r) \;\subset\; \mathbb{E}\,, \quad 1 - |z| \;\ge\; r \quad \forall\, z \in K(a, r)\,.$$

Hiermit folgt $r\,|f'(z)| \le |f'(z)|\,(1 - |z|) \le 2\,r\,|f'(a)|$ für alle $z \in K(a, r)$. Also folgt aus Lemma 7.1.4 die Behauptung. □

Korollar zu Satz 7.1.5 *Wenn f in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ holomorph ist, und wenn $c \in G$ so ist, dass $f'(c) \ne 0$ ist, dann enthält $f(G)$ eine Kreisscheibe vom Radius $s\,|f'(c)|/(12)$, für jedes $s < d(c, \partial G)$. Falls f sogar eine ganze Funktion ist, enthält $f(G)$ Kreisscheiben von beliebig großem Radius.*

Beweis: O. B. d. A. sei $c = 0$. Für jedes solche s ist $\overline{K(0, s)} \subset G$, und deshalb ist $g(z) := f(sz)/(s f'(0)) \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{E}})$ und $g'(0) = 1$. Durch Anwendung des Blochschen Satzes auf g folgt die Behauptung. □

7.2 Der kleine Satz von Picard

Wir wollen zeigen, dass eine nicht konstante ganze Funktion alle komplexen Zahlen bis auf höchstens eine Ausnahme als Werte annehmen muss. Dass eine Ausnahme vorkommen kann, zeigt die Exponentialfunktion. Wir zeigen daher: *Wenn eine ganze Funktion zwei verschiedene Zahlen a und b nicht als Werte annimmt, ist sie konstant.* Da man bei $a \ne b$ immer $g(z) = (f(z) - a)/(b - a)$ setzen kann, ergibt sich, dass die Ausnahmewerte o. B. d. A. gleich 0 und 1 gewählt werden können. Deshalb zeigen wir zunächst:

Lemma 7.2.1 *Sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet, und sei f eine in G holomorphe Funktion, die die Zahlen 0 und 1 nicht als Werte annimmt. Dann gibt es ein in G holomorphes g so, dass gilt*

$$f(z) \;=\; -\exp[\pi i \cosh(2g(z))] \qquad \forall\, z \in G\,. \tag{7.2.1}$$

Kein Punkt der Menge

$$A \;=\; \{\pm \log(\sqrt{m} \;+\; \sqrt{m-1}) \;+\; n\pi i/2 \;:\; m \in \mathbb{N}, \quad n \in \mathbb{Z}\}$$

liegt im Bild $g(G)$, und dieses Bild enthält keine Kreisscheibe vom Radius $r = 1$.

Beweis: Da f keine Nullstellen in G hat, gibt es ein $h \in \mathcal{H}(G)$ mit $f(z) = \exp[2\pi i h(z)]$ in G. Weil 1 nicht von f als Wert angenommen wird, haben h und $h-1$ keine Nullstellen in G. Also gibt es $u, v \in \mathcal{H}(G)$ mit $u^2(z) = h(z)$ und $v^2(z) = h(z) - 1$ in G. Es folgt $u^2(z) - v^2(z) \equiv 1$ in G, und daher kann $u - v$ keine Nullstelle in G haben. Somit existiert ein $g \in \mathcal{H}(G)$ mit $u(z) - v(z) = \exp(-g(z))$ in G. Daraus folgt

$$1 \;+\; 2\,\cosh(2g(z)) \;=\; \left(\mathrm{e}^{g(z)} + \mathrm{e}^{-g(z)}\right)^2/2 \;=\; 2\,u^2(z) \;=\; 2\,h(z)\,.$$

Daraus folgt die Darstellung von f. Wenn $g(z) = \pm\log(\sqrt{m} + \sqrt{m-1}) + n\pi i/2$ ist, folgt $\exp[g(z)] = i^n\,(\sqrt{m} + \sqrt{m-1})^{\pm 1} = i^n\,(\sqrt{m} \pm \sqrt{m-1})$. Da weiter $2\,\cosh(2g(z)) = (\mathrm{e}^{g(z)})^2 + (\mathrm{e}^{-g(z)})^2$ ist, folgt durch Rechnung dass $\cosh(2g(z))$ eine ungerade ganze Zahl ist, was $f(z) = 1$ impliziert. Also kann kein Wert von g in der Menge A liegen.Wenn man die horizontalen bzw. vertikalen Abstände der Punkte in A ausrechnet, so findet man, dass in jeder beliebigen Kreisscheibe vom Radius $r = 1$ mindestens ein Punkt von A liegt. □

Aus dem letzten Lemma und dem Korollar zum Satz von Bloch, angewandt auf die Funktion g, erhalten wir jetzt sofort

Satz 7.2.2 (Kleiner Satz von Picard) *Jede ganze Funktion, die zwei verschiedene komplexe Zahlen nicht als Werte annimmt, ist konstant.*

Beweis: Wie schon gesagt, kann man o. B. d. A. annehmen dass die ganze Funktion f nicht die Zahlen 0 und 1 annimmt. Wenn man g wie in (7.2.1) wählt, ist auch g ganz. Falls g nicht konstant wäre, so müsste das Bild $g(\mathbb{C})$ nach dem Korollar zum Satz von Bloch beliebig große Kreisscheiben enthalten, was dem letzten Lemma widerspricht. Also muss g und damit auch f konstant sein. □

Korollar zu Satz 7.2.2 *Jede in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion, die drei verschiedene komplexe Zahlen nicht als Werte annimmt, ist konstant.*

Beweis: Wenn h eine in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion ist, die drei verschiedene Zahlen a, b, c nicht als Werte annimmt, dann ist $f(z) = (h(z) - a)^{-1}$ eine ganze Funktion, welche die Zahlen $(b-a)^{-1}$ und $(c-a)^{-1}$ nicht als Werte annimmt, und daher folgt die Behauptung. □

Aufgabe 7.2.3 *Finde eine ganze Funktion, die eine gegebene Zahl $a \in \mathbb{C}$ nicht als Wert annimmt. Finde weiter eine meromorphe Funktion, die zwei gegebene Zahlen $a, b \in \mathbb{C}$ mit $a \neq b$ nicht als Werte annimmt.*

7.3 Der große Satz von Picard

Wir geben nun ohne Beweis den sogenannten großen Picardschen Satz an. Ein lesbarer Beweis dieses Satzes findet sich z. B. im Buch von *R. Remmert* [23].

Satz 7.3.1 (Großer Satz von Picard) *Habe f in einem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ eine wesentliche Singularität. Dann nimmt f jede Zahl a mit evtl. einer Ausnahme in jeder Umgebung von z_0 unendlich oft als Wert an.*

Aus diesem Satz folgt eine wesentliche Verschärfung des kleinen Picardschen Satzes: Wenn f eine ganze transzendente Funktion ist (d. h., f ist kein Polynom), dann gilt für alle $w \in \mathbb{C}$ mit höchstens einer Ausnahme, dass die Gleichung $f(z) = w$ unendlich viele Lßungen hat. Aus dem Nullstellensatz für holomorphe Funktionen folgt dann dass die Lösungsmenge dieser Gleichung abzählbar ist und sich nur bei ∞ häuft. Wie häufig z. B. die Nullstellen einer ganzen Funktion sind, ist Gegenstand der sogenannten *Werteverteilungstheorie* – siehe hierzu z. B. das Buch von *I. Laine* [21]. Hier zählt man die Nullstellen einer ganzen Funktion in einem Kreis um den Nullpunkt mit Radius r und untersucht das Anwachsen dieser Zahl als Funktion von r.

Kapitel 8

Asymptotische Entwicklungen

Die Theorie der asymptotischen Entwicklungen behandelt Funktionen f, die an einer festen Stelle z_0, die wir o. B. d. A. als den Nullpunkt $z_0 = 0$ annehmen können, eine Singularität haben, welche auch eine sogenannte *Verzweigungsstelle* sein kann. Dies bedeutet, dass f zwar entlang jedes genügend kleinen Kreises um $z_0 = 0$ analytisch fortgesetzt werden kann, dass aber der Wert von f nach (einmaliger) Fortsetzung entlang eines solchen Kreises (bei Rückkehr zum Ausgangspunkt) nicht der gleiche wie am Anfang ist. Als Beispiel für solche Funktionen nennen wir $z^{1/2}$ und $\log z$. Anders als bei diesen beiden Beispielen soll f jetzt aber, in einem noch zu definierenden Sinn, im Punkt $z_0 = 0$ beliebig oft *sektoriell differenzierbar sein*, und die asymptotische Entwicklung von f ist dann nichts anderes als die Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$. Zur Definition der sektoriellen Ableitungen benötigen wir insbesondere den Begriff eines *Sektors*, und das ist eine Menge der Form

$$S \;:=\; \{\; z \;:\; 0 \;<\; |z| \;<\; r\,, \quad \alpha \;< \arg z \;<\; \beta \;\}\,.$$

Es liegt dann nahe, die Punkte $z \in S$ in der Form $z = \rho\, \mathrm{e}^{i\phi}$ mit $0 < \rho < r$ und $\alpha < \phi < \beta$ zu schreiben. Falls $\beta - \alpha \le 2\,\pi$ ist, kann man diesen Sektor S problemlos als (offene) Teilmenge der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ auffassen, aber um verzweigte Funktionen betrachten zu können, wollen wir auch Sektoren S mit *Öffnungswinkel* $\beta - \alpha > 2\,\pi$ zulassen. Diese Sektoren muss man dann aber so verstehen, dass Punkte $z = \rho\, \mathrm{e}^{i\phi}$ und $\tilde z = \rho\, \mathrm{e}^{i(\phi+2\pi)}$ in S als verschieden anzusehen sind, da eine verzweigte Funktion f an diesen Stellen auch unterschiedliche Werte haben kann. Aus diesem Grund betrachten wir im Folgenden die sogenannte *Riemannsche Fläche des Logarithmus*. Dies bedeutet anschaulich, dass wir anstelle der komplexen Ebene eine unendlich lange Wendeltreppe betrachten, deren Achse der Nullpunkt ist, und auf der die Punkte $z = \rho\, \mathrm{e}^{i\phi}$ und $\tilde z = \rho\, \mathrm{e}^{i(\phi+2\pi)}$ in aufeinanderfolgenden Stockwerken liegen. Im nächsten Abschnitt geben wir eine formale Definition dieser sehr einfachen Riemannschen Fläche. Für eine allgemeine Theorie Riemannscher Flächen wird auf die Literatur, z. B. auf das Buch von *O. Forster* [6], verwiesen.

8.1 Sektorielle Gebiete

Definition 8.1.1 *In diesem Kapitel bezeichnen wir mit $\mathbb{L}$ die Menge aller reellen Zahlenpaare (r, ϕ), wobei $r > 0$ sein soll, zusammen mit der Abbildung*

$$\pi \;:\quad (r, \phi) \;\longmapsto\; z \;=\; \pi(r, \phi) \;:=\; r\, \mathrm{e}^{i\phi} \tag{8.1.1}$$

von $\mathbb{L}$ nach $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Lokal ist die Abbildung π umkehrbar, da offenbar $r = |z|$ und $\phi = \arg z$ ist; allerdings entsprechen die Paare (r, ϕ) und $(r, \phi + 2\,\pi)$ dem gleichen Punkt in $\mathbb{C}^*$. Die Menge $\mathbb{L}$ mit dieser Abbildung nennen wir die Riemannsche Fläche des Logarithmus*, da auf ihr durch*

$$\log z = \log |z| + i\, \arg z\,, \qquad |z| \;=\; r\,, \quad \arg z = \phi$$

der komplexe Logarithmus zu einer eindeutig definierten Funktion wird, während dies in der Menge $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ *bekanntlich nicht der Fall ist.*

Da die Menge $\mathbb{L}$ topologisch nichts anderes als die obere Halbebene in $\mathbb{R}^2$ ist, ist klar, was ein Gebiet $G \subset \mathbb{L}$ ist, und da die Abbildung π stetig und lokal umkehrbar ist, entspricht einem solchen Gebiet ein Bildgebiet $\pi(G)$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Umgekehrt kann ein Gebiet in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ aber nicht immer mit einem Gebiet in $\mathbb{L}$ identifiziert werden, was aber nichts ausmachen wird.

Definition 8.1.2 *Für $d \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ und $0 < r \le \infty$ heißt*

$$S \;=\; S(d,\alpha,r) \;:=\; \big\{ (\rho,\phi) \,:\; 0<\rho<r\,,\; |d-\phi| < \alpha/2 \big\} \;\subset\; \mathbb{L} \tag{8.1.2}$$

ein Sektor*. Dabei soll $\alpha > 2\pi$ zugelassen sein, so dass man sich S in diesem Fall nicht als Teilmenge von $\mathbb{C}$, sondern auf der Riemannschen Fläche des Logarithmus vorstellen muss. Wir nennen d die* Mittelrichtung*, α den* Öffnungswinkel *und r den* Radius *von S. Beachte, dass $r = \infty$ zugelassen ist, und wir schreiben auch kürzer $S(d,\alpha)$ anstelle von $S(d,\alpha,\infty)$. Für $r \ne \infty$ nennen wir*

$$\overline{S} \;=\; \overline{S(d,\alpha,r)} \;:=\; \big\{ (\rho,\phi) \,:\; 0<\rho\le r\,,\; |d-\phi| \le \alpha/2 \big\} \;\subset\; \mathbb{L} \tag{8.1.3}$$

auch einen abgeschlossenen Sektor *– beachte aber, dass der Nullpunkt nicht zu $\overline{S}$ gehört. Ein Gebiet $G \subset \mathbb{L}$ heißt* sektoriell*, falls es $d \in \mathbb{R}$ und $\alpha \in \mathbb{R}_+$ gibt, für die folgendes gilt:*

(a) *$G \subset S(d,\alpha)$.*

(b) *$\forall\, \beta \in (0,\alpha)\ \exists\, r > 0$ mit $\overline{S(d,\beta,r)} \subset G$.*

Einerseits ist es im Folgenden wichtig zu beachten, dass ein Zahlenpaar $(r,\phi) \in \mathbb{L}$ zwar eine komplexe Zahl z festlegt, dass aber umgekehrt dieselbe Zahl z zu unterschiedlichen Paaren $(r,\phi) \in \mathbb{L}$ gehört. Andererseits wird es bequem sein, statt $(r,\phi) \in \mathbb{L}$ einfacher und kürzer $z = r\,\mathrm{e}^{i\phi}$ zu schreiben, wobei aber immer zu beachten ist, dass dann $z = r\,\mathrm{e}^{i\phi}$ und $z\,\mathrm{e}^{2\pi i} = r\,\mathrm{e}^{i(\phi+2\pi)}$ zwar dieselben komplexen Zahlen, aber unterschiedliche Punkte in $\mathbb{L}$ sind! Wir wollen dann eine Aussage der Form $z \to z_0$ so verstehen, dass $z = r\,\mathrm{e}^{i\phi}$ und $z_0 = r_0\,\mathrm{e}^{i\phi_0}$ sein sollen, wobei $r \to r_0$ und $\phi \to \phi_0$ gehen soll. Mit dieser Festlegung ist dann klar, was es bedeutet dass eine in einem Gebiet $G \subset \mathbb{L}$ definierte Funktion f *holomorph* oder *analytisch* ist. Außerdem können wir Kurven bzw. Kurvenintegrale in $\mathbb{L}$ definieren, wobei die Parameterdarstellung der Kurve durch zwei Parameterdarstellungen $r(t)$ und $\phi(t)$ gegeben ist. Diese zusammen legen dann ein $z(t) = r(t)\,\mathrm{e}^{\phi(t)}$ fest, und falls die Kurve differenzierbar ist, ist nach der Kettenregel

$$z'(t) \;=\; \big(r'(t) + r(t)\,\phi'(t)\big)\,\mathrm{e}^{\phi(t)}\,.$$

Aufgabe 8.1.3 *Zeige dass die in der Definition eines sektoriellen Gebietes vorkommenden Parameter d und α durch G eindeutig bestimmt sind. Wie bei Sektoren nennen wir d Mittelrichtung und α Öffnungswinkel von G.*

8.2 Sektorielle Stetigkeit und Ableitungen

Wenn nichts anderes gesagt wird, sei im Folgenden G immer ein sektorielles Gebiet mit Mittelrichtung $d \in \mathbb{R}$ und Öffnungswinkel $\alpha > 0$.

Definition 8.2.1 *Die Menge aller in G holomorphen Funktionen wird wieder mit $\mathcal{H}(G)$ bezeichnet. Ein $f \in \mathcal{H}(G)$ heißt*

(a) *im Nullpunkt* beschränkt*, falls zu jedem abgeschlossenen Teilsektor $\overline{S} \subset G$ ein C existiert, so dass*

$$|f(z)| \;\le\; C \qquad \forall\, z \in \overline{S}\,.$$

(b) *im Nullpunkt* stetig*, falls ein* $f_0 \in \mathbb{C}$ *existiert, so dass*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall \beta \in (0,\alpha) \quad \exists r > 0 \quad \forall z \in \overline{S(d,\beta,r)} \;: \qquad |f(z) - f_0| \;\leq\; \varepsilon\,. \tag{8.2.1}$$

Wenn dies so ist, schreiben wir auch $f(0) := f_0 = \lim_{G \ni z \to 0} f(z)$.

(c) *im Nullpunkt* beliebig oft differenzierbar*, falls alle Ableitungen von* f *im Nullpunkt stetig sind.*

Aufgabe 8.2.2 *Sei* f *im Nullpnkt stetig, und sei sein Grenzwert* $f_0 \neq 0$*. Zeige: Dann existiert ein sektorielles Gebiet* $G_1 \subset G$ *mit dem gleichen Öffnungswinkel* α *und derselben Mittelrichtung* d *wie* G*, so dass* $f(z) \neq 0$ *in* G_1 *ist.*

Lemma 8.2.3 *Für alle* $f \in \mathcal{H}(G)$ *sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) f *ist im Nullpunkt beliebig oft differenzierbar.*

(b) *Für alle* $k \in \mathbb{N}_0$ *gibt es* $f_k \in \mathbb{C}$ *derart, dass für alle* $N \in \mathbb{N}_0$ *die Funktionen*

$$r_N(z;f) \;:=\; z^{-N} \Big(f(z) \;-\; \sum_{k=0}^{N-1} f_k\, z^k \Big) \tag{8.2.2}$$

im Nullpunkt beschränkt sind.

Falls eine der Aussagen richtig ist, dann sind alle $r_N(z;f)$ *sogar im Nullpunkt stetig, und es gilt*

$$f_k \;=\; \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \;=\; \lim_{G \ni z \to 0} r_k(z;f) \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}_0\,. \tag{8.2.3}$$

Insbesondere sind also alle Zahlen f_k *durch* f *eindeutig bestimmt.*

Beweis: Sei (a) richtig. Durch partielle Integration zeigt man mit Induktion über N die Identität

$$f(z) \;=\; \int_0^z \frac{(z-w)^{N-1}}{(N-1)!}\; f^{(N)}(w)\; dw \;+\; \sum_{k=0}^{N-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\; z^k \qquad \forall\, N \geq 1\,,\; z \in G\,.$$

Wir wählen β und r so, dass $\overline{S(d,\beta,r)} \subset G$ ist, so dass wir für $z \in \overline{S(d,\beta,r)}$ geradlinig integrieren können. Wenn man jetzt $f_k = f^{(k)}(0)/k!$ setzt und in dem obigen Integral $w = x\,z$, $0 \leq x \leq 1$ substituiert, so erhält man für solche z und alle $N \geq 1$ die Darstellung

$$r_N(z;f) \;-\; f_N \;=\; \int_0^1 \frac{(1-x)^{N-1}}{(N-1)!}\; \big(f^{(N)}(xz) - f^{(N)}(0)\big)\; dx\,. \tag{8.2.4}$$

Hieraus folgt dass *der Rest* $r_N(z;f)$ in G gegen f_N konvergiert wenn $z \to 0$ geht, und daraus wiederum ergibt sich (b) – beachte, dass für $N = 0$ nichts zu zeigen ist! Wenn umgekehrt (b) erfüllt ist, dann ergibt sich mit der Cauchyschen Integralformel für Ableitungen für $N \geq 0$ und $z \in G$

$$f^{(N)}(z) \;-\; N!\, f_N \;=\; \frac{d^N}{dz^N}\; z^{N+1}\, r_{N+1}(z;f) \;=\; \frac{N!}{2\,\pi\, i} \oint_{\gamma(z)} \frac{w^{N+1}\, r_{N+1}(w;f)}{(w-z)^{N+1}}\; dw\,, \tag{8.2.5}$$

wobei entlang eines kleinen Kreises um z mit Radius $\delta_z > 0$ integriert wird. Für β, r und $\tilde\beta > \beta$, $\tilde r > r$ so, dass $\overline{S(d,\beta,r)} \subset \overline{S(d,\tilde\beta,\tilde r)} \subset G$ ist, sieht man, dass man $\delta_z = |z|\,\delta$ wählen kann, wobei $z \in \overline{S(d,\beta,r)}$ und $\delta > 0$ unabhängig von z und so klein ist, dass der Träger von γ in $\overline{S(d,\tilde\beta,\tilde r)}$ ist. Durch Abschätzen dieses Integrals folgt dann, dass $f^{(N)}(z) \;-\; N!\, f_N \to 0$ geht für $z \to 0$ in $\overline{S(d,\beta,r)}$, woraus (a) folgt. □

8.3 Asymptotische Entwicklungen

Definition 8.3.1 *Sei $f \in \mathcal{H}(G)$, und sei $\hat f(z) = \sum_0^\infty f_k\, z^k$ eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$. Wir nennen $\hat f(z)$* asymptotische Entwicklung *oder* Asymptotik für *$f(z)$, für $z \to 0$ in G, falls die in* (8.2.2) *definierten Reste $r_N(z;f)$ für alle $N \in \mathbb{N}_0$ im Nullpunkt beschränkt sind. Wir schreiben dann auch*

$$f(z) \;\cong \hat f(z) \quad \text{in} \quad G\,.$$

Beispiel 8.3.2 *Für $k > 0$ sei $f(z) = \exp(-z^{-k})$, $2k\,|\arg z| < \pi$. Dann ist $f(z) \cong \hat 0(z)$, wobei $\hat 0(z)$ die Potenzreihe bezeichnet, deren Koeffizienten alle verschwinden. Dies ist richtig, da e^w in jedem Sektor der Form $S(0, \pi - \varepsilon)$, mit $\varepsilon > 0$, schneller als jede Potenz von w anwächst, wenn $w \to \infty$ geht.*

Bemerkung 8.3.3 *Nach* Lemma 8.2.3 *ist $\hat f(z)$ genau dann asymptotische Entwicklung für $f(z)$, wenn alle Ableitungen von f im Nullpunkt stetig sind, und wenn* (8.2.3) *gilt. Daher hat $f(z)$ höchstens eine asymptotische Entwicklung, und diese ist gleich der Taylorreihe von $f(z)$. Das angegebene Beispiel zeigt aber, dass zu einer Reihe $\hat f(z)$ immer unendlich viele Funktionen existieren, die diese Asymptotik haben; dass es auch immer ein $f(z)$ gibt, folgt aus dem Satz von Ritt, der im übernächsten Abschnitt bewiesen wird.*

Definition 8.3.4 *Wir schreiben $\mathcal{A}(G)$ für die Menge aller $f \in \mathcal{H}(G)$, welche für $z \to 0$ eine asymptotische Entwicklung $\hat f(z)$ haben. Die Menge der Funktionen $f \in \mathcal{A}(G)$, für die $\hat f(z)$ die Nullreihe ist, soll mit $\mathcal{A}_0(G)$ bezeichnet werden. Da jede Funktion f nur eine asymptotische Entwicklung haben kann, erhalten wir eine Abbildung*

$$J \;:\quad f \;\mapsto \hat f(z)$$

mit Definitionsbereich $\mathcal{A}(G)$ und Bildbereich $\mathbb{C}[[z]]$ – dies ist die übliche Bezeichnung für die Menge aller formalen Potenzreihen in der Variablen z mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$.

Satz 8.3.5 (Rechenregeln) *Für $f, g \in \mathcal{A}(G)$ sind auch $f + g$, fg, $f' \in \mathcal{A}(G)$. Genauer gilt: Aus $f(z) \cong \hat f(z)$ in G und $g(z) \cong \hat g(z)$ in G folgt $f(z) + g(z) \cong \hat f(z) + \hat g(z)$ in G, $f(z)g(z) \cong \hat f(z)\hat g(z)$ in G, sowie $f'(z) \cong \hat f'(z)$ in G.*

Beweis: Die Leibnizregel für höhere Ableitungen eines Produktes besagt, dass

$$\frac{d^k}{dt^k}\, f(z)\, g(z) \;=\; \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}\, f^{(k-j)}(z)\, g^{(j)}(z)\,,$$

also insbesondere

$$\frac{1}{k!}\,\frac{d^k}{dt^k}\, f(z)\, g(z)_{|z=0} \;=\; \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(k-j)}(0)}{(k-j)!}\,\frac{g^{(j)}(0)}{j!}\,.$$

Hieraus folgt die Regel für das Produkt fg. Die übrigen Regeln sind offensichtlich. □

In der Sprache der Algebra kann man die Resultate des letzten Satzes folgendermaßen ausdrücken: *Die Menge $\mathcal{A}(G)$ ist eine differentielle Algebra über $\mathbb{C}$, und die Abbildung J ist relationstreu. Insbesondere ist J linear, und der Kern von J ist gleich $\mathcal{A}_0(G)$.*

Definition 8.3.6 *Sei der Öffnungswinkel von G größer als 2π, so dass also Punkte in G existieren, deren Argumente sich um 2π unterscheiden. Dann nennen wir ein $f \in \mathcal{H}(G)$* unverzweigt, *falls*

$$\forall\, z \quad \text{mit} \quad z,\, z\,\mathrm{e}^{2\pi i} \;\in\; G: \qquad f(z) \;=\; f(z\mathrm{e}^{2\pi i})\,.$$

Wenn eine Funktion f in einer punktierten Kreisscheibe $K'(0,r)$ in der Ebene holomorph ist, dann ist sie auch in jedem Gebiet auf der Riemannschen Fläche, in welchem nur Punkte z mit $|z| < r$ liegen, holomorph und unverzweigt, und wir sagen dass sich solche f auf die Riemannsche Fläche liften lassen.

Satz 8.3.7 *Ist $f \in \mathcal{H}(K'(0,r))$ für ein $r > 0$, und ist f im Nullpunkt beschränkt, also auch im Nullpunkt holomorph, so ist die Potenzreihenentwicklung von f um 0 auch asymptotische Entwicklung der Liftung von f in jedem sektoriellen Gebiet, in welchem nur Punkte z mit $|z| < r$ liegen. Ist umgekehrt der Öffnungswinkel von G größer als 2π, und ist $f \in \mathcal{A}(G)$ unverzweigt, so ist f im Nullpunkt der komplexen Ebene holomorph.*

Beweis: Aus $f(z) = \sum_0^\infty f_k\, z^k$, für $|z| < r$, folgt $r_N(z;f) = \sum_N^\infty f_k\, z^{k-N}$, und deshalb sind alle Reste im Nullpunkt beschränkt. Also ist die Liftung zur Potenzreihe von f asymptotisch. Die Umkehrung ist klar, da alle $f \in \mathcal{A}(G)$ im Nullpunkt beschränkt sind. □

8.4 Der Satz von Ritt

Bei einer konvergenten Potenzreihe können die Koeffizienten nicht beliebig schnell wachsen; dies ist bei asymptotischen Reihen völlig anders:

Satz 8.4.1 (Ritt) *Zu jedem sektoriellen Gebiet G und jeder Potenzreihe $\hat f(z)$ gibt es eine Funktion $f \in \mathcal{H}(G)$ mit $f(z) \cong \hat f(z)$ in G.*

Beweis: O. B. d. A. sei $G = S(d,\alpha)$. Mit $\beta = \pi/\alpha$ und $c_k = (|f_k|\, k!)^{-1}$ falls $f_k \neq 0$, bzw. $c_k = 0$ im anderen Fall, setzen wir

$$w_k(z) \;=\; 1 \;-\; \exp\big[-c_k\, z^{-\beta}\, \mathrm{e}^{id\beta}\big] \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}_0\,.$$

Da in der linken Halbebene $|1 - \mathrm{e}^z| < |z|$ ist, und da $|\arg(z\mathrm{e}^{-id})^\beta| < \pi/2$ ist, folgt die Abschätzung

$$|f_k|\,|z^k|\,|w_k(z)| \;\le\; \frac{|z|^{k-\beta}}{k!} \qquad \forall\, z \in G\,,\; k \ge 0\,.$$

Also konvergiert die Reihe

$$f(z) \;=\; \sum_{k=0}^\infty f_k\, z^k\, w_k(z)$$

in G kompakt, und somit ist $f \in \mathcal{H}(G)$. Weiter gilt für $M \ge \beta$

$$z^M\, r_N(z;f) \;=\; \sum_{k=N}^\infty f_k\, z^{k+M-N}\, w_k(z) \;-\; \sum_{k=0}^{N-1} f_k\, z^{k+M-N}\, \exp(-c_k(z\mathrm{e}^{-id})^{-\beta})\,.$$

Während die erste Reihe auf jedem abgeschlossenen Teilsektor von G beschränkt ist, konvergieren die Glieder der zweiten Summe alle gegen 0 für $z \to 0$ in G. Daraus folgt die Beschränktheit von $z^M\, r_N(z;f)$, und mit Aufgabe 8.4.2 folgt die Behauptung des Satzes. □

Aufgabe 8.4.2 *Seien $f \in \mathcal{H}(G)$ und $\hat f(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ so, dass für ein festes $M \in \mathbb{N}$ die Funktionen $z^M\, r_N(z;f)$, $N \in \mathbb{N}_0$, alle im Nullpunkt beschränkt bleiben. Zeige dass dann $f(z) \cong \hat f(z)$ in G folgt.*

Einerseits existiert nach dem Satz von Ritt zu jeder Potenzreihe eine Funktion, die diese Reihe auf einem gegebenen Gebiet als asymptotische Entwicklung hat, andererseits ist diese Funktion nicht eindeutig bestimmt. Anders ausgedrückt bedeutet dies, dass die Abbildung J von $\mathcal{A}(G)$ auf die Menge $\mathbb{C}[[z]]$ aller formalen Potenzreihen surjektiv, aber nicht injektiv ist!

8.5 Gevrey-Asymptotiken

In der Definition einer asymptotischen Entwicklung wird nur verlangt, dass alle Reste $r_N(z;f)$ im Nullpunkt beschränkt sind, aber es wird nichts ausgesagt, wie diese Schranke von N abhängt. Dies ist anders in der folgenden Definition:

Definition 8.5.1 *Für $f \in \mathcal{H}(G)$, eine Potenzreihe $\hat{f}(z) = \sum_0^\infty f_k\, z^k$ und eine Zahl $s \geq 0$ heißt $\hat{f}(z)$* asymptotische Entwicklung von f der (Gevrey-)Ordnung s, *falls zu jedem abgeschlossenen Teilsektor $\overline{S} \subset G$ zwei Konstanten C, K existieren, so dass*

$$|r_N(z;f)| \;\leq\; C\,K^N\,\Gamma(1+s\,N) \qquad \forall\; z \in \overline{S}\,, \quad N \geq 0\,. \tag{8.5.1}$$

Wir schreiben dann $f(z) \cong_s \hat{f}(z)$ in G, und sagen auch dass f die Gevrey-Asymptotik $\hat{f}(z)$ der Ordnung s *besitzt. Die Menge aller $f \in \mathcal{H}(G)$, die eine solche Gevrey-Ordnung besitzen, soll im Folgenden mit $\mathcal{A}_s(G)$ bezeichnet werden, und wir schreiben $\mathcal{A}_{s,0}(G)$ für diejenigen $f \in \mathcal{A}_s(G)$, die zur Nullreihe asymptotisch sind, für die also $J(f) = \hat{0}$ ist.*

Bemerkung 8.5.2 *Im Fall $s = 0$ folgt aus $f(z) \cong_0 \hat{f}(z)$ in G, dass die Potenzreihe für $z \in G$ mit $|z|\,K < 1$ gegen f konvergiert. Daraus folgt dass f insbesondere unverzweigt sein muss.*

Aufgabe 8.5.3 *Seien $f \in \mathcal{H}(G)$ und $s > 0$ sowie $k = 1/s$. Zeige dass folgende beiden Aussagen äquivalent sind:*

(a) *Es gilt $f(z) \cong_s \hat{0}(z)$ in G, wobei $\hat{0}(z)$ die Nullreihe, also die Potenzreihe, deren Koeffizienten alle verschwinden, bezeichnet.*

(b) *Zu jedem abgeschlossenen Teilsektor $\overline{S} \subset G$ gibt es Zahlen $C, K > 0$ so, dass*

$$|f(z)| \;\leq\; C\,\exp[-|z|^{-k}/K] \qquad \forall\; z \in \overline{S}\,. \tag{8.5.2}$$

Anleitung: *Zeige zunächst dass aus* (a) *für jedes $\overline{S} \subset G$ die Existenz von $C, K > 0$ folgt, für welche $|f(z)| \leq C\,(|z|K)^x\,\Gamma(1+s\,x)$ für alle $x \geq 1$ und alle $z \in \overline{S}$ gilt. Wähle dann für kleine Werte von $|z|$ die Zahl x in Abhängigkeit von z so, dass die rechte Seite minimal wird.*

Aufgabe 8.5.4 *Gegeben seien ein $f \in \mathcal{H}(G)$, eine Potenzreihe $\hat{f}(z) = \sum_0^\infty f_k\, z^k$ und eine Zahl $s \geq 0$. Sei weiter eine beliebig kleine Zahl $\delta > 0$ gewählt. Zeige: Wenn für jeden abgeschlossenen Teilsektor $\overline{S} \subset G$ mit Radius $r \leq \delta$ Zahlen $C, K > 0$ existieren, für welche* (8.5.1) *gilt, dann folgt bereits $f(z) \cong_s \hat{f}(z)$. Es reicht also, die Abschätzung* (8.5.1) *in der Nähe des Nullpunktes zu zeigen.*

Lemma 8.5.5 *Für $f \in \mathcal{H}(G)$ und $s \geq 0$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *f ist im Nullpunkt beliebig oft differenzierbar, und zu jedem abgeschlossenen Teilsektor $\overline{S} \subset G$ gibt es Konstanten $C, K > 0$ so, dass*

$$|f^{(k)}(z)| \;\leq C\,K^k\,k!\,\Gamma(1+sk) \qquad \forall\; k \geq 0\,,\; z \in \overline{S}\,. \tag{8.5.3}$$

(b) *Es gibt ein $\hat{f}(z) = \sum_0^\infty f_k\, z^k$ so, dass $f(z) \cong_s \hat{f}(z)$ in G ist.*

Falls dies so ist, dann folgt (8.2.3), *und hieraus folgt*

$$|f_k| \;\leq\; C\,K^k\,\Gamma(1+s\,k) \qquad \forall\; k \geq 0\,. \tag{8.5.4}$$

Beweis: Geht ganz analog zum Beweis von Lemma 8.2.3. □

Aufgabe 8.5.6 *Für ein* $\hat f(z) = \sum_0^\infty f_j\, z^j$ *sei*

$$\int_0^z \hat f(w)\, dw = \sum_1^\infty \frac{f_{j-1}}{j}\, z^j\,.$$

Zeige: Aus $f(z) \cong_s \hat f(z)$ *in* G *folgt* $\displaystyle\int_0^z f(w)\, dw \cong_s \int_0^z \hat f(w)\, dw$.

Definition 8.5.7 *Wir sagen, dass eine Potenzreihe* $\hat f(z) = \sum_0^\infty f_k\, z^k$ die Gevrey-Ordnung $s \ge 0$ *hat, wenn es Konstanten* C, K *gibt, für welche* (8.5.4) *gilt. Dies ist offensichtlich gleichbedeutend damit, dass die Reihe* $g(z) = \sum_0^\infty f_k\, z^k/\Gamma(1{+}sk)$ *einen positiven Konvergenzradius hat, also eine in einer Kreisscheibe um den Ursprung holomorphe Funktion* g *definiert. Diese Funktion, bzw. ihre Potenzreihe, heißt auch* formale Boreltransformation *von* $\hat f(z)$ *der Ordnung* s *– vergleiche hierzu auch* Abschnitt 8.9. *Die Menge aller formalen Potenzreihen der Gevrey-Ordnung* s *sei mit* $\mathbb{C}[[z]]_s$ *bezeichnet.*

Beispiel 8.5.8 *Für* $|d| < \pi/2$ *definieren wir*

$$f(z) \;=\; \int_0^{\infty(d)} \frac{\mathrm{e}^{-w}}{1+wz}\, dw\,, \qquad |d + \arg z| < \pi\,, \tag{8.5.5}$$

wobei die Integration entlang des Strahles $\arg w = d$ *ausgeführt wird. Das Integral ist in dem angegeben Sektor absolut und kompakt konvergent und stellt deshalb dort eine holomorphe Funktion dar. Mit dem Cauchyschen Integralsatz zeigt man, dass sich der Wert* $f(z)$ *nicht ändert, wenn man* d *variiert, und deshalb kann* f *in den Sektor* $S(0, 3\pi)$ *fortgesetzt werden. Durch Vertauschen von Integration und Ableitung zeigt man für* $k \ge 0$

$$f^{(k)}(z) \;=\; (-1)^k\, k! \int_0^{\infty(d)} \frac{w^k\, \mathrm{e}^{-w}}{(1+wz)^{k+1}}\, dw\,, \qquad |d + \arg z| < \pi\,, \tag{8.5.6}$$

und durch Abschätzen dieses Integrales erhält man, dass $|f^{(k)}(z)| \le C\, K^k\, (k!)^2$ *für* z *in einem beliebigen abgeschlossenen Teilsektor von* $S(0, 3\pi)$, *wobei* C *und* K *von dem Teilsektor abhängen, aber von* k *unabhängig sind. Dies zeigt dass* f *in* $S(0, 3\pi)$ *eine Gevrey-Asymptotik der Ordnung* $s = 1$ *hat, und durch Einsetzen von* $z = 0$ *in* (8.5.6) *findet man* $f(z) \cong_1 \sum_0^\infty k!\, z^k$.

Beispiel 8.5.9 *Sei* $s > 0$. *Die Funktion* $f(z) = \exp[-z^{-s}]$ *ist in* $S(0, \pi/s)$ *asymptotisch zur Nullreihe, und dies ist eine Entwicklung der Gevrey-Ordnung* s.

Aufgabe 8.5.10 (Beta-Integral) *Für komplexe Zahlen* α, β *in der rechten Halbebene gilt die Gleichung*

$$\frac{\Gamma(\alpha)\, \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \;=\; \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1}\, x^{\beta-1}\, dx\,.$$

Zeige dass hieraus folgt $\Gamma(1+s)\Gamma(1+\sigma) \le \Gamma(1+s+\sigma)$ *für* $s, \sigma \ge 0$.

Für Gevrey-Asymptotiken gelten analoge Rechenregeln wie für die “normalen” Asymptotiken – die “Produktregel” ist allerdings schwerer zu beweisen!

Satz 8.5.11 (Rechenregeln für Gevrey-Asymptotiken) *Für* $f, g \in \mathcal{A}_s(G)$ *sind auch* $f+g$, fg, $f' \in \mathcal{A}_s(G)$. *Genauer gilt: Aus* $f(z) \cong_s \hat f(z)$ *in* G *und* $g(z)_s \cong \hat g(z)$ *in* G *folgt* $f(z) + g(z) \cong_s \hat f(z) + \hat g(z)$ *in* G, $f(z)g(z) \cong_s \hat f(z)\hat g(z)$ *in* G, *sowie* $f'(z) \cong_s \hat f'(z)$ *in* G.

Beweis: Wenn man die Leibnizregel benutzt und die Ableitungen von f und g wie in Lemma 8.5.5 abschätzt, erhält man mit geeigneten Konstanten

$$\Big| \frac{d^k}{dt^k}\, f(z)\, g(z) \Big| \;\le\; C_f\, C_g\, k! \sum_{j=0}^{k} K_f^{k-j}\, K_g^j\, \Gamma(1+s(k-j))\, \Gamma(1+sj) \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}_0\,.$$

Mit Aufgabe 8.5.10 kann man weiter abschätzen

$$\Gamma(1+s(k-j))\, \Gamma(1+sj) \;\le\; \Gamma(1+sk)\,,$$

und hieraus folgt mit hinreichend großen Konstanten C, K die Ungleichung

$$\Big| \frac{d^k}{dt^k}\, f(z)\, g(z) \Big| \;\le\; C\, K^k\, k! \Gamma(1+sk) \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}_0\,.$$

Der Rest der Aussagen ist leicht einzusehen. □

8.6 Gevrey-Asymptotiken in schmalen Sektoren

Der folgende Satz, zusammen mit Beispiel 8.5.9, zeigt dass bei sektoriellen Gebieten G mit Öffnungswinkel $\le s\,\pi$ die Abbildung $J \,:\, \mathcal{A}_s(G) \to \mathbb{C}[[z]]_s$ wieder surjektiv, aber nicht injektiv ist. Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, sind die Verhältnisse bei großem Öffnungswinkel vollkommen anders!

Satz 8.6.1 (Satz von Gevrey-Ritt) *Für jedes $s > 0$, jedes sektorielle Gebiet G mit Öffnungswinkel höchstens gleich $s\,\pi$, und jede formale Potenzreihe $\hat f(z)$ von Gevrey-Ordnung s gibt es ein $f \in \mathcal{H}(G)$ mit $f(z) \cong_s \hat f(z)$ in G.*

Beweis: Nach Definition der Gevrey-Ordnung einer Potenzreihe ist die formale Boreltransformation $g(z) = \sum_0^\infty f_k\, z^k/\Gamma(1+sk)$ der Ordnung s für hinreichend kleines $r > 0$ im Kreis $|z| < r$ holomorph. Wir wählen ein ρ mit $0 < \rho < r$ und schließen aus der Cauchyschen Integralformel auf die Existenz von $C, K > 0$ mit

$$|g^{(j)}(z)| \;\le\; C\, K^j\, j! \qquad \forall\, j \in \mathbb{N}_0\,, \quad |z| \;\le\; \rho\,.$$

Wir setzen die Funktion g außerhalb des Kreises um den Ursprung mit Radius ρ gleich der Nullfunktion und erhalten so eine in allen Punkten z außer den Randpunkten des Kreises holomorphe Funktion, und die obige Abschätzung ihrer Ableitungen gilt dann trivialerweise in der ganzen komplexen Ebene. Jetzt wählen wir ein $d \in \mathbb{R}$ und definieren

$$f(z) \;=\; z^{-\kappa} \int_0^{\infty(d)} g(u)\; \exp[-(u/z)^\kappa]\; du^\kappa \;=\; \int_0^{\infty(d_z)} g(z\, w^s)\; \mathrm{e}^{-w}\; dw\,,$$

wobei $\kappa = 1/s$, $d_z = \kappa\,(d - \arg z)$ und $du^\kappa = \kappa\, u^{\kappa-1}\, du$ ist. Diese Funktion ist auf der ganzen Riemannschen Fläche des Logarithmus holomorph und heißt *die endliche Laplacetransformation von f der Ordnung k.* Ihre Ableitungen erhält man, indem man den Integranden im zweiten Integral nach z differenziert, wobei an einer Stelle nur die einseitigen Ableitungen existieren. Daraus ergibt sich

$$f^{(j)}(z) \;=\; \int_0^{\infty(d_z)} g^{(j)}(z\, w^s)\; w^{sj}\; \mathrm{e}^{-w}\; dw \qquad \forall\, j \in \mathbb{N}_0 \tag{8.6.1}$$

Weiter sei jetzt z so, dass $|d_z| < \pi/2$. Dann folgt aus der Definition der Gammafunktion mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes

$$\Gamma(1+sk) \;=\; \int_0^{\infty(d_z)} w^{sk}\; \mathrm{e}^{-w}\; dw\,.$$

Daraus ergibt sich, unter Benutzung der obigen Abschätzung der Ableitungen von g, dass

$$|f^{(j)}(z)| \;\le\; C\,K^j\,\Gamma(1+sk)\,j! \qquad \forall\, j \in \mathbb{N}_0\,, \quad |d - \arg z| \;\le\; s\,\pi/2\,.$$

Weiter folgt aus (8.6.1) dass alle Ableitungen im Nullpunkt stetig sind, und dass $f^{(j)}(0) = g^{(j)}(0)\,\Gamma(1{+}sj)$ ist. Da d beliebig ist, ergibt sich hieraus die Behauptung. $\square$

8.7 Gevrey-Asymptotiken in großen Sektoren

Der folgende Satz ist eine Variante des Maximum-Prinzips und wird im Folgenden benötigt. Beachte, dass die Aussage des Satzes trivial richtig ist, wenn die rechte Seite der zweiten Ungleichung unendlich ist.

Satz 8.7.1 (Phragmén-Lindelöf) *Seien $s > 0$ und $S = \{z :\ |z| > \rho_0\,,\ \alpha < \arg z < \beta\}$ ein Sektor, mit $\rho_0 > 0$ und $0 < \beta - \alpha < s\,\pi$. Sei f in S holomorph und auf dem Rand von S stetig. Falls dann Konstanten $C, K > 0$ existieren, für welche*

$$|f(z)| \;\le\; C\ \exp[K\,|z|^k] \qquad \forall\, z \in S\,,$$

wobei $k = 1/s$ ist, dann folgt

$$|f(z)| \;\le\; \sup_{u \in \partial S}\ |f(u)| \qquad \forall\, z \in S\,,$$

wobei ∂S den Rand von S bezeichnet.

Beweis: Eine Substitution $z \mapsto a\,z$ mit $|a| = 1$ kann dazu benutzt werden, den Sektor S zu drehen. Da sich dabei sonst nichts verändert, können wir o. B. d. A. annehmen dass $\beta = -\alpha$ ist. Für $\pi/(2\beta) > \kappa > k$ und $\varepsilon > 0$ ist $\exp[-\varepsilon z^\kappa]$ in S fallend. Somit gilt $g(z) := f(z)\,\exp[-\varepsilon z^\kappa] \to 0$ in S. Für alle $z \in \partial S$ folgt dass $|g(z)| \le m$ ist, mit $m := \sup_{u \in \partial S}\ |f(u)|$, unabhängig von ε. Aus dem Maximumprinzip, angewandt auf die Funktion $g(1/w)$, folgt dieselbe Abschätzung dann auch für $z \in S$, und für $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung. $\square$

Die Bedeutung des obigen Satzes liegt für uns darin, dass man mit ihm das folgende Resultat beweisen kann:

Satz 8.7.2 (Watson's Lemma) *Sei $s > 0$, und sei G ein sektorielles Gebiet mit Öffnungswinkel $> s\,\pi$. Wenn f holomorph in G ist, und wenn f in G die Nullreihe als Gevrey-Asymptotik der Ordnung s hat, dann ist f die Nullfunktion.*

Beweis: Sei $\overline{S}$ ein abgeschlossener Teilsektor von G mit Öffnungswinkel $\alpha > s\,\pi$ und Mittelrichtung d. Es gilt dann (8.5.2) für geeignete $C, K > 0$, und insbesondere ist f auf $\overline{S}$ betragsmäßig durch C beschränkt. Mit $\kappa = \pi/\alpha < k$ und $a = r\,\mathrm{e}^{id\kappa}$, $r > 0$, folgt dass $a\,z^\kappa$ genau dann in der abgeschlossenen rechten Halbebene liegt, wenn $1/z \in \overline{S}$ ist. Die Funktion $g_r(z) := f(1/z)\,\mathrm{e}^{az^\kappa}$ ist daher (wegen $\kappa < k$ und (8.5.2)) auf $\overline{S}_1 := \{z :\ 1/z \in \overline{S}\}$ beschränkt, und auf dem Rand des Sektors ist $|g_r(z)| = |f(1/z)| \le C$ (unabhängig von r). Aus dem Satz von Phragmén-Lindelöf folgt die gleiche Abschätzung auch im Inneren von $\overline{S}_1$, und daher folgt für $r \to \infty$ dass $f(z) = 0$ sein muss. $\square$

Watson's Lemma besagt genau, dass die Abbildung $J\,:\,\mathcal{A}_s(G) \to \mathbb{C}[[z]]_s$ injektiv ist, wenn der Öffnungswinkel von G größer als $s\,\pi$ ist. Dass J dann nicht surjektiv ist, wird sich später herausstellen. Dazu brauchen wir die Borel-Transformation, die wir im übernächsten Abschnitt definieren werden.

8.8 Die Laplace-Transformation

Im Folgenden sei $S = S(d, \alpha)$ ein fester Sektor mit unendlichem Radius, und k sei eine, gleichfalls feste, positive reelle Zahl.

Definition 8.8.1 *Mit $\mathcal{A}^{(k)}(S)$ bezeichnen wir die Menge der in S holomorphen und im Nullpunkt stetigen Funktionen $f(z)$, welche die folgende* Wachstumsbedingung der Ordnung k *erfüllen: Für jedes $\beta < \alpha$ gibt es Zahlen $C, c > 0$ so, dass*

$$|f(z)| \ \leq \ C\, \mathrm{e}^{c|z|^k} \qquad \forall\ z \in S(d,\beta)\,.$$

Für $f \in \mathcal{A}^{(k)}(S)$ und τ mit $|d-\tau| < \alpha/2$ konvergiert das Integral $\int_0^{\infty(\tau)} f(u) \exp[-(u/z)^k]\, du^k$, mit $du^k := k\, u^{k-1}\, du$, bei Integration entlang des Strahls $\arg u = \tau$, absolut und kompakt für alle z mit $\cos(k[\tau - \arg z]) > c|z|^k$, wenn wir c in Abhängigkeit von f und τ groß genug wählen. Auf der Riemannschen Fläche des Logarithmus hat diese (offene) Menge evtl. abzählbar viele Zusammenhangskomponenten, von denen wir diejenige mit $|\tau - arg\, z| < \pi/(2k)$ auswählen und mit $G(\tau)$ bezeichnen. Dies ist ein sektorielles Gebiet mit Öffnungswinkel π/k und Mittelrichtung τ. In diesem Gebiet $G(\tau)$ ist die Funktion

$$g(z) \ := \ z^{-k} \int_0^{\infty(\tau)} f(u)\, \exp[-(u/z)^k]\, du^k \tag{8.8.1}$$

holomorph. Da wir nach Definition der Wachstumsbedingung die Konstante c unabhängig von τ wählen können, solange wir τ auf ein beliebiges abgeschlossenes Teilintervall von $(d-\alpha/2, d+\alpha/2)$ beschränken, bedeutet ein Wechsel der Integrationsrichtung τ nur eine analytische Fortsetzung der Funktion $g(z)$. Daher ist $g(z)$ holomorph in der Vereinigung aller dieser Gebiete $G(\tau)$, also in einem sektoriellen Gebiet G mit Mittelrichtung d und Öffnungswinkel $\beta := \alpha + \pi/k$. Wir schreiben $g := \mathcal{L}_k f$ und nennen die Abbildung $\mathcal{L}_k$ die Laplace-Transformation der Ordnung k. Wir nennen auch $g = \mathcal{L}_k f$ die Laplace-Transformierte der Ordnung k von f.

Es folgt sofort durch Variablensubstitution, dass $g(z)$ genau dann die Laplace-Transformierte der Ordnung k von $f(u)$ ist, wenn (in entsprechend angepassten Variablenbereichen) die Funktion $g(z^{1/k})$ die Laplace-Transformierte der Ordnung 1 von $f(u^{1/k})$ ist. Man findet in den meisten Büchern eine geringfügig andere Definition der Laplace-Transformation, aber die hier gegebene ist für unsere Zwecke praktischer! Der Grund hierfür liegt im Wesentlichen in der nächsten Aufgabe.

Aufgabe 8.8.2 *Zeige dass die Laplace-Transformierte der Ordnung k von $f(u) = u^\lambda$, mit $\mathrm{Re}\, \lambda > 0$ gleich $\Gamma(1 + \lambda/k)\, z^\lambda$ ist. Die Transformierte einer Potenz ist also, bis auf einen konstanten Faktor, dieselbe Potenz!*

Definition 8.8.3 *Wegen* Aufgabe 8.8.2 *ergibt die* gliedweise Anwendung *von $\mathcal{L}_k$ auf eine formale Potenzreihe $\hat{f}(u) = \sum_0^\infty f_n\, u^n$ die neue Reihe $\hat{\mathcal{L}}_k \hat{f} := \sum_0^\infty f_n\, \Gamma(1+n/k)\, z^n$, welche wir als formale Laplace-Transformierte von $\hat{f}(z)$ bezeichnen wollen. Entsprechend nennen wir $\hat{\mathcal{L}}_k$ auch die* formale Laplace-Transformation *der Ordnung k.*

Aufgabe 8.8.4 *Zeige dass die formale Laplace-Transformation $\hat{\mathcal{L}}_k$, für jedes feste $\sigma \geq 0$ und $s = 1/k$, die Menge $\mathbb{C}_\sigma[[z]]$ bijektiv auf $\mathbb{C}_{\sigma+s}[[z]]$ abbildet.* **Anleitung:** *Zeige zunächst, z. B. mit der Stirlingschen Formel, die Existenz von positiven reellen Zahlen K_1, K_2, für welche $K_1^j \leq \Gamma(1 + sj)\, \Gamma(1 + \sigma j)/\Gamma(1 + (s + \sigma)j) \leq K_2^j$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$ gilt.*

Der folgende Satz zeigt, dass die Laplace-Transformation im Zusammenhang mit Gevrey-Asymptotiken sehr natürliche Eigenschaften hat:

Satz 8.8.5 *Für $f \in \mathcal{A}^{(k)}(S)$ sei $g = \mathcal{L}_k f$ in $G = G(d, \alpha + \pi/k)$, und für ein $s_1 \geq 0$ gelte $f(z) \cong_{s_1} \hat{f}(z)$ in S. Dann gilt mit $s_2 := 1/k + s_1$ und $\hat{g} = \hat{\mathcal{L}}_k \hat{f}$ die Asymptotik*

$$g(z) \cong_{s_2} \hat{g}(z) \quad \text{in } G.$$

Beweis: Wenn man in (8.8.1) $u = z\,w^{1/k}$ substituiert, erhält man mit $s = 1/k$ die Darstellung

$$g(z) \;=\; \int_0^{\infty(\tau_z)} f(z\,w^s)\,\mathrm{e}^{-w}\,dw\,.$$

Dies impliziert für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Darstellung der n-ten Ableitung von g durch

$$g^{(n)}(z) \;=\; \int_0^{\infty(\tau_z)} f^{(n)}(z\,w^s)\,w^{n/k}\,\mathrm{e}^{-w}\,dw\,, \tag{8.8.2}$$

mit $\tau_z = \arg w = k\,(\tau - \arg z)$ im Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$. Nach Voraussetzung gilt (8.5.3) in jedem abgeschlossenen Teilsektor von S mit Radius $r \leq 1$. Aus der Wachstumsbedingung für f und der Cauchyschen Integralformel für Ableitungen kann man schließen dass es zu jedem $\beta < \alpha$ Konstanten C, K, c gibt, für welche gilt

$$|f^{(n)}(z)| \;\leq\; C\,K^n\,n!\,\mathrm{e}^{c|z|^k} \qquad \forall\ |z| \geq 1\,,\ |d - \arg\, z| < \beta/2\,.$$

Wenn man die Konstanten gegebenenfalls noch vergrößert, folgt daraus

$$|f^{(n)}(z)| \;\leq\; C\,K^n\,n!\,\Gamma(1 + s_1 n)\,\mathrm{e}^{c|z|^k} \qquad \forall\ |z| > 0\,,\ |d - \arg\, z| < \beta/2\,.$$

Wenn man diese Abschätzung in (8.8.2) einsetzt, erhält man

$$|g^{(n)}(z)| \;\leq\; C\,K^n\,n!\,\Gamma(1 + s_1 n)\,\int_0^{\infty} x^{ns}\,\mathrm{e}^{(c|z|^k - \varepsilon)x}\,dx\,,$$

mit einem kleinen $\varepsilon > 0$, welches nur von τ_z abhängt. Nach Aufgabe 8.5.4 dürfen wir uns für die folgende Abschätzung darauf beschränken, dass z in einem abgeschlossenen Teilsektor $\overline{S}_1 \subset G$ liegt, dessen Radius höchstens gleich $(\varepsilon/(2c))^s$ ist, und dann ist das Integral auf der rechten Seite gleich $\Gamma(1 + sn)\,(2/\varepsilon)^{ns+1}$. Mit Hilfe von Aufgabe 8.8.4 folgt dann $|g^{(n)}(z)| \;\leq\; C_1\,K_1^n\,n!\,\Gamma(1 + s_2 n)$ in $\overline{S}_1$, mit hinreichend großen Konstanten C_1, K_1, und das war zu zeigen. □

Aufgabe 8.8.6 *Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen des Beweises von* Satz 8.8.5 *sei für irgendein $a \in S$*

$$g_a(z) \;:=\; z^{-k} \int_a^{\infty(d)} f(u)\exp[-(u/z)^k]\,du^k\,, \qquad |d - \arg\, z| \;<\; \pi/(2k)\,.$$

Zeige $g_a(z) \cong_s \hat{0}$ in einem sektoriellen Gebiet G mit Mittelrichtung d und Öffnungswinkel gleich π/k.

8.9 Die Borel-Transformation

In diesem Abschnitt sei $G = G(d, \alpha)$ ein sektorielles Gebiet mit Öffnungswinkel $\alpha > \pi/k$, mit festem $k > 0$.

Definition 8.9.1 *Für eine beliebige in G holomorphe und im Nullpunkt stetige Funktion f sei*

$$(\mathcal{B}_k f)(u) \;:=\; g(u) \;=\; \frac{k}{2\pi i} \int_{\gamma_k(\tau)} z^{-1}\,f(z)\,\exp[(u/z)^k]\,dz\,, \tag{8.9.1}$$

wobei der Integrationsweg $\gamma_k(\tau)$ der positiv orientierte Rand eines abgeschlossenen Teilsektors $\overline{S(\tau,\beta,r)} \subset G$ mit einem Öffnungswinkel $\beta > \pi/k$ ist. Für $2\,|\tau - \arg\, u| < \beta - \pi/k$ ist das Integral absolut und kompakt konvergent und stellt deshalb eine holomorphe Funktion dar. Wie bei der Laplace-Transformation ergibt sich durch eine Änderung des Integrationsweges lediglich eine analytische Fortsetzung dieser Funktion. Daher erhalten wir, dass $g(u)$ im Sektor $S(d,\varepsilon)$, mit $\varepsilon := \alpha - \pi/k$, holomorph ist. Wir nennen g die Borel-Transformierte *von f, und bezeichen $\mathcal{B}_k$ als* Borel-Transformation *der Ordnung k.*

Aufgabe 8.9.2 *Zeige dass die Borel-Transformierte der Ordnung k von z^λ, mit $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, gleich $u^\lambda/\Gamma(1+\lambda/k)$ ist. Für Potenzen sind also Laplace- und Borel-Transformation zueinander invers. Wir werden sehen, dass dies auch allgemeiner richtig ist.*

Definition 8.9.3 *Motiviert durch* Aufgabe 8.9.2 *definieren wir die* formale Borel-Transformierte *einer formalen Potenzreihe $\hat f(z) = \sum_0^\infty f_n\, z^n$ durch*

$$(\hat{\mathcal{B}}_k \hat f)(z) \;=\; \sum_0^\infty f_n\, z^n/\Gamma(1+n/k)\,,$$

und nennen $\hat{\mathcal{B}}_k$ die formale Borel-Transformation *der Ordnung k. Wir sehen, dass die formale Borel-Transformation für jedes $\sigma \ge 0$ genau die inverse Abbildung zu $\hat{\mathcal{L}}_k \;:\; \mathbb{C}_\sigma[[z]] \to \mathbb{C}_{\sigma+s}[[z]]$ ist.*

Aufgabe 8.9.4 *Für ein $f \in \mathcal{A}(G)$ wie oben sei $g = \mathcal{B}_k\, f$. Zeige dass die Differentiation von* (8.9.1) *unter dem Integralzeichen gerechtfertigt ist und folgere daraus durch Induktion über n*

$$u^n\, g^{(n)}(u) \;=\; \frac{k}{2\pi i} \int_{\gamma_k(\tau)} z^{n-1}\, f^{(n)}(z)\, \exp[(u/z)^k]\, dz \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_0\,. \tag{8.9.2}$$

Genau wie die Laplace-Transformation hat auch die Borel-Transformation gute Eigenschaften bezüglich Gevrey-Asymptotiken:

Satz 8.9.5 *Sei f holomorph in G, und gelte $f(z) \cong_{s_1} \hat f(z)$ in G, für ein $s_1 \ge 0$. Definiere s_2 als $s_2 = s_1 - k^{-1}$ für $1/s_1 < k$, resp. $s_2 = 0$ im anderen Fall. Dann folgt für $S = S(d,\varepsilon)$, mit $\varepsilon := \alpha - \pi/k$:*

$$(\mathcal{B}_k f)(u) \;\cong_{s_2}\; (\hat{\mathcal{B}}_k \hat f)(u) \quad \textit{in } S\,.$$

Beweis: Mit Aufgabe 8.9.2 folgt, dass für alle $N \in \mathbb{N}$ die Funktion $u^N r_N(u;g)$ die Borel-Transformation von $z^N r_N(z;f)$ ist. Wenn man den Integrationsweg $\gamma_k(\tau)$ in drei Teile zerlegt, nämlich die beiden radialen Geradenstücke und den Kreisbogen, und diese Teile abschätzt, findet man

$$|u^N r_N(u;g)| \;\le\; c\, K^N\, (2\pi)^{-1}\, \Gamma(1+s_1 N)\; (I_1 + I_2 + I_3),$$

mit

$$I_1, I_3 \;\le\; k \int_0^r x^{N-1}\, \exp[-\hat c\, (|u|/x)^k]\, dx, \quad I_2 \;\le\; \tilde c\, r^N\, \exp[(|u|/r)^k],$$

mit hinreichend großen Konstanten $\hat c, \tilde c > 0$, die nicht von u, N und r abhängen. Es reicht, sich auf große Werte von N zu beschränken, und für solche kann man $r = |u|\,(k/N)^{1/k}$ wählen, woraus $I_2 \le \tilde c\,|u|^N\,(k/N)^{N/k}\,\mathrm{e}^{N/k}$ und, nach Substitution $y = \hat c\,(|u|/x)^k$,

$$I_1, I_3 \le |u|^N\, \hat c^{N/k} \int_{\hat c N/k}^\infty y^{-1-N/k}\, \mathrm{e}^{-y}\, dy \le |u|^N\, \hat c^{-1}\, (k/N)^{1+N/k}$$

folgt. Mit der Stirlingschen Formel ergibt sich dann für genügend große $\tilde C, \tilde K > 0$, unabhängig von u and N, die Ungleichung

$$|r_N(u;g)| \le \tilde C\, \tilde K^N\, \Gamma(1+Ns_1)/\Gamma(1+N/k).$$

Eine nochmalige Anwendung der Stirlingschen Formel ergibt dann die Behauptung. □

Für $1/s_1 \geq k$ impliziert Satz 8.9.5 dass $\mathcal{B}_k f$ im Nullpunkt holomorph ist, und dass $\hat{\mathcal{B}}_k \hat{f}$ die Potenzreihenentwicklung ist. Wenn sogar $1/s_1 > k$ ist, kann man sehen, dass $\mathcal{B}_k f$ eine ganze Funktion ist. Diese Tatsache können wir benutzen, um zu zeigen, dass die Abbildung $J : \mathcal{A}_s(G) \to \mathbb{C}[[z]]_s$ nicht surjektiv ist, wenn der Öffnungswinkel von G groß ist:

Satz 8.9.6 *Es gibt formale Reihen $\hat{f}(x)$ von Gevrey-Ordnung $s = 1/k$, derart dass für kein sektorielles Gebiet G mit Öffnungswinkel $\alpha > s\,\pi$ ein $f \in \mathcal{A}_s(G)$ existiert mit $f(z) \cong_s \hat{f}(z)$.*

Beweis: Wenn ein $f \in \mathcal{A}_s(G)$ mit $f(z) \cong_s \hat{f}(z)$ existiert, dann ist $g = \mathcal{B}_s\, f$ im Nullpunkt holomorph, und $\hat{g} = \hat{\mathcal{B}}_s\, \hat{f}$ ist die Potenzreihenentwicklung von g. Außerdem ist g immer in einen Sektor mit unendlichem Radius holomorph. Es gibt aber Funktionen g, welche in einem Kreis holomorph und nicht über dessen Rand hinaus fortsetzbar sind – vergleiche dazu die nächste Aufgabe. □

Aufgabe 8.9.7 *Zeige dass die Potenzreihe $\sum_0^\infty z^{j!}$ den Konvergenzradius $R = 1$ hat, und dass die durch die Reihe gegebene Funktion nicht über den Rand des Einheitskreises fortgesetzt werden kann.* Anleitung: *Zeige, dass die Werte der durch die Reihe gegebenen Funktion gegen ∞ konvergieren, wenn z radial gegen einen Randpunkt $\mathrm{e}^{i2\pi\phi}$ mit $\phi \in \mathbb{Q}$ konvergiert.*

8.10 Umkehrformeln

Grob gesprochen besagen die folgenden beiden Sätze, dass Laplace- und Borel-Transformation zueinander invers sind, wenn man von der genauen Größe der Bereiche, in denen die entsprechenden Integrale konvergieren, absieht.

Satz 8.10.1 *Für $G(d, \alpha)$ und k wie im letzten Abschnitt sei f in G holomorph und im Nullpunkt beschränkt. Dann erfüllt $g(u) = (\mathcal{B}_k f)(u)$ in $S = S(d, \alpha - \pi/k)$ eine Wachstumsbedingung der Ordnung k, so dass $(\mathcal{L}_k g)(z)$ in einem sektoriellen Gebiet $\tilde{G} = \tilde{G}(d, \tilde{\alpha})$, mit $\pi/k < \tilde{\alpha}$, definiert und holomorph ist, und es gilt*

$$f(z) \;=\; (\mathcal{L}_k g)(z), \quad z \in \tilde{G} \cap G\,.$$

Beweis: Wenn man $\gamma_k(\tau)$ wie im Beweis von Satz 8.9.5 in drei Teile zerlegt, gehen die Integrale über die radialen Geradenstücke gegen 0 für $u \to \infty$ in $S(\tau, \varepsilon/(2k))$. Im Integral über den Kreisbogen kann man $\exp[(u/z)^k]$ in die Exponentialreihe entwickeln und diese gliedweise integrieren. Damit erhält man dass dieses Integral eine ganze Funktion ist, welche in der ganzen Ebene die verlangte Wachstumsbedingung erfüllt. Auf diese Art zeigt man die behauptete Wachstumsbedingung für $g(u)$. Um $f = \mathcal{L}_k g$ zu zeigen, reicht es aus, Werte von z mit $\arg z = d$ und $|z|$ klein zu betrachten. Für solche z kann man aber das Integral für $\mathcal{B}_k f$ in das für $\mathcal{L}_k g$ einsetzen und die Integrationsreihenfolge vertauschen. Daraus folgt aber

$$(\mathcal{L}_k \circ \mathcal{B}_k f)(z) \;=\; \frac{k}{2\pi i} \int_{\gamma_k(d)} \frac{w^{k-1} f(w)}{w^k - z^k}\, dw\,.$$

Die Funktion $F_z(w) = w^{k-1} f(w)(w^k - z^k)^{-1}$ hat im Inneren von $\gamma_k(d)$ genau eine Singularität, nämlich für $w = z$, und dies ist ein Pol erster Ordnung mit Residuum $f(z)/k$. Aus dem Residuensatz folgt dann die Behauptung. □

Satz 8.10.2 *For $S = S(d,\alpha)$ und $k > 0$ seien $f \in \mathcal{A}^{(k)}(S)$ und $g(z) = (\mathcal{L}_k f)(z)$, $z \in G = G(d, \alpha + \pi/k)$. Dann gilt*

$$f(u) = (\mathcal{B}_k g)(u), \quad u \in S.$$

Beweis: Der Beweis kann ähnlich wie der des letzten Satzes geführt werden – die Einzelheiten sollen hier ausgelassen werden. Auch für wesentlich allgemeinere Funktionen f, welche auf der positiven reellen Achse definiert sind, gibt es eine komplexe Umkehrformel für die Laplace-Transformation, die zu der hier benutzten Borel-Transformation äquivalent ist, wenn f in einem kleinen Sektor $S(0, \varepsilon)$ holomorph ist. Vergleiche hierzu Literatur über die Laplace-Transformation, wie etwa das Buch von *D. V. Widder* [26]. $\square$

Kapitel 9

Summierbare Potenzreihen

In diesem Kapitel wollen wir uns mit summierbaren Potenzreihen beschäftigen. Vereinfacht ausgedrückt heißt das, dass wir sogenannte Summierungsverfahren kennenlernen wollen, welche auch divergenten Potenzreihen eine Funktion zuordnen. Abstrakt gesprochen ist ein *Summationsverfahren* eine (meistens lineare) Abbildung $\mathcal{S}$ eines komplexen Vektorraums von Folgen oder Reihen nach $\mathbb{C}$. Hier betrachten wir einen Vektorraum $\mathbb{X}$ formaler Potenzreihen, also von Reihen in einer Variablen z, und daher sind die Werte $\mathcal{S}\,(\hat{f}(z))$ Funktionen $f(z)$, deren Definitionsbereich ein sektorielles Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ sein wird. Für die Anwendungen, z. B. auf formale Lösungen von Differentialgleichungen, ist es wichtig, dass die Abbildung $\mathcal{S}$ die folgenden Eigenschaften besitzt:

- Der Definitionsbereich $\mathbb{X}$ ist nicht nur ein Vektorraum, sondern zusätzlich abgeschlossen bezüglich der Multiplikation und gliedweisen Differentiation der formalen Potenzreihen – man nennt dann $\mathbb{X}$ auch *differentielle Algebra*.
- Die Abbildung $\mathcal{S}$ ist ein Homomorphismus, d. h., sie ist linear und bildet Produkte auf Produkte und Ableitungen auf Ableitungen ab.
- Für ein $\hat{f}(z) \in \mathbb{X}$ ist das Bild $\mathcal{S}\,(\hat{f})$ eine in einem sektoriellen Gebiet G holomorphe Funktion $f(z)$, und $f(z) \cong \hat{f}(z)$ für $z \to 0$ in G. Dabei soll allerdings zugelassen sein, dass das Gebiet G von $\hat{f}(z)$ abhängt.
- Alle Potenzreihen mit positivem Konvergenzradius sollen zu $\mathbb{X}$ gehören und durch die Abbildung $\mathcal{S}$ auf ihre "natürliche Summe" abgebildet werden.

Wie wir sehen werden, hat die sogenannte k-Summierbarkeit alle diese wünschenswerten Eigenschaften. Allerdings gibt es formale Potenzreihen, welche nicht durch dieses Verfahren summiert werden können, obwohl sie formale Lösungen von relativ einfachen Differentialgleichungen sind.

9.1 Summierbarkeit in einer Richtung

Im Folgenden seien immer $k > 0$ und $d \in \mathbb{R}$ fest gegeben.

Definition 9.1.1 *Wir nennen eine formale Potenzreihe $\hat{f}(z)$* k-summierbar in der Richtung d, *wenn es ein sektorielles Gebiet G mit Mittelrichtung d und Öffnungswinkel $\alpha > \pi/k$ sowie eine in G holomorphe Funktion f gibt mit der Eigenschaft dass $f(z) \cong_{1/k} \hat{f}(z)$ für $z \to 0$ in G. Nach dem Lemma von Watson* (Satz 8.7.2) *ist die Funktion f eindeutig bestimmt, und wir nennen sie* die Summe *der Potenzreihe $\hat{f}$ und schreiben auch $f = \mathcal{S}_{k,d}\,\hat{f}$.*

Die Definition der k-Summierbarkeit sichert nur die Existenz einer Summe. Der folgende Satz besagt, dass diese Summe grundsätzlich mit Hilfe der formalen Borel- und der Laplace-Transformation berechnet werden kann:

Satz 9.1.2 *Für jedes $\hat{f}(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *Die Reihe $\hat{f}(z)$ ist k-summierbar in der Richtung d.*

(b) *Die Reihe $\hat{g}(z) := \hat{\mathcal{B}}_k \hat{f}(z)$ hat einen positiven Konvergenzradius, und die durch $\hat{g}$ gegeben Funktion g ist analytisch fortsetzbar in einen Sektor S mit Mittelrichtung d und unendlichem Radius und erfüllt dort eine Wachstumsbedingung der Ordnung k.*

Wenn eine dieser Aussagen gilt, dann folgt $\hat{f}(z) \in \mathbb{C}_{1/k}[[z]]$, und die Summe $f = \mathcal{S}_{k,d} \hat{f}$ ist gleich der Laplace-Transformierten der Ordnung k von g.

Beweis: Sei (a) erfüllt. Die Summe $f = \mathcal{S}_{k,d} \hat{f}$ ist per Definition in $\mathcal{A}_{1/k}(G)$ für ein sektorielles Gebiet G mit Öffnungswinkel $\alpha > \pi/k$. Also kann $\mathcal{B}_k$ angewendet werden, und aus Satz 8.9.5 folgt dass $g := \mathcal{B}_k f$ die Reihe $\hat{g}(z) := \hat{\mathcal{B}}_k \hat{f}(z)$ als Gevrey-Asymptotik der Ordnung $s_2 = 0$ besitzt, was zur Konvergenz der Reihe gegen die Funktion g äquivalent ist. Aus Satz 8.10.1 folgt schließlich die Fortsetzbarkeit von g und die Wachstumsbedingung, so dass insgesamt (b) erfüllt ist. Umgekehrt folgt aus (b) und Satz 8.8.5 $f = \mathcal{L}_k \in \mathcal{A}_{1/k}(G)$, für ein sektorielles Gebiet G mit Öffnungswinkel $\alpha > \pi/k$, und daher gilt (a). □

Bemerkung 9.1.3 *Nach dem letzten Satz können nur Reihen $\hat{f} \in \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ k-summierbar in einer Richtung d sein, und aus* Satz 8.9.6 *folgt, dass nicht alle diese Reihen so summierbar sind. Wenn eine konkrete Reihe auf ihre Summierbarkeit untersucht werden und ihre Summe berechnet werden soll, ist grundsätzlich folgendes zu tun:*

(a) *Die Funktion $g(z)$, welche lokal durch die konvergente Reihe $\hat{\mathcal{B}}_k \hat{f}$ gegeben ist, muss in einen Sektor der Form $S(d, \varepsilon)$, mit einem kleinen $\varepsilon > 0$,fortgesetzt werden.*

(b) *In diesem Sektor muss eine Wachstumsbedingun der Ordnung k für g gezeigt werden.*

(c) *Das Integral $\mathcal{L}_k g$ muss berechnet werden.*

In praktischen Beispielen sind die ersten beiden Punkt oft kein allzu großes Problem. Die explizite Berechnung des Integrals dagegen ist meist nicht möglich, da die hierdurch gegebene Funktion oft eine sogenannte "höher-transzendente Funktion" ist, was ungefähr heißt, dass sie nicht durch andere "bekannte" Funktionen ausgedrückt werden kann.

Aufgabe 9.1.4 *Zeige dass die Reihe $\hat{f}(z) = \sum_0^\infty \Gamma(1 + j/k)\, z^j$ in jeder Richtung $d \neq 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, k-summierbar ist. Zeige weiter mit den Bezeichnungen wie in der letzten Bemerkung: Ist $g(z)$ eine rationale Funktion, dann ist $\hat{f}(z)$ in allen Richtungen d, in denen keine Polstellen von g liegen, k-summierbar.*

Wir wollen nun einige erste Eigenschaften der k-Summierbarkeit zusammenstellen. Dabei sind Aussagen der Form $(\mathcal{S}_{k,\tilde{d}} \hat{f})(z) = (\mathcal{S}_{k,d} \hat{f})(z)$ immer so zu verstehen, dass der Durchschnitt der Definitionsbereiche beider Funktionen nicht leer ist (was bei dieser Aussage offensichtlich ist, wenn $|d - \tilde{d}|$ klein genug ist), und dass die beiden Funktionen in diesem Durchschnitt übereinstimmen. Nach dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen sind dann auch ihre analytischen Fortsetzungen in jedes einfach zusammenhängende Gebiet die gleichen – genauer gilt sogar: Wenn eine der beiden Funktionen fortsetzbar ist, dann ist es auch die andere, und sie stimmen überein. Aus diesem Grund kann in den folgenden Resultaten auf eine Angabe eines Gebietes, in denen z. B. $(\mathcal{S}_{k,\tilde{d}} \hat{f})(z) = (\mathcal{S}_{k,d} \hat{f})(z)$ ist, verzichtet werden.

Lemma 9.1.5 *Für jedes $k > 0$ gilt:*

(a) *Eine konvergente Reihe $\hat{f}$ ist k-summierbar in jeder Richtung $d \in \mathbb{R}$, und $(\mathcal{S}_{k,d}\,\hat{f})(z)$ ist gleich der durch die Potenzreihe gegebenen Funktion.*

(b) *Sei $\hat{f}$ k-summierbar in einer Richtung d, und sei $\varepsilon > 0$ genügend klein. Dann ist $\hat{f}$ auch k-summierbar in jeder Richtung $\tilde{d}$ mit $|\tilde{d} - d| < \varepsilon$, und $(\mathcal{S}_{k,\tilde{d}}\,\hat{f})(z) = (\mathcal{S}_{k,d}\,\hat{f})(z)$. Anders ausgedrückt heißt das, dass die Menge aller Richtungen, in denen eine formale Potenzreihe k-summierbar ist, eine offene Teilmenge $O \subset \mathbb{R}$ ist, und die Summe ist nicht von der Wahl der Richtung d abhängig, solange d in.einer Zusammenhangskomponente von O variiert.*

(c) *Sei $\hat{f}$ k-summierbar in einer Richtung d, und sei $\varepsilon > 0$ genügend klein. Dann ist $\hat{f}$ auch $\tilde{k}$-summierbar in derselben Richtung d, für alle $\tilde{k}$ mit $k - \varepsilon < \tilde{k} \le k$, und $(\mathcal{S}_{\tilde{k},d}\,\hat{f})(z) = (\mathcal{S}_{k,d}\,\hat{f})(z)$.*

Beweis: Eine konvergente Reihe ist gleichzeitig auch asymptotische Entwicklung, und zwar von jeder Gevrey-Ordnung und in jedem Sektor von hinreichend kleinem Radius. Daraus folgt (a). Zum Nachweis von (b) ist nur zu beachten, dass ein sektorielles Gebiet mit Mittelrichtung d und Öffnungswinkel $\alpha > \pi/k$ immer ein sektorielles Gebiet mit Mittelrichtung $\tilde{d}$ und Öffnungswinkel $\alpha - \varepsilon$ enthält, und wir können also $\varepsilon < \alpha - \pi/k$ setzen. Auf Grund der Definition von Gevrey-Asymptotiken ist klar, dass $f(z) \cong_s \hat{f}(z)$ in G und $\tilde{s} > s$ immer $f(z) \cong_{\tilde{s}} \hat{f}(z)$ in G impliziert. Wenn also $\varepsilon > 0$ so klein ist, dass der Öffnungswinkel von G größer als $\pi/(k - \varepsilon)$ ist, folgt (c). □

Lemma 9.1.6 *Sei $\hat{f}$ k_1-summierbar in einer Richtung d, sei $k > k_1$, und sei k_2 so, dass $1/k_2 = 1/k_1 - 1/k$. Dann ist $\hat{g} = \hat{\mathcal{B}}_k \hat{f}$ k_2-summierbar in derselben Richtung d, und $\mathcal{S}_{k_2,d}\,\hat{g} = \mathcal{B}_k(\mathcal{S}_{k_1,d}\,\hat{f})$.*

Beweis: Folgt unmittelbar aus Satz 8.9.5 und der Definition der k_1- bzw.. k_2-Summierbarkeit in einer Richtung d. □

Wenn $k < 1/2$ ist, ist die Summe einer k-summierbare Reihe in einem sektoriellen Gebiet G mit einem Öffnungswinkel $> 2\pi$ holomorph, und dieses müssen wir auf der Riemannschen Fläche des Logarithmus betrachten. Andererseits zeigt das nächste Lemma, dass die k-Summierbarkeit nicht zwischen Richtungen d_1 und d_2 unterscheidet, wenn deren Differenz ein ganzzahliges Vielfaches von 2π ist.

Lemma 9.1.7

(a) *Sei $\hat{f}$ k-summierbar in einer Richtung d, und sei $\hat{f}(z) \in \mathbb{C}_{1/k_1}[[z]]$ mit $k_1 > k$. Dann ist $\hat{f}$ k_1-summierbar in allen Richtungen $\tilde{d}$ mit $2\,|d - \tilde{d}| \le \pi\,(1/k - 1/k_1)$, und es gilt $(\mathcal{S}_{k_1,\tilde{d}}\,\hat{f})(z) = (\mathcal{S}_{k,d}\,\hat{f})(z)$.*

(b) *Für $\tilde{d} = d + 2\pi$ ist die k-Summierbarkeit von $\hat{f}$ in einer Richtung d äquivalent zur k-Summierbarkeit von $\hat{f}$ in der Richtung $\tilde{d}$, und $(\mathcal{S}_{k,\tilde{d}}\,\hat{f})(z) = (\mathcal{S}_{k,d}\,\hat{f})(z e^{-2\pi i})$.*

Beweis: Nach Voraussetzung gibt es ein f mit $f(z) \cong_{1/k} \hat{f}(z)$ in einem sektoriellen Gebiet $G(d, \alpha)$ mit $\alpha > \pi/k$. Die Funktion $g := \mathcal{B}_{k_1} f$ ist nach den Sätzen über die Borel-Transformation holomorph in $S(d, \alpha - \pi/k_1)$ mit der entsprechenden Wachstumsbedingung, und die Voraussetzung $\hat{f}(z) \in \mathbb{C}_{1/k_1}[[z]]$ impliziert die Holomorphie von g im Nullpunkt. Also gilt (a). Die Behauptung (b) folgt sofort aus der Definition der k-Summierbarkeit. □

Aufgabe 9.1.8 *Zeige dass $\hat{f}(z) = \sum_0^\infty \Gamma(1 + n/k)\, z^n / \Gamma(1 + n)$ k-summierbar ist in allen Richtungen d mit $(2j + 1/2)\pi < d < (2j + 3/2)\pi$, $j \in \mathbb{Z}$. Untersuche auch die k-Summierbarkeit in den anderen Richtungen.*

Aufgabe 9.1.9 *Zeige dass* $\hat{f}(z) = \sum_0^\infty \Gamma(1+2n)\, z^n / \Gamma(1+n)$

1. *1-summierbar ist in jeder Richtung* $d \in [-\pi, \pi)$ *mit einer Ausnahme.*
2. *1/2-summierbar ist in jeder Richtung* d *mit* $(2j+1/2)\pi < d < (2j+3/2)\pi$, $j \in \mathbb{Z}$.

9.2 Rechenregeln

Definition 9.2.1 *Für* $k > 0$ *und* $d \in \mathbb{R}$ *schreiben wir* $\mathbb{C}\{z\}_{k,d}$ *für die Menge aller formalen Potenzreihen, welche* k*-summierbar in Richtung* d *sind.*

Satz 9.2.2 *Für* $k > 0$ *and* $d \in \mathbb{R}$ *seien* $\hat{f}, \hat{f}_1, \hat{f}_2 \in \mathbb{C}\{z\}_{k,d}$. *Dann gilt:*

$$\begin{aligned} \hat{f}_1 + \hat{f}_2 &\in \mathbb{C}\{z\}_{k,d}, & \mathcal{S}_{k,d}(\hat{f}_1 + \hat{f}_2) &= \mathcal{S}_{k,d}\hat{f}_1 + \mathcal{S}_{k,d}\hat{f}_2, \\ \hat{f}_1 \hat{f}_2 &\in \mathbb{C}\{z\}_{k,d}, & \mathcal{S}_{k,d}(\hat{f}_1 \hat{f}_2) &= (\mathcal{S}_{k,d}\hat{f}_1)(\mathcal{S}_{k,d}\hat{f}_2), \\ \hat{f}' &\in \mathbb{C}\{z\}_{k,d}, & \mathcal{S}_{k,d}(\hat{f}') &= \frac{d}{dz}(\mathcal{S}_{k,d}\hat{f}), \\ \int_0^z \hat{f}(w)dw &\in \mathbb{C}\{z\}_{k,d}, & \mathcal{S}_{k,d}\left(\int_0^z \hat{f}(w)dw\right) &= \int_0^z (\mathcal{S}_{k,d}\hat{f})(w)\,dw. \end{aligned}$$

Weiter gilt für $p \in \mathbb{N}$ *immer*

$$\hat{f}(z^p) \in \mathbb{C}\{z\}_{pk,d/p}, \qquad \mathcal{S}_{pk,d/p}(\hat{f}(z^p)) = (\mathcal{S}_{k,d}\hat{f})(z^p).$$

Beweis: Als Übungsaufgabe! □

Aufgabe 9.2.3 *Sei* $\hat{f}(z)$ *eine beliebige formale Potenzreihe, deren konstantes Glied nicht verschwindet. Zeige, dass es genau eine formale Potenzreihe* $\hat{g}(z)$ *gibt mit* $\hat{f}(z)\,\hat{g}(z) = \hat{1}(z)$, *wobei* $\hat{1}(z)$ *die Potenzreihe mit dem konstanten Glied 1 ist, deren übrige Koeffizienten alle verschwinden. Wir schreiben dann auch* $\hat{g}(z) = \hat{f}^{-1}(z)$.

Satz 9.2.4 *Für* $k > 0$ *and* $d \in \mathbb{R}$ *sei* $\hat{f} \in \mathbb{C}\{z\}_{k,d}$. *Dann gilt: Wenn das konstante Glied von* $\hat{f}$ *nicht verschwindet, dann ist*

$$\hat{f}^{-1} \in \mathbb{C}\{z\}_{k,d}, \qquad \mathcal{S}_{k,d}(\hat{f}^{-1}) = (\mathcal{S}_{k,d}\hat{f})^{-1}.$$

Beweis: Sei $f \in \mathcal{A}_{1/k}(G)$ die Summe von $\hat{f}$. Mit Aufgabe 8.2.2 folgt die Existenz eines sektoriellen Gebietes mit demselben Öffnungswinkel wie dem von G (also größer als π/k), in welchem $f(z) \neq 0$ ist, und wir können deshalb o. B. d. A. annehmen, dass dies bereits in G selber der Fall ist. Also ist $g(z) := 1/f(z)$ in G holomorph. Aus $f(z)\,g(z) \equiv 1$ folgt für die Ableitungen die Rekursionsformel

$$g^{(n)}(z) = -g(z) \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} f^{(n-j)}(z)\, g^{(j)}(z) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Durch Induktion über n ergibt sich, dass alle Ableitungen von g im Nullpunkt stetig sind, und dass dieselbe Rekursionsformel auch für $z = 0$ gilt. Daraus folgt dass $g(z) \cong \hat{f}^{-1}(z)$ ist, wenn $z \to 0$ geht. Noch zu zeigen ist allerdings, dass dies eine Gevrey-Asymptotik der Ordnung $s = 1/k$ ist. Sei dazu $\overline{S}$ ein abgeschlossener Teilsektor von G. Nach Voraussetzung gibt es Konstanten $C_f, K_f > 0$ derart, dass

$|f^{(n-j)}(z)| \le C_f\, K_f^{n-j}\,(n-j)!\,\Gamma(1+(n-j)s)$ in $\overline{S}$ gilt. Alle Ableitungen von g sind in $\overline{S}$ beschränkt, und wenn wir $g_n = [n!\,\Gamma(1+sn)]^{-1} \sup |g^{(n)}(z)|$ setzen, dann folgt unter Benutzung von Aufgabe 8.5.10

$$g_n \;\le\; g_0\, C_f \sum_{j=0}^{n-1} K_f^{n-j}\, \frac{\Gamma(1+s(n-j))\,\Gamma(1+sj)}{\Gamma(1+sn)}\, g_j \;\le\; g_0\, C_f \sum_{j=0}^{n-1} K_f^{n-j}\, g_j \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Mit $h_0 = g_0$ und $h_n = g_0\, C_f\, \sum_{j=0}^{n-1} K_f^{n-j}\, h_j$ folgt induktiv dass $h_n \ge g_n$ ist, für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Setzt man $h(x) = \sum_0^\infty h_n\, x^n$, so folgt aus der Definitionsgleichung der h_n dass

$$h(x) \;=\; g_0 \;+\; g_0\, C_f\, h(x)\, \frac{x\, K_f}{1 - x\, K_f} \qquad (0 \le x < 1/K_f)\,.$$

Außer der Potenzreihe (deren Konvergenzradius evtl. auch gleich 0 sein könnte) hat diese Gleichung auch die für $|x|\, K_f < 1$ holomorphe Funktion

$$h(x) \;=\; g_0 \left(1 \;-\; \frac{x\, g_0\, C_f\, K_f}{1 - x\, K_f} \right)^{-1}$$

als Lösung. Durch Koeffizientenvergleich folgt, dass die Koeffizienten der Potenzreihe um den Nullpunkt genau die Zahlen h_n sind, und daher hat die Reihe einen positiven Konvergenzradius. Daraus folgt aber die Existenz eines $K > 0$, für welches die h_n, und damit erst recht die g_n, nicht gößer als K^n sind. Das ergibt die Behauptung. □

Aufgabe 9.2.5 *Für $k > 0$ and $d \in \mathbb{R}$ sei $\hat f \in \mathbb{C}\{z\}_{k,d}$. Zeige: Wenn das konstante Glied von $\hat f$ verschwindet, dann ist*

$$z^{-1}\, \hat f(z) \;\in\; \mathbb{C}\{z\}_{k,d}\,, \qquad \mathcal{S}_{k,d}\,(z^{-1}\, \hat f(z)) \;=\; z^{-1}\; (\mathcal{S}_{k,d}\, \hat f)(z)\,.$$

9.3 Summierbare Potenzreihen

Auch hier sei weiterhin k eine feste positive reelle Zahl.

Definition 9.3.1 *Wegen* Lemma 9.1.7 (c) *ist es naheliegend, Richtungen d, welche sich um ganzzahlige Vielfache von $2\,\pi$ unterscheiden, als äquivalent anzusehen. Eine Richtung d, in welcher eine gegebene formale Potenzreihe $\hat f(z)$* nicht *k-summierbar ist, soll* singuläre Richtung *für $\hat f(z)$ heißen. Wenn wir solche singulären Richtungen zählen, dann wollen wir aus dem genannten Grund eigentlich nur die Äquivalenzklassen abzählen. Wenn $\hat f(z)$ in diesem Sinne nur endlich viele singuläre Richtungen hat, wollen wir kurz sagen, dass diese Reihe* k-summierbar *ist. Für die Menge aller k-summierbaren Reihen wollen wir $\mathbb{C}\{z\}_k$ schreiben. Es ist aber wichtig zu beachten, dass für verschiedene $\hat f(z) \in \mathbb{C}\{z\}_k$ Anzahl und Lage der singulären Richtungen unterschiedlich sein kann. Wir wollen auch die Bezeichnung $\mathbb{C}\{z\}$ für die Menge aller Potenzreihen mit positivem Konvergenzradius benutzen.*

Es ist unmittelbar klar, dass die Sätze 9.2.2–9.2.4 richtig bleiben, wenn man $\mathbb{C}\{z\}_{k,d}$ durch $\mathbb{C}\{z\}_k$ ersetzt, und die Aussagen für die entsprechenden Summen der Reihen gelten dann für alle Richtungen d bis auf höchstens endlich viele (modulo 2π).

Aus Lemma 9.1.7 (a) folgt dass $\mathcal{S}_{k,d}\,\hat f$, abgesehen von dem Bereich, in dem diese Funktion durch die Laplace-Transformation dargestellt wird, von der Richtung d unabhängig ist, solange d in einem Intervall variiert, welches keine singuläre Richtung enthält. Aus der folgenden Proposition ergibt sich, dass dies an singulären Richtungen anders ist:

Proposition 9.3.2 *Seien $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$, und sei $\hat{f}(z)$ in beiden Richtungen k-summierbar. Die Funktion $f_j(z) := (\mathcal{S}_{k,d_j}\hat{f})(z)$ in der Richtung d_j ist dann holomorph in einem sektoriellen Gebiet G_j mit Mittelrichtung d_j und Öffnungswinkel $> \pi/k$, und wenn $0 < d_2 - d_1 < \pi/(2k)$ ist, dann ist $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$. Falls dann*

$$(\mathcal{S}_{k,d_1}\hat{f})(z) \;=\; (\mathcal{S}_{k,d_2}\hat{f})(z) \qquad \forall\, z \in G_1 \cap G_2\,,$$

dann ist $\hat{f}$ k-summierbar in allen Richtungen d mit $d_1 < d < d_2$.

Beweis: Unter den gemachten Voraussetzungen ist die Funktion $f(z) = f_1(z)$ holomorph in $G := G_1 \cup G_2$, und hat dort die Reihe $\hat{f}(z)$ als Gevrey-Asymptotik der Ordnung $1/k$. Da G für jedes $d \in (d_1, d_2)$ ein sektorielles Gebiet mit Mittelrichtung d und Öffnungswinkel $> \pi/k$ enthält, folgt die Behauptung. □

Die letzte Proposition besagt, anders ausgedrückt, dass unter den gemachten Annahmen über d_1 und d_2 die beiden Summen verschieden sein müssen, falls zwischen d_1 und d_2 eine singuläre Richtung liegt. Die nächste Proposition zeigt, dass eine divergente formale Potenzreihe notwendigerweise singuläre Richtungen haben muss.

Proposition 9.3.3 *Wenn $\hat{f} \in \mathbb{C}\{z\}_k$ in jeder Richtung d k-summierbar ist, dann hat die Reihe einen positiven Konvergenzradius.*

Beweis: Aus Lemma 9.1.7 (a), (c) folgt, dass die Funktion $f = \mathcal{S}_{k,d}(\hat{f})$ von d unabhängig und unverzweigt ist, und daher ist nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz der Nullpunkt keine Singularität. Daher gilt die Behauptung. □

Sei $\hat{f} \in \mathbb{C}\{z\}_k$, und sei d_0 eine singuläre Richtung für $\hat{f}$. Wenn $g(z)$ die durch die konvergente Reihe $\hat{\mathcal{B}}_k\hat{f}$ gegebene Funktion ist, gibt es zwei mögliche Gründe dafür, dass d_0 singulär ist: Entweder kommt man beim Fortsetzen von $g(z)$ entlang des Strahls $\arg z = d_0$ an eine Stelle z_0, welche eine Singularität ist, so dass man darüber hinaus nicht fortsetzen kann, oder (da ja auf Grund der endlichen Anzahl der singulären Richtungen die unmittelbar neben d_0 liegenden Richtungen nicht singulär sein können) man kann $g(z)$ in einen kleinen Sektor mit Mittelrichtung d_0 und unendlichem Radius fortsetzen, aber in keinem Sektor dieser Art gilt die Wachstumsbedingung. In diesem zweiten Fall (welcher in der Tat eintreten kann) muss $g(z)$ entlang $\arg z = d_0$ schneller als jede Funktion der Form $\exp(|z|^\kappa)$ mit beliebigem $\kappa > 0$ anwachsen – dies ergibt sich aus der nächsten Proposition:

Proposition 9.3.4 *Für $\alpha < d_0 < \beta$ sei $\hat{f}$ k-summierbar in jeder Richtung $d \neq d_0$, $d \in (\alpha, \beta)$. Die durch die konvergente Reihe $\hat{\mathcal{B}}_k\hat{f}(z)$ gegebene Funktion sei fortsetzbar in einen Sektor $S = S(d_0, \varepsilon)$, mit einem $\varepsilon > 0$ und erfülle dort eine Wachstumsbedingung der Ordnung κ, mit beliebigem $\kappa > 0$. Dann ist $\hat{f}$ k-summierbar in der Richtung d_0.*

Beweis: Nach Voraussetzung ist g erfüllt $g(z)$ in der linken und der rechten Hälfte von S sogar eine Wachstumsbedingung der Ordnung k. Wenn wir $a = \rho\,\mathrm{e}^{id_0}$ setzen und ρ hinreichend groß ist, dann ist $h(z) := g(z)\,\mathrm{e}^{-az^k}$ (wenn wir o. B. d. A. $\varepsilon < \pi/k$ annehmen) am Rande von S beschränkt, und dann folgt aus dem Satz von Phragmén-Lindelöf (Satz 8.7.1) (wenn wir noch annehmen, dass $\varepsilon < \pi/\kappa$ ist) die Beschränktheit im Inneren. Daraus folgt aber die Behauptung. □

In einer festen Richtung d kann eine Reihe durchaus gleichzeitig k_1- und k_2-summierbar sein, mit $k_1 \neq k_2$. Dies ändert sich, wenn wir Summierbarkeit in allen bis auf endlich viele Richtungen verlangen:

Satz 9.3.5 *Für $k_1 > k_2 > 0$ gilt*

$$\mathbb{C}\{z\}_{k_2} \cap \mathbb{C}\{z\}_{k_1} \;=\; \mathbb{C}\{z\}_{k_2} \cap \mathbb{C}[[z]]_{1/k_1} \;=\; \mathbb{C}\{z\}\,.$$

Beweis: Trivialerweise gilt $\mathbb{C}\{z\} \subset \mathbb{C}\{z\}_{k_2} \cap \mathbb{C}\{z\}_{k_1} \subset \mathbb{C}\{z\}_{k_2} \cap \mathbb{C}[[z]]_{1/k_1}$. Wenn $\hat{f} \in \mathbb{C}\{z\}_{k_2} \cap \mathbb{C}[[z]]_{1/k_1}$ ist, dann ist $\hat{g} = \hat{\mathcal{B}}_{k_2}(\hat{f})$ eine ganze Funktion, welche in jedem Sektor eine Wachstumsbedingung der Ordnung k mit $1/k = 1/k_2 - 1/k_1$ erfüllt. Daher folgt aus 9.3.4 dass $\hat{f}$, bezüglich k_2-Summierbarkeit, keine singulären Richtungen haben kann, und daher folgt aus Proposition 9.3.3 die Behauptung. □

Aufgabe 9.3.6 *Sei* Re $\lambda > 0$. *Zeige dass* $\hat{f}(z;\lambda) = \sum_0^\infty \Gamma(\lambda+n)\, z^n$ 1-*summierbar ist, und dass die Summe gleich*

$$f(z;\lambda) \;=\; z^{-\lambda} \int_0^{\infty(d)} \frac{w^{\lambda-1}}{1-w}\; e^{-w/z}\, dw\,,$$

ist, für alle $d \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. *Es gibt also in diesem Fall nur eine singuläre Richtung modulo* 2π, *nämlich* $d_0 = 0$.

Aufgabe 9.3.7 *Zeige dass* $\hat{f}(z;\lambda) = \sum_0^\infty \Gamma(\lambda+n)\, z^n$ *immer* 1-*summierbar ist, solange* λ *kein Pol der Gamma-Funktion ist.*

Kapitel 10

Die Cauchy-Heine-Transformation

Wenn $\psi(w)$ auf einem Geradenstück von 0 bis zu einem (komplexen) Punkt $a \neq 0$ stetig ist, ist die Funktion

$$f(z) \;:=\; \frac{1}{2\pi i} \int_0^a \frac{\psi(w)}{w - z}\, dw$$

offenbar holomorph für z in der komplexen Ebene mit einem Schlitz von 0 bis nach a. Wenn ψ auch noch auf diesem Schlitz, mit evtl. Ausnahme der beiden Endpunkte, holomorph ist, dann folgt dass auch $f(z)$ auf beide Ufer des Schlitzes analytisch fortgesetzt werden kann, wobei aber die Grenzwerte auf den Ufern des Schlitzes im Allgemeinen unterschiedlich ausfallen. An den Stellen 0 und a wird $f(z)$ im Allgemeinen allerdings singulär sein. Wenn $\psi(w)$ für $w \to 0$ schneller als jede Potenz von w gegen 0 strebt, werden wir sehen, dass $f(z)$ eine asymptotische Entwicklung im Nullpunkt besitzt.

10.1 Definition und elementare Eigenschaften

Im Folgenden sei immer $s > 0$, und $G = G(d, \alpha)$ sei ein festes Gebiet mit Mittelrichtung d und einem Öffnungswinkel $\alpha \leq s\,\pi$, so dass die Menge $\mathcal{A}_s(G)$ nicht nur die Nullfunktion enthält.

Definition 10.1.1 *Für $\psi \in \mathcal{A}_{s,0}(G)$ und $a = r\,\mathrm{e}^{i\phi} \in G$ nennen wir die Funktion*

$$f(z) \;=\; (\mathcal{CH}_a\,\psi)(z) \;:=\; \frac{1}{2\pi i} \int_0^a \frac{\psi(w)}{w - z}\, dw\,, \qquad \arg a < \arg z < 2\,\pi + \arg a \tag{10.1.1}$$

Cauchy-Heine-Transformierte *von ψ. Wir setzen noch*

$$G_a(\beta) = \{ z : \; 0 < |z| < r\,, \quad z\,\mathrm{e}^{-i\beta} \;\in\; G\,\}\,, \qquad G_a \;=\; \bigcup_{0 \leq \beta \leq 2\pi} G_a(\beta)\,.$$

Lemma 10.1.2 *Die oben definierte Funktion $f(z)$ lässt sich unter den gemachten Voraussetzungen in das sektorielle Gebiet G_a fortsetzen, und es gilt*

$$f(z) \;-\; f(z\mathrm{e}^{2\pi i}) \;=\; \psi(z) \qquad \forall\; z \in G_a(0)\,. \tag{10.1.2}$$

Beweis: Sei $z = \rho \mathrm{e}^{i\gamma}$, mit $\arg a < \gamma < \arg a + 2\,\pi$. Dann ist $f(z)$ durch (10.1.1) definiert, und nach dem Cauchyschen Integralsatz können wir den Integrationsweg innerhalb von G stetig deformieren, solange wir dabei den Punkt z nicht überqueren. Daraus folgt unmittelbar die behauptete Fortsetzbarkeit in G_a. Insbesondere können wir sehen dass $f(z) - f(z e^{2\pi i})$ durch ein Integral dargestellt wird, in welchem wir z. B. über einen kleinen positiv orientierten Kreis um z integrieren können. Mit der Cauchyschen Integralformel erhält man dann (10.1.2). □

Proposition 10.1.3 *Für G, ψ und f wie in der obigen Definition gilt $f(z) \cong_s \hat{f}(z)$ in G_a, mit $\hat{f}(z) = \sum_0^\infty f_n z^n$ gegeben durch*

$$f_n \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_0^a \frac{\psi(w)}{w^{n+1}}\, dw, \qquad n \geq 0. \tag{10.1.3}$$

Beweis: Es gilt $(w-z)^{-1} = z^N w^{-N} (w-z)^{-1} + \sum_{n=0}^{N-1} z^n w^{-n-1}$ für alle $N \geq 0$. Also folgt für f_n wie in (10.1.3) die Gleichung

$$r_f(z,N) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_0^a \frac{\psi(w)}{w^N (w-z)}\, dw, \qquad z \in \tilde{G},$$

wenn wir den Integrationsweg (in Abhängigkeit von z) so legen, dass dort $w - z \neq 0$ ist. Sei $\overline{S}$ ein abgeschlossener Teilsektor von G_a mit einem Öffnungswinkel kleiner als 2π. Dann können wir für alle $z \in \overline{S}$ einen festen Integrationsweg γ wählen, der außerhalb von $\overline{S}$ verläuft, aber noch innerhalb eines abgeschlossenen Teilsektors von G bleibt, und für welchen es ein $c = c(\overline{S}) > 0$ gibt, so dass $|w - z| \geq c|w|$ ist für alle $w \in \gamma^*$ und alle $z \in \overline{S}$. Da $\psi \in \mathcal{A}_{s,0}(G)$ ist, gibt es $\tilde{c}, K > 0$ so, dass für alle $w \in \gamma^*$ und alle $N \in \mathbb{N}_0$ die Abschätzung $\|w^{-N}\psi(w)\| \leq \tilde{c}\, K^N \Gamma(1 + sN)$ gilt. Wenn L gleich der Länge des Integrationsweges γ ist, folgt hieraus

$$\|r_f(z,N)\| \;\leq\; c^{-1}\, \tilde{c}\, L\, (2\pi)^{-1}\, K^{N+1}\, \Gamma\big(1 + (N+1)s\big)\,.$$

Da man Sektoren mit einem Öffnungswinkel größer als 2π in endlich viele Teilsektoren mit kleinem Winkel zerlegen kann, folgt die gleiche Abschätzung (mit evtl. größeren Konstanten c, K) in beliebigen abgeschlossenen Teilsektoren von G_a. Das war zu zeigen. □

Bemerkung 10.1.4 *Aus* Proposition 10.1.3 *folgt direkt mit der Definition für $k = 1/s$, dass die Reihe $\hat{f}(z)$ in jeder Richtung $\hat{d}$ mit $2\,|\hat{d} - d - \pi| < \alpha + \pi(2 - s)$ k-summierbar ist. Die Menge dieser Richtungen kann für $k < 1/2$ allerdings auch leer sein. Es sei noch festgehalten, dass für $a, b \in G$ die Funktion $(\mathcal{CH}_a\, \psi)(z) - (\mathcal{CH}_b\, \psi)(z)$ im Nullpunkt holomorph ist.*

Definition 10.1.5 *Die in* Proposition 10.1.3 *definierte Potenzreihe $\hat{f}(z)$ bezeichnen wir auch als die* formale Cauchy-Heine-Transformierte $\widehat{\mathcal{CH}}_a\, \psi$ *von ψ.*

10.2 Normale Überdeckungen

Obwohl wir normale Überdeckungen eigentlich auf der Riemannschen Fläche des Logarithmus betrachten wollen, sollte man sie sich am besten in der komplexen Eben veranschaulichen:

Definition 10.2.1 *Gegeben seien Richtungen $d_0 < d_1 < \ldots < d_{m-1} < d_m := d_0 + 2\pi$ sowie Öffnungswinkel $\alpha_j > 0$, für $j = 0, \ldots, m$, wobei $\alpha_m = \alpha_0$ sei. Wenn dann $d_j - \alpha_j/2 < d_{j-1} + \alpha_{j-1}/2$ für $1 \leq j \leq m$ gilt, sagen wir, dass die Sektoren $S_j = S(d_j, \alpha_j, \rho)$, $0 \leq j \leq m$, für beliebiges $\rho > 0$ eine* normale Überdeckung *bilden. Beachte, dass auf der Riemannschen Fläche des Logarithmus der Sektor S_m direkt über dem Sektor S_0 liegt in dem Sinn, dass $z \in S_m$ zu $e^{-2\pi i} z \in S_0$ äquivalent ist.*

Satz 10.2.2 *Gegeben sei eine normale Überdeckung $S_j = S(d_j, \alpha_j, \rho)$, $0 \le j \le m$. Für $k > 0$, $s = 1/k$ und $1 \le j \le m$ seien $\psi_j \in \mathcal{A}_{s,0}(S_{j-1} \cap S_j)$. Wir wählen $a_j \in S_{j-1} \cap S_j$ sowie ein $\tilde\rho$ mit $0 < \tilde\rho \le |a_j|$ für $1 \le j \le m$, und setzen $\tilde S_j = S(d_j, \alpha_j, \tilde\rho)$, $0 \le j \le m$. Dann haben die Funktionen*

$$f_j(z) = \sum_{\mu=1}^{j} (\mathcal{CH}_{a_\mu}\, \psi_\mu)(z) + \sum_{\mu=j+1}^{m} (\mathcal{CH}_{a_\mu}\, \psi_\mu)(z e^{2\pi i}), \qquad z \in \tilde S_j, \qquad 0 \le j \le m,$$

in $\tilde S_j$ eine Gevrey-Asymptotik $\hat f(z)$ der Ordnung s, welche von j unabhängig ist und gegeben ist durch

$$\hat f(z) \;=\; \sum_{\mu=1}^{m} \widehat{\mathcal{CH}}_{a_\mu}\, \psi_\mu .$$

Weiter gilt noch

$$f_j(z) \;-\; f_{j-1}(z) \;=\; \psi_j(z) \qquad \forall\, z \in \tilde S_j, \quad 1 \le j \le m, \qquad f_m(z e^{2\pi i}) \;=\; f_0(z) \qquad \forall\, z \in \tilde S_m .$$

Beweis: Für jedes μ ist $\mathcal{CH}_{a_\mu}\, \psi_\mu$ holomorph für $d_\mu - \alpha_\mu/2 < \arg z < 2\pi + d_{\mu-1} + \alpha_{\mu-1}/2$, $|z| < \tilde\rho$. Daraus folgt für $1 \le \mu \le j$, bzw. $j+1 \le \mu \le m$, die Holomorphie von $(\mathcal{CH}_{a_\mu}\, \psi_\mu)(z)$, bzw. $(\mathcal{CH}_{a_\mu}\, \psi_\mu)(z e^{2\pi i})$, im Sektor $\tilde S_j$, $0 \le j \le m$. Aus Proposition 10.1.3 folgt dann die Behauptung. □

Aufgabe 10.2.3 *Überprüfe dass der letzte Satz für $m = 1$ mit* Proposition 10.1.3 *übereinstimmt.*

Aufgabe 10.2.4 *Definiere selber den Begriff der* Verfeinerung *einer normalen Überdeckung und zeige dann, dass zwei normale Überdeckungen immer eine gröbste gemeinsame Verfeinerung haben.*

10.3 Zerlegungssätze

Für jedes $\psi \in \mathcal{A}_{s,0}(G)$, haben die Koeffizienten von $\hat f = \widehat{\mathcal{CH}}_a\, \psi$, für jedes beliebige $a \in G$, die Form einer *Momentenfolge*, so dass $\hat f$ zunächst sehr speziell zu sein scheint. Der nächste Satz zeigt aber, dass dies nicht der Fall ist, wenn man formale Potenzreihen *modulo konvergenter Reihen* betrachtet.

Satz 10.3.1 *Gegeben seien $s > 0$ und $\hat f \in \mathbb{C}[[z]]_s$. Dann gibt es zu jeder normalen Überdeckung $S_j = S(d_j, \alpha_j, \rho)$ mit $0 < \alpha_j \le s\pi$, $0 \le j \le m$, Funktionen $\psi_j \in \mathcal{A}_{s,0}(S_{j-1} \cap S_j)$, $1 \le j \le m$, so dass bei beliebiger Wahl von $a_j \in S_{j-1} \cap S_j$ gilt*

$$\hat f \;=\; \hat f_0 \;+\; \sum_{j=1}^{m} \widehat{\mathcal{CH}}_{a_j}\, \psi_j, \qquad \text{mit } \hat f_0 \;\in\; \mathbb{C}\{z\}. \tag{10.3.1}$$

Umgekehrt ist für jede normale Überdeckung und jede Wahl von $\psi_j \in \mathcal{A}_{s,0}(S_{j-1} \cap S_j)$ sowie $\hat f_0 \in \mathbb{C}\{z\}$ die durch (10.3.1) *gegebene Reihe in $\mathbb{C}[[z]]_s$.*

Beweis: Seien $\hat f \in \mathbb{C}[[z]]_s$ und S_j wie angegeben. Dann gibt es wegen Satz 8.6.1 Funktionen $\tilde f_j \in \mathcal{A}_s(S_j)$ mit $J(\tilde f_j) = \hat f$, für $j = 0, \ldots, m-1$. Mit $\tilde f_m(z) = \tilde f_0(z e^{-2\pi i})$, $z \in S_m$, gilt dasselbe auch für $j = m$. Seien $\psi_j(z) = \tilde f_j(z) - \tilde f_{j-1}(z)$, $z \in S_{j-1} \cap S_j$; dann folgt $\psi_j \in \mathcal{A}_{s,0}(S_{j-1} \cap S_j)$, $1 \le j \le m$. Mit f_j wie in Satz 10.2.2 erhalten wir dass $f(z) = \tilde f_j(z) - f_j(z)$ in einer punktierten Kreisscheibe um den Nullpunkt unabhängig von j und unverzweigt ist. Weiter folgt dass f dort eine asymptotische Entwicklung hat und deshalb sogar im Nullpunkt holomorph ist. Wenn wir die Abbildung J auf $\tilde f_j(z) = f(z) + f_j(z)$ anwenden, folgt (10.3.1) mit der konvergenten Reihe $\hat f_0 = J(f)$. Die umgekehrte Richtung folgt direkt aus Proposition 10.1.3. □

Bemerkung 10.3.2 *Der obige Satz und sein Beweis bleiben richtig, wenn wir normale Überdeckungen mit Sektoren mit größeren Öffnungswinkeln betrachten, solange es Funktionen $f_j \in \mathcal{A}_s(S_j)$ mit $J(f_j) = \hat{f}$, $0 \le j \le m-1$ gibt. Dies ist z. B. bei summierbaren Reihen $\hat{f}$ richtig, wenn die Mittelrichtung der Sektoren nicht singulär und die Öffnungswinkel nicht zu groß sind.*

Korollar zu Satz 10.3.1 *Gegeben seien $s > 0$, $d \in \mathbb{R}$ und $\hat{f} \in \mathbb{C}[[z]]$. Dann gilt:*

(a) *Für $k = 1/s \ge 1/2$ ist die k-Summierbarkeit von $\hat{f}$ in der Richtung d äquivalent zur Existenz einer Zerlegung von $\hat{f}$ wie in* Satz 10.3.1, *mit*

$$|d + \pi - \arg a_j| \ \le \ \pi(1 - s/2), \quad 1 \le j \le m.$$

(b) *Für $k = 1/s \ge 1/2$ ist die k-Summierbarkeit von $\hat{f}$ in der Richtung d äquivalent zur Existenz einer Zerlegung von $\hat{f}$ wie in* Satz 10.3.1, *mit $m = 1$ und*

$$S_0 \cap S_1 \ = \ S(d + \pi, \alpha, \rho), \qquad \alpha > (s - 2)\pi.$$

Beweis: Sei $\hat{f} \in \mathbb{C}\{z\}_{k,d}$, und sei $k \ge 1/2$. Wähle eine normale Überdeckung S_j, $j = 0, \ldots, m$ wie folgt: Der Sektor S_0 hat Mittelrichtung d und einen Öffnungswinkel $> s\pi$ und ist so, dass $f_0 = \mathcal{S}_{k,d}\,\hat{f}$ in S_0 holomorph ist. Die übrigen Sektoren haben dagegen Öffnungswinkel $\le s\pi$. Da wir die Punkte $a_j \in S_{j-1} \cap S_j$ beliebig wählen können, sehen wir leicht dass (a) gilt, und darum folgt die Existenz einer Zerlegung wie in Satz 10.3.1. Für $0 < k \le 1/2$ folgt aus $\hat{f} \in \mathbb{C}\{z\}_{k,d}$ dass $f = \mathcal{S}_{k,d}\,\hat{f} \in \mathcal{A}_s(S_0)$ ist, mit $S_0 = S(d, \tilde{\alpha}, \rho)$, $\tilde{\alpha} > s\pi$. Setzt man $S_1 = S(d + 2\pi, \tilde{\alpha}, \rho)$, dann bilden S_0 und S_1 bereits eine normale Überdeckung, und $S_0 \cap S_1$ ist ein Sektor mit Öffnungswinkel $> \pi(s - 2)$ und Mittelrichtung $d + \pi$. Damit ist die eine Richtung des Beweises für beide Fälle erfolgt. Die umgekehrte Richtung folgt aber aus Bemerkung 10.1.4. □

Wir zeigen nun, dass k-summierbare Reihen immer in eine Summe von endlich vielen anderen k-summierbaren Reihen zerlegt haben, welche jeweils nur eine singuläre Richtung haben:

Satz 10.3.3 *Gegeben seien $k > 0$ und $\hat{f} \in \mathbb{C}\{z\}_k$, und $\hat{f}$ habe $m \ge 2$ singuläre Richtungen. Dann gilt*

$$\hat{f} \ = \ \hat{f}_1 \ + \ldots + \ \hat{f}_m,$$

wobei alle $\hat{f}_j \in \mathbb{C}\{z\}_k$ sind und genau eine singuläre Richtung haben.

Beweis: Seien die singulären Richtungen von $\hat{f}$ so, dass $0 < d_1 < \ldots < d_m \le 2\pi$ ist, und sei noch $d_0 = d_m - 2\pi$ gesetzt. Für $1 \le j \le m$ sei $f_j = \mathcal{S}_{k,d}\,\hat{f}$, mit $d_{j-1} < d < d_j$. Dann ist f_j holomorph in einem sektoriellen Gebiet G_j mit Mittelrichtung $(d_{j-1} + d_j)/2$ und Öffnungswinkel $d_j - d_{j-1} + \pi/k$. Weiter folgt $f_j(z) \cong_{1/k} \hat{f}(z)$ in G_j. Mit $G_0 = G_m \mathrm{e}^{-2\pi i}$ und $f_0(z) = f_m(z\mathrm{e}^{2\pi i})$ in G_0 definieren wir $\psi_j(z) = f_j(z) - f_{j-1}(z)$ in $G_{j-1} \cap G_j$, $1 \le j \le m$. Mit beliebigen $a_j \in G_{j-1} \cap G_j$ folgt aus Bemerkung 10.1.4 dass $\widehat{\mathcal{CH}}_{a_j}\,\psi_j$ in allen Richtungen bis auf d_{j-1} modulo 2π k-summierbar ist. Wie im Beweis von Satz 10.3.1 zeigt man dass $\hat{f} - \sum_{j=1}^{m} \widehat{\mathcal{CH}}_{a_j}\,\psi_j = \hat{f}_0$ konvergiert und daher in jeder Richtung k-summierbar ist. Wenn man $\hat{f}_j = \widehat{\mathcal{CH}}_{a_j}\,\psi_j$, $1 \le j \le m - 1$, und $\hat{f}_m = \hat{f}_0 + \widehat{\mathcal{CH}}_{a_m}\,\psi_m$ setzt, folgt die Behauptung. □

Aufgabe 10.3.4 *Zeige: Wenn $\hat{f} \in \mathbb{C}\{z\}_k$ genau eine singuläre Richtung d_0 hat, dann ist $\hat{f}(z^2)$ in $\mathbb{C}\{z\}_{2k}$ und hat genau die beiden singulären Richtungen $d_0/2$ und $\pi + d_0/2$.*

Aufgabe 10.3.5 *Sei $\hat{f}(z) = \sum_0^\infty \Gamma(1+n/k)\, z^{2n}$, mit $k > 0$. Zeige $\hat{f} \in \mathbb{C}\{z\}_{2k}$, finde die singulären Richtungen von $\hat{f}$, und zerlege $\hat{f}$ in eine Summe von Reihen mit genau einer singulären Richtung.*

Aufgabe 10.3.6 *Sei $\hat{f} \in \mathbb{C}[[z]]_s$ so dass $g = \mathcal{S}\,(\hat{\mathcal{B}}_{1/s}\hat{f})$ eine rationale Funktion ist. Zeige dass dann die Partialbruchzerlegung von g eine Zerlegung von $\hat{f}$ in Reihen mit genau einer singulären Richtung erzeugt.*

10.4 Funktionen mit Gevrey-Asymptotik

Die nächste Proposition ist eine Verallgemeinerung des Riemannschen Hebbarkeitssatzes und kann benutzt werden um festzustellen, ob gegebene Funktionen eine Gevrey-Asymptotik besitzen, ohne diese explizit zu berechnen.

Proposition 10.4.1 *Gegeben seien $s > 0$, ein Sektor S und eine Funktion $f \in \mathcal{H}(S)$. Genau dann ist $f \in \mathcal{A}_s(S)$, wenn eine normale Überdeckung $S_0, \ldots, S_m$ mit $S_0 = S$ sowie Funktionen $f_j \in \mathcal{H}(S_j)$, $0 \le j \le m$, existieren mit folgenden Eigenschaften:*

Es ist $f_0 = f$ und $f_m(z) = f_0(z\mathrm{e}^{-2\pi i})$ für $z \in S_m$, alle f_j sind im Nullpunkt beschränkt, und es gilt

$$f_{k-1}(z) \;-\; f_k(z) \;\in\; \mathcal{A}_{s,0}(S_{k-1} \cap S_k), \quad 1 \le k \le m\,,$$

Beweis: Sei $f \in \mathcal{A}_s(S)$, und sei $\hat{f} = J(f)$. Wir wählen irgendeine normale Überdeckung $S_0, \ldots, S_m$ mit $S_0 = S$, und so dass die Öffnungswinkel der übrigen Sektoren $S_1, \ldots, S_{m-1}$ höchstens gleich $s\pi$ sind. gibt es $f_j \in \mathcal{A}_s(S_j)$ mit $J(f_j) = \hat{f}$, $1 \le j \le m-1$, und mit $f_m(z) = f_0(z\mathrm{e}^{-2\pi i})$ folgt $f_{k-1}(z) - f_k(z) \in \mathcal{A}_{s,0}(S_{k-1} \cap S_k)$, $1 \le k \le m$. Dies ist die eine Richtung der Behauptung, da alle f_j im Nullpunkt beschränkt sind. Umgekehrt, seien S_j und f_j wie angegeben. Wir definieren $\psi_j = f_j - f_{j-1}$, $1 \le j \le m$, und (mit $a_\mu \in S_{\mu-1} \cap S_\mu$ und $\tilde{S}_j$ wie in Satz 10.2.2)

$$g_j(z) \;=\; \sum_{\mu=1}^{j} (\mathcal{C}\mathcal{H}_{a_\mu}\,\psi_\mu)(z) \;+\; \sum_{\mu=j+1}^{m} (\mathcal{C}\mathcal{H}_{a_\mu}\,\psi_\mu)(z\mathrm{e}^{2\pi i})$$

für $z \in \tilde{S}_j$ und $0 \le j \le m$. Dann folgt aus Satz 10.2.2 dass alle $g_j \in \mathcal{A}_s(S_j)$ sind, und $J(g_j) = \hat{g}$ ist von j unabhängig. Weiter folgt dass auch $h(z) = f_j(z) - g_j(z)$ nicht von j abhängt und unverzweigt und im Nullpunkt beschränkt ist. Also ist der Nullpunkt eine hebbare Singularität von h, und daher gilt $f_j = h + g_j \in \mathcal{A}_s(\tilde{S}_j)$, ja sogar in $\mathcal{A}_s(S_j)$. □

Aufgabe 10.4.2 *Im Folgenden sei λ eine komplexe Zahl und $p(z)$ ein Polynom vom Grad $r \ge 1$ mit höchstem Koeffizienten 1. Weiter sei $g(u)$ holomorph und unverzweigt für $0 \le |u| < \rho$.*

(a) *Für $j = 0, \ldots, r$ sei*

$$f_j(1/z) \;=\; z^\lambda \mathrm{e}^{p(z)} \int_{\infty(2j\pi/r)}^{z} u^{-\lambda}\mathrm{e}^{-p(u)} g(1/u)\, du^r, \quad 0 < |z| < \rho,$$

wobei von ∞ entlang des Strahls $\arg u = 2j\pi/r$ bis zu einem beliebig gewälten Punkt $z_{0,j}$ mit $|z_{0,j}|^{-1} < \rho$ und dann weiter bis z integriert wird. Zeige dass alle f_j für $0 < |z| < \rho$ holomorph sind, und dass $f_j(1/z) - f_{j-1}(1/z) = c_j z^\lambda \mathrm{e}^{p(z)}$ ist, für $j = 1, \ldots, r$ und $c_j = \int_{\gamma_j} u^{-\lambda}\mathrm{e}^{-p(u)} g(1/u)\, du$, wobei γ_j ein Weg von ∞ entlang $\arg u = 2j\pi/r$ bis $z_{0,j}$, dann nach $z_{0,j-1}$, und zurück nach ∞ entlang $\arg u = 2(j-1)\pi/r$ ist.

(b) *Zeige dass die $f_j(z)$ in den Sektoren $S_j = S(2j\pi/r, 3\pi/r, \rho)$ im Nullpunkt beschränkt sind, für $j = 0, \ldots, r$.*

(c) *Zeige für* $s = 1/r$

$$\begin{aligned} f_{j-1}(z) \ - \ f_j(z) \ &\in \ \mathcal{A}_{s,0}(S_{j-1} \cap S_j)\,, \qquad 1 \le j \le r, \\ f_r(z) \ &= \ f_0(z\mathrm{e}^{-2\pi i}), \qquad z \in S_r\,. \end{aligned}$$

(d) *Zeige* $f_j \in \mathcal{A}_s(S_0)$ *für* $0 \le j \le r$.

Index