Vorlesungsmanuskript zu

Integralgleichungen

Werner Balser
Institut für Angewandte Analysis

Wintersemester 2010/11

Inhaltsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] **H. W. Engl**, *Integralgleichungen*, Springer Lehrbuch Mathematik, Springer-Verlag, Vienna, 1997.

[2] **S. Fenyő und H.-W. Stolle**, *Theorie und Praxis der linearen Integralgleichungen. 1*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1982.

[3] ——, *Theorie und Praxis der linearen Integralgleichungen. 2*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1983.

[4] ——, *Theorie und Praxis der linearen Integralgleichungen. 3*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1983.

[5] **W. Hackbusch**, *Integralgleichungen*, B. G. Teubner, Stuttgart, 2. Aufl., 1997. Theorie und Numerik, Teubner Studienbücher Mathematik.

[6] **G. Hamel**, *Integralgleichungen. Einführung in Lehre und Gebrauch*, Springer-Verlag, Berlin, 1949.

[7] **E. Hellinger und O. Toeplitz**, *Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten*, Chelsea Publishing Company, New York, N. Y., 1953.

[8] **D. Hilbert**, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, Chelsea Publishing Company, New York, N.Y., 1953.

[9] **D. Hilbert und E. Schmidt**, *Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten*, Teubner-Archiv zur Mathematik, 11, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1989.

[10] **G. Hoheisel**, *Integralgleichungen*, Zweite, neubearbeitete und erweiterte Auflage, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1963.

[11] **S. G. Michlin**, *Vorlesungen über lineare Integralgleichungen*, Hochschulbücher für Mathematik, Bd. 58, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1962.

[12] **N. I. Muschelischwili**, *Singuläre Integralgleichungen. Randwertprobleme der Funktionentheorie und einige Anwendungen auf die mathematische Physik*, In deutscher Sprache herausgegeben von L. Berg and H. Schubert. Mathematische Lehrbücher und Monographien, II. Abteilung, Mathematische Monographien, Band XX, Akademie-Verlag, Berlin, 1965.

[13] **I. G. Petrovskij**, *Vorlesungen über die Theorie der Integralgleichungen*, Physica-Verlag, Würzburg, 1953. Übersetzt von R. Herschel.

[14] **A. Peyerimhoff**, *Gewöhnliche Differentialgleichungen. II*, Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden, 1982. 7

[15] **W. Schmeidler**, *Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik. I. Lineare Integralgleichungen*, Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik, Reihe A, Band 22, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1950.

[16] **F. Smithies**, *Integral equations*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, no. 49, Cambridge University Press, New York, 1958.

Kapitel 1

Einleitung und Bezeichnungen

Die in dieser Vorlesung betrachteten linearen Integralgleichung lassen sich abstrakt in der Form

$$x \;=\; b \;+\; \lambda T x\,, \qquad x \in \mathbb{X} \tag{1.0.1}$$

schreiben, wobei T eine lineare Abbildung eines unendlich-dimensionalen Vektorraumes $\mathbb{X}$ über $\mathbb{C}$ in sich selber ist, während $b \in \mathbb{X}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ sind. Gesucht sind dabei alle $x \in \mathbb{X}$, die diese Gleichung erfüllen. Spezielle Gleichungen dieser Art sind die Fredholmschen bzw. Volterraschen Integralgleichungen zweiter Art, welche im nächsten Abschnitt definiert werden. In der klassischen Theorie von *E. I. Fredholm* war dabei $\mathbb{X}$ der Banachraum der auf einem abgeschlossenen Intervall stetigen Funktionen, und diesen Fall wollen wir zunächst betrachten. Eine andere natürliche Situation, welche aber einige zusätzliche Schwierigkeiten bietet, ist der Fall $\mathbb{X} = L_2(a, b)$ der auf einem (abgeschlossenen) Intervall quadrat-integrierbaren Funktionen, der später dargestellt wird. Zum Schluss werden wir dann auch auf den Fall eingehen, wo $\mathbb{X}$ ein Raum von Zahlenfolgen und T eine unendliche Matrix ist. In diesem Fall sieht man besonders schön, dass es sich dabei um ein lineares Gleichungssystem in unendlich vielen Unbekannten und mit unendlich vielen Gleichungen handelt.

Es ist nach den Ergebnissen der LA klar, dass die Menge aller Lösungen leer sein kann, nämlich falls die Abbildung[1] $I - \lambda T$ nicht surjektiv und $b \notin \operatorname{Bild}(I - \lambda T)$ ist. In jedem anderen Fall ist die Lösungsmenge eine sogenannte *lineare Mannigfaltigkeit*, d. h., ein um *eine partikuläre Lösung* verschobener Unterraum $U = U_\lambda \subset \mathbb{X}$. Dieser Unterraum ist die Lösungsmenge der *homogenen Gleichung*, also der mit $b = 0$, und somit gleich dem Kern der Abbildung $I - \lambda T$, und genau dann hat (1.0.1) höchstens eine Lösung, wenn U_λ nur aus dem Nullvektor besteht. Im Allgemeinen kann es aber überabzählbar viele Werte von λ geben, für welche die Dimension von U_λ positiv, ja möglicherweise sogar unendlich groß ist. Wir werden sehen, dass dies bei Integralgleichungen nicht der Fall ist. Weiter werden wir für die Integralgleichungen eine ganze Funktion von λ definieren, deren Nullstellen genau diejenigen λ sind, für die der Lösungsraum der homogenen Gleichung eine positive Dimension hat. Diese Funktion werden wir die *Fredholmsche Determinante* der Abbildung T nennen. Sie entspricht für Matrizen deren charakteristischen Polynom, kann aber für die von uns betrachteten unendlich großen Matrizen nicht immer definiert werden.

Abstrakt kann man Integralgleichungen innerhalb der Theorie der *kompakten Operatoren* in der Funktionalanalysis behandeln, aber die klassische *Fredholmtheorie* kann ohne große Kenntnisse der Funktionalanalysis entwickelt werden, und diese Theorie soll hier vorgestellt werden. Trotzdem ist es angebracht, wenigstens einige elementare Ergebnisse und Bezeichnungen der Funktionalanalysis zu verwenden, und diese werden im Folgenden vorgestellt. Insbesondere ist aber zu beachten, dass in Funktionalanalysis an Stelle von Abbildungen der Form $I - \lambda T$ immer $\lambda I - T$ betrachtet wird. Wenn $\lambda \neq 0$ ist, ist aber $\lambda I - T = \lambda (I - \lambda^{-1} T)$ genau dann injektiv, bzw. surjektiv, bzw. bijektiv, wenn $I - \lambda^{-1} T$ die gleiche Eigenschaft hat, sodass bis auf den Übergang von λ zu λ^{-1} beide Theorien äquivalent sind. Da der Fall

[1] Hier steht I immer für die identische Abbildung $x \mapsto x$ auf $\mathbb{X}$.

$\lambda = 0$, z. B. in der Theorie der kompakten Operatoren, ohnehin immer eine Sonderrolle spielt, ist die hier gewählte Form der Gleichung (1.0.1) zur Behandlung von Integralgleichungen besser geeignet.

1.1 Integralgleichungen zweiter Art mit stetigem Kern

Wenn nichts anderes gesagt wird, seien in dieser Vorlesung a und b immer zwei feste reelle Zahlen, und es gelte $a < b$. Für das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ schreiben wir auch kurz $\mathcal{I}$. Mit $C(\mathcal{I})$ bzw. $C(\mathcal{I}^2)$ bezeichnen wir die Menge aller auf $\mathcal{I}$ bzw. $\mathcal{I}^2 := \mathcal{I} \times \mathcal{I}$ stetigen Funktionen mit Werten in $\mathbb{C}$.

Definition 1.1.1 *Für ein $k \in C(\mathcal{I}^2)$, ein $f \in C(\mathcal{I})$ und ein $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt die Gleichung zur Bestimmung einer unbekannten Funktion $x \in C(\mathcal{I})$*

$$\forall\ s \in [a,b]: \qquad x(s) \;=\; f(s) \;+\; \lambda \int_a^b k(s,t)\, x(t)\; dt \tag{1.1.1}$$

eine Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art mit (stetiger) Kernfunktion k und Inhomogenität f zum Parameter λ, *oder auch einfach* Fredholmsche Integralgleichung. *Wir nennen dann auch*

$$\forall\ s \in [a,b]: \qquad x(s) \;=\; \lambda \int_a^b k(s,t)\, x(t)\; dt \tag{1.1.2}$$

die zugehörige homogene Gleichung. *Falls dagegen k wenigstens auf dem Dreieck $\Delta := \{a \le t \le s \le b\}$ stetig ist, dann heißt*

$$\forall\ s \in [a,b]: \qquad x(s) \;=\; f(s) \;+\; \lambda \int_a^s k(s,t)\, x(t)\; dt \tag{1.1.3}$$

eine Volterrasche Integralgleichung (zweiter Art). *Wenn man $k(s,t) = 0$ setzt für $a \le s < t \le b$, dann hat eine Volterrasche Integralgleichung die Form* (1.1.1)*, wobei allerdings die Kernfunktion nicht auf dem ganzen Quadrat $\mathcal{I}^2$ stetig zu sein braucht.*

Aufgabe 1.1.2 (Lineare Differentialgleichungen) *Für $n \in \mathbb{N}$ sei $y(t)$ n-mal stetig differenzierbar auf dem Intervall $\mathcal{I}$, und $y^{(n-j)}(a) = y_j$ für $1 \le j \le n$. Zeige dass*

$$y^{(n-j)}(s) \;=\; \int_a^s \frac{(s-t)^{j-1}}{(j-1)!}\, x(t)\; dt \;+\; \sum_{k=0}^{j-1} \frac{(s-a)^k}{k!}\, y_{j-k} \qquad \forall\ s \in \mathcal{I}\,, \quad 1 \le j \le n\,,$$

wobei $x(t) = y^{(n)}(t)$ ist. Seien jetzt $a_1, \ldots, a_n, f \in C(\mathcal{I})$, und $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{C}$ gegeben. Zeige weiter, dass das Anfangswertproblem

$$y^{(n)} \;+\; \sum_{j=1}^{n} a_j(s)\, y^{(n-j)} \;=\; f(s)\,, \qquad y^{(n-j)}(a) = y_j \quad 1 \le j \le n$$

zu einer Volterraschen Integralgleichung für $x(t) = y^{(n)}(t)$ äquivalent ist.

Aufgabe 1.1.3 (Randwertprobleme) *Oft muss man in der Technik eine Funktion y bestimmen, die eine Differentialgleichung löst und, statt der üblichen Anfangsbedingungen zu einer Anfangszeit t_0, weitere Bedingungen an zwei verschiedenen Zeitpunkten t_0 und t_1 erfüllt. Eine solche Aufgabe heißt* ein Randwertproblem. *Zeige: Eine Funktion x erfüllt genau dann das Randwertproblem*

$$x'' \;+\; \lambda\, x \;=\; 0\,, \qquad x(0) \;=\; x(1) \;=\; 0\,,$$

wenn sie Lösung der homogenen Fredholmschen Integralgleichung (1.1.2) *mit* $a = 0$, $b = 1$ *und dem Kern*

$$k(s,t) \;=\; \begin{cases} s\,(1-t) & (0 \le s \le t \le 1) \\ (1-s)\,t & (t < s \le 1) \end{cases}$$

ist. Beachte, dass dieser Kern in der Tat stetig ist. Für allgemeine Randwertprobleme bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung und die zugehörige Fredholmsche Integralgleichung, vergleiche z. B. das Buch von A. Peyerimhoff [14].

Aufgabe 1.1.4 *Bestimme alle Lösungen der Fredholmschen Integralgleichung* (1.1.1) *für den Fall dass* $k(s,t) = s\,t$ *und* $f(s) = \sin s$ *ist.* Anleitung: *Wenn* $x(s)$ *eine Lösung ist, dann folgt* $x(s) = \sin s + \lambda\, x\, s$ *mit der, zunächst unbekannten, Konstanten* $x = \int_a^b t\,x(t)\,dt$. *Finde eine Gleichung für dieses* x.

Aufgabe 1.1.5 *Untersuche, welche Eigenschaft der Kernfunktion* k *in der letzten Aufgabe dafür verantwortlich war, dass wir die zugehörige Fredholmgleichung lösen konnten.*

1.2 Operatoren in allgemeinen Räumen

Definition 1.2.1 (Normierte Räume) *Sei* $\mathbb{X}$ *ein beliebiger Vektorraum über* $\mathbb{K}$, *wobei* $\mathbb{K}$ *immer* $\mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$ *bedeuten soll. Eine Abbildung*

$$\|\cdot\| : \quad \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad x \longmapsto \|x\|$$

heißt eine Norm *auf* $\mathbb{X}$, *wenn folgendes gilt:*

(N1) $\forall\, x \in \mathbb{X}: \qquad \|x\| \ge 0\,; \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$ (Positive Definitheit)

(N2) $\forall\, x \in \mathbb{X} \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{K}: \quad \|\alpha\, x\| \;=\; |\alpha|\,\|x\|$ (Homogenität)

(N3) $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{X}: \quad \|x_1 + x_2\| \;\le\; \|x_1\| + \|x_2\|$ (Dreiecksungleichung)

Das Paar $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ *heißt dann* ein normierter Raum. *Die Menge aller Vektoren* x *mit* $\|x\| < 1$, *bzw.* $\|x\| \le 1$, *heißt die* offene, *bzw.* abgeschlossene Einheitskugel *in* $\mathbb{X}$ *und wird mit* $B_{\mathbb{X}}$ *bzw.* $\overline{B}_{\mathbb{X}}$ *bezeichnet.*

Aufgabe 1.2.2 *Zeige durch Anwendung von Resultaten aus der Analysis: Die Menge* $C(\mathcal{I})$ *ist ein Vektorraum über* $\mathbb{C}$, *und durch*

$$\|f\|_\infty \;:=\; \sup_{s \in \mathcal{I}} \,|f(s)|$$

wird eine Norm auf $C(\mathcal{I})$ *definiert. Wenn nichts anderes gesagt wird, wird im Folgenden immer diese Norm auf* $C(\mathcal{I})$ *betrachtet.*

Beispiel 1.2.3 *Das für uns wichtigste Beispiel eines normierten Raumes ist die Menge* $C(\mathcal{I})$. *Weitere Beispiele sind die folgenden: Für* $x = (x_j)_{j=1}^\infty \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, *d. i. die Menge aller Zahlenfolgen mit komplexen Gliedern, und* $1 \le p \le \infty$ *sei*

$$\|x\|_p \;=\; \begin{cases} \Big(\displaystyle\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p \Big)^{1/p} & (p < \infty), \\[2ex] \displaystyle\sup_{k \ge 1} \,|x_k| & (p = \infty). \end{cases}$$

Dann ist die Menge aller Folgen x mit $\|x\|_p < \infty$ ein normierter Raum, den wir mit ℓ_p bezeichnen. Für $p < \infty$ ist die Dreiecksungleichung in diesem Raum äquivalent zur Minkowskischen Ungleichung. *Die Menge c aller konvergenten Folgen ist ein Teilraum von ℓ_∞ und hat selbst wieder die Menge c_0 aller Nullfolgen als Teilraum. Dies sind daher ebenfalls normierte Räume.*

Aufgabe 1.2.4 *Sei $1 \le p < \tilde{p} \le \infty$. Zeige*

$$\forall\, x \in \ell_p \;:\qquad \|x\|_{\tilde{p}} \;\le\; \|x\|_p\,.$$

Folgere hieraus dass $\ell_p \subset \ell_{\tilde{p}}$ ist. Anleitung: *Zeige zunächst, dass es ausreicht, $x \in \overline{B}_{\ell_p}$ zu betrachten.*

Im Folgenden seien $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ immer normierte Räume über $\mathbb{C}$.

Definition 1.2.5 *Eine Folge (x_n) von Vektoren aus $\mathbb{X}$ heißt* normkonvergent *in $\mathbb{X}$, oder einfach* konvergent, *falls ein $x \in \mathbb{X}$ existiert, für welches $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$ ist. Wir schreiben dann*

$$x_n \;\to\; x \quad \text{für} \quad n \;\to\; \infty\,, \qquad \text{oder} \quad \lim_{n\to\infty} x_n \;=\; x\,,$$

und nennen x auch Grenzwert der Folge (x_n). *Man kann leicht zeigen, dass eine Folge höchstens einen Grenzwert hat. Eine Folge (x_n) heißt* beschränkt, *wenn die Folge $(\|x_n\|)$ ihrer Normen beschränkt ist. Sie heißt eine* Cauchyfolge, *wenn gilt*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \quad \forall\, n, m \ge N \;:\quad \|x_n - x_m\| \;<\; \varepsilon.$$

Wenn jede Cauchyfolge konvergiert, dann heißt $\mathbb{X}$ vollständig *oder ein* Banachraum. *Eine Abbildung T von $\mathbb{X}$ nach $\mathbb{Y}$ heißt* (folgen-)stetig, *falls aus $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ immer $\lim_{n\to\infty} T\,x_n = T\,x$ folgt. In* Aufgabe 1.2.8 *wird gezeigt, dass dies* für lineare Abbildungen *äquivalent zur Existenz einer Konstanten $C > 0$ ist, für die*

$$\|T\,x\| \le C\,\|x\| \qquad \forall\, x \in \mathbb{X} \tag{1.2.1}$$

ist, und in diesem Fall heißt T auch beschränkt. *Die Menge aller beschränkten linearen Abbildungen von $\mathbb{X}$ nach $\mathbb{Y}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ und schreiben kürzer $\mathcal{L}(\mathbb{X}) := \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{X})$. Jedes $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$ nennen wir kurz* einen beschränkten Operator *auf $\mathbb{X}$. Auf $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ wird durch*

$$\|T\| \;:=\; \sup_{\|x\|\le 1} \;\|T\,x\| \qquad \forall\, T \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$$

eine Norm eingeführt, und falls $\mathbb{Y}$ vollständig ist, dann gilt dasselbe auch für $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Man nennt $\|T\|$ auch die Operatornorm von T, *und es ist oft relativ schwierig, diese genau zu bestimmen. Glücklicherweise reicht es aber meistens aus, eine gute Abschätzung für $\|T\|$ zu finden.*

Aufgabe 1.2.6 (Konvergenz von Reihen) *Wie in der Analysis üblich, wollen wir eine Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ mit $x_j \in \mathbb{X}$ konvergent nennen, wenn die Folge ihrer Partialsummen $s_n := \sum_{j=1}^{n} x_j$ konvergiert. Wenn x der Grenzwert der Folge (s_n) ist, schreiben wir auch $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j$ und nennen x* den Wert der Reihe. *Zeige: Wenn $\mathbb{X}$ ein Banachraum ist, und wenn die Zahlenreihe $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|$ konvergiert, dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$. Wir sagen deshalb auch kurz:* In jedem Banachraum folgt aus der absoluten Konvergenz einer Reihe ihre Konvergenz. *Beachte aber, dass dies nicht so sein muss, wenn $\mathbb{X}$ kein Banachraum ist.*

Aufgabe 1.2.7 (Rechenregeln für Folgen und Reihen) *Zeige dass die üblichen Regeln für Grenzwerte von Folgen und Reihen auch in dem normierten Raum $\mathbb{X}$ gelten. Allerdings kann man Vektoren im Allgemeinen nicht miteinander multiplizieren!*

Aufgabe 1.2.8 (Stetigkeit und Beschränktheit) *Zeige, dass für lineare Abbildungen $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ die Folgenstetigkeit zur Beschränktheit äquivalent ist.*

Aufgabe 1.2.9 *Zeige: Für $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ ist $\|T\|$ gleich dem Infimum aller Konstanten C, für welche* (1.2.1) *gilt.*

Beispiel 1.2.10 *Die oben definierten Räume c, c_0, ℓ_p, sowie der Raum $C(\mathcal{I})$, sind alle vollständig, also Banachräume.*

Aufgabe 1.2.11 *Sei k stetig auf $\mathcal{I}^2$. Zeige dass dann durch*

$$x \ \mapsto \ K\,x\,, \qquad (K\,x)(s) \ = \ \int_a^b k(s,t)\ x(t)\ dt \qquad \forall\ x \in C(\mathcal{I})$$

eine stetige lineare Abbildung von $C(\mathcal{I})$ in sich definiert wird. Zeige weiter, dass für die oben definierte Operatornorm von K gilt

$$\|K\| \ := \sup_{x \in \overline{B}_{C(\mathcal{I})}} \|K\,x\| \quad \le \quad \sup_{s \in \mathcal{I}} \int_a^b |k(s,t)|\ dt\,.$$

Überprüfe, dass die gleiche Aussage auch für den Fall gilt, dass k auf dem Dreieck Δ stetig ist und außerhalb von Δ durch die Nullfunktion fortgesetzt wird.

Beispiel 1.2.12 *Seien p, q Zahlen aus dem offenen Intervall $(1, \infty)$, und sei p' so, dass $1/p + 1/p' = 1$ ist. Sei weiter $A = [a_{jk}]_{j,k=1}^{\infty}$ eine Matrix mit unendlich vielen Zeilen und Spalten, für welche*

$$\|A\|_{p,q} \ := \ \left[\ \sum_{j=1}^{\infty} \ \Big(\ \sum_{k=1}^{\infty} \ |a_{jk}|^{p'} \Big)^{q/p'} \right]^{1/q} \ < \ \infty\,.$$

Die Menge aller solcher Matrizen sei mit $M_{p,q}$ bezeichnet. Sei jetzt $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$. Aus der Hölderschen Ungleichung *folgt dass*

$$\forall\ j \in \mathbb{N}\ : \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \ |a_{jk}\,x_k| \ \le \ \Big(\ \sum_{k=1}^{\infty} \ |a_{jk}|^{p'} \Big)^{1/p'} \ \ \|x\|_p\,.$$

Daher sind die Reihen $y_j := \sum_{k=1}^{\infty} \ a_{jk}\,x_k$ für alle $j \in \mathbb{N}$ absolut konvergent, und aus (1.2.2) *folgt dass $y := (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q$ ist. Deshalb definiert die Matrix A eine stetige lineare Abbildung $T = T_A$, nämlich*

$$T_A\,x \ = \ A\,x \ := \ y \ = \ (y_j)_{j=1}^{\infty} \qquad \forall\ x \ = \ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$$

von ℓ_p in ℓ_q, und es ist $\|T\| \le \|A\|_{p,q}$. Für uns ist lediglich der Fall $q = p$ von Interesse, und wir schreiben dann auch kürzer $M_p := M_{p,p}$ sowie

$$\|A\|_p \ := \ \left[\ \sum_{j=1}^{\infty} \ \Big(\ \sum_{k=1}^{\infty} \ |a_{jk}|^{p'} \Big)^{p/p'} \right]^{1/p} \ < \ \infty\,. \tag{1.2.2}$$

Wir wollen in diesem Fall A Darstellungsmatrix der Abbildung *T nennen. Wir zeigen im nächsten Beispiel, dass jedes $T \in \mathcal{L}(\ell_p)$ eine Darstellungsmatrix besitzt – allerdings zeigt das Beispiel der identischen Abbildung auf ℓ_p, dass solche Matrizen i. a. nicht* (1.2.2) *erfüllen werden. Welche Bedingung eine Matrizen A erfüllen muss, damit sie ℓ_p in sich abbilden, ist eine bis heute nicht völlig befriedigend gelöste Frage.*

Aufgabe 1.2.13 *Für ein beliebiges $A \in M_p$ bezeichne D die Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $d_j := (\sum_k |a_{jk}|^{p'})^{1/p'}$. Falls $j \in \mathbb{N}$ so ist, dass $d_j \neq 0$ ist, seien $b_{jk} := a_{jk}/d_j$, und sonst seien $b_{jk} = 0$, für alle $k \in \mathbb{N}$. Zeige: Die Matrix B definiert eine beschränkte lineare Abbildung von ℓ_p nach ℓ_∞, und D bildet ℓ_∞ nach ℓ_p ab.*

Beispiel 1.2.14 (Existenz der Darstellungsmatrix) *Für p wie oben sei jetzt $T \in \mathcal{L}(\ell_p)$ ein beliebiger beschränkter Operator. Dann ist für $x = (x_k) \in \ell_p$ und $T\,x = y = (y_k)$ die Abbildung $x \mapsto y_k$, als Hintereinanderausführung stetiger Abbildungen, eine stetige Abbildung von ℓ_p nach $\mathbb{C}$. Wenn wir mit $e_n = (\delta_{nk})$ die Folge bezeichnen, die an der n-ten Stelle eine 1 hat, während ihre übrigen Glieder verschwinden, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^\infty x_n\, e_n$, im Sinn der p-Norm, gegen die Folge x. Daraus folgt dass $y = T\,x = \sum_{n=1}^\infty x_n\, T\, e_n$ ist, und wenn man $T\,e_n = (a_{kn})_{k=1}^\infty$ setzt, ergibt sich*

$$y_j \;=\; \sum_{k=1}^\infty a_{jk}\, x_k \qquad \forall\; j \in \mathbb{N}\,. \tag{1.2.3}$$

Also gehört in der Tat zu jedem $T \in \mathcal{L}(\ell_p)$ eine Darstellungsmatrix A. Wie oben bereits gesagt, braucht A aber nicht die Bedingung (1.2.2) *zu erfüllen – diese ist also nur hinreichend dafür, dass A eine Abbildung von ℓ_p in sich darstellt.*

Aufgabe 1.2.15 *Benutze den Satz vom abgeschlossenen Graphen, um folgendes zu zeigen: Wenn eine unendlich große Matrix A so ist, dass $A\,x$ für alle $x \in \ell_p$ existiert und wieder in ℓ_p liegt, dann ist die hierdurch definierte Abbildung von ℓ_p in sich stetig.*

Beispiel 1.2.16 *Der sogenannte* Linksshift $x = (x_1, x_2, \ldots) \mapsto T\,x = (x_2, x_3, \ldots)$ *ist ein stetiger Operator von ℓ_p in sich und hat die Darstellungsmatrix A, wobei alle $a_{jk} = 0$ sind bis auf die direkt oberhalb der Diagonale, welche den Wert 1 haben. Diese Matrix erfüllt nicht* (1.2.2).

Aufgabe 1.2.17 (Submultiplikativität der Operatornorm) *Zeige für alle $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$ die Ungleichung $\|T_1 \circ T_2\| \;\le\; \|T_1\|\,\|T_2\|$. Wenn man wie üblich für ein $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$ und $n \in \mathbb{N}_0$ die n-fache Hintereinanderausführung von T mit T^n bezeichnet, wobei speziell $T^0 = I$ sei, dann folgt also mit Induktion $\|T^n\| \le \|T\|^n$, wobei aber im Allgemeinen nicht das Gleichheitszeichen gelten wird.*

Definition 1.2.18 *Wir wollen im Folgenden für $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$ anstatt $T_1 \circ T_2$ einfach $T_1\,T_2$ schreiben. Beachte aber, dass dieses Produkt nicht kommutativ ist.*

Aufgabe 1.2.19 *Zeige für $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$, mit einem Banachraum $\mathbb{X}$, dass die Reihe $\sum_{j=0}^\infty T^j$ konvergiert, wenn $\|T\| < 1$ ist.*

1.3 Reguläre und charakteristische Werte

In diesem und allen folgenden Abschnitten sei $\mathbb{X}$ immer ein Banachraum über $\mathbb{C}$, und T sei ein beschränkter linearer Operator auf $\mathbb{X}$. Weiter schreiben wir, wie schon früher vereinbart, I für die identische Abbildung auf $\mathbb{X}$.

Definition 1.3.1 *Ein $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt ein* regulärer Wert für T, *falls der Operator $I - \lambda\,T$ bijektiv ist, d. h., falls die Gleichung*

$$x \;=\; b \;+\; \lambda\,T\,x$$

für jedes $b \in \mathbb{X}$ genau eine Lösung $x \in \mathbb{X}$ hat. Nach dem Satz vom inversen Operator aus der Funktionalanalysis ist dann $(I - \lambda T)^{-1}$ ebenfalls in $\mathcal{L}(\mathbb{X})$, also stetig, was bedeutet, dass die eindeutig bestimmte Lösung x der obigen Gleichung stetig von dem Vektor b abhängt. Wenn $I - \lambda T$ nicht injektiv ist, wenn also ein $x \neq 0$ existiert, für welches $x = \lambda T x$ ist, dann heißt λ ein charakteristischer Wert *von T. Die Menge aller x mit $x = \lambda T x$ heißt auch* der zugehörige Eigenraum.

Bemerkung 1.3.2 *Beachte dass hier die regulären Werte diejenigen λ sind, für die der Operator $I - \lambda T$ bijektiv ist. Außer für $\lambda = 0$ sind dies genau die Kehrwerte der in der Funktionalanalysis so bezeichneten Zahlen. Diese Terminologie hat im Wesentlichen historische Gründe. Insbesondere ist hier $\lambda = 0$ immer ein regulärer Wert, und die Kehrwerte der charakteristischen Werte sind genau die von 0 verschiedenen Eigenwerte von T. Allgemein kann ein λ weder regulärer noch charakteristischer Wert von T sein, wenn nämlich der Operator $I - \lambda T$ zwar injektiv aber nicht surjektiv ist. Bei Integraloperatoren, welche spezielle kompakte Operatoren sind, wird noch gezeigt werden, dass dies aber nicht der Fall ist.*

Aufgabe 1.3.3 *Sei λ ein regulärer Wert für T, also $I - \lambda T$ invertierbar. Zeige*

$$T (I - \lambda T)^{-1} = (I - \lambda T)^{-1} T .$$

Satz 1.3.4 *Die Menge aller regulären Werte von T ist offen und enthält die offene Kreisscheibe um den Nullpunkt mit Radius $R = \|T\|^{-1}$.*

Beweis: Sei λ_0 ein regulärer Wert, und sei $R(\lambda_0) := (I - \lambda_0 T)^{-1}$. Dann sind $R(\lambda_0)$ und T nach Aufgabe 1.3.3 vertauschbar, und die Reihe

$$R(\lambda) := \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k \, R(\lambda_0)^{k+1} \, T^k$$

ist für alle λ mit $|\lambda - \lambda_0| \, \|R(\lambda_0) T\| < 1$ (absolut) konvergent. Es folgt unter Verwendung der Rechenregeln für konvergente Reihen

$$\begin{aligned} (I - \lambda T) R(\lambda) &= (I - \lambda_0 T - (\lambda - \lambda_0) T) R(\lambda) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k \, R(\lambda_0)^k \, T^k - \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^{k+1} \, R(\lambda_0)^{k+1} \, T^{k+1} = I . \end{aligned}$$

Genauso zeigt man $R(\lambda) (I - \lambda T) = I$, und somit folgt dass alle diese λ reguläre Werte sind, und dass $R(\lambda) = (I - \lambda T)^{-1}$ ist. Also ist die Menge aller regulären Werte von T offen. Für $\lambda_0 = 0$, also $R(\lambda_0) = I$, und $|\lambda| \, \|T\| < 1$ ist die Reihe

$$L_\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \, T^{k+1} \tag{1.3.1}$$

absolut konvergent, und wie oben folgt dass der Operator $I + \lambda L_\lambda$ zu $I - \lambda T$ invers ist. Damit ist alles gezeigt. □

Definition 1.3.5 *Die Reihe* (1.3.1) *heißt* die Neumannsche Reihe zu T; *diese Bezeichnung ist nicht identisch mit der in der Funktionalanalysis, ist aber hier praktischer. Der durch diese Reihe definierte Operator L_λ heißt auch* der lösende Operator *zu T.*

Aufgabe 1.3.6 (Lösender Operator) *Zeige: Wenn für irgend ein $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein Operator L_λ existiert, für den $I + \lambda L_\lambda$ invers zu $I - \lambda T$ ist, dann folgt*

$$L_\lambda = T + \lambda T L_\lambda = T + \lambda L_\lambda T . \tag{1.3.2}$$

Zeige umgekehrt: Wenn ein Operator L_λ der Gleichung (1.3.2) *genügt, dann ist, auch falls $\lambda = 0$ ist, der Operator $I + \lambda L_\lambda$ invers zu $I - \lambda T$, und somit ist λ ein regulärer Wert.*

Aufgabe 1.3.7 *Zeige dass beim Linksshift aus* Beispiel 1.2.16 *alle Werte* λ *mit* $|\lambda| < 1$ *regulär sind, während alle die mit* $|\lambda| > 1$ *charakteristische Werte sind. Begründe, warum dann die auf dem Rand des Einheitskreises liegenden* λ*-Werte jedenfalls nicht regulär sein können. Überlege, ob sie charakteristische Werte sind.*

Kapitel 2

Iterierte Kernfunktionen, Neumannsche Reihe und lösende Kernfunktion

Hier und im Folgenden sei k immer eine (stetige) Kernfunktion eines Fredholmschen oder Volterraschen Integraloperators, den wir dann mit K bezeichnen, auf einem festen Intervall $\mathcal{I} = [a, b]$; siehe dazu auch die nächste Definition. Wie bereits früher vereinbart, schreiben wir K^n für die n-fache Hintereinanderausführung von K, und setzen $K^0 = I$.

2.1 Integraloperatoren

Definition 2.1.1 *Wenn k stetig auf $\mathcal{I}^2$ bzw. auf Δ ist, dann heißt die in* Aufgabe 1.2.11 *definierte Abbildung K ein* Fredholmscher *bzw.* Volterrascher Integraloperator *auf $C(\mathcal{I})$ mit* Fredholm- *bzw.* Volterrakernfunktion k. *In beiden Fällen sprechen wir auch kürzer von einem* Integraloperator K *mit Kernfunktion k. Wir nennen jedes $k \in C(\mathcal{I}^2) \setminus \{0\}$ auch* nicht-triviale Kernfunktion. *Wir definieren weiter reguläre und charakteristische Werte von k als die entsprechenden Werte für den durch k gegebenen Integraloperator K, und wir nennen jede nichttriviale Lösung der homogenen Gleichung* (1.1.2) *eine* Eigenfunktion *oder manchmal auch* charakteristische Funktion. *Die Menge $C(\mathcal{I}^2)$ bzw. $C(\Delta)$ aller dieser Kernfunktionen k ist selber wieder ein Vektorraum über $\mathbb{C}$, und durch*

$$\|k\| \;:=\; \sup_{s \in \mathcal{I}} \int_a^b |k(s,t)|\, dt$$

wird auf diesen Räumen eine Norm definiert, bezüglich der sie aber nicht vollständig sind. Deshalb betrachten wir neben dieser auch die weitere Norm $\|k\|_\infty = \sup |k(s,t)|$, wobei das Supremum über alle $(s,t) \in \mathcal{I}^2$ erstreckt wird. Es gilt offenbar $\|k\| \le (b-a)\, \|k\|_\infty$.

Wir wollen im Folgenden eine Kernfunktion immer mit einem kleinen lateinischen Buchstaben, und den durch sie definierten Integraloperator mit dem gleichen Großbuchstaben bezeichnen. Beachte aber, dass die Norm der Kernfunktion k nicht dasselbe ist wie die Norm des Integraloperators K. Es gilt aber immer $\|K\| \le \|k\|$. Unter Verwendung der nächsten Aufgabe kann man zeigen, dass es kein $c > 0$ geben kann, so dass immer $\|k\| \le c\,\|K\|$ gilt.

Aufgabe 2.1.2 *Finde eine Folge (k_n) von Fredholmkernfunktionen, welche eine Cauchyfolge bzgl. der Norm $\|\cdot\|$ ist, welche aber nicht konvergiert.* Anleitung: *Beachte, dass per Definition der Grenzwert einer Folge von Fredholmkernfunktionen wieder eine Fredholmkernfunktion, also stetig auf $\mathcal{I}^2$ sein muss.*

Aufgabe 2.1.3 (Eindeutigkeit der Kernfunktion) *Zeige: Wenn zwei* $k_1, k_2 \in C(\mathcal{I})$ *denselben Integraloperator* K *darstellen, dann folgt* $k_1(s,t) = k_2(s,t)$ *für alle* $s, t \in \mathcal{I}$.

Lemma 2.1.4 (Hintereinanderausführung) *Die Hintereinanderausführung von Fredholmschen bzw. Volterraschen Integraloperatoren ist ebenfalls ein solcher Operator. Genauer gilt: Sind* $k_1, k_2 \in C(\mathcal{I}^2)$ *bzw.* $\in C(\Delta)$ *die Kernfunktionen von Fredholmschen bzw. Volterraschen Integraloperatoren* K_1, K_2, *dann ist*

$$k(s,t) \;=\; \int_a^b k_2(s,u)\, k_1(u,t)\; du \qquad \text{bzw.} \quad k(s,t) \;=\; \int_t^s k_2(s,u)\, k_1(u,t)\; du\,, \qquad a \le s,t \le b\,,$$

die Kernfunktion der iterierten Abbildung $K_2 \circ K_1$.

Beweis: Wir betrachten nur den Fall von Fredholmschen Integraloperatoren; der Beweis für Volterrasche geht analog. Für $x \in C(\mathcal{I})$ ist wegen des Satzes von Fubini

$$K_2(K_1\, x) \;=\; \int_a^b k_2(s,u) \,\Big(\int_a^b k_1(u,t)\, x(t)\; dt \Big)\; du \;=\; \int_a^b \,\Big(\int_a^b k_2(s,u)\; k_1(u,t)\; du \Big)\, x(t)\; dt\,,$$

und das war zu zeigen. □

Definition 2.1.5 (Faltung von Kernfunktionen) *Sind* $k_1, k_2 \in C(\mathcal{I}^2)$ *bzw.* $\in C(\Delta)$, *und wird* k *wie in* Lemma 2.1.4 *definiert, so nennen wir* k *auch* die Faltung von k_2 *und* k_1 *und schreiben kurz* $k = k_2 * k_1$.

Aufgabe 2.1.6 (Submultiplikativität der Kernfunktionsnorm) *Seien* k_1, k_2 *zwei Fredholm- bzw. Volterrasche Kernfunktionen, und sei* k *wie in* Lemma 2.1.4 *definiert. Zeige* $\|k\| \le \|k_2\|\, \|k_1\|$. *Finde selber eine entsprechende Ungleichung für die* $\|\cdot\|_\infty$*-Norm.*

2.2 Kernfunktionen von endlichem Rang

Aufgabe 2.2.1 (Inneres Produkt) *Wiederhole aus der Vorlesung LA, dass durch*

$$\langle x, y\rangle \;=\; \int_a^b \overline{x(t)}\; y(t)\; dt$$

ein inneres Produkt auf $C(\mathcal{I})$ *definiert wird, und dass jeder endlich-dimensionale Teilraum von* $C(\mathcal{I})$ *eine Orthonormalbasis besitzt. Zeige weiter, dass im Raum* $C(\mathcal{I}^2)$ *aller Fredholmkernfunktionen durch*

$$\langle k_1, k_2\rangle \;=\; \int_a^b \int_a^b \overline{k_1(s,t)}\; k_2(s,t)\; dt\; ds$$

ebenfalls ein inneres Produkt definiert wird. Wiederhole aus LA, dass zu jedem inneren Produkt eine Norm definiert werden kann, und dass für diese die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung *gilt. Zur Unterscheidung von den sonstigen hier betrachteten Normen von Funktionen bzw. Kernfunktionen schreiben wir im Folgenden auch*

$$\|x\|_2 \;=\; \sqrt{\langle x, x\rangle} \;=\; \Big(\int_a^b |x(t)|^2\, dt\Big)^{1/2}, \qquad \|k\|_2 \;=\; \sqrt{\langle k, k\rangle} \;=\; \Big(\int_{\mathcal{I}^2} |k(s,t)|^2\, ds dt\Big)^{1/2}$$

und sprechen von der 2-Norm von x *bzw.* k.

Definition 2.2.2 *Ein $k \in C(\mathcal{I}^2)$ heißt* von endlichem Rang, *wenn es $a_j, b_j \in C(\mathcal{I})$, $1 \le j \le m$, gibt, für welche*

$$k(s,t) \;=\; \sum_{j=1}^{m} a_j(s)\,\overline{b_j(t)}\,, \qquad a \le s,t \le b\,. \tag{2.2.1}$$

Wir schreiben dann auch kurz $k = \sum a_j \otimes b_j$. Allgemein sei $f \otimes g$, für $f, g \in C(\mathcal{I})$ gleich der Funktion $f(s)\,\overline{g(t)}$. Man nennt $f \otimes g$ manchmal auch Tensorprodukt *von f und g. Weiter definieren wir für eine Kernfunktion wie in (2.2.1), und beliebige Funktionen $f, x \in C(\mathcal{I})$*

$$a_{jk} \;=\; \langle b_j, a_k \rangle\,, \quad f_j \;=\; \langle b_j, f \rangle\,, \quad x_j \;=\; \langle b_j, x \rangle\,, \qquad 1 \le j,k \le m$$

Wir sagen weiter, dass eine Kernfunktion k in kanonischer Form *dargestellt ist, falls*

$$k \;=\; \sum_{j,\nu=1}^{\mu} c_{j\nu}\; e_j \otimes e_\nu\,, \qquad c_{j\nu} \;\in\; \mathbb{C}\,, \tag{2.2.2}$$

wobei $(e_1, \ldots, e_\mu)$ ein Orthonormalsystem in $C(\mathcal{I})$ ist. In diesem Fall nennen wir die quadratische Matrix $C = [c_{j\nu}]$ auch definierende Matrix *von k.*

Aufgabe 2.2.3 *Zeige dass die Funktionen $e_j(s) = \exp[ijs]$, $j \in \mathbb{Z}$, auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ orthogonal sind, und berechne $\|e_j\|_2$. Folgere daraus mit Hilfe der Eulerschen Formel, dass die Menge der Funktionen*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(js)\,, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(js)\,, \qquad j \in \mathbb{N}\,,$$

ein Orthonormalsystem auf $[-\pi, \pi]$ sind, und finde die Darstellung der Kernfunktion $k(s,t) = \sin(s+t)$ in kanonischer Form. Anleitung: *Beachte das Additionstheorem der Sinusfunktion.*

Aufgabe 2.2.4 *Zeige dass jede nicht-triviale Kernfunktion von endlichem Rang eine* Darstellung in kanonischer Form *besitzt.* Anleitung: *Wähle $(e_1, \ldots, e_\mu)$ als eine Orthonormalbasis des von dem System $(a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m)$ erzeugten Unterraums.*

Aufgabe 2.2.5 *Sei k eine Kernfunktion von endlichem Rang, dargestellt in kanonischer Form* (2.2.2)*, und seien $a_j = \sum_\nu c_{\nu j}\, e_k$, $b_j = e_j$. Zeige dass dann $k = \sum_j a_j \otimes b_j$ ist, und dass in diesem Fall die oben eingeführte Matrix $A = [a_{jk}]$ gleich der definierenden Matrix C ist.*

Satz 2.2.6 *Ein $k \in C(\mathcal{I}^2)$ ist genau dann von endlichem Rang, wenn das Bild des zugehörigen Fredholmschen Integraloperators K endliche Dimension hat.*

Beweis: Wenn (2.2.1) gilt, dann ist für jedes $x \in C(\mathcal{I})$

$$(K\,x)(s) \;=\; \sum_{j=0}^{m} x_j\, a_j(s)\,, \qquad x_j \;=\; \int_a^b \overline{b_j(t)}\, x(t)\, dt \;=\; \langle b_j, x \rangle\,.$$

Also ist das Bild von K enthalten in der linearen Hülle der Funktionen $a_1, \ldots, a_m$. Sei jetzt umgekehrt das Bild von K endlichdimensional, und seien $a_1, \ldots, a_m$ eine Orthonormalbasis des Bildes. Dann folgt für alle $x \in C(\mathcal{I})$ und $y := K\,x$ aus LA, dass $y = \sum \alpha_j\, a_j$, mit $\alpha_j = \langle a_j, y \rangle$. Seien

$$b_j(t) \;=\; \int_a^b \overline{k(s,t)}\; a_j(s)\; ds\,, \qquad a \le t \le b\,, \quad 1 \le j \le m\,.$$

Wenn wir dann den Fredholmscher Integraloperator K_1 durch die Kernfunktion $k_1 = \sum a_j \otimes b_j$ definieren, dann sieht man dass $K_1 = K$ ist, und deshalb gilt nach Aufgabe 2.1.3 dass $k = k_1$ ist. □

Aufgabe 2.2.7 *Zeige dass jede nicht-triviale Kernfunktion von endlichem Rang eine* reduzierte Darstellung *in der Form* (2.2.1) *besitzt, in der sowohl* $(a_1, \ldots, a_m)$ *als auch* $(b_1, , \ldots, b_m)$ *linear unabhängig sind, und dass dies genau dann der Fall ist, wenn* m *gleich der Dimension des Bildes von* K *ist. Überlege, in welchem Sinne diese Aussage auch für die triviale Kernfunktion richtig ist.*

Aufgabe 2.2.8 (Faltung bei Kernfunktionen von endlichem Rang) *Seien* $k_1, k_1 \in C(\mathcal{I}^2)$ *gegeben, und sei* $k = k_2 * k_1$ *ihre Faltung. Zeige: Wenn* k_1 *oder* k_2 *eine Kernfunktion von endlichem Rang ist, dann hat* k *ebenfalls endlichen Rang.*

Satz 2.2.9 *Seien* k, a_{jk} *und* f_j*, für ein* $f \in C(\mathcal{I})$*, wie in* Definition 2.2.2. *Dann gilt für alle* $\lambda \in \mathbb{C}$*:*

(a) *Wenn* $x \in C(\mathcal{I})$ *so ist, dass* (1.1.1) *gilt, und wenn wir* x_j *wie in* Definition 2.2.2 *definieren, dann folgt*

$$x_j \;=\; f_j \;+\; \lambda \sum_{k=1}^{m} a_{jk}\, x_k\,, \qquad 1 \le j \le m\,. \tag{2.2.3}$$

(b) *Wenn die Zahlen* $x_1, \ldots, x_m$ *die Gleichungen* (2.2.3) *erfüllen, dann ist die Funktion* x *mit*

$$x(s) \;=\; f(s) \;+\; \lambda \sum_{j=1}^{m} x_j\, a_j(s)\,, \qquad a \le s \le b\,,$$

eine Lösung von (1.1.1).

Beweis: Teil (a) kann man durch Nachrechnen überprüfen. Sei jetzt x wie in Teil (b) definiert. Dann folgt unter Benutzung von (2.2.3)

$$\langle b_j, x\rangle \;=\; f_j \;+\; \lambda \sum_{k=1}^{m} a_{jk}\, x_k \;=\; x_j \qquad \forall\, j = 1, \ldots, m\,,$$

woraus wegen $K\,x = \sum \langle b_j, x\rangle\, a_j$ die Behauptung folgt. □

Aufgabe 2.2.10 *Finde alle Lösungen der Integralgleichung*

$$x(s) \;=\; s \;+\; \int_{-\pi}^{\pi} \sin(s+t)\, x(t)\, dt\,.$$

Aufgabe 2.2.11 *Seien* k *und* a_{jk} *wie in* Definition 2.2.2, *und sei* $A = [a_{jk}]$. *Sei weiter das System* $(a_1, \ldots, a_m)$ *linear unabhängig. Zeige: Genau dann ist* λ *ein regulärer Wert des zu* k *gehörigen Integraloperators, wenn* $\det(I - \lambda\, A) \neq 0$ *ist, und jeder nicht-reguläre Wert ist ein charakteristischer Wert, dessen Eigenraum dieselbe Dimension wie die Lösungsmenge des zu* (2.2.3) *gehörigen homogenen linearen Gleichungssystems hat. Also ist der Eigenraum insbesondere endlich-dimensional.*

Vereinfacht ausgedrückt kann man sagen, dass das Lösen einer Fredholmschen Integralgleichung mit einer Kernfunktion von endlichem Rang zur Berechnung der Lösungsmenge eines inhomogenen linearen Gleichungssystems äquivalent ist. Insbesondere zeigt dies, dass eine Integralgleichung keine Lösung zu haben braucht.

2.3 Die iterierten Kernfunktionen und die Neumannsche Reihe

Definition 2.3.1 (Iterierte Kernfunktionen) *Sei $k \in C(\mathcal{I}^2)$ bzw. $\in C(\Delta)$ eine Fredholmsche bzw. Volterrasche Kernfunktion. Für $n \geq 1$ definieren wir die iterierten Kernfunktionen k_n rekursiv durch*

$$k_1(s,t) \;=\; k(s,t)\,, \qquad k_{n+1}(s,t) \;=\; \int_a^b k(s,u)\,k_n(u,t)\;du\,, \qquad a \leq s,t \leq b\,,$$

wobei bei einem Volterrakern das Integral nur von t bis s zu gehen braucht, da der Integrand außerhalb dieses Intervalles verschwindet. Wenn K den von k definierten Integraloperator bezeichnet, dann folgt aus Lemma 2.1.4, *dass k_n die Kernfunktion des n-fach iterierten Operators K^n ist. Anders ausgedrückt ist k_n gleich der n-fachen Faltung von k mit sich selber. Für $k \in C(\mathcal{I}^2)$ nennen wir $\sigma = \int_a^b k(t,t)\,dt$ auch* Spur von k, *und wir schreiben σ_n für die Spur von k_n.*

Aufgabe 2.3.2 *Zeige dass die Spur eines Kernes in kanonischer Form* (2.2.2) *gleich der Spur der definierenden Matrix $C = [c_{j\nu}]$, d. h., gleich der Summe ihrer Diagonalelemente, ist.*

Lemma 2.3.3 *Für die oben definierten iterierten Kernfunktionen gilt allgemein*

$$k_{n+m}(s,t) \;=\; \int_a^b k_n(s,u)\;k_m(u,t)\;du \qquad \forall\; s,t \in \mathcal{I}\,, \quad n,m \in \mathbb{N}\,,$$

wobei bei Volterrakernfunktionen das Integral nur von t bis s zu gehen braucht. Weiter gilt folgende Abschätzung:

$$\|k_n\|_\infty \;\leq\; c^n\,(b-a)^{n-1} \qquad \forall\; n \in \mathbb{N}\,,$$

wobei c jede Konstante mit $\|k\|_\infty \leq c$ sein kann. Im Fall eines Volterrakernes gilt außerdem die folgende punktweise Abschätzung:

$$|k_n(s,t)| \;\leq\; c^n\;\frac{(s-t)^{n-1}}{(n-1)!} \qquad \forall\; n \in \mathbb{N}\,, \quad a \leq t \leq s \leq b\,.$$

Beweis: Folgt leicht mit Induktion. □

Aufgabe 2.3.4 (Iterierte einer Kernfunktion in kanonischer Form) *Sei k eine Kernfunktion von endlichem Rang, dargestellt in kanonischer Form* (2.2.2). *Mit $C = [c_{j\nu}]$ sei $C^n = [c_{j\nu}^{(n)}]$ gesetzt. Zeige für die iterierten Kernfunktionen k_n die Darstellung*

$$k_n \;=\; \sum_{j,\nu=1}^{\mu} c_{j\nu}^{(n)}\;e_j \otimes e_\nu\,.$$

Benutze dies, um die iterierten Kernfunktionen zu $k(s,t) = \sin(s+t)$ und $a = -\pi$, $b = \pi$ zu berechnen.

Definition 2.3.5 (Neumannsche Reihe) *Sei $k \in C(\mathcal{I}^2)$ bzw. $\in C(\Delta)$ eine Fredholmsche bzw. Volterrasche Kernfunktion, und seien k_n die oben definierten iterierten Kernfunktionen. Dann heißt*

$$\ell_\lambda(s,t) \;:=\; \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n\;k_{n+1}(s,t) \tag{2.3.1}$$

die zu k gehörige Neumannsche Reihe. *Dies ist offenbar eine Potenzreihe in λ, und die Zahl*

$$R \;=\; \frac{1}{\limsup\;\sqrt[n]{\|k_n\|_\infty}}$$

heißt der Konvergenzradius *der Reihe. Wir zeigen unten, dass die Reihe für* $|\lambda| < R$ *auf* $\mathcal{I}^2$ *gleichmäßig konvergiert, also eine Fredholmsche bzw. Volterrasche Kernfunktion darstellt; diese nennen wir auch* lösende Kernfunktion *zu* k.

Aufgabe 2.3.6 *Benutze* Lemma 2.3.3 *um zu zeigen, dass der Konvergenzradius der Neumannschen Reihe eines Fredholmkernes mindestens gleich* $(\|k\|_\infty\,(b-a))^{-1}$, *und der eines Volterrakernes sogar unendlich ist.*

Aufgabe 2.3.7 *Berechne* $\ell_\lambda(s,t)$ *für den Volterrakern* $k(s,t) = (s-t)^{\alpha-1}$ *mit* $\alpha > 1$ *und* $0 \le t \le s \le 1$. Anleitung: *Benutze das sogenannte* Beta-Integral

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^{a-1}}{\Gamma(a)}\,\frac{x^{b-1}}{\Gamma(b)}\,dx \;=\; \frac{1}{\Gamma(a+b)}$$

für $\mathrm{Re}\,a, \mathrm{Re}\,b > 0$, *um die iterierten Kerne auszurechnen. Überlege, ob man die Bedingung* $\alpha > 1$ *abschwächen kann.*

Aufgabe 2.3.8 *Sei* g *auf dem Intervall* $[0, b-a]$ *stetig, und sei die Volterrasche Kernfunktion* k *gegeben durch* $k(s,t) = g(s-t)$, $a \le t \le s \le b$. *Zeige dass dann für alle* $\lambda \in \mathbb{C}$ *ein* $h_\lambda \in C[0, b-a]$ *existiert, so dass* $\ell_\lambda(s,t) = h_\lambda(s-t)$ *ist für* $a \le t \le s \le b$.

Satz 2.3.9 *Sei* $k \in C(\mathcal{I}^2)$ *bzw.* $\in C(\Delta)$ *eine Fredholmsche bzw. Volterrasche Kernfunktion, und sei* R *der Konvergenzradius der zugehörigen Neumannschen Reihe. Für jedes feste* λ *mit* $|\lambda| < R$ *ist die Reihe auf* $\mathcal{I}^2$ *gleichmäßig konvergent, und deshalb ist* ℓ_λ *wieder eine Fredholmsche bzw. Volterrasche Kernfunktion. Weiter ist* $\ell_\lambda(s,t)$, *für alle festen* $s,t \in \mathcal{I}$, *eine holomorphe Funktion auf der Kreisscheibe* $|\lambda| < R$. *Außerdem gilt die* Resolventengleichung

$$\ell_\lambda(s,t) \;=\; k(s,t) \;+\; \lambda \int_a^b \ell_\lambda(s,u)\,k(u,t)\,du \;=\; k(s,t) \;+\; \lambda \int_a^b k(s,u)\,\ell_\lambda(u,t)\,du \tag{2.3.2}$$

für alle $|\lambda| < R$ *und* $s,t \in \mathcal{I}$.

Beweis: Die Holomorphie in der Variablen λ ist klar, da die Neumannsche Reihe eine Potenzreihe in λ ist. Mit der Definition des Konvergenzradius folgt für alle $\rho < R$, dass $|k_n(s,t)| \le \|k_n\|_\infty \le \rho^{-n}$ gilt für alle $s,t \in \mathcal{I}$ und alle hinreichend großen n, und daraus folgt die behauptete gleichmäßige Konvergenz. Die Resolventengleichung folgt, da man die Neumannsche Reihe gliedweise integrieren darf. □

Aufgabe 2.3.10 (Resolvente für Kerne von endlichem Rang) *Sei* k *eine Kernfunktion von endlichem Rang, dargestellt in kanonischer Form* (2.2.2). *Sei weiter* λ *so, dass* $\det(I - \lambda C) \ne 0$ *ist, und sei* $L_\lambda = C\,(I - \lambda\,C)^{-1} = [\ell_{j\nu,\lambda}]$. *Zeige dass dann die Kernfunktion*

$$\ell_\lambda \;=\; \sum_{j,\nu=1}^{\mu} \ell_{j\nu,\lambda}\; e_j \otimes e_\nu$$

die Resolventengleichung (2.3.2) *erfüllt und für kleine Werte von* $|\lambda|$ *durch die Neumannsche Reihe* (2.3.1) *gegeben ist. In diesem Fall einer Kernfunktion von endlichem Rang ist also* $\ell_\lambda(s,t)$, *bei festem* s *und* t, *eine rationale Funktion von* λ *mit endlich vielen Polen höchstens an den Kehrwerten der von Null verschiedenen Eigenwerte von* C. *Wir werden später sehen, dass* ℓ_λ *allgemein eine* meromorphe Funktion, *d. h. Quotient zweier ganzer Funktionen, ist.*

Aufgabe 2.3.11 *Berechne* $\ell_\lambda(s,t)$ *für die Kernfunktion* $k(s,t) = \sin(s+t)$ *und* $a = -\pi$, $b = \pi$.

2.4 Die lösende Kernfunktion

Definition 2.4.1 *Sei $k \in C(\mathcal{I}^2)$ bzw. $\in C(\Delta)$ eine Fredholmsche bzw. Volterrasche Kernfunktion. Wenn für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Fredholm- bzw. Volterrakernfunktion ℓ_λ existiert, welche die Resolventengleichung* (2.3.2) *erfüllt, dann nennen wir ℓ_λ die* lösende Kernfunktion *zu k und λ. Wie wir noch zeigen werden, ist die lösende Kernfunktion, sofern sie existiert, eindeutig bestimmt, außer wenn $\lambda = 0$ ist.*

Satz 2.4.2 (Lösende Kernfunktion und reguläre Werte) *Sei $k \in C(\mathcal{I}^2)$ bzw. $\in C(\Delta)$ eine Fredholmsche bzw. Volterrasche Kernfunktion. Wenn für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ eine lösende Kernfunktion ℓ_λ existiert, dann ist λ ein regulärer Wert, und für jedes $f \in C(\mathcal{I})$ ist die Lösung der Integralgleichung* (1.1.1) *bzw.* (1.1.3) *gegeben durch*

$$x(s) \;=\; f(s) \;+\; \lambda \int_a^b \ell_\lambda(s,t)\, f(t)\; dt \qquad \text{bzw.} \quad x(s) \;=\; f(s) \;+\; \lambda \int_a^s \ell_\lambda(s,t)\, f(t)\; dt$$

Im Falle einer Volterragleichung ist sogar jedes λ ein regulärer Wert, und die lösende Kernfunktion ist immer durch die Neumannsche Reihe gegeben.

Beweis: Falls k eine Volterrakernfunktion ist, dann ist die Neumannsche Reihe für alle λ konvergent, und deshalb gibt es immer eine lösende Kernfunktion. Somit genügt es, den ersten Teil der Behauptung zu beweisen, und dazu betrachten wir nur einen Fredholmkern, da der Beweis im Fall eines Volterrakernes völlig analog geführt werden kann. Sei also jetzt ℓ_λ lösende Kernfunktion. Wenn wir mit K und L_λ die zu den Kernfunktionen k und ℓ_λ gehörenden Integraloperatoren bezeichnen, dann sieht man mit Lemma 2.1.4, dass die Resolventengleichung (2.3.2) zur Operatorgleichung (1.3.2), mit K an Stelle von T, äquivalent ist, und deshalb folgt die Behauptung mit Aufgabe 1.3.6. □

Bemerkung 2.4.3 (Eindeutigkeit der lösenden Kernfunktion) *Da im Falle der Existenz einer lösenden Kernfunktion gezeigt wurde, dass der Operator $I + \lambda L_\lambda$ zu $I - \lambda K$ invers und deshalb eindeutig bestimmt ist, ist für $\lambda \neq 0$ auch L_λ eindeutig festgelegt. Aus* Aufgabe 2.1.3 *folgt also, dass auch die lösende Kernfunktion ℓ_λ eindeutig bestimmt ist. Während bei einer Volterragleichung ℓ_λ durch die Neumannsche Reihe für alle λ definiert und deshalb eine ganze Funktion ist, ist dies im Fall einer Fredholmgleichung i. a. nicht so. Wir werden aber zeigen, dass ℓ_λ eine* meromorphe Funktion, *d. h., ein Quotient zweier ganzer Funktionen ist, und die Nullstellen der Nennerfunktion, also die Pole von ℓ_λ, werden sich genau als die charakteristischen Werte von k erweisen.*

Aufgabe 2.4.4 *Bestimme die lösende Kernfunktion zu*

$$k(s,t) \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(js)\,\sin(jt)}{j^2}\;, \quad \mathcal{I} = [0, 2\pi]\,. \tag{2.4.1}$$

Was ist, wenn in der obigen Reihe der Nenner der Terme, statt j^2, eine andere Zahl n_j ist?

Kapitel 3

Die Fredholmsche Determinante

In diesem Kapitel wollen wir zu jeder Fredholmkernfunktion k eine Potenzreihe in der Variablen λ angeben und zeigen, dass diese Reihe unendlichen Konvergenzradius hat, also eine ganze Funktion definiert. Die Nullstellen dieser Funktion werden dann genau die charakteristischen Werte von k sein.

3.1 Definition der Koeffizienten

Definition 3.1.1 *Für $k \in C(\mathcal{I}^2)$, $n \in \mathbb{N}$, und $2n$ Variable $s_1, \ldots, s_n$ sowie $t_1, \ldots, t_n$ sei*

$$k(s_1, \ldots, s_n; t_1, \ldots, t_n) \;=\; \det \begin{pmatrix} k(s_1,t_1) & \ldots & k(s_1,t_n) \\ k(s_2,t_1) & \ldots & k(s_2,t_n) \\ \vdots & & \vdots \\ k(s_n,t_1) & \ldots & k(s_n,t_n) \end{pmatrix}$$

Diese Funktionen sind auf $\mathcal{I}^{2n}$ stetig, und wir setzen

$$a_n \;=\; \int_a^b \ldots \int_a^b k(s_1, \ldots, s_n; s_1, \ldots, s_n)\, ds_1 \,\ldots\, ds_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Insbesondere ist also $a_1 = \sigma_1$ die Spur von k. Mit $a_0 = 1$ definieren wir dann die folgende Potenzreihe in der Variablen λ:

$$d(\lambda) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, \frac{a_n}{n!} \, \lambda^n \,. \tag{3.1.1}$$

Wie wir noch zeigen werden, ist diese Reihe für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ konvergent, und wir nennen die hierdurch definierte ganze Funktion die Fredholm-Determinante *der Kernfunktion k.*

Da es $n!$ Permutationen der Zahlen $1, \ldots, n$ gibt, erhält man durch eine direkte Abschätzung, dass die Determinante einer n-reihigen quadratischen Matrix höchstens gleich $c^n\, n!$ sein kann, wobei $c = \max |a_{jk}|$ ist. Mit dieser groben Information kann man nur zeigen, dass die obige Potenzreihe einen positiven, aber vielleicht endlichen Konvergenzradius hat. Deshalb geben wir im nächsten Abschnitt eine wesentlich bessere Determinantenabschätzung, die anschaulich darauf beruht, dass der Betrag der Determinante gleich dem n-dimensionalen Inhalt des von ihren Spalten aufgespannten Parallelepipeds ist, und dass dieser Inhalt, bei festen Kantenlängen, für den Quader maximal wird.

Aufgabe 3.1.2 *Sei k eine Kernfunktion von endlichem Rang, also von der Gestalt* (2.2.1). *Zeige dass dann für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$k(s_1, \ldots, s_n; t_1, \ldots, t_n) \;=\; \sum_{1 \le j_1, \ldots, j_n \le m} \overline{b_{j_1}(t_1) \cdot \ldots \cdot b_{j_n}(t_n)} \;\; \det \begin{pmatrix} a_{j_1}(s_1) & \ldots & a_{j_n}(s_1) \\ a_{j_1}(s_2) & \ldots & a_{j_n}(s_1) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j_1}(s_n) & \ldots & a_{j_n}(s_n) \end{pmatrix} .$$

Beachte dass die Determinante verschwindet, falls die $j_1, \ldots, j_n$ nicht alle verschieden sind, und schließe hieraus, dass $a_n = 0$ ist für $n > m$. Somit ist $d(\lambda)$ in diesem Fall ein Polynom höchstens vom Grade m.

3.2 Die Hadamardsche Determinantenabschätzung

Lemma 3.2.1 (Hadamard) *Sei $A = [a_{jk}]$ eine n-reihige quadratische Matrix. Dann gilt:*

$$|\det A| \;\le\; \prod_{k=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} |a_{jk}|^2 \Big)^{1/2} . \tag{3.2.1}$$

Wenn also $c \ge |a_{jk}|$ für alle $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ ist, dann folgt hieraus dass $|\det A| \;\le\; c^n \, n^{n/2}$.

Beweis: Für $\det A = 0$ ist die Ungleichung trivial, und deshalb sei angenommen, dass die Spalten $a_1, \ldots, a_n$ von A linear unabhängig sind. Weiter ist klar, dass die Gültigkeit von (3.2.1) nicht beeinträchtigt wird, wenn wir die Spalten von A mit Faktoren $\neq 0$ multiplizieren. Deshalb genügt es, die Abschätzung für Matrizen A mit $\|a_k\|_2 = 1$, $1 \le k \le n$, zu beweisen, und wir bezeichnen die Menge aller dieser Matrizen mit M. Dies ist eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}^{n \times n}$, und $\det A$ ist ein Polynom, also insbesondere eine stetige Funktion, in n^2 Veränderlichen. Deshalb nimmt $|\det A|$ auf M ein Maximum an, und wir wollen jetzt zeigen, dass dieses Maximum nur an Stellen liegen kann, bei denen alle Spalten von A (im üblichen Sinn in $\mathbb{C}^n$) zueinander orthogonal sind. Wenn dies gelungen ist, folgt die Behauptung mit Aufgabe 3.2.2. Seien also $j \neq k$ so, dass $\langle a_j, a_k \rangle \neq 0$ ist. Setze

$$\mu \;=\; \langle a_k, a_j \rangle \,, \qquad \tilde a_j \;=\; a_j \;-\; \mu \, a_k \; (\neq\; 0) \,, \quad (\Rightarrow\; \langle a_k, \tilde a_j \rangle \;=\; 0) \,.$$

Dann folgt mit den Regeln für das innere Produkt in $\mathbb{C}^n$ und der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung dass

$$0 \;<\; \|\tilde a_j\|^2 \;=\; \|a_j\|^2 \;-\; |\mu|^2 \;=\; 1 \;-\; |\mu|^2 \;<\; 1 \,.$$

Also ist $c = \|\tilde a_j\|^{-1} > 1$. Wenn B die Matrix ist, die aus A durch Ersetzen der j-ten Spalte durch $\tilde a_j$ entsteht, dann ist $\det A = \det B$, und wenn wir dann die j-te Spalte von B mit c multiplizieren und diese Matrix $\tilde A$ nennen, dann ist $\tilde A \in M$, und $|\det A| < |\det \tilde A|$. Das war aber zu zeigen. □

Aufgabe 3.2.2 (Determinante von Matrizen mit orthogonalen Spalten) *Sei $A = [a_{jk}]$ eine n-reihige quadratische Matrix, deren Spalten zueinander orthogonal sind. Zeige dass dann in* (3.2.1) *das Gleichheitszeichen gilt.* Anleitung: *Beachte dass $\det \overline{A}^T = \overline{\det A}$ ist und berechne $\overline{A}^T A$.*

Aufgabe 3.2.3 (Konvergenz der Fredholm-Determinante) *Zeige mit* Lemma 3.2.1, *dass die Potenzreihe* (3.1.1) *für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ konvergiert.*

3.3 Die Fredholmsche Darstellung der lösenden Kernfunktion

Definition 3.3.1 *Für $k \in C(\mathcal{I}^2)$ seien $b_0(s,t) = k(s,t)$ und*

$$b_n(s,t) \;=\; \int_a^b \ldots \int_a^b k(s,s_1,\ldots,s_n;t,s_1,\ldots,s_n)\, ds_1 \,\ldots\, ds_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Dies sind offenbar wieder Fredholmkernfunktionen, und mit ihrer Hilfe bilden wir eine Potenzreihe in λ, nämlich

$$d_\lambda(s,t) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \,\frac{b_n(s,t)}{n!}\, \lambda^n \qquad \forall\; s,t \in \mathcal{I}\,. \tag{3.3.1}$$

Mit Hilfe der Hadamardschen Determinantenabschätzung folgt leicht, dass die Potenzreihe für beliebige $\lambda \in \mathbb{C}$ und $s,t \in \mathcal{I}$ absolut konvergiert, und dass die Konvergenz, bei festem λ, gleichmäßig in s und t ist. Somit ist $d_\lambda \in C(\mathcal{I}^2)$ für jedes feste λ, und für alle festen $s,t \in \mathcal{I}$ ist $d_\lambda(s,t)$ eine ganze Funktion von λ. Wir nennen d_λ manchmal auch die zu k gehörige *Fredholmkernfunktion, und wir definieren weiter*

$$\ell_\lambda(s,t) \;=\; \frac{d_\lambda(s,t)}{d(\lambda)}\;. \tag{3.3.2}$$

Es ist wichtig zu beachten, dass momentan noch nicht klar ist, dass die hierdurch definierte meromorphe Funktion ℓ_λ mit der über die Neumannsche Reihe gegebenen lösenden Kernfunktion übereinstimmt, aber dieser Beweis wird unten nachgeholt.

Lemma 3.3.2 *Für $k \in C(\mathcal{I}^2)$ und $a_n, b_n(s,t)$ wie oben definiert gelten folgende Identitäten für alle $s,t \in \mathcal{I}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$:*

$$b_n(s,t) \;=\; a_n\, k(s,t) \;-\; n \int_a^b k(s,u)\, b_{n-1}(u,t)\, du \;=\; a_n\, k(s,t) \;-\; n \int_a^b b_{n-1}(s,u)\, k(u,t)\, du\,, \tag{3.3.3}$$

$$d_\lambda(s,t) \;=\; d(\lambda)\, k(s,t) \;+\; \lambda \int_a^b k(s,u)\, d_\lambda(u,t)\, du \;=\; d(\lambda)\, k(s,t) \;+\; \lambda \int_a^b d_\lambda(s,u)\, k(u,t)\, du\,. \tag{3.3.4}$$

Wenn $d(\lambda) \neq 0$ ist, dann erfüllt $\ell_\lambda(s,t)$ die Resolventengleichung (2.3.2)*, und ist durch die Neumannsche Reihe gegeben für solche λ innerhalb deren Konvergenzkreisscheibe.*

Beweis: Wenn man die Determinante $k(s,s_1,\ldots,s_n;t,s_1,\ldots,s_n)$ nach der ersten Zeile entwickelt und anschließend im ν-ten Summanden die ν-te Zeile mit allen Vorgängern vertauscht, findet man

$$\begin{aligned} k(s,s_1,\ldots,s_n;t,s_1,\ldots,s_n) \;&=\; k(s,t)\, k(s_1,\ldots,s_n;s_1,\ldots,s_n) \\ &\quad - \sum_{\nu=1}^{n} k(s,s_\nu)\, k(s_\nu,s_1,\ldots,s_{\nu-1},s_{\nu+1},\ldots,s_n;t,s_1,\ldots,s_{\nu-1},s_{\nu+1},\ldots,s_n)\,. \end{aligned}$$

Durch Integration über die Variablen $s_1,\ldots,s_n$ und die Tatsache, dass diese Integrale von der Integrationsreihenfolge unabhängig sind, folgt die linke Gleichung in (3.3.3). Die rechte Hälfte der Behauptung folgt analog durch Entwicklung nach der ersten Spalte. Weiter folgt (3.3.4) durch Koeffizientenvergleich aus (3.3.3). Schließlich ergibt sich aus (3.3.4) nach Division durch $d(\lambda)$, wann immer dies erlaubt ist, die Resolventengleichung für $\ell_\lambda(s,t)$, und da die lösende Kernfunktion nach Bemerkung 2.4.3 eindeutig durch (2.3.2) bestimmt ist, folgt die Übereinstimmung mit der Neumannschen Reihe, soweit diese konvergiert.

□

Aufgabe 3.3.3 *Zeige durch gliedweise Integration der Potenzreihe* (3.3.1) *dass*

$$d'(\lambda) \;=\; -\int_a^b d_\lambda(s,s)\;ds \;=\; -d(\lambda)\int_a^b \ell_\lambda(s,s)\;ds\,,$$

wobei die zweite Gleichung jedenfalls dann gilt, wenn $d(\lambda) \neq 0$ ist. Dies ist offenbar eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung für $d(\lambda)$ und spielt in der nächsten Aufgabe eine wichtige Rolle.

Aufgabe 3.3.4 (Fredholmdeteminante für Kerne von endlichem Rang) *Sei k eine Kernfunktion von endlichem Rang, dargestellt in kanonischer Form* (2.2.2). *Sei weiter λ so, dass $\det(I - \lambda C) \neq 0$ ist, und sei $L_\lambda = C\,(I - \lambda\, C)^{-1} = [\ell_{j\nu,\lambda}]$. Folgere aus* Aufgabe 2.3.10 *dass gilt*

$$\int_a^b \ell_\lambda(s,s)\;ds \;=\; \sum_{j=1}^{\mu} \ell_{jj,\lambda}\,.$$

Zeige weiter, dass $I - \lambda\, C$ ein Fundamentalsystem für das lineare Differentialgleichungssystem $x'(\lambda) = -L_\lambda\, x(\lambda)$ ist, und schließe hieraus mit der Wronski-Identität dass $\tilde d(\lambda) := \det(I - \lambda\, C)$ dieselbe Differentialgleichung erster Ordnung wie die Fredholmdeterminante $d(\lambda)$ erfüllt. Da beide Funktionen für $\lambda = 0$ übereinstimmen, folgt hieraus dass

$$d(\lambda) \;=\; \det(I - \lambda C)$$

ist.

Aufgabe 3.3.5 *Verwende* Aufgabe 3.3.3 *um für alle λ, für welche die Neumannsche Reihe für ℓ_λ konvergiert, zu zeigen dass*

$$\frac{d'(\lambda)}{d(\lambda)} \;=\; -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n\,\sigma_{n+1}\,, \tag{3.3.5}$$

wobei σ_n die Spur der iterierten Kernfunktion k_n ist. Leite hieraus durch Koeffizientenvergleich die Beziehung

$$a_{n+1} \;=\; n!\,\sum_{m=0}^{n} (-1)^m\,\frac{a_{n-m}}{(n-m)!}\;\sigma_{m+1} \qquad \forall\; n \geq 1 \tag{3.3.6}$$

ab. Benutze dies, um folgende alternative Darstellung der a_n zu zeigen:

$$a_n \;=\; \det\begin{bmatrix} \sigma_1 & n-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sigma_2 & \sigma_1 & n-2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n-1} & \sigma_{n-2} & \sigma_{n-3} & \dots & \sigma_1 & 1 \\ \sigma_n & \sigma_{n-1} & \sigma_{n-2} & \dots & & \sigma_1 \end{bmatrix} \qquad \forall\; n \geq 1\,. \tag{3.3.7}$$

Anleitung: *Mache* (3.3.7) *zur Definition der Zahlen a_n und zeige dann durch Entwicklung nach der ersten Spalte, dass diese Folge die Rekursion* (3.3.6) *erfüllt.*

Aufgabe 3.3.6 *Benutze* (3.3.5) *um zu zeigen, dass für alle hinreichend kleinen Werte von λ gilt*

$$d(\lambda) \;=\; \exp\Big[\; -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n\,\sigma_n/n\;\Big]\,.$$

Berechne mit Hilfe dieser Darstellung Fredholmsche Determinante und Fredholmkernfunktion für k wie in (2.4.1). Anleitung: *Die folgende* Produktdarstellung *der Sinusfunktion darf benutzt werden:*

$$\sin \pi\, z \;=\; \pi\, z\,\prod_{k=1}^{\infty}\,(1 \;-\; z^2/k^2) \qquad \forall\; z \in \mathbb{C}\,.$$

Aufgabe 3.3.7 *Beweise folgende alternative Darstellung der Kerne b_n:*

$$b_n(s,t) \;=\; \det \begin{bmatrix} k(s,t) & n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ k_2(s,t) & \sigma_1 & n-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ k_3(s,t) & \sigma_2 & \sigma_1 & n-2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ k_n(s,t) & \sigma_{n-1} & \sigma_{n-2} & \sigma_{n-3} & \dots & \sigma_1 & 1 \\ k_{n+1}(s,t) & \sigma_n & \sigma_{n-1} & \sigma_{n-2} & \dots & \sigma_2 & \sigma_1 \end{bmatrix} \qquad \forall\, n \ge 1\,,\ s,t \in \mathcal{I}\,. \qquad (3.3.8)$$

Anleitung: *Mache* (3.3.7) *zur Definition der $b_n(s,t)$ und zeige dann durch Entwicklung nach der ersten Zeile, dass diese Folge die Rekursion* (3.3.3) *erfüllt.*

Aufgabe 3.3.8 *Versuche, durch eine Abschätzung von* (3.3.7) *und* (3.3.8) *die Konvergenz der Reihen für $d(\lambda)$ und $d_\lambda(s,t)$ zu zeigen.*

Satz 3.3.9 (Erster Fredholmscher Satz) *Gegeben sei eine Fredholmkernfunktion $k \in C(\mathcal{I}^2)$ und zwei Funktionen $f, x \in C(\mathcal{I})$, die für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ die Fredholmsche Integralgleichung* (1.1.1) *erfüllen. Dann folgt*

$$d(\lambda)\,\big[x(s) \;-\; f(s)\big] \;=\; \lambda \int_a^b d_\lambda(s,t)\, f(t)\; dt \qquad \forall\; s,t \in \mathcal{I}\,. \qquad (3.3.9)$$

Wenn $d(\lambda) \ne 0$ ist, dann ist λ ein regulärer Wert von k, und es folgt

$$x(s) \;=\; f(s) \;+\; \lambda \int_a^b \ell_\lambda(s,t)\, f(t)\; dt\,.$$

Beweis: Durch Auflösen von (1.1.1) nach $f(s)$ und Einsetzen in die rechte Seite von (3.3.9) sowie Vertauschen der Integrationsreihenfolge ergibt sich

$$\lambda \int_a^b d_\lambda(s,t)\, f(t)\; dt \;=\; \lambda \int_a^b d_\lambda(s,t)\, x(t)\; dt \;-\; \lambda^2 \int_a^b \Big[\int_a^b d_\lambda(s,u)\, k(u,t)\, du \Big]\, x(t)\, dt\,.$$

Mit Hilfe der Gleichung (3.3.4) folgt weiter, dass die rechte Seite gleich

$$\lambda\, d(\lambda) \int_a^b k(s,t)\, x(t)\; dt \;=\; d(\lambda)\;\big[\, x(s) - f(s)\big]$$

ist, was (3.3.9) beweist. Hieraus ergibt sich dann der Rest der Behauptung mit Hilfe von Satz 2.4.2. □

Definition 3.3.10 (Fredholmsche Resolvente) *Der Quotient $d_\lambda(s,t)/d(\lambda)$ heißt die* Fredholmsche Resolvente *von $k(s,t)$ oder auch die* Fredholmsche Darstellung der lösenden *Kernfunktion $\ell_\lambda(s,t)$.*

3.4 Charakteristische Werte

Ein Fredholmkern braucht keine charakteristischen Werte zu haben, auch wenn er nicht trivial ist; als Beispiel kann eine Kernfunktion dienen, die gleichzeitig ein Volterrakern ist, denn in diesem Fall sind alle λ reguläre Werte, und deshalb kann $d(\lambda)$ keine Nullstellen haben. Wir wollen aber jetzt zeigen, dass alle Nullstellen von $d(\lambda)$, falls es denn welche gibt, charakteristische Werte sind.

Lemma 3.4.1 *Sei $k \in C(\mathcal{I}^2)$, und sei λ_0 eine Nullstelle von $d(\lambda)$. Dann existiert ein $q \in \mathbb{N}$ und eine ganze Funktion $e(\lambda)$ so, dass*

$$d(\lambda) \;=\; (\lambda - \lambda_0)^q \, e(\lambda)\,, \qquad e(\lambda_0) \neq 0\,.$$

Weiter gibt es ein $r \in \mathbb{N}_0$, $r \leq q-1$, sowie ein $e_\lambda(s,t)$, welches eine ganze Funktion in λ sowie stetig in $s,t \in \mathcal{I}$ ist, wobei $e_{\lambda_0}(s,t)$ nicht identisch gleich 0 ist, derart dass

$$d_\lambda(s,t) \;=\; (\lambda - \lambda_0)^r \, e_\lambda(s,t)\,.$$

Beweis: Da $d(0) = a_0 = 1$ ist, ist $d(\lambda)$ nicht die Nullfunktion, und deshalb hat jede Nullstelle eine endliche Vielfachhheit. Da nach Voraussetzung mindestens eine Nullstelle existiert, kann k nicht der Nullkern sein, und deshalb ist auch $d_\lambda(s,t)$ nicht trivial. Deshalb gibt es zu jedem Paar $s,t \in \mathcal{I}$ ein $r(s,t)$, welches gleich der Nullstellenordnung von $d_\lambda(s,t)$ als Funktion von λ ist, wobei wir $r(s,t) = \infty$ setzen, falls $d_\lambda(s,t)$, als Funktion von λ, identisch verschwindet. Seien $r = \min_{s,t\in\mathcal{I}} r(s,t)$ und $e_\lambda(s,t) = (\lambda-\lambda_0)^{-r}\, d_\lambda(s,t)$. Aus Aufgabe 3.3.3 folgt, dass

$$(\lambda-\lambda_0)^{-r}\, d'(\lambda) \;=\; -\int_a^b e_\lambda(s,s)\; ds$$

ist. Da die rechte Seite bei λ_0 holomorph ist, muss die linke dort eine hebbare Singularität, also $d'(\lambda)$ eine Nullstelle mindestens r-ter Ordnung haben, woraus aber $r \leq q-1$ folgt. □

Satz 3.4.2 (Zweiter Fredholmscher Satz) *Sei $k \in C(\mathcal{I}^2)$, sei λ_0 eine Nullstelle von $d(\lambda)$, und seien q und $e_\lambda(s,t)$ wie im letzten Lemma. Dann ist λ_0 charakteristischer Wert von* (1.1.1)*, und wenn man (s_0,t_0) so wählt, dass $e_{\lambda_0}(s_0,t_0) \neq 0$ ist, dann ist $\phi(s) = e_{\lambda_0}(s,t_0)$ eine Eigenfunktion zum charakteristischen Wert λ_0.*

Beweis: Aus (3.3.4) folgt unmittelbar

$$e_\lambda(s,t) \;=\; e(\lambda)\,(\lambda-\lambda_0)^{q-r}\, k(s,t) \;+\; \lambda \int_a^b k(s,u)\, e_\lambda(u,t)\, dt\,,$$

und weil $q - r > 0$ ist, kann man $\lambda = \lambda_0$ und $t = t_0$ einsetzen und erhält die Behauptung. □

Bemerkung 3.4.3 *Aus den beiden Fredholmschen Sätzen ergibt sich, dass λ genau dann ein charakteristischer Wert von k ist, wenn $d(\lambda) = 0$ ist. Wenn k eine Kernfunktion von endlichem Rang ist, folgt aus* Aufgabe 3.1.2*, dass $d(\lambda)$ ein Polynom ist, dass k also nur endlich viele charakteristische Werte haben kann.*

3.5 Die adjungierte Kernfunktion

Definition 3.5.1 *Für $k \in C(\mathcal{I}^2)$ heißt k^* mit*

$$k^*(s,t) \;=\; \overline{k(t,s)} \qquad \forall\; s,t \in \mathcal{I}$$

die zu k adjungierte Kernfunktion*. Entsprechend heißt der zu k^* gehörige Operator K^* der* zu K adjungierte Operator*, und die Integralgleichung*

$$y(s) \;=\; g(s) \;+\; \overline{\lambda} \int_a^b k^*(s,t)\; y(t)\; dt$$

heißt, bei beliebig gegebenem $g \in C(\mathcal{I})$, auch adjungierte Gleichung *zu* (1.1.1).

Direkt aus der Definition folgt: Wenn $d(\lambda)$ und $d_\lambda(s,t)$ die Fredholm-Determinante und die zugehörige Fredholmkernfunktion zu k sind, dann sind $\overline{d(\overline{\lambda})}$ und $\overline{d_{\overline{\lambda}}(s,t)}$ Fredholm-Determinante und -kernfunktion zu k^*. Daraus ergibt sich, dass λ genau dann ein charakteristischer Wert zu k ist, wenn $\overline{\lambda}$ einer für k^* ist.

Aufgabe 3.5.2 *Zeige für beliebige $k \in C(\mathcal{I}^2)$, $x, y \in C(\mathcal{I})$ und $\lambda \in \mathbb{C}$, mit dem in* Aufgabe 2.2.1 *eingeführten inneren Produkt, die Gleichung*

$$\langle x, \lambda\, K\, y\rangle \;=\; \langle \overline{\lambda}\, K^*\, x, y\rangle \;.$$

Vergleiche dies mit der Definition des adjungierten Operators der Funktionalanalysis, und benutze diese Identität, um zu zeigen: Wenn die Gleichung (1.1.1) *für ein λ lösbar ist, dann ist f orthogonal zu allen Lösungen der adjungierten homogenen Gleichung. Zeige weiter, dass für Kernfunktionen von endlichem Rang auch die Umkehrung dieser Aussage gilt.*[1] Anleitung: *Zeige dazu zuerst folgenden Satz über lineare Gleichungssysteme:*

Satz 3.5.3 (Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme) *Gegeben seien eine $n \times n$-Matrix A sowie ein Vektor $b \in \mathbb{C}^n$. Genau dann ist das Gleichungssystem $A\,x = b$ lösbar, wenn b orthogonal ist zu allen $y \in \mathbb{C}^n$, welche das* adjungierte homogene System

$$\overline{A}^T\, y \;=\; 0$$

erfüllen.

3.6 Mehr zu Kernen in kanonischer Form

Im Folgenden sei k immer ein Kern von endlichem Rang, dargestellt in kanonischer Form (2.2.2), mit einer quadratischen Matrix $C = [c_{j\nu}]$ und einem Orthonormalsystem $(e_1, \ldots, e_\mu)$ in $C(\mathcal{I})$. Wir wollen hier einige bereits früher bewiesene Identitäten zusammenstellen und dabei zeigen, dass bei Kernen von endlichem Rang alle relevanten Größen wie Fredholmdeterminante, lösender Kern, etc. alleine durch die Matrix C ausgedrückt werden können. Dabei ergeben sich auch einige interessante Resultate für Matrizen, z. B. Formeln für das charakteristische Polynom und die inverse Matrix, die in dieser Form sonst selten behandelt werden.

1. Mit $C^n = [c_{j\nu}^{(n)}]$ bezeichnen wir die Potenzen von C. Dann sind die iterierten Kerne k_n nach Aufgabe 2.3.4 gegeben durch die Gleichung

$$k_n(s,t) \;=\; \sum_{j,\nu=1}^{\mu} c_{j\nu}^{(n)}\; e_j(s)\,\overline{e_\nu(t)}\,.$$

2. Die Spur σ_n des iterierten Kernes k_n ist nach Aufgabe 2.3.2 gleich der Spur der Matrix C^n.

3. Sei λ so, dass $\det(I - \lambda\, C) \neq 0$ ist, und sei $L_\lambda = C\,(I - \lambda\, C)^{-1} = [\ell_{j\nu,\lambda}]$. Dann ist die Resolvente ℓ_λ zu k nach Aufgabe 2.3.10 gegeben durch

$$\ell_\lambda(s,t) \;=\; \sum_{j,\nu=1}^{\mu} \ell_{j\nu,\lambda}\; e_j(s)\,\overline{e_k(t)}\,.$$

4. Die Fredholmsche Determinante von k ist wegen Aufgabe 3.3.4 gleich

$$d(\lambda) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, \frac{a_n}{n!}\, \lambda^n \;=\; \det(I - \lambda\, C)\,. \tag{3.6.1}$$

[1] Für die Umkehrung im allgemeinen Fall, vergleiche Abschnitt 4.5.

Dabei sind die Koeffizienten a_n nach Aufgabe 3.3.3 gleich

$$a_n \;=\; \det \begin{bmatrix} \sigma_1 & n-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sigma_2 & \sigma_1 & n-2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n-1} & \sigma_{n-2} & \sigma_{n-3} & \dots & \sigma_1 & 1 \\ \sigma_n & \sigma_{n-1} & \sigma_{n-2} & \dots & & \sigma_1 \end{bmatrix} \qquad \forall\, n \geq 1\,, \tag{3.6.2}$$

können also allein durch die Spuren σ_n der Potenzen von C ausgedrückt werden. Insbesondere ist in diesem Fall eines Kerns von endlichem Rang klar, dass die Fredholmsche Determinante ein Polynom vom Grad höchstens gleich μ ist, so dass also $a_n = 0$ ist für $n > \mu$.

5. Setzt man $D_\lambda = d(\lambda)\, L_\lambda = [d_{j\nu,\lambda}]$, so hat der Kern $d_\lambda(s,t) = d(\lambda)\, \ell_\lambda(s,t)$ die Darstellung

$$d_\lambda(s,t) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, \frac{b_n(s,t)}{n!}\, \lambda^n \;=\; \sum_{j,\nu=1}^{\mu} d_{j\nu,\lambda}\; e_j(s)\, \overline{e_\nu(t)}\,. \tag{3.6.3}$$

Mit Aufgabe 3.3.7 folgt weiter dass

$$b_n(s,t) \;=\; \sum_{j,\nu=1}^{\mu} b_{j\nu,n}\; e_j(s)\, \overline{e_\nu(t)}$$

ist, mit

$$b_{j\nu,n} \;=\; \det \begin{bmatrix} c_{j\nu} & n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_{j\nu}^{(2)} & \sigma_1 & n-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_{j\nu}^{(3)} & \sigma_2 & \sigma_1 & n-2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ c_{j\nu}^{(n)} & \sigma_{n-1} & \sigma_{n-2} & \sigma_{n-3} & \dots & \sigma_1 & 1 \\ c_{j\nu}^{(n+1)} & \sigma_n & \sigma_{n-1} & \sigma_{n-2} & \dots & & \sigma_1 \end{bmatrix} \qquad \forall\, n \geq 0\,.$$

Aus diesen Formeln folgt, wenn man $B_n = [b_{j\nu,n}]$ setzt, dass

$$D_\lambda \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, \frac{\lambda^n}{n!}\, B_n\,.$$

Auch hier gilt, dass die Reihe abbricht, weil $B_n = 0$ ist sobald $n > \mu$ ist, und dass alle B_n nur durch die Potenzen von C ausgedrückt sind.

6. Auf Grund der obigen Identitäten erhalten wir mit (3.3.3) und (3.3.4) dass für alle $n \in \mathbb{N}$ bzw. $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} B_n \;&=\; a_n\, C \;-\; n\, C\, B_{n-1} \;=\; a_n\, C \;-\; n\, B_{n-1}\, C\,, \\ D_\lambda \;&=\; d(\lambda)\, C \;+\; \lambda\, C\, D_\lambda \;=\; d(\lambda)\, C \;+\; \lambda\, D_\lambda\, C\,. \end{aligned}$$

Besonders die erste Gleichung ist von Interesse, da man aus ihr die Matrizen B_n rekursiv berechnen kann, was einer Berechnung der Determinanten vorzuziehen ist. Auch die Koeffizienten a_n der Potenzreihe für $d(\lambda)$ können rekursiv berechnet werden, da ja für sie die Identität (3.3.6) gilt.

Kapitel 4

Die determinantenfreien Sätze

Im Folgenden wollen wir statt eines stetigen Kernes einen sogenannten L_2-Kern betrachten und eine analoge Theorie für diesen Fall entwickeln. Dazu wiederholen wir kurz die relevanten (wenigen) Resultate der Lebesgueschen Integrationstheorie, die wir hier benötigen:

- In $\mathbb{R}^n$ gibt es ein eindeutig bestimmtes Maß, das sogenannte *Lebesguesche Maß*, welches auf der Lebesgueschen Sigma-Algebra definiert ist und jedem n-dimensionalen Intervall das Produkt der Seitenlängen als Maß zuordnet.
- Mit dem Lebesgue-Maß wird das *Lebesgue-Integral* definiert – hier benötigen wir lediglich das Integral in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$, und wir schreiben der Einfachheit halber wie beim Riemann-Integral weiterhin
$$\int_a^b f(t)\,dt \qquad \text{bzw.} \qquad \int_{\mathcal{R}} f(s,t)\,dt\,ds$$
für das ein- bzw. zweidimensionale Lebesgue-Integral über ein (abgeschlossenes) Intervall $[a,b]$ bzw. ein Rechteck $\mathcal{R} := [a,b] \times [c,d]$.
- Nach dem Satz von Fubini gilt: Wenn das zweidimensionale Integral von $f(s,t)$ über ein Rechteck $\mathcal{R}$ existiert, dann existiert das eindimensionale Integral $\int_c^d f(s,t)\,dt$ für fast alle s. Die hierdurch (fast überall) definierte Funktion von s ist über $[a,b]$ integrierbar, und es gilt
$$\int_{\mathcal{R}} f(s,t)\,dt\,ds \;=\; \int_a^b \left(\int_c^d f(s,t)\,dt \right) ds\,.$$

4.1 Die Räume quadratintegrierbarer Funktionen

Im Folgenden sei $\mathcal{I} := [a,b]$ wieder ein festes abgeschlossenes nicht-triviales Intervall in $\mathbb{R}$, d. h., $a < b$, und $\mathcal{I}^2 := \mathcal{I} \times \mathcal{I}$.

Definition 4.1.1 *Mit $L_2(\mathcal{I})$ bezeichnen wir die Menge aller Funktionen $f : \mathcal{I} \to \mathbb{C}$, für welche $|f(t)|^2$ über $\mathcal{I}$ Lebesque-integrierbar ist. Nach der Hölderschen Ungleichung existiert für $f, g \in L_2(\mathcal{I})$ immer das Integral, also das innere Produkt*
$$\langle f, g \rangle \;:=\; \int_a^b \overline{f(t)}\, g(t)\,dt\,. \tag{4.1.1}$$
Wir nennen zwei Funktionen $f, g \in L_2(\mathcal{I})$ äquivalent*, wenn sie fast überall auf $\mathcal{I}$ gleich sind. Die Menge $L_2(\mathcal{I})$, d. h. genau genommen die Menge aller Äquivalenzklassen von fast überall gleichen Funktionen, ist*

mit der durch (4.1.1) induzierten Norm $\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f\rangle}$ *ein vollständiger Raum, also ein Hilbertraum. Analog ist auch* $L_2(\mathcal{I}^2)$ *ein Hilbertraum mit dem inneren Produkt bzw. der Norm*

$$\langle k, \ell\rangle \;:=\; \int_{\mathcal{I}^2} \overline{k(s,t)}\,\ell(s,t)\,dt\,ds\,, \qquad \|k\|_2 \;:=\; \Big(\int_{\mathcal{I}^2} |k(s,t)|^2\,dt\,ds\Big)^{1/2} \qquad \forall\ k, \ell \in L_2(\mathcal{I}^2)\,.$$

Jedes $k \in L_2(\mathcal{I}^2)$ *heißt* eine L_2-Kernfunktion *oder kürzer* ein L_2-Kern. *Nach dem Satz von Fubini sind die Funktionen*

$$k_1(s) \;:=\; \int_a^b |k(s,t)|^2\,dt\,, \qquad k_2(t) \;:=\; \int_a^b |k(s,t)|^2\,ds \tag{4.1.2}$$

fast überall auf $\mathcal{I}$ *endlich. Wenn* $k_1(s)$ *und* $k_2(t)$ *sogar überall endlich sind, dann heißt* k *ein* L_2*-Kern* im engeren Sinn. *Für jedes* $s \in \mathcal{I}$*, für welches* $k_1(s) < \infty$ *ist, ist die Funktion* $k(s,\cdot) \in L_2(\mathcal{I})$*. Daher existiert für jedes* $y \in L_2(\mathcal{I})$ *das Integral* $\int_a^b k(s,t)\,y(t)\,dt$ *für alle diese* s*, und sein Wert hängt nur von der Äquivalenzklasse ab, zu der* y *gehört. Die hierdurch definierte Äquivalenzklasse von Funktionen wird mit* $K\,y$ *bezeichnet. Wegen der Hölderschen Ungleichung ist*

$$|(K\,y)(s)| \;\le\; \sqrt{k_1(s)}\;\|y\|_2 \qquad \forall\ s \in \mathcal{I}\,, \tag{4.1.3}$$

woraus durch Integration über s *folgt*

$$\|K\,y\|_2 \;\le\; \|k\|_2\,\|y\|_2 \qquad \forall\ y \in L_2(\mathcal{I})\,.$$

Das bedeutet, dass jeder L_2*-Kern eine beschränkte lineare Abbildung* K *von* $L_2(\mathcal{I})$ *in sich definiert, und die Operatornorm der Abbildung ist höchstens gleich der* L_2*-Norm der Kernfunktion* k*.*

Aufgabe 4.1.2 *Zeige dass jede beschränkte messbare Funktion* k *immer in* $L_2(\mathcal{I}^2)$ *und sogar ein Kern im engeren Sinn ist. Insbesondere ist also jeder stetige Kern, aber auch jeder Volterra-Kern, immer ein* L_2*-Kern im engeren Sinn.*

Wenn zwei Kernfunktionen k, ℓ fast überall auf $\mathcal{I}^2$ gleich sind, so stimmen die zugehörigen Integraloperatoren K, L auf $L_2(\mathcal{I})$ überein – das folgende Lemma sagt, dass auch die Umkehrung gilt:

Lemma 4.1.3 *Seien* $k, \ell \in L_2(\mathcal{I}^2)$ *so, dass* $K\,y = L\,y$ *ist für alle* $y \in L_2(\mathcal{I})$*. Dann sind* k *und* ℓ *zueinander äquivalent, d. h., es gilt* $k(s,t) = \ell(s,t)$ *für fast alle* $(s,t) \in \mathcal{I}^2$*.*

Beweis: Sei $m = k - \ell$; dann ist der zu m gehörige Operator M die Nullabbildung. Also gibt es zu jedem $y \in L_2(\mathcal{I})$ eine Nullmenge N_y, außerhalb derer $\int_a^b m(s,t)\,y(t)\,dt = 0$ ist. Wir wählen speziell $y(t) = t^n$, mit $n \in \mathbb{N}_0$, und benutzen dass die Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen wieder eine Nullmenge ist. Also gibt es eine Nullmenge $N \subset \mathcal{I}$ so, dass gilt

$$\int_a^b m(s,t)\,t^n\,dt \;=\; 0 \qquad \forall\ s \notin N \quad \forall\ n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Die Menge aller Linearkombinationen der Monome, d. i. die Menge aller Polynome, ist dicht in $L_2(\mathcal{I})$, und daher folgt $\int_a^b |m(s,t)|^2\,dt = 0$ für alle $s \notin N$. Das impliziert dass $\|m\|_2 = 0$ sein muss. □

Lemma 4.1.4 *Jeder* L_2*-Kern* k *ist äquivalent zu einem Kern im engeren Sinn.*

Beweis: Sei N_1 die Menge aller $s \in \mathcal{I}$ mit $k_1(s) = \infty$, und sei analog N_2 die Menge aller $t \in \mathcal{I}$ mit $k_2(t) = \infty$. Dann ist die Menge $N := (N_1 \times \mathcal{I}) \cup (\mathcal{I} \times N_2)$ eine Nullmenge in $\mathcal{I}^2$. Wir setzen $\ell(s,t) = k(s,t)$ für $(s,t) \in \mathcal{I}^2 \setminus N$, und $\ell(s,t) = 0$ auf N. Dann folgt $\ell_1(s) := \int_a^b |\ell(s,t)|^2\,dt = k_1(s)$ für $s \notin N_1$, und $\ell_1(s) = 0$ für $s \in N_1$. Analog ist $\ell_2(t) = k_1(t)$ für $t \notin N_2$ und $\ell_2(t) = 0$ für $t \in N_2$. Also ist ℓ ein Kern im engeren Sinn. □

Aufgabe 4.1.5 *Seien $k, \ell \in L_2(\mathcal{I}^2)$. Zeige: Das Integral*

$$m(s,t) \;:=\; \int_a^b k(s,u)\,\ell(u,t)\,du$$

existiert für fast alle $(s,t) \in \mathcal{I}^2$ und definiert daher eine Äquivalenzklasse in $L_2(\mathcal{I}^2)$. Wie bei stetigen Kernen schreiben wir gelegentlich auch $m = k*\ell$ und nennen m die Faltung *von k und ℓ. Seien $k_1(s)$ und $k_2(t)$ wie in* (4.1.2)*, und seien $\ell_1(s), m_1(s), \ell_2(t), m_2(t)$ entsprechend definiert. Zeige für alle $(s,t) \in \mathcal{I}^2$:*

$$|m(s,t)| \;\le\; \sqrt{k_1(s)\,\ell_2(t)}\,, \quad m_1(s) \;\le k_1(s)\,\|\ell\|_2^2\,, \quad m_2(t) \;\le\; \|k\|_2^2\,\ell_s(t)\,, \quad \|m\|_2 \;\le\; \|k\|_2\,\|\ell\|_2\,. \tag{4.1.4}$$

Schließe hieraus: Falls k und ℓ Kerne im engeren Sinn sind, dann ist m ebenfalls Kern im engeren Sinn. Beachte aber, dass die Abschätzungen selbst dann richtig ist, wenn auf der rechten Seite ein Faktor gleich ∞ und der andere gleich 0 ist, denn dann folgt stets dass die linke Seite verschwindet, so dass wir die in der Maßtheorie übliche Vereinbarung $0\,\infty = 0$ verwenden können. Zeige weiter, dass der durch m definierte Operator M auf $L_2(\mathcal{I}^2)$ die Hintereinanderausführung $K \circ L$ der zu k und ℓ gehörigen Operatoren K und L ist.

4.2 Reguläre Werte und Neumannsche Reihe

Im Folgenden sei k immer ein fester L_2-Kern, und $f \in L_2(\mathcal{I})$ sei eine beliebige L_2-Funktion sowie $\lambda \in \mathbb{C}$.

Definition 4.2.1 *Wenn $y \in L_2(\mathcal{I})$ so ist, dass für fast alle $s \in \mathcal{I}$ die Gleichung*

$$y(s) \;=\; f(s) \;+\; \lambda \int_a^b k(s,t)\,y(t)\,dt \tag{4.2.1}$$

gilt, dann nennen wir y, oder genauer jede zu y äquivalente L_2-Funktion, Lösung der inhomogenen Fredholmschen Integralgleichung *zum Wert λ. Wir schreiben anstatt* (4.2.1) *auch knapper*

$$y \;=\; f \;+\; \lambda\,K\,y\,,$$

wobei K den durch k definierten Operator auf $L_2(\mathcal{I})$ bezeichnet. Falls dies günstig ist, können wir wegen Lemma 4.1.4 *stets annehmen, dass k ein Kern im engeren Sinn ist, so dass das Integral in* (4.2.1) *für alle s existiert. In diesem Fall können wir sogar eine Lösung y durch eine äquivalente Funktion ersetzen, für die die Gleichung* (4.2.1) für alle *$s \in \mathcal{I}$ gilt. Hierdurch ist y innerhalb einer Äquivalenzklasse von* $L_2(\mathcal{I})$ eindeutig festgelegt, *da sich die rechte Seite bei Übergang zu einer äquivalenten Funktion nicht ändert. Wir nennen $\lambda \in \mathbb{C}$ einen* regulären Wert *des Kerns k, falls es für jedes $f \in L_2(\mathcal{I})$ eine bis auf Äquivalenz eindeutige Lösung von* (4.2.1) *gibt. Wenn* (4.2.1) *für $f = 0$ eine nicht-triviale, d. h. nicht zur Nullfunktion äquivalente Lösung y besitzt, dann heißt λ ein* charakteristischer Wert *von k.*

Mit Hilfe von Aufgabe 4.1.5 können wir die iterierten Kernen und die Neumannsche Reihe genau wie im Fall stetiger Kerne geben. Wir erhalten damit folgendes Resultat:

Satz 4.2.2 *Gegeben seien ein $k \in L_2(\mathcal{I}^2)$ und eine reelle Zahl $c \ge \|k\|_2$. Dann gelten für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $c\,|\lambda| < 1$ immer folgende Aussagen:*

(a) *λ ist ein regulärer Wert von* (4.2.1)*, d. h.,* (4.2.1) *hat für jedes $f \in L_2(\mathcal{I})$ genau eine Lösung $y \in L_2(\mathcal{I})$.*

(b) *Für alle $f, y_0 \in L_1(\mathcal{I})$ konvergiert die Folge (y_n) mit $y_n := f + \lambda\,K\,y_{n-1}$, für $n \in \mathbb{N}$, sowohl in der Norm auf $L_2(\mathcal{I})$ als auch fast überall punktweise gegen die Lösung von* (4.2.1)*. Wenn k ein Kern im engeren Sinn ist, konvergiert die Folge überall punktweise auf $\mathcal{I}$ und sogar gleichmäßig falls k beschränkt ist.*

(c) *Die Neumannsche Reihe (2.3.1) konvergiert im Sinn der Norm auf $L_2(\mathcal{I}^2)$ sowie fast überall punktweise auf $\mathcal{I}^2$. Ist k ein Kern im engeren Sinn, dann konvergiert die Neumannsche Reihe überall punktweise auf $\mathcal{I}$ und sogar gleichmäßig falls k beschränkt ist. Wenn wir den zur Kernfunktion ℓ_λ gehörigen Operator mit L_λ bezeichnen, dann ist für jedes $f \in L_2(\mathcal{I})$ die Funktion $y = f + \lambda L_\lambda f$ die Lösung von (4.2.1).*

Beweis: Wenn $y \in L_2(\mathcal{I})$ eine Lösung von (4.2.1) mit $f = 0$ ist, folgt $\|y\|_2 \le |\lambda| \, \|k\|_2 \, \|y\|_2 \le |\lambda| \, c \, \|y\|_2$, woraus wegen $|\lambda| \, c < 1$ folgt, dass $\|y\| = 0$ sein muss. Also ist die Lösung von (4.2.1) (im Fall dass sie existiert) eindeutig bestimmt. Wegen Aufgabe 4.1.5 ist $\|k_n\|_2 \le \|k\|_2^n \le c^n$, und daher ist für alle $m, p \in \mathbb{N}_0$

$$\Big\| \sum_{n=m}^{m+p} \lambda^n \, k_{n+1} \Big\|_2 \;\le\; \sum_{n=m}^{m+p} |\lambda|^n \, c^{n+1} \,,$$

woraus die Normkonvergenz der Neumannschen Reihe folgt. Für $n \ge 3$ und alle $s, t \in \mathcal{I}$ gilt wegen derselben Aufgabe wie oben weiter

$$|k_n(s,t)| \;\le\; \sqrt{k_1(s)\, k_2(t)} \, \|k_{n-2}\|_2 \;\le\; \sqrt{k_1(s)\, k_2(t)} \, c^{n-2} \,.$$

Aus dieser Abschätzung ergeben sich die Aussagen zur punktweisen Konvergenz der Neumannschen Reihe. Wenn wir dann $y := f + \lambda \, L_\lambda \, f$ setzen, wobei natürlich L_λ den von ℓ_λ definierten Operator bezeichnet, dann zeigt man leicht, dass y eine Lösung der Integralgleichung ist. Also sind (a) und (c) bewiesen. Zum Beweis von (b) zeigt man durch Induktion

$$y_n \;-\; y \;=\; \lambda^n \, K^n \, y_0 \;-\; \Big(\sum_{m=n}^{\infty} \lambda^m \, K^m \Big) \, f \qquad \forall \; n \in \mathbb{N}_0 \,.$$

Hieraus folgt mit Hilfe von (c) die Normkonvergenz von (y_n) gegen y. Mit Hilfe von (4.1.3) und (4.1.4) folgt für alle $s \in \mathcal{I}$

$$|y_n(s) \;-\; y(s)| \;\le\; |\lambda|^n \sqrt{k_{n,1}(s)} \; \|y_0\|_2 \;+\; \|f\|_2 \sum_{m=n}^{\infty} |\lambda|^m \sqrt{k_{m,1}(s)} \,,$$

wobei $k_{m,1}(s) = \int_a^b |k_m(s,t)| \, dt$ ist. Da für $m \ge 1$ gilt $k_{m,1}(s) \le k_2(s) \, \|k_{m-1}\|_2^2$, folgen hieraus die Aussagen zur punktweisen Konvergenz. □

4.3 Kerne vom Volterraschen Typ

Definition 4.3.1 *Ein $k \in \mathcal{L}_2(\mathcal{I}^2)$ heißt* Volterra-Kern *oder* L_2-Kern vom Volterraschen Typ, *wenn $k(s,t) = 0$ ist für alle $a \le s < t \le b$.*

Wir wollen zeigen, dass eine Volterrasche Integralgleichung genau wie im Fall eines stetigen Kernes immer eindeutig lösbar ist, dass also jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ ein regulärer Wert ist. Dazu benötigen wir eine gute Abschätzung der iterierten Kerne, welche auf dem folgenden Lemma basiert:

Lemma 4.3.2 *Sei x auf $\mathcal{I}$ Lebesgue-integrierbar, und sei $a \le t \le b$ beliebig gegeben. Dann gilt*

$$\Big(\int_a^t x(u) \, du \Big)^n \;=\; n! \int_a^t x(u_1) \int_a^{u_1} x(u_2) \ldots \int_a^{u_{n-1}} x(u_n) \, du_n \ldots du_1 \qquad \forall \; n \in \mathbb{N} \,.$$

Beweis: Für eine Permutation $\sigma \in S_n$ sei

$$\Delta_\sigma \;=\; \{(u_1, \dots, u_n) \;:\; a \;\leq u_{\sigma(1)} \leq \dots \leq u_{\sigma(n)} \leq t \;\} .$$

Der n-dimensionale Würfel $[a,t]^n$ ist die Vereinigung aller Δ_σ, und der Durchschnitt zweier solcher Mengen ist eine Lebesguesche Nullmenge. Also ist das Integral über $[a,t]^n$ (bei beliebigem Integranden) gleich der Summe der Integrale über die Mengen Δ_σ. Speziell ist das Integral der Funktion $x(u_1)\dots x(u_n)$ über Δ_σ nicht von σ abhängig, und wegen

$$\Big(\int_a^t x(u)\, du \Big)^n \;=\; \int_a^t \dots \int_a^t x(u_1) \dots x(u_n)\, du_1 \dots du_n$$

folgt die Behauptung. □

Lemma 4.3.3 *Sei k ein Volterra-Kern, und seien $x_n := K^n x$ für ein $x \in \mathcal{L}_2(\mathcal{I})$ und $n \geq 0$ gesetzt. Dann gilt*

$$|x_n(s)| \;\leq\; \frac{\|x\|_2 \sqrt{k_1(s)}}{\sqrt{(n-1)!}} \;\Big(\int_a^s k_1(u)\, du \Big)^{(n-1)/2} \qquad \forall\; s \in \mathcal{I}, \quad n \geq 1 .$$

Beweis: Für $n = 1$ folgt die Behauptung mit (4.1.3). Für $n \geq 1$ gilt unter Verwendung der Induktionshypothese

$$|x_{n+1}(s)| \;\leq\; \sqrt{k_1(s)}\, \Big(\int_a^s |x_n(u)|^2\, du \Big)^{1/2} \;\leq\; \frac{\sqrt{k_1(s)}\; \|x\|_2}{\sqrt{(n-1)!}} \,\Big(\int_a^s k_1(u)\, \Big(\int_a^u k_1(v)\, dv \Big)^{n-1} du \Big)^{1/2} .$$

Durch zweifache Anwendung des vorausgegangenen Lemmas folgt die Behauptung für $n+1$ an Stelle von n. □

Lemma 4.3.4 *Sei k ein Volterra-Kern. Dann sind auch alle iterierten Kerne vom Volterraschen Typ, und für $a \leq t \leq s \leq b$ und alle $n \geq 1$ gilt*

$$|k_{n+1}(s,t)| \;\leq\; \sqrt{k_1(s)}\; \frac{\|k\|_2^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}}\; \sqrt{k_2(t)} \,. \tag{4.3.1}$$

Beweis: O. B. d. A. seien $s, t \in \mathcal{I}$ so, dass $k_1(s), k_2(t) < \infty$, da sonst die Behauptung trivial erfüllt ist. Wenn man das letzte Lemma auf $x(s) = k(s,t)$, mit festem $t \in \mathcal{I}$, anwendet, dann ist $x_n(s) = k_{n+1}(s,t)$, und man erhält die Behauptung, weil dann $\|x\|_2 = \sqrt{k_2(t)}$ und

$$\int_a^s k_1(u)\, du \;\leq\; \int_a^b k_1(u)\, du \;=\; \|k\|_2^2$$

ist. □

Satz 4.3.5 *Für einen Volterra-Kern k konvergiert die Neumannsche Reihe für alle λ in der Norm und auch fast überall punktweise. Insbesondere sind alle λ reguläre Werte für k.*

Beweis: Wegen (4.3.1) folgt die (punktweise) Konvergenz der Neumannschen Reihe für alle s, t mit $k_1(s) < \infty$ und $k_2(t) < \infty$, also für fast alle $(s,t) \in \mathcal{I}^2$. Durch Integration folgt aus (4.3.1) dass $\|k_{n+1}\|_2 \leq \|k\|_2^{n+1}/\sqrt{(n-1)!}$ ist, woraus die Normkonvergenz folgt. Wie im Beweis von Satz 1.3.4 findet man, dass die Gleichung $y = f + \lambda\, K\, y$ genau dann gilt, wenn $y = f + \lambda\, L_\lambda\, f$ ist, wobei L_λ durch die Neumannsche Reihe gegeben ist. Also ist jedes λ ein regulärer Wert. □

4.4 Approximation durch Kerne von endlichem Rang

Analog wie bei stetigen Kernen nennen wir k einen Kern von endlichem Rang, wenn er fast überall auf $\mathcal{I}^2$ von der Form $k = \sum_{j=1}^m a_j \otimes b_j$ ist, wobei jetzt natürlich $a_j, b_j \in L_2(\mathcal{I})$ sind. Insbesondere gilt wieder Satz 2.2.6, und wir können jeden Kern von endlichem Rang in kanonischer Form schreiben. Die Ergebnisse von Abschnitt 3.6 übertragen sich problemlos auf den Fall von L_2-Kernen in kanonischer Form, wenn man die bisher undefinierten Funktionen $d(\lambda)$ und $d_\lambda(s,t)$ entsprechend definiert (vergl. hierzu auch Satz 5.2.4). Auch die Definition des adjungierten Kernes können wir aus der stetigen Theorie übernehmen. Es gelten dann folgende Rechenregeln:

- Sei $k = \sum_{j=1}^m a_j \otimes b_j$ ein Kern von endlichem Rang. Dann folgt

$$\alpha\, k \;=\; \sum_{j=1}^m (\alpha\, a_j) \otimes b_j \;=\; \sum_{j=1}^m a_j \otimes (\overline{\alpha}\, b_j) \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{C}\,,$$

$$K\, y \;=\; \sum_{j=1}^m \langle b_j, y\rangle\, a_j \qquad \forall\, y \in L_2(\mathcal{I})\,,$$

$$k^* \;=\; \sum_{j=1}^m b_j \otimes a_j\,.$$

  Wenn ℓ ein beliebiger L_2-Kern ist, dann sind $\ell * k$ und $k * \ell$ beide von endlichem Rang, und es gilt

$$\ell * k \;=\; \sum_{j=1}^m (L\, a_j) \otimes b_j\,, \qquad k * \ell \;=\; \sum_{j=1}^m a_j \otimes (L^* b_j)\,.$$

Aufgabe 4.4.1 *Sei k ein L_2-Kern von endlichem Rang, dargestellt in kanonischer Form* (2.2.2). *Zeige*

$$\|k\|_2 \;=\; \Big(\sum_{j,\nu=1}^{\mu} |c_{j\nu}|^2 \Big)^{1/2} \;:=\; \|C\|_2\,.$$

Genau wie in der stetigen Theorie ist das Lösen einer Integralgleichung mit einem Kern von endlichem Rang äquivalent zum Lösen eines linearen Gleichungssystems.

Definition 4.4.2 *Seien $k \in L_2(\mathcal{I}^2)$ und $\omega > 0$ gegeben. Ein Paar $k_1, k_2 \in L_2(\mathcal{I}^2)$ heißt* ω-Zerlegung *von k, wenn $k = k_1 + k_2$ ist, wobei k_1 ein Kern von endlichem Rang und $\|k_2\|_2 < 1/\omega$ ist. Da die stetigen Kerne in $L_2(\mathcal{I}^2)$ dicht liegen, gibt es wegen des Weierstraßschen Approximationssatzes, oder des Satzes von Stone-Weierstraß aus der Vorlesung* Topologie, *zu jedem $\omega > 0$ eine solche Zerlegung, für welche k_1 ein Polynom in zwei Variablen und daher von endlichem Rang ist.*

Satz 4.4.3 *Seien $k \in L_2(\mathcal{I}^2)$ und $\omega > 0$ gegeben, und seien $k_1, k_2 \in L_2(\mathcal{I}^2)$ eine ω-Zerlegung von k. Sei weiter $|\lambda| < \omega$, sodass die Neumannsche Reihe für k_2 konvergiert, und sei $\ell_{2,\lambda}$ der durch die Reihe darstellte lösende Kern. Dann gilt:*

(a) *Die Kernfunktion $\tilde{k}_\lambda = k_1 + \lambda\, \ell_{2,\lambda} * k_1$ ist von endlichem Rang.*

(b) *Setzt man $g = f + \lambda\, L_{2,\lambda} f$ für ein $f \in L_2(\mathcal{I})$, so ist y genau dann Lösung von* (4.2.1), *wenn es die Gleichung*

$$y(s) \;=\; g(s) \;+\; \lambda \int_a^b \tilde{k}_\lambda(s,t)\, y(t)\; dt$$

erfüllt.

Beweis: Teil (a) der Behauptung folgt aus den obigen Rechenregeln. Zum Beweis von (b) schreiben wir die Integralgleichung (4.2.1) abstrakt in der Form $(I - \lambda\,(K_1 + K_2))\,y = f$ und wenden auf beide Seiten die Abbildung $I + \lambda\,L_{2,\lambda}$, also die Umkehrabbildung zu $I - \lambda\,K_2$, an. Daraus folgt die Behauptung, da diese Schritte umkehrbar sind. □

Bemerkung 4.4.4 *Der letzte Satz zeigt, dass man bei gegebener ω-Zerlegung, und unter der Annahme, dass man den lösenden Kern $\ell_{2,\lambda}$ kennt, die Integralgleichung* (4.2.1) *für $|\lambda| < \omega$ in eine Gleichung mit einem Kern von endlichem Rang transformieren kann – und solche Gleichungen können wiederum auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems in endlich vielen Unbekannten zurückgeführt werden. Allerdings wird man sicherlich in den meisten Fällen $\ell_{2,\lambda}$ und damit das lineare Gleichungssystem nicht wirklich explizit ausrechnen können. Man kann aber sehen, dass die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems, und damit auch ihre Determinante, im Kreis um den Ursprung mit Radius ω eine holomorphe Funktion von λ ist. Die inverse Matrix ist dann in diesem Kreis meromorph. Dies spielt im Beweis des folgenden Satzes eine zentrale Rolle.*

Satz 4.4.5 *Jeder L_2-Kern k hat abzählbar viele charakteristische Werte, welche keinen Häufungspunkt in $\mathbb{C}$ haben. Der für kleine Werte von λ durch die Neumannsche Reihe definierte lösende Kern ℓ_λ ist für fast alle festen $(s,t) \in \mathcal{I}^2$ zu einer in ganz $\mathbb{C}$ meromorphen Funktion von λ fortsetzbar und hat Polstellen höchstens an den charakteristischen Werten von k.*

Beweis: Für (großes) $\omega > 0$ seien k_1, k_2 eine ω-Zerlegung von k, und sei etwa $k_1 = \sum_{j=1}^m a_j \otimes b_j$, wobei o. B. d. A. die Systeme (a_j) und (b_j) linear unabhängig gewählt seien. Für $|\lambda|$ in der Kreisscheibe $K(0,\omega)$ seien $\ell_{2,\lambda}$ und $\tilde{k}_\lambda$ wie in Satz 4.4.3. Dann ist $\tilde{k}_\lambda = \sum_{j=1}^m (a_j + \lambda\,\ell_{2,\lambda} * a_j) \otimes b_j$, und die Matrixelemente $a_{jk}(\lambda) := \langle b_j, a_k + \lambda\,\ell_{2,\lambda} * a_k\rangle$ sind holomorphe Funktionen von λ. Ein $\lambda \in K(0,\omega)$ ist also nur dann ein charakteristischer Wert für k, wenn die Determinante der Matrix $A(\lambda) = [a_{jk}(\lambda)]$ an dieser Stelle verschwindet. Nach dem Nullstellensatz für holomorphe Funktionen gibt es daher in jedem Kreis um den Ursprung mit einem Radius $\rho < \omega$ höchstens endlich viele charakteristische Werte. Daraus folgt der erste Teil der Aussage des Satzes. Außerdem ist für jeden regulären Wert λ (wenn nur $\omega > |\lambda|$ ist) die eindeutige Lösung von (4.2.1) gegeben durch

$$y \;=\; (I \;+\; \lambda\,\tilde{L}_\lambda)\,g \;=\; (I \;+\; \lambda\,\tilde{L}_\lambda)\,(I \;+\; \lambda\,L_{2,\lambda})\,f\,,$$

wobei $\tilde{L}_\lambda$ der lösende Operator zum Kern $\tilde{k}_\lambda$ ist. Daher gilt (für kleine Werte von $|\lambda|$) und fast alle $(s,t) \in \mathcal{I}^2$ die Identität

$$\ell_\lambda \;=\; \tilde{\ell}_\lambda \;+\; \ell_{2,\lambda} \;+\; \lambda\,\tilde{\ell}_\lambda * \ell_{2,\lambda}\,.$$

Wie bei stetigen Kernen sieht man, dass $\tilde{\ell}_\lambda$ durch Invertieren der Matrix $A(\lambda)$ berechnet werden kann und deshalb eine meromorphe Funktion von λ ist. Da $\ell_{2,\lambda}$ sogar holomorph von λ abhängt, folgt dass auch ℓ_λ für jedes feste $(s,t) \in \mathcal{I}^2 \setminus N_\omega$, mit einer Nullmenge N_ω, auf der Kreisscheibe um den Ursprung mit Radius ω eine meromorphe Funktion von λ ist. Wenn man $\omega = N$ wählt und beachtet, dass die Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen wieder eine Nullmenge ist, so folgt dass ℓ_λ für fast alle $(s,t) \in \mathcal{I}^2$ in ganz $\mathbb{C}$ meromorph ist. □

4.5 Der Fredholmsche Alternativsatz

Die Aussage (a) des nächsten Satzes nennt man auch die *Fredholmsche Alternative*.

Satz 4.5.1 *Gegeben seien $k \in L_2(\mathcal{I}^2)$. Dann gelten folgende Aussagen:*

(a) *Jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ ist entweder ein regulärer oder ein charakteristischer Wert von k.*

(b) *Für jeden charakteristischen Wert von k ist der zugehörige Eigenraum endlich-dimensional.*

(c) *Genau dann ist λ charakteristischer Wert von k, wenn $\overline{\lambda}$ ein charakteristischer Wert des adjungierten Kerns k^* ist, und die zugehörigen Räume von charakteristischen Funktionen haben dieselbe Dimension.*

(d) *Für beliebiges $f \in L_2(\mathcal{I})$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ ist die inhomogene Gleichung* (4.2.1) *genau dann lösbar, wenn f zu allen Lösungen der adjungierten homogenen Gleichung orthogonal ist.*

Beweis: Sei $\lambda \in \mathbb{C}$, und sei $\omega > |\lambda|$. Wähle eine ω-Zerlegung (k_1, k_2) von k, mit $k_1 = \sum_1^m a_j \otimes b_j$, wobei $(a_1, \ldots, a_m)$ linear unabhängig sei. Dann ist die Integralgleichung äquivalent zu einem linearen Gleichungssystem, dessen Koeffizientenmatrix $A(\lambda)$ in $K(0, \omega)$ holomorph ist. Entweder ist ihre Determinante von 0 verschieden, und λ deshalb ein regulärer Wert, oder sie verschwindet, und dann ist die homogene Gleichung nicht-trivial lösbar und λ deshalb ein charakteristischer Wert. Also gilt (a). Außerdem hat die homogene Gleichung im zweiten Fall nur endlich viele linear unabhängige Lösungen, und die Anzahl dieser Lösungen ist gleich der Dimension des Eigenraums, woraus (b) folgt. Die Kerne k_1^*, k_2^* sind eine ω-Zerlegung für k^*, und daraus folgt dass die adjungierte homogene Gleichung äquivalent ist zum adjungierten homogenen linearen Gleichungssystem $A^*(\lambda)\, y = 0$. Daraus folgt die Aussage (c). Zu (d): Unter den Voraussetzungen und mit den Bezeichnungen von Satz 4.4.3 sei $x \in L_2$. Dann ist $\langle f, x\rangle = \langle g, (I - \overline{\lambda}\, K_2^*)\, x\rangle$. Die Funktion $\tilde{x} := (I - \overline{\lambda}\, K_2^*)\, x$ ist genau dann eine Lösung der adjungierten homogenen Gleichung zum Kern $\tilde{k}_\lambda$, wenn $(I - \overline{\lambda}\, K^*)\, x = 0$ ist. Daher gilt (d) genau dann, wenn dieselbe Aussage für $\tilde{k}_\lambda$ richtig ist, und da dies ein Kern von endlichem Rang ist, folgt dieses genau wie in Aufgabe 3.5.2. □

Kapitel 5

Die modifizierte Determinante

Wie im letzten Kapitel sei auch hier wieder $\mathcal{I} = [a, b]$ ein nicht-triviales abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$.

Die Schwierigkeit bei der Definition einer Fredholm-Determinante für allgemeine L_2-Kerne k besteht darin, dass ein solcher Kern keine Spur haben muss, und wenn eine Spur existiert, ist sie für den zugehörigen Operator K ohne Bedeutung, da die Diagonale von $\mathcal{I}^2$ eine (zweidimensionale) Lebesguesche Nullmenge ist. Daher ist es notwendig, die Definition der Determinante so abzuändern, dass die Spur von k nicht benutzt wird, die Nullstellen der Determinante aber gleich bleiben.

5.1 Orthogonalsysteme

Wir wiederholen kurz einige Ergebnisse der linearen Algebra über Vektorräume mit einem inneren Produkt, und insbesondere über Orthogonalsysteme. Der Einfachheit halber beschränken wir uns dabei auf komplexe Räume.

Definition 5.1.1 *Sei $\mathbb{X}$ ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ mit einem inneren Produkt $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$. Ein System $(e_j, j \in J)$ von Vektoren aus $\mathbb{X}$ heißt ein* Orthogonalsystem, *oder kurz ein OGS, falls*

$$\forall\ j, k \in J\ :\qquad j \neq k \quad\Longleftrightarrow\quad \langle e_j, e_k \rangle \ =\ 0\,.$$

Insbesondere ist also keiner der Vektoren e_j gleich dem Nullvektor, so dass jedes Orthogonalsystem immer linear unabhängig ist. Gilt zusätzlich $\|e_j\| := \sqrt{\langle e_j, e_j \rangle} = 1$ für alle $j \in J$, so sprechen wir von einem Orthonormalsystem *bzw. ONS. Ein OGS heißt* vollständig, *falls*

$$\forall\ x \in \mathbb{X}\ :\qquad \big(\ \langle x, e_j \rangle \ =\ 0 \quad \forall\ j \in J\ \big) \qquad\Longrightarrow\qquad x \ =\ 0\,.$$

Dies bedeutet, dass es kein echt größeres OGS in $\mathbb{X}$ gibt.

Beispiel 5.1.2 *In $L_2(\mathcal{I})$ sind alle OGS immer abzählbar, und vollständige OGS sind immer abzählbar-unendlich. Wenn $\ell = (b - a)/2$ ist, dann ist das System*

$$e_0(s) \ \equiv\ 1/\sqrt{2\ell}\,, \quad e_{2j}(s) \ =\ \frac{1}{\sqrt{\ell}}\ \cos(j\pi s/\ell)\,, \quad e_{2j-1}(s) \ =\ \frac{1}{\sqrt{\ell}}\ \sin(j\pi s/\ell) \qquad \forall\ j \in \mathbb{N}$$

ein vollständiges ONS. Mit dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens kann man in $L_2(\mathcal{I})$, ausgehend von den Monomen t^j, immer ein ONS $(p_j, j \in \mathbb{N}_0)$ konstruieren, wobei p_j ein Polynom vom

Grad j ist, und dieses System ist ebenfalls vollständig. Allgemeiner: Ist $(v_j, j \in \mathbb{N}_0)$ ein linear unabhängiges System in $\mathbb{X}$, für welches die lineare Hülle dicht in $\mathbb{X}$ ist, so erhält man hieraus mit Gram-Schmidt ein vollständiges ONS $(e_j, j \in \mathbb{N}_0)$.

Das folgende Resultat aus LA wird ohne Beweis zitiert:

Satz 5.1.3 *Sei $\mathbb{X}$ ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ mit einem inneren Produkt $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$, und sei $(e_1, \ldots, e_n)$ ein endliches ONS in $\mathbb{X}$. Für $x \in \mathbb{X}$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\Big\| \, x \;-\; \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, e_j \, \Big\|^2 \;\geq\; \Big\| \, x \;-\; \sum_{j=1}^{n} \langle e_j, x \rangle \, e_j \, \Big\|^2 \;=\; \|x\|^2 \;-\; \sum_{j=1}^{n} |\langle e_j, x\rangle|^2 \,.$$

Insbesondere gilt $\|x\|^2 \;\geq\; \sum_1^n |\langle e_j, x\rangle|^2$, wobei das Gleichheitszeichen genau dann gilt, wenn x in der linearen Hülle von $(e_1, \ldots, e_n)$ liegt, und in diesem Fall ist $x = \sum_1^n \langle e_j, x\rangle \, e_j$.

Mit Hilfe dieses Satzes zeigen wir jetzt ein Resultat, was vermutlich aus der Vorlesung *Funktionalanalysis* bekannt ist:

Satz 5.1.4 (Konvergenz von Orthogonalreihen) *Sei $(e_j, j \in \mathbb{N})$ ein ONS in $L_2(\mathcal{I})$. Dann gilt:*

(a) *Eine* Orthogonalreihe*, d. h., eine Reihe der Form $\sum_1^\infty \alpha_j \, e_j$ mit Koeffizienten $\alpha_j \in \mathbb{C}$, konvergiert genau dann im Sinn der Norm in $L_2(\mathcal{I})$, wenn gilt*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2 \;<\; \infty \,. \tag{5.1.1}$$

Wenn f den Grenzwert dieser Reihe bezeichnet, dann folgt $\alpha_j = \langle e_j, f\rangle$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

(b) *Für alle $f \in \mathcal{L}_2(\mathcal{I})$ gilt die* Besselsche Ungleichung

$$\|f\|^2 \;\geq\; \sum_{j=1}^{\infty} |\langle e_j, f\rangle|^2 \,,$$

und daher ist die allgemeine Fourierreihe *$\sum_1^\infty \langle e_j, f\rangle \, e_j$ im Sinne der Norm in $L_2(\mathcal{I})$ konvergent. Wenn g den Wert dieser Reihe bezeichnet, dann ist $f - g$ zu allen e_j, $j \in \mathbb{N}$, orthogonal. Wenn das ONS vollständig ist, dann ist also $g = f$.*

Beweis: Seien $n, p \in \mathbb{N}$. Dann folgt wegen der Orthonormalität der e_j:

$$\Big\| \sum_{j=n}^{n+p} \alpha_j \, e_j \, \Big\|^2 \;=\; \sum_{j=n}^{n+p} |\alpha_j|^2 \,,$$

und daher ist die gegebene Orthogonalreihe genau dann eine Cauchyreihe, wenn (5.1.1) gilt. Wegen der Vollständigkeit von $L_2(\mathcal{I})$ ist dies zur Konvergenz der Orthogonalreihe äquivalent, und wegen der Stetigkeit des Skalarproduktes folgt $\langle e_k, f\rangle \;=\; \sum_1^\infty \alpha_j \, \langle e_k, e_j\rangle \;=\; \alpha_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Also gilt (a). Die Besselsche Ungleichung folgt aus dem vorangegangenen Satz, und daraus folgt mit (a) die Konvergenz der allgemeinen Fourierreihe, sowie die Tatsache dass $\langle e_j, g\rangle = \langle e_j, f\rangle$ für alle $j \in \mathbb{N}$ ist. Daraus folgt der Rest von (b). □

Wichtig für dieses Kapitel ist der folgende Satz über Orthonormalsysteme in $L_2(\mathcal{I}^2)$:

Satz 5.1.5 *Seien $(e_j, j \in \mathbb{N})$ und $(f_j, j \in \mathbb{N})$ zwei beliebige ONS in $L_2(\mathcal{I})$. Dann ist $(e_\nu \otimes f_\mu, (\nu, \mu) \in \mathbb{N}^2)$ ein ONS in $L_2(\mathcal{I}^2)$, und dieses ist genau dann vollständig, wenn beide Ausgangssysteme vollständig sind.*

Beweis: Die Orthonormalität ist leicht zu überprüfen. Wenn $k \in L_2(\mathcal{I}^2)$ ist, dann folgt für alle $\nu, \mu \in \mathbb{N}$ mit dem Satz von Fubini:

$$\langle e_\nu \otimes f_\mu, k \rangle \;=\; \langle e_\nu, K\, f_\mu \rangle \,,$$

wobei auf der rechten Seite das Skalarprodukt in $L_2(\mathcal{I})$ gemeint ist. Wenn die linke Seite für alle ν, μ verschwindet, und wenn das System $(e_j, j \in \mathbb{N})$ vollständig ist, folgt hieraus dass $K\, f_\mu = 0$ ist für alle $\mu \in \mathbb{N}$. Falls das andere System ebenfalls vollständig ist, lässt sich jedes $f \in L_2(\mathcal{I})$ durch seine allgemeine Fourierreihe darstellen, und da K ein beschränkter Operator ist, folgt

$$K\, f \;=\; \sum_{\mu=1}^{\infty} \langle f_\mu, f \rangle\, K\, f_\mu \;=\; 0\,.$$

Also ist K die Nullabbildung, und daraus folgt $k = 0$. Wenn umgekehrt $(e_\nu \otimes f_\mu, (\nu, \mu) \in \mathbb{N}^2)$ vollständig ist, sei für ein $\tau \in \mathbb{N}$ und ein $f \in L_2(\mathcal{I})$ gesetzt $k := e_\tau \otimes f$. Dann ist $K\, f_\mu = \langle f, f_\mu \rangle\, e_\tau$, also

$$\langle e_\nu \otimes f_\mu, k \rangle \;=\; \langle e_\nu, K\, f_\mu \rangle \;=\; \delta_{\nu,\tau}\, \langle f, f_\mu \rangle \qquad \forall\, \nu, \mu \in \mathbb{N}\,.$$

Falls f zu allen f_μ orthogonal ist, folgt also $k = 0$, und das bedeutet wegen der speziellen Form von k dass $f = 0$ sein muss. Daher ist $(f_j, j \in \mathbb{N})$ vollständig. Die Vollständigkeit des anderen Systems ergibt sich analog. □

5.2 Die Spur

Im Folgenden betrachten wir in allen Beweisen o. B. d. A. immer L_2-Kerne im engeren Sinn, ohne dies im Einzelfall jeweils zu erwähnen.

Definition 5.2.1 *Falls für ein $k \in L_2(\mathcal{I}^2)$ das Integral $\sigma(k) := \int_a^b k(t,t)\, dt$ existiert, heißt diese Zahl* die Spur *des Kerns k. Beachte, dass selbst bei einem Kern im engeren Sinn die Spur nicht existieren muss, und dass sie sich bei Übergang zu einem äquivalenten Kern ändern kann.*

Die folgenden Eigenschaften der Spurabbildung sind leichte Folgerungen aus der Definition und dem Satz von Fubini:

Satz 5.2.2 (Eigenschaften der Spur)

(a) *Falls $k = \sum_1^m a_j \otimes b_j$, mit $a_j, b_j \in L_2(\mathcal{I})$ ist, dann existiert $\sigma(k)$, und es gilt $\sigma(k) = \sum_1^m \langle b_j, a_j \rangle$.*

(b) *Falls $k, \ell \in L_2(\mathcal{I}^2)$ Kerne im engeren Sinn sind, dann existieren $\sigma(k * \ell)$ und $\sigma(\ell * k)$, und es gilt*

$$\sigma(k * \ell) \;=\; \sigma(\ell * k)\,, \qquad |\sigma(k * \ell)| \;\leq\; \|k\|_2\, \|\ell\|_2\,.$$

(c) *Für jeden L_2-Kern im engeren Sinn existieren die Spuren der iterierten Kerne k_n für alle $n \geq 2$.*

(d) *Falls für zwei $\ell, m \in L_2(\mathcal{I}^2)$ die Spuren $\sigma(\ell)$ und $\sigma(m)$ existieren, so existiert für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ auch die Spur von $k := \alpha\, \ell + \beta\, m$, und es gilt $\sigma(k) = \alpha\, \sigma(\ell) + \beta\, \sigma(m)$.*

(e) *Falls $\sigma(k)$ für ein $k \in L_2(\mathcal{I}^2)$ existiert, dann existiert auch $\sigma(k^*)$, und es gilt $\sigma(k^*) = \overline{\sigma(k)}$.*

(f) *Falls* ℓ, ℓ_n, m, m_n *beliebige* L_2*-Kerne im engeren Sinn sind, und falls die Folgen* (ℓ_n) *und* (m_n) *im Sinn der Norm auf* $L_2(\mathcal{I})$ *gegen* ℓ *bzw.* m *konvergieren, dann gilt*

$$\sigma(\ell_n * m_n) \;\to\; \sigma(\ell * m) \qquad (n \to \infty)\,.$$

Aufgabe 5.2.3 *Beweise den vorangegangenen sowie den nächsten Satz.*

Satz 5.2.4 *Sei* k *ein* L_2*-Kern von endlichem Rang, dargestellt in kanonischer Form* (2.2.2)*. Dann gilt: Genau dann ist* λ *ein charakteristischer Wert von* k*, wenn* $d(\lambda) := \det(I - \lambda\, C) = 0$ *ist. Im anderen Fall sei* $L_\lambda = [\ell_{j\nu,\lambda}] := C\,(I - \lambda\, C)^{-1}$*. Dann ist der Kern*

$$\ell_\lambda \;=\; \sum_{j,\nu=1}^{\mu} \ell_{j\nu,\lambda}\, e_j \otimes e_\nu$$

eine meromorphe Funktion in $\mathbb{C}$ *und gleich der Fortsetzung des durch die Neumannsche Reihe definierten lösenden Kerns von* k*. Weiter gilt für* $d(\lambda)$ *die Darstellung* (3.6.1)*, mit Koeffizienten* a_n *wie in* (3.6.2)*, wobei die Zahlen* σ_n *die Spuren der iterierten Kerne* k_n*, also gleich den Spuren der Potenzen von* C*, sind. Wenn man jetzt noch* $d_\lambda := d(\lambda)\,\ell_\lambda$ *setzt, dann ist* $d_\lambda(s,t)$ *für jedes feste Paar* $s, t \in \mathcal{I}$ *ein Polynom in* λ*, und es gilt* (3.6.3) *mit* $b_n(s,t)$ *wie in* (3.3.8)*.*

5.3 Die modifizierte Fredholm-Determinante für Kerne von endlichem Rang

Da für einen allgemeinen L_2-Kern k keine Spur zu existieren braucht, und da sie sich, wenn sie existiert, bei Übergang zu einem äquivalenten Kern ändert, kann man nicht hoffen, eine Fredholm-Determinante genau wie bei stetigen Kernen zu definieren. Statt dessen werden wir aber eine modifizierte ganze Funktion definieren, welche jedenfalls die "richtigen"Nullstellen hat, und in deren Definition die Spur von k nicht auftritt. Dies tun wir zunächst für Kerne von endlichem Rang:

Definition 5.3.1 *Sei* k *ein* L_2*-Kern von endlichem Rang, dargestellt in kanonischer Form* (2.2.2)*, und seien* $d(\lambda)$ *bzw.* $d_\lambda(s,t)$ *seine Fredholm-Determinante bzw. sein lösender Kern. Dann definieren wir*

$$\delta(\lambda) \;:=\; \mathrm{e}^{\sigma_1 \lambda}\, d(\lambda)\,, \qquad\qquad \delta_\lambda(s,t) \;:=\; \mathrm{e}^{\sigma_1 \lambda}\, d_\lambda(s,t)\,.$$

Beachte dass offensichtlich $\delta(\lambda) = d(\lambda)$ *und* $\delta_\lambda(s,t) = d_\lambda(s,t)$ *für Kerne* k *mit* $\sigma_1 = 0$ *ist. Weiter seien* $\alpha_0 = 1$*,* $\beta_0(s,t) = k(s,t)$*, und für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $s, t \in \mathcal{I}$

$$\alpha_n \;=\; \det \begin{bmatrix} 0 & n-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sigma_2 & 0 & n-2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n-1} & \sigma_{n-2} & \dots & \sigma_2 & 0 & 1 \\ \sigma_n & \sigma_{n-1} & \dots & & \sigma_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.3.1}$$

$$\beta_n(s,t) \;=\; \det \begin{bmatrix} k(s,t) & n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ k_2(s,t) & 0 & n-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ k_3(s,t) & \sigma_2 & 0 & n-2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ k_n(s,t) & \sigma_{n-1} & \sigma_{n-2} & \dots & \sigma_2 & 0 & 1 \\ k_{n+1}(s,t) & \sigma_n & \sigma_{n-1} & \sigma_{n-2} & \dots & \sigma_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.3.2}$$

Auch hier sind offenbar im Fall $\sigma_1 = 0$ die Größen α_n und $\beta_n(s,t)$ gleich den in Kapitel 3 *definierten a_n und $b_n(s,t)$. Außerdem sind $\alpha_1 = 0$ und $\beta_1(s,t) = -k_2(s,t)$.*

Satz 5.3.2 *Sei k ein L_2-Kern von endlichem Rang, dargestellt in kanonischer Form* (2.2.2). *Dann gilt für alle $\lambda \in \mathbb{C}$*

$$\delta(\lambda) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, \frac{\alpha_n}{n!} \, \lambda^n \,, \qquad \delta_\lambda(s,t) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, \frac{\beta_n(s,t)}{n!} \, \lambda^n \qquad \forall\; s,t \in \mathcal{I}\,, \tag{5.3.3}$$

wobei die zweite Reihe sowohl in der Norm auf $L_2(\mathcal{I})$ als auch überall punktweise konvergiert.

Beweis: Nach Definition ist klar, dass $\delta(\lambda)$ und $\delta_\lambda(s,t)$ ganze Funktionen von λ sind. Also können beide (für feste $s,t \in \mathcal{I}$) in eine Potenzreihe in λ mit unendlichem Konvergenzradius entwickelt werden, und die Reihe für $\delta_\lambda(s,t)$ ist (für festes $\lambda \in \mathbb{C}$) auch normkonvergent. Diese Potenzreihen kann man immer in der im Satz angegebenen Form schreiben, wobei zunächst die Größen α_n und $\beta_n(s,t)$ noch unbekannt sind. Aus der Definition und Aufgabe 3.3.5 ergibt sich weiter

$$\frac{\delta'(\lambda)}{\delta(\lambda)} \;=\; \sigma_1 \;+\; \frac{d'(\lambda)}{d(\lambda)} \;=\; -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \, \sigma_{n+1}\,.$$

Daraus sieht man, dass die Zahlen α_n der Potenzreihe für $\delta(\lambda)$ derselben Rekursion (3.3.6) wie die a_n genügen, allerdings für den Wert $\sigma_1 = 0$, und daraus folgt die Gleichung (5.3.1). Genauso kann man (5.3.2) zeigen. □

Wir wollen im nächsten Abschnitt auch für allgemeine L_2-Kerne die Funktionen $\delta(\lambda)$ und $\delta_\lambda(s,t)$ durch die Potenzreihen (5.3.3) definieren. Um deren Konvergenz zu zeigen, benötigen wir das folgende technische Hilfsmittel, welches eine einfache Folgerung aus der Cauchyschen Integraldarstellung der Koeffizienten einer Potenzreihe ist:

Lemma 5.3.3 *Sei $f(\lambda) = \sum_0^\infty f_n \lambda^n$ eine ganze Funktion, und sei*

$$M(r) \;:=\; \sup_{|\lambda|=r} \, |f(\lambda)| \qquad \forall\; r \geq 0\,.$$

Dann gilt $|f_n| \leq r^{-n}\, M(r)$ für alle $r \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis: Aus der Vorlesung *Elemente der Funktionentheorie* ist bekannt, dass gilt

$$f_n \;=\; \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=r} \frac{f(\lambda)}{\lambda^{n+1}} \, d\lambda \qquad \forall\; n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Aus der Fundamentalabschätzung für Kurvenintegrale folgt damit die Behauptung. □

Mit diesem Lemma erhalten wir folgende Abschätzungen der Größen α_n und $\beta_n(s,t)$ bei Kernen von endlichem Rang:

Satz 5.3.4 *Sei k ein L_2-Kern von endlichem Rang, dargestellt in kanonischer Form* (2.2.2). *Dann gilt*

$$\frac{|\alpha_n|}{n!} \;\le\; \frac{\mathrm{e}^{n/2}\|k\|_2^n}{n^{n/2}}\,, \qquad \frac{\|\beta_n\|_2}{n!} \;\le\; \frac{\mathrm{e}^{(n+1)/2}\|k\|_2^{n+1}}{n^{n/2}} \qquad \forall\; n \in \mathbb{N}\,. \tag{5.3.4}$$

Beweis: Wegen (3.6.1) und der Hadamardschen Determinantenabschätzung ist

$$\begin{aligned} |d(\lambda)|^2 \;&=\; |\det(I-\lambda\, C)|^2 \;\le\; \prod_{j=1}^{\nu}\Big(\,|1-\lambda\, c_{jj}|^2 \;+\; \sum_{k\ne j} |\lambda\, c_{jk}|^2\,\Big) \\ &=\; \prod_{j=1}^{\nu}\Big(\,1-2\,\mathrm{Re}\,(\lambda\, c_{jj}) \;+\; \sum_{k=1}^{\nu} |\lambda\, c_{jk}|^2\,\Big) \\ &\le\; \prod_{j=1}^{\nu} \exp\Big[-2\,\mathrm{Re}\,(\lambda\, c_{jj}) \;+\; \sum_{k=1}^{\nu} |\lambda\, c_{jk}|^2\Big]\,, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt noch die Ungleichung $1+x \le \mathrm{e}^x$ für $x \in \mathbb{R}$ benutzt wurde. Aus der Tatsache dass $\sigma_1 = \sum_j c_{jj}$ ist, folgt mit Aufgabe 4.4.1

$$|\delta(\lambda)|^2 \;=\; \exp\left[2\,\mathrm{Re}\,(\lambda\, c_{jj})\right]|d(\lambda)|^2 \;\le\; \exp\Big[\,\sum_{j,k=1}^{\nu} |\lambda\, c_{jk}|^2\,\Big] \;=\; \mathrm{e}^{|\lambda|^2\|k\|_2^2}\,.$$

Mit dem letzten Lemma folgt hieraus

$$|\alpha_n| \;\le\; n!\, r^{-n}\, \exp\left[r^2\,\|k\|_2^2/2\right],$$

wobei r eine beliebige positive Zahl sein kann. Diese Abschätzung wird am besten, wenn man r, in Abhängigkeit von n, so bestimmt, dass die rechte Seite minimal wird, und das geschieht genau für $r = n^{1/2}/\|k\|_2$. Daraus folgt die erste Hälfte von (5.3.4). Der Beweis der zweiten Ungleichung geht ähnlich: Es ist $\|d_\lambda\|_2 = \|D_\lambda\|_2$, mit $D_\lambda = d(\lambda)\, C\,(I-\lambda\, C)^{-1} = C\, A_\lambda$, wobei A_λ die Matrix aus den algebraischen Komplementen zu $I - \lambda\, C$ ist. Für Vektoren $x, y \in \mathbb{C}^\nu$ folgt deshalb aus dem Entwicklungssatz dass

$$\langle x, A_\lambda\, y\rangle \;=\; \det\left[\begin{array}{c|c} 0 & \overline{x}^T \\ \hline y & I-\lambda\, C \end{array}\right].$$

Schätzt man mit Hadamard ab, wobei man $\|x\|_2 = \|y\|_2 = 1$ annehmen kann, so erhält man wie oben die Ungleichung

$$|\langle x, A_\lambda\, y\rangle|^2 \;\le\; \prod_{j=1}^{\nu} \exp\Big[|x_j|^2 \;-\; 2\,\mathrm{Re}\,(\lambda\, c_{jj}) \;+\; \sum_{k=1}^{\nu} |\lambda\, c_{jk}|^2\Big] \;=\; \exp\left[1-2\,\mathrm{Re}\,(\sigma_1\,\lambda) + |\lambda|^2\,\|C\|^2\right].$$

Da das Supremum der linken Seite, genommen über alle Einheitsvektoren x, y, genau gleich $\|A_\lambda\|_2^2$ ist, folgt hieraus

$$\|\delta_\lambda\|^2 \;=\; \|\mathrm{e}^{\sigma_1\lambda}\, C\, A_\lambda\|_2^2 \;\le\; \|C\|_2^2\, \exp\left[1+|\lambda|^2\,\|C\|_2^2\right],$$

und daraus ergibt sich der zweite Teil von (5.3.4) mit denselben Argumenten wie oben. □

5.4 Die modifizierte Fredholm-Determinante

Definition 5.4.1 *Für einen beliebigen L_2-Kern k im engeren Sinn definieren wir α_n und $\beta_n(s,t)$ durch* (5.3.1) *und* (5.3.2). *Weiter definieren wir $\delta(\lambda)$ und $\delta_\lambda(s,t)$ durch die Reihen* (5.3.3), *wobei deren Konvergenz noch zu zeigen ist.*

Satz 5.4.2 *Sei k ein L_2-Kern im engeren Sinn. Dann gilt für alle $n \geq 1$ und $s,t \in \mathcal{I}$:*

(a) $\beta_n(s,t) \;=\; \alpha_n\, k(s,t) \;-\; n\,(k * \beta_{n-1})(s,t) \;=\; \alpha_n\, k(s,t) \;-\; n\,(\beta_{n-1} * k)(s,t).$

(b) *Der Kern $\beta_{n-1} - \alpha_{n-1}\, k$ besitzt eine Spur, und $\sigma(\beta_{n-1} - \alpha_{n-1}\, k) = \alpha_n$.*

(c) *Es gelten die Abschätzungen* (5.3.4).

Beweis: Die Gleichung (a) folgt mit dem Entwicklungssatz für Determinanten. Für (b) beachten wir zunächst, dass $\alpha_1 = 0$ und auch $\beta_0 - \alpha_0\, k = 0$ ist, so dass für $n = 1$ nichts zu zeigen ist. Für $n \geq 2$ schließen wir aus (a), dass $\beta_{n-1} - \alpha_{n-1}\, k = -(n-1)\, k * \beta_{n-2}$ ist, und daher folgt, dass die linke Seite eine Linearkombination der iterierten Kerne $k_2, \ldots, k_n$ ist und deshalb eine Spur besitzt. Die angegebene Formel ergibt sich durch Entwicklung von α_n nach der ersten Zeile. Um (c) zu zeigen, approximieren wir k durch Kerne von endlichem Rang und verwenden den vorausgegangenen Satz, sowie Aufgabe 5.4.3. □

Aufgabe 5.4.3 *Zeige dass die Größen α_n und $\beta_n(s,t)$ stetige Funktionen von $k(s,t)$ sind.* Anleitung: *Zeige, dass die iterierten Kerne k_n und deren Spuren σ_n, für $n \geq 2$, in jeder Kugel um den Nullpunkt in $L_2(\mathcal{I})$ Lipschitz-stetige Funktionen von k sind. Leite dann eine Rekursion für die Zahlen α_n ab und benutze diese und* Satz 5.4.2 (a), *um die Lipschitzstetigkeit der α_n und β_n durch Induktion über n zu zeigen.*

Satz 5.4.4 *Sei k ein L_2-Kern im engeren Sinn. Dann gilt für alle $n \geq 1$ und $s,t \in \mathcal{I}$:*

(a) *Die Reihe für $\delta(\lambda)$ konvergiert für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, stellt also eine ganze Funktion dar.*

(b) *Die Reihe für $\delta_\lambda(s,t)$ konvergiert für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ sowohl im Sinne der Norm auf $L_2(\mathcal{I}^2)$ als auch überall punktweise, und stellt einen L_2-Kern im engeren Sinn dar.*

(c) *Jedes λ mit $\delta(\lambda) \neq 0$ ist ein regulärer Wert von k, und*

$$\ell_\lambda(s,t) \;:=\; \frac{1}{\delta(\lambda)}\, \delta_\lambda(s,t) \qquad \forall\; s,t \in \mathcal{I}$$

ist der lösende Kern zu k und λ.

Beweis: Die Aussage (a) und die Normkonvergenz der zweiten Reihe folgen aus (5.3.4). Für $n \geq 3$ und $s,t \in \mathcal{I}$ folgt durch zweimalige Anwendung von Satz 5.4.2 (a) die Abschätzung

$$|\beta_n(s,t)| \;\leq\; |\alpha_n|\,|k(s,t)| \;+\; n\,|\alpha_{n-1}|\,|k_2(s,t)| \;+\; n(n-1)\Big|\int_a^b \int_a^b k(s,u)\,\beta_{n-2}(u,v)\,k(v,t)\,dv\,du\Big|,$$

und das Doppelintegral auf der rechten Seite ist höchstens gleich $\sqrt{k_1(s)\,k_2(t)}\;\|\beta_{n-2}\|$. Daraus folgt die punktweise Konvergenz der zweiten Reihe. Aus Satz 5.4.2 (a) folgt die Gleichung

$$\lambda\, k * \delta_\lambda \;=\; \delta_\lambda \;-\; \delta(\lambda)\, k \;=\; \lambda\, \delta_\lambda * k\,,$$

und hieraus ergibt sich nach Division durch $\delta(\lambda)$, dass ℓ_λ die Resolventengleichung (2.3.2) erfüllt. Daher gilt (c). □

Aufgabe 5.4.5 *Folgere aus dem Beweis des letzten Satzes sowie aus* Satz 5.4.2 (b), *dass*

$$\sigma(\delta_\lambda \;-\; \delta(\lambda)\,k) \;=\; \delta(\lambda)\,\lambda\,\sigma(k*\ell_\lambda) \;=\; -\delta'(\lambda)\,.$$

Verwende dies und die Neumannsche Reihe um zu zeigen, dass für kleine Werte von $|\lambda|$ *gilt*

$$\frac{\delta'(\lambda)}{\delta(\lambda)} \;=\; -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n\,\sigma_{n+1}\,.$$

Definition 5.4.6 (Ordnung einer ganzen Funktion) *Sei f eine ganze Funktion, also eine Funktion, welche in ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist. Falls es für ein $k \geq 0$ zwei Konstanten $c, C > 0$ gibt, so dass*

$$|f(z)| \;\leq\; C\,\mathrm{e}^{c|z|^k} \qquad \forall\; z \in \mathbb{C}\,,$$

dann heißt das Infimum aller solcher k die exponentielle Ordnung, *oder auch einfach die* Ordnung *von f. Falls es kein solches k gibt, sagt man dass f von unendlicher Ordnung ist.*

Aus der Theorie der *Werteverteilung* folgt, wie die Ordnung einer ganzen Funktion mit einer Abschätzung der Koeffizienten ihrer Potenzreihe um den Ursprung sowie mit der Verteilung der Nullstellen zusammenhängt. Die von uns eingeführte (modifizierte) Fredholm-Determinante ist eine ganze Funktion höchstens zweiter Ordnung – da sie bei Kernen von endlichem Rang sogar ein Polynom multipliziert mit einer Exponentialfunktion ist, kann die Ordnung aber auch kleiner sein.

5.5 Charakteristische Werte und Nullstellen der Determinante

Die nächsten Resultate entsprechen genau denen aus Abschnitt 3.4, wobei aber die Beweise zum Teil etwas anders geführt werden.

Lemma 5.5.1 *Sei k ein L_2-Kern im engeren Sinn, und sei λ_0 eine Nullstelle von $\delta(\lambda)$ der Ordnung q. Dann gibt es ein $r \in \mathbb{N}_0$ mit $r \leq q-1$, so dass $\delta_\lambda(s,t) = (\lambda-\lambda_0)^r\,\varepsilon_\lambda(s,t)$ ist, wobei ε_{λ_0} ein nicht-trivialer L_2-Kern im engeren Sinn ist.*

Beweis: Der Kern δ_λ ist eine nicht-triviale ganze Funktion in λ und kann deshalb in eine Potenzreihe um λ_0 entwickelt werden, deren Koeffizienten nicht alle verschwinden können. Also gibt es ein r und ein $\varepsilon_\lambda(s,t)$ mit $\delta_\lambda(s,t) = (\lambda-\lambda_0)^r\,\varepsilon_\lambda(s,t)$, so dass nur noch $r \leq q-1$ zu zeigen ist. Aus Satz 5.4.2 (b) folgt aber $\sigma(\delta_\lambda - \delta(\lambda)\,k) = -\delta'(\lambda)$. Wenn $\delta_\lambda(s,t) = (\lambda-\lambda_0)^r\,\varepsilon_\lambda(s,t)$ für irgendein $r \in \mathbb{N}_0$ und einen L_2-Kern $\varepsilon_\lambda(s,t)$ ist, dann folgt hieraus, dass $\delta'(\lambda)$ an der Stelle λ_0 eine Nullstelle mindestens der Ordnung r hat. Daher muss $r \leq q-1$ sein. □

Satz 5.5.2 *Sei k ein L_2-Kern im engeren Sinn, und sei λ_0 eine Nullstelle von $\delta(\lambda)$ der Ordnung q. Für r und $\varepsilon_\lambda(s,t)$ wie im letzten Lemma sei $t_0 \in \mathcal{I}$ so, dass für fast alle $s \in \mathcal{I}$ gilt $\phi(s) := \varepsilon_{\lambda_0}(s,t_0) \neq 0$. Dann ist ϕ eine Eigenfunktion von k zum charakteristischen Wert λ_0. Insbesondere sind also alle Nullstellen von $\delta(\lambda)$ charakteristische Werte von k.*

Beweis: Wird genauso bewiesen wie Satz 3.4.2. □

Kapitel 6

Hermitesche Kernfunktionen

Wir werden in diesem Kapitel sehen, dass die sogenannten hermiteschen Kernfunktionen in etwa den hermiteschen Matrizen entsprechen, und dass für solche ein Satz gilt, der im Wesentlichen dem über die Hauptachsentransformation entspricht.

6.1 Definition und einfache Eigenschaften

Definition 6.1.1 *Ein $k \in L_2(\mathcal{I}^2)$ heißt* hermitesch *oder manchmal auch* selbstadjungiert*, falls $k^* = k$ ist. Ausgeschrieben bedeutet das, dass*

$$k(s,t) \;=\; \overline{k(t,s)} \qquad \forall\, s,t \in \mathcal{I}\,.$$

Falls k nur reelle Werte hat, nennt man k auch symmetrisch.

Aufgabe 6.1.2 *Zeige dass eine Kernfunktion von endlichem Rang, dargestellt in kanonischer Form* (2.2.2)*, genau dann hermitesch ist, wenn die Darstellungsmatrix $C = [c_{jk}]$ hermitesch ist, d. h., wenn $C = \overline{C}^T$ ist.*

Aufgabe 6.1.3 *Sei $k \in L_2(\mathcal{I}^2)$ hermitesch, und sei wie üblich K der zugehörige Fredholmsche Integraloperator. Zeige dass dann für alle $x, y \in L_2(\mathcal{I})$ gilt $\langle x, K\,y\rangle = \langle K\,x, y\rangle$. Insbesondere ist also die* quadratische Form *$\langle x, K\,x\rangle$ immer reell.*

Lemma 6.1.4 *Eine hermitesche Kernfunktion k hat nur reelle charakteristische Werte. Alle Eigenfunktionen von k sind orthogonal zum Kern des Operators K, und Eigenfunktionen zu verschiedenen charakteristischen Werten sind orthogonal zueinander. Außerdem sind alle iterierten Kernfunktionen zu k ebenfalls hermitesch.*

Beweis: Sei λ ein charakteristischer Wert von k, und sei x eine zugehörige Eigenfunktion. Dann ist insbesondere $\lambda \neq 0$ und $x = \lambda\,K\,x$, und wie in LA folgt

$$\lambda^{-1}\,\langle x,x\rangle \;=\; \langle x,\lambda^{-1}\,x\rangle \;=\; \langle x,K\,x\rangle \;=\; \langle K\,x,x\rangle \;=\; \overline{\lambda}^{-1}\,\langle x,x\rangle\,,$$

und da $\langle x,x\rangle > 0$ ist, folgt $\lambda \in \mathbb{R}$. Wenn μ ein von λ verschiedener weiterer charakteristischer Wert mit einer Eigenfunktion y ist, dann ist wegen Aufgabe 6.1.3

$$(\mu^{-1} - \lambda^{-1})\,\langle x,y\rangle \;=\; \langle x,\mu^{-1}\,y\rangle \;-\; \langle \lambda^{-1}x,\,y\rangle \;=\; \langle x,K\,y\rangle \;-\; \langle K\,x,\,y\rangle \;=\; 0\,,$$

woraus $\langle x, y\rangle = 0$ folgt. Ganz analog zeigt man dass jede Eigenfunktion zum Kern von K orthogonal ist. Schließlich folgt aus der Definition der iterierten Kernfunktionen induktiv ihre Selbstadjungiertheit. $\square$

Aufgabe 6.1.5 (Spuren hermitescher Kernfunktionen) *Sei $k \in L_2(\mathcal{I}^2)$ hermitesch, und sei σ_n die Spur der n-ten iterierten Kernfunktion k_n. Zeige:*

(a) *Alle σ_n sind reell.*

(b) *Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ ist $|\sigma_{n+m}| \leq \|k_n\|_2 \, \|k_m\|_2$.*

(c) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\sigma_{2n} = \|k_n\|_2^2$.*

Aufgabe 6.1.6 *Zeige dass für jeden nicht-trivialen hermiteschen L_2-Kern k auch alle iterierten Kerne nicht-trivial sind.* Anleitung: *Zeige genauer: Wenn k_n nicht-trivial ist, so gilt dasselbe für alle k_m mit $1 \leq m \leq n$ sowie auch für k_{2n}.*

Satz 6.1.7 (Existenz von charakteristischen Werten) *Jeder hermitesche L_2-Kern k, der nicht trivial ist, besitzt mindestens einen charakteristischen Wert. Genauer hat k mindestens einen charakteristischen Wert λ mit $|\lambda| \leq \|k\|_2 / \|k_2\|_2$.*

Beweis: Wegen Aufgabe 5.4.5 gilt

$$\frac{\delta'(\lambda)}{\delta(\lambda)} \;=\; -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \, \sigma_{n+1} \,.$$

Wenn k eine nicht-triviale hermitesche Kernfunktion ist, dann folgt aus Aufgabe 6.1.5 dass

$$0 \;<\; \sigma_{2n} \;\leq\; \|k_{n-1}\|_2 \, \|k_{n+1}\|_2 \;=\; \sqrt{\sigma_{2n-2}\, \sigma_{2n+2}} \qquad \forall\, n \geq 2\,.$$

Also ist $\sigma_{2n+2}/\sigma_{2n}$ monoton wachsend, und insbesondere nach unten durch $c := \sigma_4/\sigma_2 > 0$ beschränkt. Hieraus folgt aber $\sigma_{2n} \geq \sigma_2 \, c^{n-1}$, und deshalb kann die obige Reihe für $|\lambda| \geq 1/\sqrt{c} = \|k\|_2/\|k_2\|_2$ nicht konvergieren, und somit $\delta'(\lambda)/\delta(\lambda)$ keine ganze Funktion sein. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

6.2 Charakteristische Systeme

Definition 6.2.1 *Sei k ein nicht-trivialer hermitescher L_2-Kern. Wir nennen eine endliche oder unendliche Folge von Paaren $(\lambda_j, e_j)_{j \in J}$ ein* charakteristisches System *für k, wenn jedes e_j Eigenfunktion zum charakteristischen Wert λ_j ist, wenn weiter (e_j) ein Orthonormalsystem ist, und wenn schließlich zu jedem Eigenraum U von k ein Teilsystem der (e_j) eine Basis von U bildet. Vereinfacht kann man also sagen, dass ein charakteristisches System ein maximales ONS von Eigenfunktionen von k ist. Da nach* Lemma 6.1.4 *die Eigenfunktionen zu verschiedenen charakteristischen Werten immer orthogonal sind, besitzt jeder nicht-triviale hermitesche L_2-Kern ein charakteristisches System. In jedem solchen System muss jeder charakteristische Wert entsprechend seiner geometrischen Vielfachheit auftreten, und wir können es so einrichten, dass evtl. gleiche Werte in der Folge (λ_j) unmittelbar hintereinander auftreten, und dass die Folge $(|\lambda_j|)$ monoton wachsend ist. Falls das charakteristische System unendlich viele Paare umfasst, dann folgt, dass die Beträge der λ_j gegen ∞ konvergieren müssen.*

Aufgabe 6.2.2 *Berechne ein charakteristisches System für den in* Aufgabe 1.1.3 *definierten L_2-Kern.*

Aufgabe 6.2.3 *Sei k ein nicht-trivialer hermitescher L_2-Kern, sei $(e_1, \dots, e_m)$ ein Orthonormalsystem von Eigenfunktionen zu charakteristischen Werten $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, und sei U der von $(e_1, \dots, e_m)$ aufgespannte Unterraum. Weiter sei angenommen, dass für $j = 1, \dots, m$ der Eigenraum zu λ_j in U enthalten ist. Sei schließlich $\tilde{k}_m = k - \sum_{j=1}^m \lambda_j^{-1} e_j \otimes e_j$. Zeige:*

(a) *$\tilde{k}_m$ ist hermitesch, und für alle x ist* $\tilde{K}_m x \;=\; K x - \sum_{j=1}^m \lambda_j^{-1} \langle e_j, x\rangle e_j$.

(b) *Für $u \in U$ ist $\tilde{K}_m u = 0$, für $v \in U^\perp$ ist $\tilde{K}_m v = K v \in U^\perp$. Insbesondere sind die Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ keine charakteristischen Werte von $\tilde{k}_m$.*

(c) *Wenn x eine Eigenfunktion von $\tilde{k}_m$ zu einem charakteristischen Wert λ ist, dann ist $x \in U^\perp$, und x ist Eigenfunktion von k zum gleichen charakteristischen Wert, also ist insbesondere λ auch charakteristischer Wert von k, und $\lambda \notin \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$. Umgekehrt ist jeder charakteristische Wert $\lambda \notin \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ von k auch ein solcher für $\tilde{k}_m$.*

(d) *Es gilt:*
$$\|\tilde{k}_m\|_2^2 \;=\; \|k\|_2^2 \;-\; \sum_{j=1}^m |\lambda_j|^{-2}.$$

(e) *Wenn $\tilde{k}_{m,n}$ bzw. k_n den n-ten iterierten Kern zu $\tilde{k}_m$ bzw. k bezeichnet, dann gilt*
$$\tilde{k}_{m,n} \;=\; k_n \;-\; \sum_{j=1}^m \lambda_j^{-n}\; e_j \otimes e_j\,.$$

(f) *Wenn $\tilde{\sigma}_{m,n}$ bzw. σ_n die Spur von $\tilde{k}_{m,n}$ bzw. k_n bezeichnet, dann gilt*
$$\tilde{\sigma}_{m,n} \;=\; \sigma_n \;-\; \sum_{j=1}^m \lambda_j^{-n}\,.$$

Der folgende Satz entspricht dem Entwicklungssatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren aus der Funktionalanalysis – allerdings erhalten wir bessere Aussagen zur Konvergenz der Reihe:

Satz 6.2.4 (Entwicklungssatz) *Sei k ein nicht-trivialer hermitescher L_2-Kern, und sei $(\lambda_j, e_j)_{j\in J}$ ein charakteristisches System für k. Dann ist die Reihe*
$$\tilde{k} \;:=\; \sum_{j\in J} \lambda_j^{-1}\; e_j \otimes e_j\,, \tag{6.2.1}$$
in der 2-Norm auf $L_2(\mathcal{I})$ konvergent, und $\tilde{k}$ ist zu k äquivalent. Insbesondere gilt die Gleichung $\|k\|_2^2 = \sum_{j\in J} |\lambda_j|^2$, und es folgt
$$K x \;=\; \sum_{j\in J} \lambda_j^{-1} \langle e_j, x\rangle\, e_j \qquad \forall\; x \in L_2(\mathcal{I})\,,$$
wobei die Reihe in der Norm auf $L_2(\mathcal{I})$ konvergiert.

Beweis: Die Funktionen $(e_j \otimes e_\nu; j, \nu \in J)$ bilden ein ONS in $L_2(\mathcal{I}^2)$, und
$$\langle e_j \otimes e_\nu, k\rangle \;=\; \langle e_j, K e_\nu\rangle \;=\; \lambda_\nu^{-1} \langle e_j, e_\nu\rangle \;=\; \lambda_\nu^{-1}\, \delta_{\nu j} \qquad \forall\; j, \nu \in J\,.$$
Wegen der Besselschen Ungleichung folgt daher die Konvergenz von $\sum_{j\in J} |\lambda_j|^{-2}$, und daraus wiederum folgt dass die Reihe (6.2.1) normkonvergent ist. Der durch die Reihe gegebene Kern $\tilde{k}$ ist hermitesch (da

alle λ_j reell sind), und daher ist auch $m := k - \tilde{k}$ hermitesch. Wegen $\tilde{K}\,x = \sum_j \lambda_j^{-1}\,\langle e_j, x\rangle\, e_j$ folgt aus $x = \lambda\, M\, x$ dass

$$\langle e_\nu, x\rangle \;=\; \lambda\left(\langle e_\nu, K\,x\rangle \;-\; \sum_{j\in J} \lambda_j^{-1}\,\langle e_j, x\rangle\,\langle e_\nu, e_j\rangle\right) \;=\; \lambda\left(\langle K\,e_\nu, x\rangle \;-\; \lambda_\nu^{-1}\,\langle e_\nu, x\rangle\right) \;=\; 0 \qquad \forall\,\nu\in J\,.$$

Also liegt jedes solche x im Kern von $\tilde{K}$, oder anders ausgedrückt: Es gilt $M\,x = K\,x$. Gleichzeitig ist x aber orthogonal zu allen Eigenfunktionen von k und muss daher die Nullfunktion sein. Daher hat m keinen einzigen charakteristischen Wert und muss deshalb der Nullkern sein. Also folgt $\tilde{k} = k$, und hieraus folgen die übrigen Behauptungen. □

Der folgende Satz entspricht der Hauptachsentransformation hermitescher Matrizen:

Satz 6.2.5 *Sei k ein nicht-trivialer hermitescher L_2-Kern, und sei $(\lambda_j, e_j)_{j\in J}$ ein charakteristisches System für k. Dann gilt*

$$\langle y, K\,x\rangle \;=\; \sum_{j\in J} \lambda_j^{-1}\langle y, e_j\rangle\,\langle e_j, x\rangle \qquad \forall\; x, y\in L_2(\mathcal{I})\,.$$

Beweis: Folgt aus dem vorangegangenen Satz und der Stetigkeit des Skalarproduktes. □

Aufgabe 6.2.6 *Sei k ein nicht-trivialer hermitescher L_2-Kern, und sei $(\lambda_j, e_j)_{j\in J}$ ein charakteristisches System für k. Sei ferner λ ein regulärer Wert von k und $f\in L_2(\mathcal{I})$. Zeige dass dann die eindeutig bestimmte Lösung x von* (1.1.1) *die Darstellung*

$$x \;=\; f \;+\; \lambda\,\sum_{j\in J} (\lambda_j - \lambda)^{-1}\,\langle e_j, f\rangle\; e_j$$

hat, wobei im Falle eines unendlichen charakteristischen Systems $(\lambda_j, e_j)_{j\in J}$ die Reihe in der 2-Norm auf $L_2(\mathcal{I})$ konvergiert.

6.3 Positiv definite Kerne

Ähnlich wie bei Matrizen wollen wir jetzt die positive Definitheit von Kernen definieren und näher betrachten.

Definition 6.3.1 (Definitheit) *Sei k ein nicht-trivialer hermitescher L_2-Kern. Nach* Aufgabe 6.1.3 *ist die quadratische Form $\langle x, K\,x\rangle$ immer reell, und wir nennen k* positiv semidefinit*, falls*

$$\forall\; x\in L_2(\mathcal{I}): \qquad \langle x, K\,x\rangle \;\geq\; 0\,,$$

bzw. positiv definit*, falls*

$$\forall\; x\in L_2(\mathcal{I})\setminus\{0\}: \qquad \langle x, K\,x\rangle \;>\; 0\,.$$

Wir nennen k negativ definit bzw. negativ semidefinit*, wenn $-k$ positiv definit bzw. positiv semidefinit ist. Wenn k in keine dieser vier Kategorien fällt, wenn also die quadratische Form Vorzeichenwechsel hat, sprechen wir von einem* indefiniten *Kern.*

Im folgenden Satz beschränken wir uns auf positive (Semi-)Definitheit. Es ist aber offensichtlich, wie man in den übrigen Fällen den Typ der Definitheit bzw. Indefinitheit an den charakteristischen Werten feststellen kann.

Satz 6.3.2 *Sei k ein nicht-trivialer hermitescher L_2-Kern, und sei $(\lambda_j, e_j)_{j \in J}$ ein charakteristisches System für k. Genau dann ist k positiv semidefinit, wenn alle charakteristischen Werte λ_j positiv sind, und positiv definit, wenn zusätzlich die Funktionen (e_j) ein vollständiges Orthonormalsystem bilden, d. h., wenn außer der Nullfunktion kein $x \in L_2(\mathcal{I})$ zu allen e_j orthogonal ist.*

Beweis: Mit Satz 6.2.5 folgt

$$\forall\, x \in L_2(\mathcal{I}) : \qquad \langle x, K\, x \rangle \;=\; \sum_{j \in J} \lambda_j^{-1} \, |\langle e_j, x \rangle|^2 \,,$$

und deshalb ist k positiv semidefinit, falls alle λ_j positiv sind. Falls dagegen wenigstens ein λ_k negativ ist, folgt $\langle e_k, K\, e_k \rangle = \lambda_k^{-1} < 0$, und somit kann k nicht positiv semidefinit sein. Sei jetzt k als positiv semidefinit vorausgesetzt, sodass also alle λ_j positiv sind. Dann ist $\langle x, K\, x \rangle = 0$ genau dann, wenn x zu allen e_j orthogonal ist, und daher folgt die angegebene Charakterisierung der positiven Definitheit. $\square$

Bemerkung 6.3.3 *Wenn man den letzten Satz mit dem Analogon aus der Vorlesung* Lineare Algebra *vergleichen möchte, ist es wichtig zu beachten, dass hier per Definition die charakteristischen Werte gleich den Kehrwerten der von 0 verschiedenen Eigenwerte sind. Die Vollständigkeit des charakteristischen Systems ist gleichbedeutend damit, dass 0 kein Eigenwert von k ist.*

Kapitel 7

Unendliche lineare Gleichungssysteme

Neben den bereits vorgestellten Integralgleichungen mit stetigem Kern bzw. $\mathcal{L}_2$-*Kern* wollen wir jetzt eine Theorie gewisser linearer Gleichungssysteme mit Lösungen im Raum ℓ_p behandeln. Dabei ist p fest gegeben. Um nicht ständig Fallunterscheidungen machen zu müssen, soll hier stets $1 < p < \infty$ angenommen werden, und wir bezeichnen immer mit p' die eindeutig bestimmte Zahl mit $1/p' + 1/p = 1$. Auf die Sonderfälle $p = 1$ und $p = \infty$ gehen wir nur kurz in einigen Übungsaufgaben ein.

Der Fall $p = 2$ der folgenden Ergebnisse ist äquivalent zur Theorie der Integralgleichungen mit L_2-Kern, da $L_2(\mathcal{I})$ und ℓ_2 isometrisch isomorphe Hilberträume sind. Für andere Werte von p betrachten wir eine Klasse von Matrizen, welche ℓ_p in sich abbilden und weitere gute Eigenschaften haben. Trotzdem gelingt die Einführung der Fredholm-Determinante nur für $1 < p \leq 2$.

7.1 Bezeichnungen und Hilfsmittel

Wie bereits in der Einleitung definiert, sei ℓ_p die Menge aller Folgen $x = (x_j)_{j=1}^{\infty}$ mit Gliedern $x_j \in \mathbb{C}$, für welche die Reihe $\|x\|_p = \left(\sum_j |x_j|^p \right)^{1/p}$ konvergiert. Im Folgenden ist es sehr suggestiv, wenn wir uns eine Folge x als einen *Spaltenvektor von unendlicher Länge* vorstellen und unter x^T den entsprechenden *Zeilenvektor* verstehen – z. B. können wir dann definieren

$$\overline{x}^T y \ := \ \sum_{j=1}^{\infty} \overline{x_j}\, y_j \qquad \forall\, x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_p\,, \quad y = (y_1, y_2, \ldots) \in \ell_{p'}\,.$$

Auf Grund der *Hölderschen Ungleichung* konvergiert diese Reihe immer absolut, und es gilt

$$|\overline{x}^T y| \ \leq \ \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|\,|y_j| \ \leq \ \|x\|_p\, \|y\|_p' \qquad \forall\, x \in \ell_p\,, \quad y \in \ell_{p'}\,. \tag{7.1.1}$$

Ferner gibt es zu jedem $x \in \ell_p$ ein $y \in \ell_{p'}$ mit $\|y\|_{p'} = 1$, für welches in (7.1.1) das Gleichheitszeichen gilt.

Wie in Beispiel 1.2.12 sei M_p die Menge aller unendlichen Matrizen $A = [a_{jk}]$, für welche die in (1.2.2) definierte Norm $\|A\|_p$ endlich ist. Weiter schreiben wir für $x \in \ell_p$ und $A \in M_p$ auch $A\,x$ für die Folge $y = (y_j)_{j=1}^{\infty}$ mit

$$y_j \ := \ \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}\, x_k \qquad \forall\, j \geq 1\,.$$

Wir haben bereits gezeigt, dass jede Matrix $A \in M_p$ eine beschränkte lineare Abbildung von ℓ_p in sich definiert, so dass alle diese Reihen absolut konvergent sind, und es gilt $\|A\,x\|_p \le \|A\|_p\,\|x\|_p$ für alle $A \in M_p$ und $x \in \ell_p$. Für $A, B \in M_p$ bezeichnen wir die Matrix

$$C = [c_{jk}]\,, \qquad c_{jk} = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{j\nu}\, b_{\nu k} \qquad \forall\, j,k \in \mathbb{N}\,,$$

als *das Produkt von A und B* und schreiben natürlich dann auch $C = A\,B$. Dass die dabei auftretenden Reihen immer absolut konvergieren, ist Inhalt des nächsten Lemmas.

Aufgabe 7.1.1 *Sei $\mathbb{X}$ ein beliebiger Banachraum, und sei*

$$\ell_p(\mathbb{X}) = \{x = (x_1, x_2, \ldots) \,:\, x_k \in \mathbb{X}\,, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^p < \infty\,\}\,.$$

Zeige dass $\ell_p(\mathbb{X})$ mit der Norm

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^p \Big)^{1/p}$$

wieder ein Banachraum ist. Folgere hieraus, dass sowohl ℓ_p als auch M_p Banachräume sind.

Aufgabe 7.1.2 *Charakterisiere alle Diagonalmatrizen $A \in M_p$, sowie alle Diagonalmatrizen, welche beschränkte lineare Abbildungen von ℓ_p in sich definieren.*

Aufgabe 7.1.3 *Für $A = [a_{jk}]$ bezeichne A^T die transponierte Matrix. Zeige dass auch alle A mit $A^T \in M_{p'}$ beschränkte lineare Abbildungen von ℓ_p in sich definieren.* Anleitung: *Benutze dass zu jedem $x \in \ell_p$ ein $y \in \ell_{p'}$ mit $\|y\|_{p'} = 1$ existiert, für welches $\|A\,x\|_p = \overline{y}^T A\,x$ ist. Gib für $p \ne 2$ ein Beispiel an, für welches $\|A\|_p \ne \|A^T\|_{p'}$ ist.*

Lemma 7.1.4 *Für $1 < p \le 2$ gilt immer*

$$\|A^T\|_{p'} \le \|A\|_p \qquad \forall\ A \in M_p\,.$$

Insbesondere ist also $A^T \in M_{p'}$ für alle $A \in M_p$.

Beweis: Sei $b_j := (|a_{jk}|^p)_{k=1}^{\infty}$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Da $p'/p \ge 1$ ist, folgt mit der Dreiecksungleichung für die (p'/p)-Norm

$$\Big\| \sum_{j=1}^{\infty} b_j \Big\|_{p'/p} \le \sum_{j=1}^{\infty} \|b_j\|_{p'/p}\,.$$

Dies ist äquivalent zur Behauptung. □

Aufgabe 7.1.5 *Wir setzen M_1 gleich der Menge aller Matrizen A, für welche*

$$\|A\|_1 := \sum_{j=1}^{\infty} \sup_{k \ge 1} |a_{jk}| < \infty$$

ist, und definieren analog M_∞ als die Menge der A mit

$$\|A\|_\infty := \sup_{j \ge 1} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}| < \infty\,.$$

Zeige dass M_1 und M_∞ Banachräume sind, und dass alle $A \in M_1$, bzw. $\in M_\infty$ beschränkte lineare Operatoren auf ℓ_1 bzw. ℓ_∞ darstellen. Zeige dass das folgende Lemma auch für die Fälle $p = 1$ und $p = \infty$ gilt.

Lemma 7.1.6 *Für $A, B \in M_p$ und $x \in \ell_p$ konvergieren die Reihen für $C := A\,B$ alle absolut, und es gilt*

$$\|A\,B\|_p \;\le\; \|A\|_p\,\|B\|_p\,, \qquad C\,x \;=\; A\,(B\,x)\,.$$

Beweis: Aus der Definition der Norm auf M_p folgt, dass alle Zeilen von A zu $\ell_{p'}$ und alle Spalten von B zu ℓ_p gehören. Daraus folgt mit (7.1.1) die absolute Konvergenz der Reihen $c_{jk} = \sum_\nu a_{j\nu}\, b_{\nu k}$, für alle $j, k \in \mathbb{N}$. Sei $j \in \mathbb{N}$ fest gehalten, und sei b_j, beziehungsweise c_j, die j-te Zeile der Matrix B, beziehungsweise C. Nach Definition des Matrixproduktes ist c_j gleich dem Grenzwert der Linearkombinationen $\sum_{\nu=1}^{n} a_{j\nu}\, b_\nu$. Also folgt mit der Dreiecksungleichung und der Hölderschen Ungleichung

$$\|c_j\|_{p'} \;\le\; \sum_{\nu=1}^{\infty} |a_{j\nu}|\,\|b_\nu\|_{p'} \;\le \Big(\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_{j\nu}|^{p'}\Big)^{1/p'} \Big(\sum_{\nu=1}^{\infty} \|b_\nu\|_{p'}^{p}\Big)^{1/p} \;=\; \Big(\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_{j\nu}|^{p'}\Big)^{1/p'} \|B\|_p\,.$$

Hieraus folgt leicht die erste Behauptung, da $\|C\|_p = \big(\sum_j \|c_j\|_{p'}^{p}\big)^{1/p}$ ist. Der zweite Teil folgt leicht, da alle Reihen absolut konvergieren. □

Auf Grund des letzten Lemmas sind alle Potenzen von $A \in M_p$ ebenfalls in M_p, und daher konvergiert die Neumannsche Reihe für $|\lambda|\,\|A\|_p < 1$. Die entsprechenden Ergebnisse aus den vorangegangenen Kapiteln gelten also auch für diese Matrizen - Einzelheiten sind hier ausgelassen.

7.2 Omega-Zerlegungen von Matrizen

Wir wollen nun für gegebene $A \in M_p$, $b \in \ell_p$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ die Frage nach der (eindeutigen) Lösbarkeit der Gleichung

$$x \;=\; b \;+\; \lambda\,A\,x \tag{7.2.1}$$

untersuchen. Diese Gleichung hat genau die Form (1.0.1), mit $\mathbb{X} = \ell_p$, so dass wir Begriffe wie reguläre Werte, charakteristische Werte etc. weiter benutzen können. Wir nennen dann auch $x = \lambda\,A\,x$ die zugehörige homogene Gleichung, und $y = \lambda\,A^*\,y$, mit $A^* = \overline{A}^T$ und $y \in \ell_{p'}$, heißt die *adjungierte homogene Gleichung*. Beachte dass aus Aufgabe 7.1.3 folgt, dass A^* den Raum $\ell_{p'}$ in sich abbildet.

Ausgeschrieben bedeutet (7.2.1) genau, dass wir Folgen $x = (x_j)$ suchen, für welche die Gleichungen

$$x_j \;=\; b_j \;+\; \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}\,x_k \qquad \forall\; j \ge 1$$

erfüllt sind. Dabei spielt es eine wichtige Rolle, dass wir nur Folgen $x \in \ell_p$ als Lösungen akzeptieren, und dass vor allen Dingen auch $A \in M_p$ sein muss, da sonst die vorgestellten Ergebnisse nicht zu gelten brauchen, wie man z. B. an Hand der sogenannten Shiftmatrizen überprüfen kann; dieses sind die Matrizen A, deren Einträge alle verschwinden außer einer Folge von Einsen direkt oberhalb, oder unterhalb, der Diagonalen.

Genau wie bei Integraloperatoren kann man für ein $A \in M_p$ definieren, was man unter einer ω-Zerlegung von A versteht. Dabei sind Matrizen von endlichem Rang gerade solche $A \in M_p$, welche nur endlich viele linear unabhängige Zeilen haben. Allerdings ist es hier einfacher, die Existenz von ω-Zerlegungen zu beweisen: Für $A = [a_{jk}] \in M_p$ und $\nu \in \mathbb{N}$ seien

$$A_\nu \;=\; \left[\begin{array}{ccc|cc} & & & 0 & \dots \\ & \tilde{A}_\nu & & \vdots & \\ & & & 0 & \dots \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \\ & & & & \end{array}\right], \qquad \tilde{A}_\nu \;=\; \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\nu} \\ a_{21} & \dots & a_{2\nu} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & \dots & a_{\nu\nu} \end{bmatrix}.$$

Wir nennen $\tilde{A}_\nu$ auch die *Hauptuntermatrix* von A (oder von A_ν) der Größe ν. Die Menge der Matrizen der linken Form (bei festem ν) ist abgeschlossen bezüglich Addition und Multiplikation. Es ist klar, dass das Bild der Abbildung $x \mapsto A_\nu x$ von ℓ_p in sich endliche Dimension hat, dass also dieser Operator endlichen Rang besitzt. Außerdem ist für $R_\nu := A - A_\nu$

$$\|R_\nu\|_p \;=\; \left(\sum_{j=1}^{\nu} \Big(\sum_{k=\nu+1}^{\infty} |a_{jk}|^{p'} \Big)^{p/p'} \;+\; \sum_{j=\nu+1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|^{p'} \Big)^{p/p'} \right)^{1/p} \;:=\; \big(s_1(\nu) \;+\; s_2(\nu)\big)^{1/p'} .$$

Für $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\nu_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $s_2(\nu) < \varepsilon$ ist, falls nur $\nu \geq \nu_0$ ist. Wegen

$$s_1(\nu) \;\leq\; \sum_{j=1}^{\nu_0} \Big(\sum_{k=\nu+1}^{\infty} |a_{jk}|^{p'} \Big)^{p/p'} \;+\; \sum_{j=\nu_0+1}^{\nu} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|^{p'} \Big)^{p/p'} \;\leq\; \sum_{j=1}^{\nu_0} \Big(\sum_{k=\nu+1}^{\infty} |a_{jk}|^{p'} \Big)^{p/p'} \;+\; s_2(\nu_0)$$

können wir dann ν so groß wählen, dass $s_1(\nu) < 2\,\varepsilon$ wird. *Wenn $\omega > 0$ gegeben ist, dann ist also das Paar (A_ν, R_ν) für genügend große ν eine ω-Zerlegung von A.*

Aufgabe 7.2.1 *Untersuche, ob die letzte Aussage auch für die Grenzfälle $p = 1$ und $p = \infty$ gilt. Überlege weiter, ob sich dieses und die anderen Ergebnisse dieses Abschnittes auf die beiden Grenfälle übertragen lassen, wenn man sich auf Matrizen A beschränkt, für die $\|R_\nu\|_p$ eine Nullfolge ist.*

Seien jetzt $A \in M_p$, $\omega > 0$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| < \omega$ gegeben. Für $\nu \in \mathbb{N}$ seien A_ν, R_ν wie oben definiert, und ν sei so groß, dass $\|R_\nu\|_p < 1/\omega$ ist. Dann existiert $(I - \lambda\, R_\nu)^{-1} = I + \lambda\, L_\lambda$, wobei L_λ grundsätzlich durch die Neumannsche Reihe berechnet werden kann. Wir setzen $y = (I - \lambda\, R_\nu)\, x$ und stellen fest, dass (7.2.1) zur Gleichung

$$b \;=\; \big(I \;-\; \lambda\, B_\nu(\lambda)\big)\, y\,, \qquad B_\nu(\lambda) \;:=\; A_\nu\, (I + \lambda\, L_\lambda) \tag{7.2.2}$$

äquivalent ist. Die neue Matrix $B_\nu(\lambda)$ ist von endlichem Rang, da nur die ersten ν Zeilen nicht-trivial sind, wobei allerdings noch zu beachten ist, dass diese Zeilen von λ abhängen! Aus (7.2.2) folgt sofort $y_j = b_j$ für alle $j > \nu$. Setzt man dies ein, so erhält man ein neues Gleichungssystem in den endlich vielen Unbekannten $y_1, \ldots y_\nu$, was in der üblichen Weise gelöst werden kann. Bis auf die Berechnung von $x = (I + \lambda\, L_\lambda)\, y$ ist also die Gleichung (7.2.1) zu einem normalen linearen Gleichungssystem in endlicher Dimension äquivalent!

Offenbar gilt für $x, b \in \ell_p$ die Gleichung $x = b + \lambda\, A_\nu\, x$ genau dann, wenn $x_j = b_j$ ist für $j \geq \nu + 1$, während sonst

$$x_j \;=\; b_j \;+\; \lambda \sum_{k=1}^{\nu} a_{jk}\, x_k\,, \qquad j = 1, \ldots, \nu\,.$$

Aus diesem Grunde definieren wir

$$\det(I \;-\; \lambda\, A_\nu) \;:=\; \det(\, I \;-\; \lambda\, \tilde{A}_\nu)\ .$$

Wenn dann $A_\nu^n = [a_{jk}^{(\nu,n)}]$ die Potenzen von A_ν sind, und wenn $\sigma_n^{(\nu)}$ deren Spuren bezeichnen, dann ist $\sigma_n^{(\nu)}$ auch gleich der Spur der Matrix $\tilde{A}_\nu^n$, und wir setzen in Analogie zu Abschnitt 3.6:

1. Die Fredholmsche Determinante von A_ν sei gleich

$$d_\nu(\lambda) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, \frac{a_n^{(\nu)}}{n!}\, \lambda^n \ ,$$

mit $a_0^{(\nu)} = 1$ und

$$a_n^{(\nu)} \;=\; \det \begin{bmatrix} \sigma_1^{(\nu)} & n-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sigma_2^{(\nu)} & \sigma_1^{(\nu)} & n-2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n-1}^{(\nu)} & \sigma_{n-2}^{(\nu)} & \sigma_{n-3}^{(\nu)} & \dots & \sigma_1^{(\nu)} & 1 \\ \sigma_n^{(\nu)} & \sigma_{n-1}^{(\nu)} & \sigma_{n-2}^{(\nu)} & \dots & & \sigma_1^{(\nu)} \end{bmatrix} \qquad \forall\, n \geq 1\,.$$

Dann ist $d_\nu(\lambda) = \det(I - \lambda\,\tilde{A}_\nu) = \det(I - \lambda\,A_\nu)$, und es gilt außerdem für alle hinreichend kleinen Werte von $|\lambda|$:

$$d_\nu(\lambda) \;=\; \exp\Big[\; - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n\,\sigma_n^{(\nu)}/n \;\Big]\,.$$

Außerdem gilt die Rekursionsgleichung

$$a_{n+1}^{(\nu)} \;=\; n!\, \sum_{m=0}^{n} (-1)^m\, \frac{a_{n-m}^{(\nu)}}{(n-m)!}\, \sigma_{m+1}^{(\nu)} \qquad \forall\, n \geq 1\,.$$

2. Weiter sei $B_n^{(\nu)} = [b_{jk,n}^{(\nu)}]$, mit $b_{jk,n}^{(\nu)} = 0$ falls j oder k größer als ν ist, bzw.

$$b_{jk,n}^{(\nu)} \;=\; \det \begin{bmatrix} a_{jk}^{(\nu)} & n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{jk}^{(\nu,2)} & \sigma_1^{(\nu)} & n-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{jk}^{(\nu,3)} & \sigma_2^{(\nu)} & \sigma_1^{(\nu)} & n-2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{jk}^{(\nu,n)} & \sigma_{n-1}^{(\nu)} & \sigma_{n-2} & \sigma_{n-3}^{(\nu)} & \dots & \sigma_1^{(\nu)} & 1 \\ a_{jk}^{(\nu,n+1)} & \sigma_n^{(\nu)} & \sigma_{n-1}^{(\nu)} & \sigma_{n-2}^{(\nu)} & \dots & & \sigma_1^{(\nu)} \end{bmatrix} \qquad \forall\, n \geq 0\,, \quad 1 \leq j,k \leq \nu\,.$$

Zuletzt sei noch

$$D_\lambda^{(\nu)} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, \frac{\lambda^n}{n!}\, B_n^{(\nu)}\;.$$

Dann gelten die Gleichungen

$$B_n^{(\nu)} \;=\; a_n^{(\nu)}\,A_\nu \;-\; n\,A_\nu\,B_{n-1}^{(\nu)} \;=\; a_n^{(\nu)}\,A_\nu \;-\; n\,B_{n-1}^{(\nu)}\,A_\nu\,,$$

$$D_\lambda^{(\nu)} \;=\; d_\nu(\lambda)\,A_\nu \;+\; \lambda\,A_\nu\,D_\lambda^{(\nu)} \;=\; d_\nu(\lambda)\,A_\nu \;+\; \lambda\,D_\lambda^{(\nu)}\,A_\nu\,.$$

Setzt man jetzt $L_\lambda^{(\nu)} = A_\nu\,(I - \lambda\,A_\nu)^{-1}$, falls $d_\nu(\lambda) \neq 0$ ist, dann ist $D_\lambda^{(\nu)} = d_\nu(\lambda)\,L_\lambda^{(\nu)}$, und $I + \lambda\,L_\lambda^{(\nu)} = (I - \lambda\,A_\nu)^{-1}$.

Da die Matrix A_ν für $\nu \to \infty$ gegen A konvergiert, könnte man versucht sein, auch in den Größen $d_\nu(\lambda)$ etc. den entsprechenden Grenzübergang durchzuführen. Dies scheitert aber, da die Spur $\sigma^{(\nu)} = \sigma_1^{(\nu)}$ i. A. keinen Grenzwert hat (weil eben A keine Spur zu besitzen braucht). Andererseits liegt die Bedeutung der Funktion $d_\nu(\lambda)$ hauptsächlich darin, dass ihre Nullstellen genau die charakteristischen Werte von A_ν sind, und deshalb werden wir im nächsten Abschnitt eine andere (ganze) Funktion mit denselben Nullstellen einführen, in der aber die Spur von A_ν nicht mehr auftritt, und die deshalb einen Grenzwert besitzt, wenn $\nu \to \infty$ geht.

7.3 Die Fredholm-Determinante für Matrizen

Genau wie bei L_2-Kernen scheitert die Definition einer Fredholm-Determinante für allgemeine Matrizen $A \in M_p$ daran, dass ein solches A im Allgemeinen keine Spur besitzt. Die Übertragung der Definition für die modifizierte Fredholm-Determinante setzt voraus, dass wenigstens die Potenzen A^n, mit $n \geq 2$, Spuren besitzen. Wie man am Beispiel von Diagonalmatrizen sieht, ist dies im Allgemeinen nicht der Fall falls $p > 2$ ist. **Daher setzen wir im Folgenden immer voraus dass**

$$1 \; < \; p \; \leq \; 2\,. \tag{7.3.1}$$

Aufgabe 7.3.1 *Sei $p > 2$ beliebig gegeben. Finde eine Diagonalmatrix $D \in M_p$, für welche die Potenz D^n genau dann eine Spur besitzt, wenn $n \geq p$ ist. Dies zeigt, dass im nächsten Lemma die Voraussetzung* (7.3.1) *notwendig ist.*

Aufgabe 7.3.2 *Zeige, dass die Menge der Matrizen $A \in M_p$, für welche $\sigma(A)$ existiert, ein Unterraum von M_p ist, und dass die Abbildung $A \mapsto \sigma(A)$ auf diesem Unterraum linear ist. Überlege, ob der Unterraum abgeschlossen ist.*

Lemma 7.3.3 *Sei p wie in* (7.3.1). *Für $A, B \in M_p$ besitzt das Produkt $A\,B$ eine Spur, und es gilt*

$$|\sigma(A\,B)| \;\leq\; \|A\|_p \; \|B^T\|_{p'} \;\leq\; \|A\|_p \; \|B\|_p\,.$$

Insbesondere gilt für die Potenzen A^n die Ungleichung $|\sigma(A^n)| \leq \|A\|_p^n$ für alle $n \geq 2$.

Beweis: Durch wiederholte Anwendung der Hölderschen Ungleichung folgt

$$|\sigma(A\,B)| \;\leq\; \sum_{j,k=1}^{\infty} |a_{jk}\, b_{kj}| \;\leq\; \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|^{p'} \Big)^{1/p'} \; \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |b_{kj}|^{p} \Big)^{1/p} \;\leq\; \|A\|_p \; \|B^T\|_{p'}\,,$$

und hieraus folgt die Behauptung mit Lemma 7.1.4. □

Aufgabe 7.3.4 (Stetigkeit des Produktes und der Spurabbildung) *Sei p wie in* (7.3.1), *und seien $A_n, B_n, A, B \in M_p$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeige: Wenn im Sinne der Norm auf M_p gilt*

$$\lim_{n\to\infty} A_n \;=\; A\,, \qquad \lim_{n\to\infty} B_n \;=\; B\,,$$

dann folgt

$$\lim_{n\to\infty} A_n\, B_n \;=\; A\,B\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \sigma(A_n\, B_n) \;=\; \sigma(A\,B)\,.$$

Definition 7.3.5 *Sei p wie in* (7.3.1), *sei $A \in M_p$, und seien σ_n, für $n \geq 2$, die Spuren der Potenzen $A^n = [a_{jk}^{(n)}]$, die nach* Lemma 7.3.3 *immer existieren. Wir setzen dann $\alpha_0 = 1$ und*

$$\alpha_n \;=\; \det \begin{bmatrix} 0 & n-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sigma_2 & 0 & n-2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n-1} & \sigma_{n-2} & \sigma_{n-3} & \dots & 0 & 1 \\ \sigma_n & \sigma_{n-1} & \sigma_{n-2} & \dots & & 0 \end{bmatrix} \qquad \forall\, n \geq 1\,,$$

sowie $\tilde{B}_n = [\tilde{b}_{jk,n}]$, *mit*

$$\tilde{b}_{jk,n} \;=\; \det \begin{bmatrix} a_{jk} & n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{jk}^{(2)} & 0 & n-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{jk}^{(3)} & \sigma_2 & 0 & n-2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{jk}^{(n)} & \sigma_{n-1} & \sigma_{n-2} & \sigma_{n-3} & \dots & 0 & 1 \\ a_{jk}^{(n+1)} & \sigma_n & \sigma_{n-1} & \sigma_{n-2} & \dots & & 0 \end{bmatrix} \qquad \forall\, n \geq 0\,, \quad j,k \geq 1\,.$$

Beachte, dass diese Audrücke mit $a_n^{(\nu)}$ *bzw.* $b_{jk,n}^{(\nu)}$ *aus dem vorigen Abschnitt übereinstimmen, falls* $\sigma_1 = 0$ *ist. Mit Hilfe dieser Größen definieren wir dann*

$$\tilde{d}(\lambda) \;=\; \tilde{d}_A(\lambda) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \,\frac{\alpha_n}{n!}\, \lambda^n\,, \qquad \tilde{D}_\lambda \;=\; \tilde{D}_{A,\lambda} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \,\frac{\lambda^n}{n!}\, \tilde{B}_n\,, \tag{7.3.2}$$

wobei die Konvergenz dieser Reihen noch zu untersuchen ist.

Aufgabe 7.3.6 *Sei* p *wie in* (7.3.1). *Zeige mit dem Entwicklungssatz für Determinanten dass*

$$\alpha_{n+1} \;=\; n! \sum_{m=1}^{n} (-1)^m \,\frac{\alpha_{n-m}}{(n-m)!}\, \sigma_{m+1} \qquad \forall\, n \geq 0$$

sowie

$$\tilde{B}_n \;=\; \alpha_n\, A \;-\; n\, A\, \tilde{B}_{n-1} \;=\; \alpha_n\, A \;-\; n\, \tilde{B}_{n-1}\, A \qquad \forall\, n \geq 1$$

gilt, wobei die erste Identität übrigens genau zu (3.3.6) *analog ist, wenn* $\sigma_1 = 0$ *ist.*

Im Folgenden betrachten wir zu einer Matrix $A \in M_p$ wieder die im vorausgegangenen Abschnitt eingeführten Approximierenden A_ν, welche natürlich alle in M_p liegen, und wollen zunächst untersuchen, wie im Fall $A = A_\nu$ die hier definierten Größen mit $d_\nu(\lambda)$ und $D_\lambda^{(\nu)}$ zusammenhängen.

Lemma 7.3.7 *Sei* $\nu \in \mathbb{N}$ *gegeben. Falls* A *so ist, dass* $A = A_\nu$ *gilt, dann sind die Reihen* (7.3.2) *für alle* $\lambda \in \mathbb{C}$ *konvergent, und es gilt*

$$\tilde{d}(\lambda) \;=\; \mathrm{e}^{\sigma_1 \lambda}\, d_\nu(\lambda)\,, \qquad \tilde{D}_\lambda \;=\; \mathrm{e}^{\sigma_1 \lambda}\, D_\lambda^{(\nu)}\,.$$

Insbesondere ist in diesem Fall $I - \lambda\, A$ *genau dann invertierbar, wenn* $\tilde{d}(\lambda) \neq 0$ *ist, und es gilt die Gleichung*

$$L_\lambda \;:=\; A\,(I - \lambda\, A)^{-1} \;=\; \tilde{d}(\lambda)^{-1}\, \tilde{D}_\lambda\,.$$

Beweis: Aus der ersten Rekursion in Aufgabe 7.3.6 folgt für alle $A \in M_p$ (durch formales Differenzieren der Potenzreihe und Koeffizientenvergleich) dass

$$\frac{\tilde{d}(\lambda)'}{\tilde{d}(\lambda)} \;=\; -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n\, \sigma_{n+1} \tag{7.3.3}$$

ist, und hieraus folgt der erste Teil der Behauptung. Wegen $\tilde{B}_0 = A$ folgt aus der zweiten Rekursion dass

$$\tilde{D}_\lambda \;=\; \tilde{d}(\lambda)\, A \;+\; \lambda\, A\, \tilde{D}_\lambda \;=\; \tilde{d}(\lambda)\, A \;+\; \lambda\, \tilde{D}_\lambda\, A\,,$$

und durch Vergleich mit den entsprechenden Identitäten für $D_\lambda^{(\nu)}$ folgt der Rest der Behauptungen. □

Lemma 7.3.8 *Für beliebiges $A \in M_p$ haben die beiden Reihen in* (7.3.2) *denselben Konvergenzradius. Beide Reihen konvergieren mindestens für diejenigen $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| \, \|A\|_p < 1$.*

Beweis: Der erste Teil der Behauptung ergibt sich aus der zweiten Beziehung in Aufgabe 7.3.6. Wegen (7.3.3) folgt die formale Gleichung

$$\tilde{d}(\lambda) \;=\; \exp\,\Big(\;-\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sigma_n\,\lambda^n}{n}\;\Big)\,, \tag{7.3.4}$$

und da $|\sigma_n| \;\le\; \|A\|_p^n$ ist, folgt die Konvergenz dieser Reihe für $|\lambda| \, \|A\|_p \;<\; 1$. Also ist $\tilde{d}(\lambda)$ in dieser Kreisscheibe holomorph, und daher ist auch seine Potenzreihe dort konvergent. Die Konvergenz der zweiten Reihe folgt wieder aus Aufgabe 7.3.6. □

Aufgabe 7.3.9 *Sei $\mu \in \mathbb{N}$ gegeben. Überlege, wie man die Definition von $\tilde{d}(\lambda)$ so abwandeln kann, dass die Spuren σ_k für $1 \le k \le \mu$ nicht auftreten, und dass sich die Nullstellen von $\tilde{d}(\lambda)$ (innerhalb des Konvergenzkreises der Potenzreihe) nicht ändern.* Anleitung: *Beachte* (7.3.4).

Satz 7.3.10 *Für alle $A \in M_p$ haben die Potenzreihen für $\tilde{d}(\lambda)$ und $\tilde{D}_\lambda$ beide unendlichen Konvergenzradius, und es gilt die Gleichung*

$$\tilde{D}_\lambda \;=\; \tilde{d}(\lambda)\,A \;+\; \lambda\,A\,\tilde{D}_\lambda \;=\; \tilde{d}(\lambda)\,A \;+\; \lambda\,\tilde{D}_\lambda\,A\,. \tag{7.3.5}$$

Beweis: Es genügt, die Behauptung über den Konvergenzradius zu zeigen, da (7.3.5) dann aus Aufgabe 7.3.6 folgt. Sei $\omega > 0$, und sei $\nu \in \mathbb{N}$ so, dass $(A_\nu, R_\nu = A - A\nu)$ eine ω-Zerlegung von A bilden, was immer richtig ist, wenn nur $\|R_\nu\|_p < 1/\omega$ ist. Dann ist die Matrix

$$B_\nu(\lambda) \;=\; A_\nu\,(I - \lambda\,R_\nu)^{-1} \;=\; A_\nu\,(I + \lambda\,L_\lambda)$$

für $|\lambda| < \omega$ durch die Neumannsche Reihe definiert und folglich in dieser Kreissscheibe holomorph. Man rechnet leicht nach, dass gilt

$$I \;-\; \lambda\,A \;=\; \big(I \;-\; \lambda\,B_\nu(\lambda)\big)\,(I \;-\; \lambda\,R_\nu) \qquad (|\lambda| < \omega)\,. \tag{7.3.6}$$

Sei jetzt $\mu > \nu$. Dann sind $(A_\nu, R_{\nu,\mu} := A_\mu - A_\nu)$ eine ω-Zerlegung von A_μ, und folglich gelten die obigen Aussagen auch, wenn A bzw. R_ν durch A_μ bzw. $R_{\nu,\mu}$ ersetzt werden. Insbesondere folgt aus (7.3.6) mit Hilfe des Determinantenmultiplikationsssatzes, bei entsprechender Definition von $B_{\nu,\mu}(\lambda)$, dass

$$\det(I \;-\; \lambda\,A_\mu) \;=\; \det\big(I \;-\; \lambda\,B_{\nu,\mu}(\lambda)\big)\,\det(I \;-\; \lambda\,R_{\nu,\mu}) \qquad (|\lambda| < \omega)\,.$$

Durch Multiplikation mit $\exp(\lambda\sigma(A_\mu)$ erhalten wir hieraus die Gleichung

$$\tilde{d}_{A_\mu}(\lambda) \;=\; \mathrm{e}^{\lambda\sigma(A_\nu)}\,\det\big(I \;-\; \lambda\,B_{\nu,\mu}(\lambda)\big)\,\tilde{d}_{R_{\nu,\mu}}(\lambda) \qquad (|\lambda| < \omega)\,. \tag{7.3.7}$$

Da nur die ersten ν Zeilen von $B_{\nu,\mu}(\lambda)$ nicht-trivial sind, ist

$$\det\big(I \;-\; \lambda\,B_{\nu,\mu}(\lambda)\big) \;=\; \det\big(I \;-\; \lambda\,\tilde{B}_{\nu,\mu}(\lambda)\big)\,,$$

wobei $\tilde{B}_{\nu,\mu}(\lambda)$ die Hauptuntermatrix von $B_{\nu,\mu}(\lambda)$ der Größe ν ist. Daher existiert der Grenzwert für $\mu \to \infty$ dieser Determinante und ist gleich $\det(I \;-\; \lambda\,\tilde{B}_\nu(\lambda))$, wobei $\tilde{B}_\nu(\lambda)$ die die Hauptuntermatrix von $B_\nu(\lambda)$ der Größe ν bezeichnet. Da auch die übrigen Funktionen in (7.3.7) für $\mu \to \infty$ gegen die entsprechenden Größen konvergieren, folgt

$$\tilde{d}_A(\lambda) \;=\; \mathrm{e}^{\lambda\sigma(A_\nu)}\,\det\big(I \;-\; \lambda\,\tilde{B}_\nu(\lambda)\big)\,\tilde{d}_{R_\nu}(\lambda) \qquad (|\lambda| < \omega)\,.$$

Insbesondere ist also die linke Seite in der angegebenen Kreisscheibe holomorph, und deshalb ist der Konvergenzradius der Potenzreihe für $\tilde{d}_A(\lambda)$ mindestens gleich ω. Da diese Zahl aber beliebig groß sein kann, folgt die Behauptung. □

Bemerkung 7.3.11 *Der obige Beweis für die Konvergenz der Reihen für $\tilde{d}(\lambda)$ und $\tilde{D}_\lambda$ gibt keine Information über die Ordnung dieser ganzen Funktionen. Für $p = 2$ kann man, analog wie bei L_2-Kernen, zeigen dass die Ordnung nicht größer als 2 ist. Für andere p ist dies allerdings nicht klar.*

Aufgabe 7.3.12 *Überlege, ob die Einführung einer Fredholm-Determinante auch für $p = 1$ gelingt.* Beachte speziell, dass in diesem Fall sogar die Spur $\sigma_1 = \sigma(A)$ existiert!

Mit Hilfe dieser Ergebnisse kann man jetzt relativ leicht zeigen, dass die beiden Fredholmschen Sätze 3.3.9 und 3.4.2 auch für die Matrixgleichung (7.2.1) gelten. Wir lassen die Einzelheiten hier aus und formulieren nur folgende Zusammenfassung dieser Resultate:

Satz 7.3.13 *Für $A \in M_p$, $b \in \ell_p$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ ist die Gleichung* (7.2.1) *genau dann eindeutig lösbar, wenn $\tilde{d}(\lambda) \neq 0$ ist. Wenn dies so ist, dann ist die Lösung gegeben durch*

$$x \;=\; b \;+\; \lambda\, L_\lambda\, b\,, \qquad L_\lambda \;=\; \tilde{d}(\lambda)^{-1}\, \tilde{D}_\lambda\,.$$

Wenn dagegen $\tilde{d}(\lambda) = 0$ ist, dann hat der Lösungsraum der homogenen Gleichung eine positive endliche Dimension, und die inhomogene Gleichung ist genau dann lösbar, wenn b zu allen Lösungen der adjungierten homogenen Gleichung orthogonal ist.

Aufgabe 7.3.14 *Zeige: Wenn man sich für $p > 2$ auf Matrizen A beschränkt, für welche $A^T \in M_{p'}$ ist, kann man die Ergebnisse dieses Abschnittes auf diese Situation übertragen.*

Kapitel 8

Verschiedenes

Während die Theorie der Integralgleichungen zweiter Art weitgehend abgeschlossen ist, gibt es z. B. für Gleichungen erster Art, oder auch für sogenannte singuläre Gleichungen, keine voll befriedigende Theorie. Wir beschränken uns daher auf einige Bemerkungen und Beispiele.

8.1 Integralgleichungen erster Art

Definition 8.1.1 *Für $k \in L_2(\mathcal{I}^2)$ und $f \in L_2(\mathcal{I})$ heißt die Gleichung $f = K\,x$, oder ausgeschrieben*

$$f(s) \;=\; \int_a^b k(s,t)\,x(t)\,dt \qquad \forall\ s \in \mathcal{I}\,,$$

eine Fredholmsche Integralgleichung erster Art *für die unbekannte Funktion $x \in L_2(\mathcal{I})$. Wenn k sogar ein Volterrakern ist, spricht man auch von einer* Volterraschen Gleichung erster Art*.*

Für solche Gleichungen geben wir nur kurz folgende mögliche Strategien an:

- Eine Volterrasche Integralgleichung erster Art kann, bei genügend glattem Kern und linker Seite, in eine von zweiter Art verwandelt werden: Differenzieren von

  $$f(s) \;=\; \int_a^s k(s,t)\,x(t)\,dt$$

  ergibt nach Division durch $k(s,s)$ (falls $\neq 0$) die Gleichung

  $$\frac{f'(s)}{k(s,s)} \;=\; x(s) \;+\; \int_a^s \frac{k_s(s,t)}{k(s,s)}\,x(t)\,dt\,, \qquad k_s(s,t) \;:=\; \frac{\partial}{\partial s}\,k(s,t)\,,$$

  welche dann z. B. durch die Neumannsche Reihe gelöst werden kann.

- Wenn der Kern einer Fredholmschen Gleichung in der Form $k = \sum_1^\infty k_j\,e_j \otimes e_j$, mit einem vollständigen ONS $(e_j, j \in \mathbb{N})$ und Zahlen $k_j \in \mathbb{C}$, gegeben ist, wobei die Reihe normkonvergent ist, dann ist $f = K\,x$ genau dann, wenn $f = \sum_1^\infty k_j\,\langle e_j, x\rangle\,e_j$ ist. Dies bedeutet, dass $k_j\,\langle e_j, x\rangle = \langle e_j, f\rangle$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gelten muss. Also sind die allgemeinen Fourierkoeffizienten von x durch die von f ausgedrückt, und man erhält die Lösung in Form einer allgemeinen Fourierreihe. Offen bleibt dabei die Frage der Konvergenz der Reihe.

8.2 Singuläre Integralgleichungen

Definition 8.2.1 *Solche Integralgleichungen, bei denen das Intervall $\mathcal{I}$ unendliche Länge hat, oder bei denen der Kern nicht in $L_2(\mathcal{I}^2)$ ist, heißen* singulär.

Auch hier wollen wir nur zwei Beispiele solcher Gleichungen betrachten:

- **Die Fourier-Transformation:** Seien $\mathcal{I} = \mathbb{R}$ und $\sqrt{2\pi}\, k(s,t) := \mathrm{e}^{ist} = \cos(st) + i\,\sin(st)$. Dann bezeichnet man die Abbildung
$$x \;\mapsto (K\,x)(s) \;=\; y(s) \;:=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ist}\, x(t)\, dt \tag{8.2.1}$$
als *Fourier-Transformation*, und nennt dann auch y die *Fourier-Transformierte von x*. Wenn umgekehrt y gegeben ist, dann ist (8.2.1) eine singuläre Integralgleichung zur Bestimmung von x. Eine Besonderheit ist hier, dass das Integral in (8.2.1) nicht für alle $x \in L_2(\mathcal{I})$ existiert. Wir wollen aber trotzdem zeigen, dass die Fourier-Transformation auf ganz $L_2(\mathcal{I})$ definiert werden kann. Dazu betrachten wir die Funktionen
$$\Psi_\nu(s) \;:=\; \frac{(-1)^\nu}{\sqrt{2^\nu\, \nu! \sqrt{\pi}}}\, \mathrm{e}^{s^2/2}\, \frac{d^\nu}{ds^\nu}\, \mathrm{e}^{-s^2} \qquad \forall\, \nu \in \mathbb{N}_0\,.$$
Man sieht, dass $\mathrm{e}^{s^2/2}\,\Psi_\nu(s)$ ein Polynom vom Grad ν ist (das sogenannte *Hermitesche Polynom*) und kann zeigen, dass die Funktionen $\Psi_\nu(s)$ ein vollständiges ONS in $L_2(\mathbb{R})$ sind. Mit einer längeren Rechnung folgt dass die Fourier-Transformation von $\Psi_\nu(s)$ gleich $i^\nu\,\Psi_\nu(s)$ ist. Also ist $\Psi_\nu(s)$ Eigenfunktion der Fouriertransformation zum Eigenwert i^ν. Jedes $x \in L_2(\mathbb{R})$ kann in seine allgemeine Fourierreihe nach den $\Psi_\nu(s)$ entwickelt werden, und die Fouriertransformation von x kann durch gliedweises Integrieren dieser Entwicklung definiert werden. Daraus ergibt sich, dass die Fouriertransformation eine Isometrie auf $L_2(\mathbb{R})$ ist („Satz von Plancherel“), und außerdem erhält man die Umkehrformel
$$x(s) \;:=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ist}\, y(t)\, dt\,.$$

- **Der Cauchysche Hauptwert:** Sei jetzt wieder $\mathcal{I} = [a,b]$, und sei $t_0 \in (a,b)$. Sei f auf $\mathcal{I} \setminus \{t_0\}$ definiert. Wenn f für jedes $\varepsilon > 0$ über die Intervalle $[a, t_0 - \varepsilon]$ und $[t_0 + \varepsilon, b]$ integrierbar ist, und wenn
$$\ell \;:=\; \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_a^{t_0 - \varepsilon} f(t)\, dt \;+\; \int_{t_0+\varepsilon}^b f(t)\, dt \right)$$
existiert, dann nennt man ℓ den *Cauchyschen Hauptwert* des Integrals von f über $\mathcal{I}$ und schreibt zum Beispiel
$$\ell = \fint_a^b f(t)\, dt\,,$$
wobei aus dem Zusammenhang klar sein muss, welche Stelle t_0 betrachtet wird. Wir definieren jetzt speziell
$$(K\,x)(s) \;=\; \frac{1}{\pi} \fint_0^\pi \frac{\sin t}{\cos t - \cos s}\, x(t)\, dt \qquad \forall\; s \in \mathcal{I} := [0, \pi]\,.$$
Um zu sehen, dass dies eine Transformation von $L_2(\mathcal{I})$ in sich ist, betrachten wir die beiden vollständigen ONS $(e_j; j \in \mathbb{N})$ und $(f_j; j \in \mathbb{N}_0)$, mit $f_0(s) \equiv 1/\sqrt{\pi}$ und
$$e_j(s) \;=\; \sqrt{2/\pi}\, \sin(js)\,, \qquad f_j(s) \;=\; \sqrt{2/\pi}\, \cos(js) \qquad \forall\; j \ge 1\,.$$
Man findet dass $K\,e_j = -f_j$ ist, für alle $j \in \mathbb{N}$. Da man jedes $f \in L_2(0,\pi)$ in eine Reihe $f = \sum \alpha_j\, e_j$ entwickeln kann, welche in der Norm auf diesem Raum konvergiert, setzt man $K\,f := \sum \alpha_j\, K\,e_j = -\sum \alpha_j\, f_j$ und erhält dadurch eine stetige und injektive, aber nicht surjektive Abbildung des Raums in sich. Die Gleichung $y = K\,x$ ist genau dann lösbar, wenn y zu f_0 orthogonal ist, und die Lösung ist dann eindeutig bestimmt.

Index