Vorlesungsmanuskript zu

Topologie

Werner Balser
Institut für Angewandte Analysis

Wintersemester 2008/09

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Topologische Räume

Topologische Räume sind grob gesprochen nicht-leere Mengen, für welche geregelt ist, welche ihrer Teilmengen offen heißen sollen. Allein mit Hilfe dieser offenen Mengen kann man dann Konvergenz von Folgen sowie Stetigkeit von Funktionen definieren. Bevor wir dies tun, wollen wir aber als wichtigste Beispiele metrische Räume kennenlernen, die dann auch später noch genauer untersucht werden sollen.

1.1 Normierte und metrische Räume

Definition 1.1.1 (Normierte Räume) *Sei X ein beliebiger Vektorraum über $\mathbb{K}$, wobei $\mathbb{K}$ immer $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ bedeuten soll. Eine Abbildung*

$$\|\cdot\| : \quad X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \|x\|$$

heißt eine Norm *auf X, wenn folgendes gilt:*

(N1) $\forall\, x \in X : \quad \|x\| \geq 0\,; \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$ (Positive Definitheit)

(N2) $\forall\, x \in X \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{K} : \quad \|\alpha\, x\| = |\alpha|\, \|x\|$ (Homogenität)

(N3) $\forall\, x_1, x_2 \in X : \quad \|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$ (Dreiecksungleichung)

Das Paar $(X, \|\cdot\|)$ heißt dann ein normierter Raum.

Beispiel 1.1.2 *Für $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{K}^n$ und $1 \leq p \leq \infty$ sei*

$$\|x\|_p \;=\; \begin{cases} \Big(|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p\Big)^{1/p} & (1 \leq p < \infty), \\[2ex] \sup\,\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} & (p = \infty). \end{cases}$$

Dadurch ist für jedes feste p eine Norm auf $\mathbb{K}^n$ definiert; für $p < \infty$ ist die Dreiecksungleichung äquivalent zur Minkowskischen Ungleichung. *Wir nennen $\|\cdot\|_p$* die p-Norm auf $\mathbb{K}^n$, *und sprechen für $p = 2$ auch von der* euklidischen Norm.

Beispiel 1.1.3 *Sei $[a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall, wobei $a < b$ sei, und sei $C[a, b]$ die Menge aller* *dort stetigen Funktionen mit Werten in $\mathbb{K}$. Für $f \in C[a,b]$ sei*

$$\|f\|_p \;=\; \begin{cases} \Big(\displaystyle\int_a^b |f(x)|^p dx \Big)^{1/p} & (1 \le p < \infty), \\[2ex] \sup\{|f(x)| : \; a \le x \le b\} & (p = \infty). \end{cases}$$

Dies sind Normen auf $C[a,b]$, für jedes solche p. Warum erhält man aber keine Norm, wenn man statt der stetigen Funktionen die Menge aller auf $[a,b]$ Riemann- oder auch aller Lebesgue-integrierbaren Funktionen betrachtet?

Definition 1.1.4 (Metrischer Raum) *Sei X eine nicht-leere Menge. Als* Metrik auf X *bezeichnen wir eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$, für die folgende Axiome gelten:*

(M1) $\forall\, x,y \in X : \quad d(x,y) \;\ge 0\,, \qquad d(x,y) \;=\; 0 \;\iff\; x = y$ (Positive Definitheit)

(M2) $\forall\, x,y \in X : \quad d(x,y) \;=\; d(y,x)$ (Symmetrie)

(M3) $\forall\, x,y,z \in X : \quad d(x,z) \;\le\; d(x,y) \;+\; d(y,z)$ (Dreiecksungleichung)

Das Paar (X,d) heißt dann auch ein metrischer Raum.

Beispiel 1.1.5 *Wenn $(X, \|\cdot\|)$ ein beliebiger normierter Raum ist, dann ist durch $d(x,y) = \|x-y\|$ für alle $x,y \in X$ eine Metrik auf X gegeben; wir sprechen dann* von der zur Norm gehörigen Metrik. *Für $X = \mathbb{K}^n$, $1 \le p < \infty$ und $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $y = (y_1, \ldots, y_n)^T \in \mathbb{K}^n$ ist also*

$$d_p(x,y) \;=\; \left(\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^p \right)^{1/p}$$

eine Metrik. Für $p = 2$ spricht man auch von der euklidischen Metrik. *Für $p = \infty$ erhält man durch*

$$d_\infty(x,y) \;=\; \sup_{1 \le j \le n} \; |x_j - y_j|$$

ebenfalls eine Metrik auf $\mathbb{K}^n$. Dabei gilt $\lim_{p\to\infty} d_p(x,y) = d_\infty(x,y)$ für alle $x,y \in \mathbb{K}^n$. Jeder normierte Raum ist also auch ein metrischer Raum, aber nicht umgekehrt, denn ein metrischer Raum ist im Allgemeinen kein Vektorraum, und wenn doch, dann braucht die Metrik nicht zu einer Norm zu gehören.

Beispiel 1.1.6 *Für beliebiges nicht-leeres X und $x,y \in X$ ist durch die Festsetzung*

$$d(x,y) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x = y\;, \\ 1 & \text{falls} \quad x \ne y\;, \end{cases}$$

eine Metrik auf X gegeben, die als die diskrete Metrik *bezeichnet wird.*

Beispiel 1.1.7 *Eine beliebige nicht-leere Teilmenge U eines metrischen Raumes (X,d) ist offenbar selber wieder metrischer Raum, wenn man die Abbildung d auf $U \times U$ einschränkt. Beachte, dass dies nicht für normierte Räume $(X, \|\cdot\|)$ gilt, da eine Teilmenge $U \subset X$ im Allgemeinen kein Vektorraum ist.*

Aufgabe 1.1.8 (Dreiecksungleichung nach unten) *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Zeige:*

$$\forall\, x,y,z \in X : \quad \big| d(x,y) - d(y,z) \big| \;\le\; d(x,z)\,.$$

Aufgabe 1.1.9 (Vierecksungleichung) *Zeige: In jedem metrischen Raum* (X, d) *gilt für beliebige vier Punkte* x_1, x_2, x_3, x_4 *immer*

$$\left|d(x_1, x_2) \; - \; d(x_3, x_4)\right| \; \leq \; d(x_1, x_3) \; + \; d(x_2, x_4)\,.$$

Aufgabe 1.1.10 *Sei* $X \subset \mathbb{R}^2$ *sternförmig bezüglich des Nullpunktes, und sei* $d(x, y)$ *für* $x, y \in \mathbb{R}^2$ *gleich dem normalen euklidischen Abstand, falls* x *und* y *linear abhängig sind, und im anderen Fall gleich der Summe der euklidischen Abstände zwischen* x *und* 0 *sowie* y *und* 0. *Zeige: Dies ist eine Metrik auf* X. *Begründe, warum dieser metrische Raum im englischen Sprachraum auch* french railroad space *genannt wird.*

Aufgabe 1.1.11 *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum, wobei die Menge* X *gleichzeitig ein Vektorraum über* $\mathbb{K}$ *ist. Wir nennen die Metrik* d translationsinvariant, *falls für alle* $x, y, z \in X$ *gilt* $d(x+z, y+z) = d(x, y)$, *und* homogen, *falls für alle* $x, y \in X$ *und* $\lambda \in \mathbb{K}$ *gilt* $d(\lambda\, x, \lambda\, y) = |\lambda|\, d(x, y)$. *Zeige: Genau dann gibt es eine Norm auf* X, *für welche* d *die zugehörige Metrik ist, wenn* d *translationsinvariant und homogen ist. Finde für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *eine Metrik auf* $\mathbb{R}^n$, *bei der dies nicht der Fall ist.*

Aufgabe 1.1.12 *Sei* M *eine endliche Menge, und sei* $X = \mathcal{P}_M$ *die* Potenzmenge *von* M, *also die Menge aller Teilmengen von* M. *Für ein* $E \in X$ *bezeichne* $\#E$ *die Anzahl der Elemente von* E. *Zeige:*

$$d(E, F) \; = \; \#(E \setminus F) \; + \; \#(F \setminus E) \qquad \forall\, E, F \in X$$

ist eine Metrik auf X. *Ist dies auch richtig, falls* $M = \emptyset$ *ist?*

Definition 1.1.13 (Offene Mengen, Umgebungen in metrischen Räumen) *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum. Für* $x_0 \in X$ *und* $\varepsilon > 0$ *heißt die Menge*

$$U_\varepsilon(x_0) \; = \; \{x \in X : \quad d(x, x_0) < \varepsilon\}$$

die ε-Umgebung von x_0, *oder auch* die Kugel um x_0 mit Radius ε. *Eine Teilmenge* $O \subset X$ *heißt* offen, *wenn folgendes gilt:*

$$\forall\, x_0 \in O \quad \exists\, \varepsilon > 0 \;:\quad U_\varepsilon(x_0) \;\subset\; O\,.$$

Eine Menge U *heißt* Umgebung eines Punktes $x \in X$, *falls eine offene Menge* $O \subset X$ *existiert, für die* $x \in O \subset U$ *gilt. Falls* U *sogar selber offen ist, sprechen wir auch von einer* offenen Umgebung *von* x.

In der folgenden Aufgabe 1.1.14 wird gezeigt, dass alle Kugeln offen sind; dies liegt an der Dreiecksungleichung für die Metrik. Jede ε-Umgebung von x ist also auch offene Umgebung von x.

Aufgabe 1.1.14 *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum. Zeige:*

(a) X *und die leere Menge* $\emptyset$ *sind offen.*

(b) *Für jedes* $x \in X$ *und jedes* $\varepsilon > 0$ *ist* $U_\varepsilon(x)$ *offen.*

(c) *Genau dann ist* U *eine Umgebung von* x, *wenn es ein* $\varepsilon > 0$ *gibt, für welches* $U_\varepsilon(x) \subset U$ *ist.*

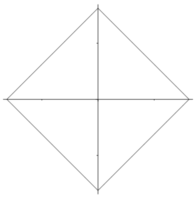
(d) *Eine Menge* $O \subset X$ *ist genau dann offen, wenn sie Umgebung aller ihrer Punkte ist.*

Aufgabe 1.1.15 *Skizziere in* $\mathbb{R}^2$ *die Menge* $U_1(0)$ *für die* p*-Metriken mit* $p = 1$, $p = 3/2$, $p = 2$ *und* $p = 4$.

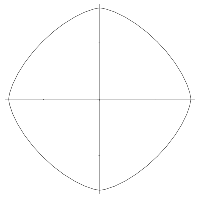
Lösung: Eine elegante Lösung der Aufgabe mit MAPLE geschieht mit dem Kommando

```
> plot([signum(cos(t))*(abs(cos(t)))^(2/p),
  signum(sin(t))*(abs(sin(t)))^(2/p),t=0..2*Pi],
  scaling=constrained,tickmarks=[1,1]);
```

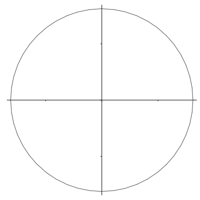
und vorherige Zuweisung der einzelnen Werte für p. Tut man dies, ergeben sich die folgenden vier Bilder:



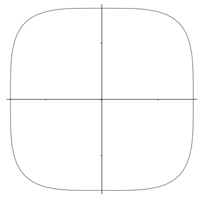
$p = 1$



$p = 3/2$



$p = 2$



$p = 4$

Man kann erkennen, dass die Kontur der Kugel für wachsendes p gegen die entsprechende Figur für den Wert $p = \infty$ strebt, und diese ist ein achsenparalleles Quadrat der Seitenlänge 2 mit dem Ursprung als Mittelpunkt. □

Aufgabe 1.1.16 *Untersuche, welche Teilmengen bezüglich der diskreten Metrik bzw. der Metrik im* french railroad space *offen sind.*

Definition 1.1.17 (Stetigkeit in metrischen Räumen) *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt* stetig in einem Punkt $x_0 \in X$, *falls folgendes gilt:*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in X : \quad d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon\,. \tag{1.1.1}$$

Dies ist die in Analysis übliche Definition der Stetigkeit, manchmal auch ε-δ-Definition genannt. Sie kann auch mit Hilfe sogenannter offener Mengen formuliert werden:

Satz 1.1.18 *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, und sei $f : X \to Y$.*

(a) *Genau dann ist f stetig in $x_0 \in X$, falls für jede Umgebung U von $f(x_0)$ die Menge $f^{-1}(U)$ Umgebung von x_0 ist.*

(b) *Genau dann ist f in jedem Punkt $x \in X$ stetig, wenn für jede offene Teilmenge $O \subset Y$ die Menge $f^{-1}(O)$ in X offen ist.*

Beweis: Zu (a): Sei f in $x_0 \in X$ stetig, und sei U eine Umgebung von $f(x_0)$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(f(x_0)) \subset U$. Nach Definition der Stetigkeit gibt es dann ein $\delta > 0$, für welches

$$\forall\, x \in U_\delta(x_0) : \qquad f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))\,.$$

Daraus folgt $U_\delta(x_0) \subset f^{-1}(U)$, und daher ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x_0. Für den Beweis der Umkehrung sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $U_\varepsilon(f(x_0))$ eine Umgebung von $f(x_0)$ ist, folgt dass $U = f^{-1}(U_\varepsilon(f(x_0))$ eine Umgebung von x_0 ist. Also gibt es ein $\delta > 0$, für welches $U_\delta(x_0) \subset U$ ist. Daraus folgt dass f im Punkt x_0 stetig ist.

Zu (b): Sei f in jedem Punkt von X stetig, und sei $O \subset Y$ offen. Dann ist O Umgebung jedes Punktes $x \in O$. Falls $O_1 = f^{-1}(O)$ leer ist, ist nichts zu zeigen. Falls ein $x_0 \in O_1$ existiert, dann ist $f(x_0) \in O$, und dann ist nach Teil (a) O_1 eine Umgebung von x_0. Nach Aufgabe 1.1.14 (d) ist dann also O_1 offen. Für die Umkehrung sei $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$. Da $U_\varepsilon(f(x_0))$ offen ist, folgt dass $O = f^{-1}(U_\varepsilon(f(x_0)))$ ebenfalls offen ist. Offenbar ist $x_0 \in O$, und deshalb muss ein $\delta > 0$ existieren, für welches $U_\delta(x_0) \subset O$ ist. Daraus folgt die Stetigkeit von f im Punkt x_0. $\square$

Da man offenbar Stetigkeit allein mit Hilfe offener Mengen formulieren kann, werden wir jetzt ein Axiomensystem für solche offenen Mengen kennenlernen und allein mit Hilfe dieser Axiome die Begriffe der Stetigkeit, aber auch der Konvergenz etc. einführen. Beachte dabei, dass es für die *Definition* der Stetigkeit überhaupt keine Rolle spielt, welche Teilmengen wir offen oder Umgebung nennen; um aber eine sinnvolle Theorie aufbauen zu können, braucht man entsprechende Axiome für offene Mengen.

1.2 Topologien

Wenn nichts anderes gesagt wird, soll X im Folgenden immer eine feste nicht-leere Menge bezeichnen. Als *Mengensystem* bezeichnen wir eine beliebige Menge von Teilmengen von X, oder anders gesagt, eine Teilmenge der Potenzmenge $\mathcal{P}_X$ von X.

Definition 1.2.1 (Topologie, offene Mengen) *Ein Mengensystem $\mathcal{T}$ von Teilmengen von X heißt* eine Topologie auf *X, wenn folgende Axiome gelten:*

(O1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

(O2) Die Vereinigung *beliebig* vieler Mengen aus $\mathcal{T}$ gehört wieder zu $\mathcal{T}$.

(O3) Der Durchschnitt *endlich* vieler Mengen aus $\mathcal{T}$ gehört wieder zu $\mathcal{T}$.

Jede Menge aus $\mathcal{T}$ heißt dann offene Teilmenge *von X, oder* offen in *X, oder einfach* offen. *Wenn auf X eine Topologie $\mathcal{T}$ gegeben ist, heißt $(X, \mathcal{T})$ auch* topologischer Raum.

Wie man gleich erkennt, gibt es viele interessante, aber auch etliche triviale Beispiele von topologischen Räumen:

Beispiel 1.2.2 *Auf $X = \{a, b, c\}$ bildet $\mathcal{T} = \{\,\emptyset\,,\ \{a\}\,,\ \{a, b\}\,,\ X\,\}$ eine Topologie. Das System $\mathcal{T} = \{\,\emptyset\,,\ \{a\}\,,\ \{b\}\,,\ X\,\}$ ist dagegen keine Topologie auf X.*

Aufgabe 1.2.3 *Bestimme alle Topologien auf einer dreielementigen Menge $X = \{a, b, c\}$.*

Beispiel 1.2.4 *Die Potenzmenge $\mathcal{P}_X$, also die Menge* aller *Teilmengen von X, ist eine Topologie auf X, die man als* diskrete Topologie *bezeichnet. Diese ist in einem klaren Sinn die größte Topologie auf X, und in diesem Sinn ist dann* jede Teilmenge von X offen. *Sozusagen entgegengesetzt ist $\{\emptyset\,,\ X\}$ die kleinste Topologie auf X und wird die* indiskrete Topologie *genannt. Statt von der größten bzw. kleinsten Topologie spricht man üblicherweise von der feinsten bzw. gröbsten Topologie auf einer Menge X; siehe dazu die* Definition 1.2.9.

Aufgabe 1.2.5 *Zeige dass folgende Mengensysteme Topologien auf X sind:*

(a) $\mathcal{T} = \ \{O \subset X : \ X \setminus O \quad \text{ist endlich}\} \ \cup \ \{\emptyset\}$.

(b) $\mathcal{T} = \ \{O \subset X : \ X \setminus O \quad \text{ist abzählbar}\} \ \cup \ \{\emptyset\}$.

Welche über die Axiome (O1) – (O3) *hinausreichende Eigenschaft gilt im Fall* (b)*? Für welche Mengen X braucht man die leere Menge nicht zusätzlich zu $\mathcal{T}$ hinzuzufügen?.*

Der folgende Satz stellt klar, dass metrische Räume spezielle topologische Räume sind:

Satz 1.2.6 (Topologie metrischer Räume) *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist das System aller offenen Mengen im Sinne von* Definition 1.1.13 *eine Topologie auf X.*

Beweis: (O1) ist klar. Seien O_j, $j \in J$,[1] alle offen, und sei O deren Vereinigung. Für ein $x \in O$ gilt dann $x \in O_{j_0}$ für (wenigstens) ein $j_0 \in J$. Nach Definition gibt es dann ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subset O_{j_0} \subset O$, und deshalb ist O offen. Also gilt (O2). Wenn $O_1, \ldots, O_n$ offen sind und O jetzt deren Durchschnitt bezeichnet, so gibt es zu $x \in O$ und $j = 1, \ldots, n$ jeweils ein $\varepsilon_j > 0$ mit $U_{\varepsilon_j}(x) \subset O_j$. Für $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ ist dann $U_\varepsilon(x) \subset O_j$ für alle $j = 1, \ldots, n$, und somit ist $U_\varepsilon(x) \subset O$. Also gilt auch das Axiom (O3). □

Jede Metrik definiert also eine Topologie. Dass verschiedene Metriken durchaus dieselbe Topologie erzeugen können, wird in Abschnitt 4.3 klar werden.

Definition 1.2.7 *In $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, wird durch die euklidische Metrik eine Topologie festgelegt, die wir* die euklidische *nennen wollen. In ihr sind genau diejenigen Mengen offen, welche sich als Vereinigung beliebiger Kugeln ergeben. Es gibt natürlich viele andere mögliche Topologien auf $\mathbb{R}^n$; wenn nichts gegenteiliges gesagt wird, soll in Zukunft aber in $\mathbb{R}^n$ immer die euklidische Topologie betrachtet werden.*

Aufgabe 1.2.8 *Zeige dass die diskrete Metrik die diskrete Topologie auf X definiert. Gibt es eine Metrik, welche die indiskrete Topologie auf X definiert?*

Definition 1.2.9 (Vergleich von Topologien) *Seien $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ Topologien auf X. Wir nennen $\mathcal{T}_1$* gröber *als $\mathcal{T}_2$ bzw. $\mathcal{T}_2$* feiner *als $\mathcal{T}_1$, falls $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ ist. Wenn zusätzlich $\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}_2$ ist, nennen wir $\mathcal{T}_1$* echt gröber *als $\mathcal{T}_2$ bzw. $\mathcal{T}_2$* echt feiner *als $\mathcal{T}_1$. Im Fall von $\mathcal{T}_1 \not\subset \mathcal{T}_2$ und $\mathcal{T}_2 \not\subset \mathcal{T}_1$ heißen die Topologien auch* nicht vergleichbar.

Beispiel 1.2.10 *Die diskrete Topologie ist feiner, die indiskrete Topologie gröber als jede andere Topologie auf X. Auf $X = \{a, b, c\}$ sind $\mathcal{T}_1 = \{\ \emptyset,\ \{a\},\ \{a, b\},\ X\ \}$ und $\mathcal{T}_2 = \{\ \emptyset,\ \{b\},\ \{a, b\},\ X\ \}$ nicht vergleichbare Topologien.*

Aufgabe 1.2.11 *Seien $\mathcal{T}_j$, für $j \in J$, Topologien auf X. Zeige dass dann auch der Durchschnitt aller $\mathcal{T}_j$ eine Topologie auf X ist. Dies impliziert: Sei $\{\mathcal{T}_j : j \in J\}$ die Menge aller Topologien, welche irgendeine Eigenschaft A haben. Wenn auch der Durchschnitt von Topologien mit Eigenschaft A die Eigenschaft A besitzt, so gibt es eine gröbste Topologie mit Eigenschaft A, nämlich den Durchschnitt aller dieser $\mathcal{T}_j$.*

Aufgabe 1.2.12 *Sei X eine nicht-leere Menge, und sei $K : \mathcal{P}_X \longrightarrow \mathcal{P}_X$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:*

(a) $K(X) = X$.

(b) $\forall\ E \subset X\ :\quad K(E) \subset E$.

(c) $\forall\ E \subset X\ :\quad K(K(E)) = K(E)$.

(d) $\forall\ E, F \subset X\ :\quad K(E \cap F) = K(E) \cap K(F)$.

Zeige, dass aus $E \subset F(\subset X)$ immer $K(E) \subset K(F)$ folgt, und schließe hieraus dass $\mathcal{T} = \{O \subset X : K(O) = O\}$ eine Topologie auf X ist.

[1] Hier wie im Folgenden bezeichnet J eine sogenannnte *Indexmenge*, die einerseits meist als nicht leer angenommen werden kann, aber rein formal durchaus auch leer sein darf, wobei im Falle $J = \emptyset$ aus der Definition von Vereinigung und Durchschnitt folgt dass

$$\cup_{j \in \emptyset} O_j \;=\; \emptyset\,, \qquad \cap_{j \in \emptyset} O_j \;=\; X\,.$$

1.3 Basen einer Topologie

In einem metrischen Raum legen die ε-Umgebungen, also sehr einfache offene Mengen, bereits die Topologie fest. Diese Tatsache wird allgemein durch den Begriff der Basis einer Topologie beschrieben:

Definition 1.3.1 (Basis) *Ein Mengensystem $\mathcal{B}$ von Teilmengen von X heißt* eine Basis (für eine Topologie auf X)*, wenn folgende Axiome erfüllt sind:*

(B1) $\forall\, x \in X \quad \exists\, B \in \mathcal{B}: \quad x \in B.$

(B2) $\forall\, B_1, B_2 \in \mathcal{B} \quad \forall\, x \in B_1 \cap B_2 \quad \exists\, B \in \mathcal{B}: \quad x \in B \subset B_1 \cap B_2.$

Anders ausgedrückt: Der gesamte Raum X sowie der Durchschnitt zweier Basismengen sind vielleicht selber keine Basismengen, sind aber stets Vereinigung *von Basismengen; vergleiche auch* Aufgabe 1.3.3. *Für eine Basis $\mathcal{B}$ bezeichne immer $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ das System aller Teilmengen $O \subset X$ mit der Eigenschaft*

$$\forall\, x \in O \qquad \exists\, B \in \mathcal{B}: \quad x \in B \subset O\,. \tag{1.3.1}$$

Das heißt, $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ besteht aus allen Vereinigungen von Basismengen. Der unten folgende Satz sagt, dass $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ eine Topologie auf X ist; wir nennen sie die von der Basis $\mathcal{B}$ erzeugte Topologie.

Aufgabe 1.3.2 *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Überprüfe, dass das Mengensystem aller ε-Umgebungen, mit beliebigem $\varepsilon > 0$, die Eigenschaften* (B1), (B2) *hat, und dass die von dieser Basis erzeugte Topologie aus allen offenen Mengen im Sinn von* Definition 1.1.13 *besteht.*

Aufgabe 1.3.3 *Zeige: Genau dann hat ein Mengensystem $\mathcal{B}$ von Teilmengen von X die Eigenschaften* (B1), (B2)*, wenn sowohl X als auch der Durchschnitt von zwei beliebigen Mengen aus $\mathcal{B}$ immer als Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ darstellbar sind.*

Aufgabe 1.3.4 *Sei $\mathcal{B}$ eine Basis. Zeige durch Induktion über $n \in \mathbb{N}$: Sind $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$, und ist $x \in B_1 \cap \ldots \cap B_n$, so gibt es ein $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B \subset B_1 \cap \ldots \cap B_n$.*

Satz 1.3.5 *Für jede Basis $\mathcal{B}$ ist das zugehörige Mengensystem $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ eine Topologie auf X, und es gilt $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.*

Beweis: Offenbar erfüllen $\emptyset$ und X die Bedingung (1.3.1) und gehören deshalb zu $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Seien jetzt $O_j \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ für $j \in J$, und sei O ihre Vereinigung. Für $x \in O$ gilt $x \in O_{j_0}$ für mindestens ein $j_0 \in J$. Wegen (1.3.1) gibt es ein $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B \subset O_{j_0} \subset O$, und deshalb ist $O \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Seien jetzt $O_1, \ldots, O_n \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, und sei O ihr Durchschnitt. Wenn dann $x \in O$ ist, gibt es wegen (1.3.1) Mengen $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_j \subset O_j$ für $j = 1, \ldots, n$. Mit Hilfe von Aufgabe 1.3.4 folgt die Existenz von $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B \subset B_1 \cap \ldots \cap B_n \subset O_1 \cap \ldots \cap O_n = O$, und deshalb ist $O \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. □

Beispiel 1.3.6 *In $\mathbb{R}^2$ mit der von der euklidischen Metrik erzeugten Topologie bildet die Menge aller offenen Kreisscheiben mit beliebigen Mittelpunkten und Radien eine Basis. Eine andere, kleinere Basis besteht aus allen Kreisscheiben mit beliebigen Mittelpunkten und Radien ≤ 1. Wieder eine andere Basis besteht aus allen achsenparallelen Quadraten. Man sieht also, dass eine Topologie sehr unterschiedliche Basen haben kann.*

Lemma 1.3.7 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, und sei $\mathcal{B}$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}$, also $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Dann gilt:*

(a) *$\mathcal{T}$ besteht aus allen Teilmengen von X, welche sich als Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ darstellen lassen.*[2]

(b) *$\mathcal{T}$ ist die gröbste Topologie auf X, welche $\mathcal{B}$ umfasst; d. h. genauer: Ist $\tilde{\mathcal{T}}$ eine Topologie auf X, und gilt $\mathcal{B} \subset \tilde{\mathcal{T}}$, so folgt $\mathcal{T} \subset \tilde{\mathcal{T}}$.*

(c) *$\mathcal{T}$ ist der Durchschnitt aller Topologien auf X, welche $\mathcal{B}$ umfassen.*

Beweis: Zu (a): Da $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \mathcal{T}$ ist, und da eine Topologie gegenüber Vereinigung abgeschlossen ist, folgt dass beliebige Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{B}$ zu $\mathcal{T}$ gehören. Ist umgekehrt $O \in \mathcal{T}$, so gilt (1.3.1), und deshalb ist O Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$. Zu (b): Wenn $O \in \mathcal{T}$ ist, so ist O nach (a) Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$, also Vereinigung von Mengen aus $\tilde{\mathcal{T}}$. Da $\tilde{\mathcal{T}}$ eine Topologie auf X ist, ist jede Vereinigung von Mengen aus $\tilde{\mathcal{T}}$ selber wieder in $\tilde{\mathcal{T}}$, und daraus folgt die Behauptung. Zu (c): Der Durchschnitt von Topologien auf X ist nach Aufgabe 1.2.11 selber wieder eine Topologie, und daraus fogt die Behauptung unter Benutzung von (b). □

Lemma 1.3.8 *Seien $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ Topologien auf X, und seien $\mathcal{B}_1$ Basis von $\mathcal{T}_1$ sowie $\mathcal{B}_2$ Basis von $\mathcal{T}_2$. Genau dann ist $\mathcal{T}_1$ feiner als $\mathcal{T}_2$, wenn für alle $B_2 \in \mathcal{B}_2$ und alle $x \in B_2$ ein $B_1 \in \mathcal{B}_1$ existiert mit $x \in B_1 \subset B_2$.*

Beweis: Sei $\mathcal{T}_1$ feiner als $\mathcal{T}_2$, also $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$. Wegen $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{T}_2$ folgt für $B_2 \in \mathcal{B}_2$ auch $B_2 \in \mathcal{T}_1$. Also gibt es wegen (1.3.1) zu jedem $x \in B_2$ ein $B_1 \in \mathcal{B}_1$ mit $x \in B_1 \subset B_2$. Für die Umkehrung sei $O \in \mathcal{T}_2$. Ist $x \in O$, so gibt es wegen (1.3.1) ein $B_2 \in \mathcal{B}_2$ mit $x \in B_2 \subset O$, und nach Voraussetzung gibt es dann ein $B_1 \in \mathcal{B}_1$ mit $x \in B_1 \subset B_2$. Daraus folgt aber $O \in \mathcal{T}_1$. □

Bei der Aufgabe, zu einer gegebenen Topologie eine Basis zu finden, kann folgendes Lemma helfen:

Lemma 1.3.9 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein toplogischer Raum. Sei weiter $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ so, dass für alle $O \in \mathcal{T}$ die Bedingung* (1.3.1) *gilt. Dann ist $\mathcal{B}$ bereits eine Basis von $\mathcal{T}$.*

Beweis: Zu zeigen sind nur die Eigenschaften (B1), (B2) einer Basis. Da $X \in \mathcal{T}$ ist, folgt aber (B1), und da mit $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ auch $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T}$ ist, folgt auch (B2). □

Beispiel 1.3.10 *Sei $X = \mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie. Offene Mengen in $\mathbb{R}$ sind Vereinigung von höchstens abzählbar vielen offenen Intervallen, und die offenen Intervalle haben die Eigenschaften* (B1), (B2)*, sind also eine Basis der üblichen euklidischen Topologie. Auch die Menge der rechts halboffenen Intervalle, also $\mathcal{B} = \{\, [a, b) \ : \ a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$ bilden eine Basis. Die zu dieser Basis gehörige Topologie wird die* lower limit topology *genannt und ist echt feiner als die euklidische Topologie; dies folgt mit Hilfe von* Lemma 1.3.8 *und der Tatsache, dass ein halboffenes Intervall in der euklidischen Topologie nicht offen ist.*

Aufgabe 1.3.11 *Finde eine abzählbare Basis der euklidischen Topologie in $\mathbb{R}^n$, für alle $n \geq 1$.*

[2] Beachte hierbei, dass die leere Menge gleich der leeren Vereinigung ist, also in jedem Fall als Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ geschrieben werden kann.

1.4 Ordnungstopologien

Definition 1.4.1 (Ordnungsrelationen) *Eine Relation „$<$“ auf X heißt* (vollständige) Ordnung*, falls folgende Axiome gelten:*

(O1) Für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt genau eine der drei Aussagen

$$x_1 \ < \ x_2\,, \qquad x_2 \ < \ x_1\,, \qquad x_1 \ = \ x_2\,.$$

(O2) $\forall\; x_1,\; x_2,\; x_3 \in X: \qquad (x_1 < x_2 \quad \text{und} \quad x_2 < x_3) \quad \Longrightarrow \quad x_1 < x_3\,.$ (Transitivität)

Wir schreiben dann auch $x_1 \le x_2$ anstatt $(x_1 < x_2$ oder *$x_1 = x_2)$ und definieren offene, halboffene und abgeschlossene Intervalle wie in der Analysis.*

Beispiel 1.4.2 (Lexikographische Ordnung) *In $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, sei für $x_1 = (x_{11}, \ldots, x_{n1})^T$ und $x_2 = (x_{12}, \ldots, x_{n2})^T$ eine Relation „$<$“ durch folgende Festlegung definiert:*

$$x_1 \ < \ x_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\; k \in \{1, \ldots, n\}\ :\quad x_{j1} \ = \ x_{j2}\ \forall\; j = 1, \ldots, k-1\,,\ x_{k1} < x_{k2}\,.$$

Diese Relation erfüllt (O1), (O2) *und heißt* die lexikographische Ordnung *auf* $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 1.4.3 *Bestimme die offenen Intervalle bezüglich der lexikographischen Ordnung in $\mathbb{R}^2$.*

Aufgabe 1.4.4 *Wie kann man auf der Menge aller reellen Zahlenfolgen eine Ordnung definieren?*

Definition 1.4.5 (Ordnungstopologie) *Sei auf X eine Ordnung gegeben. Sei $\mathcal{B}$ die Menge aller offenen Intervalle in X, wobei evtl. noch folgende Intervalle hinzukommen:*

(a) Falls X nur ein Element enthält, gelte $X \in \mathcal{B}$.

(b) Falls es ein größtes Element in X gibt, d. h., falls es ein $x_0 \in X$ gibt, für welches $x \le x_0$ gilt für alle $x \in X$, dann sei $(x, x_0] \in \mathcal{B}$ für alle $x \in X$.

(c) Falls es ein kleinstes Element in X gibt, d. h., falls es ein $x_0 \in X$ gibt, für welches $x_0 \le x$ gilt für alle $x \in X$, dann sei $[x_0, x) \in \mathcal{B}$ für alle $x \in X$.

Man zeigt leicht, dass dann $\mathcal{B}$ eine Basis bildet. Die zugehörige Topologie heißt die Ordnungstopologie *auf X.*

Aufgabe 1.4.6 *Überprüfe, dass die oben eingeführte Menge $\mathcal{B}$ die Eigenschaften* (B1), (B2) *hat.*

1.5 Unterräume

Satz 1.5.1 *Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum. Sei $U \subset X$ nicht leer, und sei*

$$\mathcal{T}_U \ = \ \{O \cap U : \quad O \in \mathcal{T}\}\,. \tag{1.5.1}$$

Dann ist $\mathcal{T}_U$ eine Topologie auf U.

Beweis: Wegen $\emptyset = \emptyset \cap U$ und $U = X \cap U$ gilt $\emptyset, U \in \mathcal{T}_U$. Sind $O_{jU} \in \mathcal{T}_U$ für $j \in J$, und ist O_U ihre Vereinigung, so gibt es nach Definition von $\mathcal{T}_U$ Mengen $O_j \in \mathcal{T}$ mit $O_{jU} = O_j \cap U$ für alle $j \in J$. Dann folgt aber, dass O gleich dem Durchschnitt von U mit der Vereinigung aller O_j ist, und deshalb ist $O \in \mathcal{T}_U$. Genauso schließt man auch für den Durchschnitt von endlich vielen Mengen aus $\mathcal{T}_U$. □

Definition 1.5.2 *Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum. Sei $U \subset X$ nicht leer, und sei $\mathcal{T}_U$ durch* (1.5.1) *gegeben. Dann nennt man $\mathcal{T}_U$ die* Unterraumtopologie *oder* Spurtopologie *auf U, und $(U, \mathcal{T}_U)$ heißt* topologischer Unterraum *von $(X, \mathcal{T})$.*

Aufgabe 1.5.3 *Sei (X, d) ein metrischer Raum, also insbesondere ein topologischer Raum mit der durch die Metrik gegebenen Topologie. Eine nicht-leere Teilmenge $U \subset X$ kann dann als metrischer Raum mit der auf $U \times U$ restringierten Metrik, aber auch als topologischer Unterraum aufgefasst werden. Zeige, dass dies zur gleichen Topologie auf U führt.*

Aufgabe 1.5.4 *Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum. Sei $U \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$. Zeige: Eine Teilmenge von U ist genau dann offen in der Spurtopologie auf U, wenn sie als Teilmenge von X offen ist.*

1.6 Umgebungen

Definition 1.6.1 *Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum, und sei $x \in X$. Jedes $O \in \mathcal{T}$, welches x enthält, heißt* offene Umgebung *von x. Jede Obermenge einer offenen Umgebung von x heißt* Umgebung *von x. Mit $\mathcal{U}(x)$ bzw. $\mathcal{U}_0(x)$ wird das System aller Umgebungen bzw. aller offenen Umgebungen von x bezeichnet. Beachte, dass manche Bücher, z. B. das von* J. R. Munkres [14]*, nur offene Mengen als Umgebungen zulassen.*

Wir nennen eine Teilmenge $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{U}_0(x)$ eine Umgebungsbasis *im Punkt x, wenn zu jedem $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $B \in \mathcal{B}(x)$ existiert mit $B \subset U$.*

Aufgabe 1.6.2 *Untersuche, welche Mengen Umgebungen eines Punktes $x \in X$ sind, wenn $\mathcal{T}$ gleich der diskreten bzw. der indiskreten Topologie ist.*

Satz 1.6.3 *Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum, und sei $x \in X$. Dann gilt immer:*

(a) $\mathcal{U}(x) \neq \emptyset$.

(b) $\forall\, U \in \mathcal{U}(x): \quad x \in U$.

(c) $\forall\, U \in \mathcal{U}(x) \quad \forall\, V \subset X: \quad U \subset V \Longrightarrow V \in \mathcal{U}(x)$.

(d) $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}(x) \quad \Longrightarrow \quad U_1 \cap \ldots \cap U_n \in \mathcal{U}(x)$.

(e) $\forall\, U \in \mathcal{U}(x) \quad \exists\, V \in \mathcal{U}(x) \quad \forall\, \tilde{x} \in V: \quad U \in \mathcal{U}(\tilde{x})$.

Beweis: Da $X \in \mathcal{T}$ und $x \in X$ ist, folgt $X \in \mathcal{U}(x)$, und daher gilt (a). Nach Definition enthält jede Umgebung von x eine offene Umgebung von x, und diese enthält x, und somit gilt (b). Auf Grund der Definition der Umgebungen ist (c) klar. Da der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen wieder offen ist, folgt (d), und (e) gilt, wenn wir V als offene Teilmenge von U wählen, welche x enthält; die Existenz eines solchen V folgt aus der Definition von Umgebungen. □

Man kann die Aussagen (a) – (e) des obigen Satzes zu *Axiomen des Umgebungssystems* eines Punktes $x \in X$ erheben und dann offene Mengen als solche definieren, die Umgebungen jedes ihrer Punkte sind. Dies führt zu einer äquivalenten Definition eines topologischen Raumes, was hier aber nicht genauer untersucht werden soll. Jedenfalls gilt aber folgendes Lemma:

Lemma 1.6.4 *Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum. Eine Teilmenge $O \subset X$ ist genau dann offen, also in $\mathcal{T}$, wenn für alle $x \in O$ gilt $O \in \mathcal{U}(x)$.*

Beweis: Wenn O offen ist, dann folgt mit der Definition von Umgebungen $O \in \mathcal{U}_0(x) \subset \mathcal{U}(x)$ für jedes $x \in O$. Wenn umgekehrt gilt $O \in \mathcal{U}(x)$ für alle $x \in O$, dann gibt es zu jedem solchen x eine offene Menge O_x mit $x \in O_x \subset O$. Also ist offenbar O die Vereinigung dieser Mengen O_x und deshalb selber offen. □

Aufgabe 1.6.5 *Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum, und sei $\mathcal{B}$ eine Basis für $\mathcal{T}$. Zeige: Genau dann ist $U \in \mathcal{U}(x)$ für ein $x \in X$, wenn es eine Menge $B \in \mathcal{B}$ gibt mit $x \in B \subset U$.*

1.7 Abgeschlossene Mengen und Berührungspunkte

Definition 1.7.1 *Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum. Eine Menge $A \subset X$ heißt* abgeschlossen*, wenn $X \setminus A$ offen ist, also in $\mathcal{T}$ liegt. Ein $x \in X$ heißt* Berührungspunkt *einer Teilmenge $E \subset X$, wenn gilt*

$$\forall\ U \in \mathcal{U}(x) \ : \qquad U \cap E \neq \emptyset\,. \tag{1.7.1}$$

Satz 1.7.2 (Rechenregeln für abgeschlossene Mengen) *In jedem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ gilt:*

(A1) $\emptyset$ und X sind abgeschlossen.

(A2) Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

(A3) Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Beweis: Folgt aus den *de Morganschen Regeln* und der Definition abgeschlossener Mengen. □

Aufgabe 1.7.3 *Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum. Sei $U \neq \emptyset$ eine abgeschlossene Teilmenge von X. Zeige: Eine Teilmenge von U ist genau dann abgeschlossen in der Spurtopologie auf U, wenn sie als Teilmenge von X abgeschlossen ist.*

Satz 1.7.4 *Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum, und sei $E \subset X$. Dann ist die Menge aller Berührungspunkte von E eine abgeschlossene Obermenge von E.*

Beweis: Jedes $x \in E$ ist per Definition ein Berührungspunkt von E. Sei jetzt O das Komplement der Berührungspunktmenge von E, und sei $x \in O$. Dann gibt es nach Definition der Berührungspunkte mindestens eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $U \cap E = \emptyset$. Wir können dann o. B. d. A. annehmen dass U offen ist, denn sonst kann man in U eine kleinere offene Umgebung von x finden. Da U dann Umgebung aller seiner Punkte ist, kann es in U keinen Berührungspunkt von E geben. Daher ist also $U \subset O$, und deshalb ist $O \in \mathcal{U}(x)$. Da dies für jedes $x \in O$ gilt, ist O offen, also die Menge der Berührungspunkte abgeschlossen. □

1.8 Innere Punkte, abgeschlossene Hülle und offener Kern

Definition 1.8.1 *Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum, und sei $E \subset X$. Ein $x \in E$ heißt* innerer Punkt (von E)*, falls $E \in \mathcal{U}(x)$ ist. Die Menge aller inneren Punkte von E wird* offener Kern von E *genannt und mit $\overset{\circ}{E}$ bezeichnet. Die Menge aller Berührungspunkte von E heißt* die abgeschlossene Hülle von E *und wird mit $\overline{E}$ bezeichnet.*

Satz 1.8.2 *Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum, sei $\mathcal{B}$ eine Basis für $\mathcal{T}$, und sei $E \subset X$. Dann gilt:*

(a) *Der offene Kern von E ist die größte offene Teilmenge von E, oder in anderen Worten: $\overset{\circ}{E}$ ist die Vereinigung aller offenen Teilmengen von E.*

(b) *Die abgeschlossene Hülle von E ist die kleinste abgeschlossene Obermenge von E, oder in anderen Worten: $\overline{E}$ ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Obermengen von E.*

(c) $x \in \overset{\circ}{E} \iff \exists\, B \in \mathcal{B} : \quad x \in B \subset E.$

(d) $x \in \overline{E} \iff \forall\, B \in \mathcal{B} : \quad x \in B \Longrightarrow B \cap E \neq \emptyset.$

Beweis: Zu (a): Sei O eine offene Teilmenge von E, und sei $x \in O$. Dann ist $E \in \mathcal{U}(x)$, und deshalb ist $x \in \overset{\circ}{E}$. Also folgt $O \subset \overset{\circ}{E}$. Umgekehrt: Ist $x \in \overset{\circ}{E}$, so ist $E \in \mathcal{U}(x)$, und deshalb gibt es eine offene Teilmenge von E, die x enthält. Zu (b): Nach Satz 1.7.4 ist $\overline{E}$ eine abgeschlossene Obermenge von E. Ist jetzt A eine beliebige abgeschlossene Obermenge von E, und ist $x \in O = X \setminus A$, dann kann x kein Berührungspunkt von E sein. Also ist $x \notin \overline{E}$, und daher ist $\overline{E} \subset A$. Zu (c): Nach Definition einer Basis folgt für $x \in \overset{\circ}{E}$ die Existenz eines $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B \subset \overset{\circ}{E}$. Ist umgekehrt $x \in B \subset E$ für ein $B \in \mathcal{B}$, so ist x ein innerer Punkt von E und liegt deshalb in $\overset{\circ}{E}$. Zu (d): Ist $x \in \overline{E}$, und ist $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B$, so ist $B \in \mathcal{U}_0(x)$, und deshalb folgt $B \cap E \neq \emptyset$ nach Definition von Berührungspunkten. Die Umkehrung gilt aber ebenfalls, da nach Aufgabe 1.6.5 in jeder Umgebung von x eine Basismenge B liegen muss, die selber x enthält. □

Satz 1.8.3 *Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum, und sei $E \subset X$. Dann gilt:*

(a) *E ist genau dann offen, wenn $E = \overset{\circ}{E}$ ist.*

(b) *E ist genau dann abgeschlossen, wenn $E = \overline{E}$ ist.*

(c) *Für $F = X \setminus E$ gilt $\overset{\circ}{F} = X \setminus \overline{E}$, $\overline{F} = X \setminus \overset{\circ}{E}$.*

Beweis: Folgt leicht aus dem vorherigen Satz. □

Aufgabe 1.8.4 *Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum.*

(a) *Zeige dass die Abbildung $K : \mathcal{P}_X \longrightarrow \mathcal{P}_X$ mit $K(E) = \overset{\circ}{E}$ die in* Aufgabe 1.2.12 *aufgelisteten Eigenschaften hat.*

(b) *Finde selber entsprechende Eigenschaften für die Abbildung $H : \mathcal{P}_X \longrightarrow \mathcal{P}_X$ mit $H(E) = \overline{E}$.*

1.9 Häufungspunkte, isolierte Punkte und Rand

Definition 1.9.1 *Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum, und sei $E \subset X$. Ein $x \in X$ heißt* Häufungspunkt von *E, falls gilt*

$$\forall\, U \in \mathcal{U}(x) \ : \quad \Big(U \setminus \{x\}\Big) \cap E \neq \emptyset\,.$$

Die Menge aller Häufungspunkte von E wird mit E' bezeichnet. Ein $x \in X$ heißt Randpunkt von *E, falls gilt*

$$\forall\, U \in \mathcal{U}(x) \ : \quad U \cap E \neq \emptyset\,, \quad U \cap \Big(X \setminus E\Big) \neq \emptyset\,.$$

In Worten bedeutet dies, dass Randpunkte genau diejenigen Punkte sind, welche Berührungspunkte sowohl von E als auch vom Komplement von E sind. Die Menge aller Randpunkte von E heißt der Rand *von E, in Zeichen* $\mathrm{rd}\,(E)$. *Ein Punkt $x \in E$ heißt* isolierter Punkt *von E, falls ein $U \in \mathcal{U}(x)$ existiert mit $U \cap E = \{x\}$.*

Satz 1.9.2 *Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum, und sei $E \subset X$. Dann gilt:*

(a) $\overline{E} \ = \ E \cup E'$.

(b) $\mathrm{rd}\,(E) = \mathrm{rd}\,(X \setminus E) = \overline{E} \setminus \overset{\circ}{E}$.

Beweis: Da Häufungspunkte immer Berührungspunkte sind folgt $E' \subset \overline{E}$. Wenn umgekehrt $x \in \overline{E}$ ist, und $x \notin E'$ gilt, dann muss nach Definition von Häufungs- und Berührungspunkten $x \in E$ sein. Also gilt (a). Sei jetzt $x \in \mathrm{rd}\,E$. Dann ist x ein Berührungspunkt, aber kein innerer Punkt von E, und somit ist $x \in \overline{E} \setminus \overset{\circ}{E}$. Die Umkehrung ist aber ebenfalls richtig. Durch Vertauschen von E und $x \setminus E$ folgt der Rest von (b). □

Aufgabe 1.9.3 *Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum, und sei $E \subset X$. Zeige dass E genau dann abgeschlossen ist, wenn alle Häufungspunkte von E zu E gehören. Zeige weiter, dass für ein $x \in X$ genau eine der folgenden drei Aussagen richtig ist:*

(a) x ist innerer Punkt von E, (b) x ist innerer Punkt von $X \setminus E$, (c) x ist Randpunkt von E.

Aufgabe 1.9.4 *Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum. Charakterisiere diejenigen Teilmengen von X, welche keine Randpunkte besitzen.*

Aufgabe 1.9.5 *Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum, und seien K und H wie in* Aufgabe 1.8.4.

(a) Zeige $K(X \setminus E) = X \setminus H(E)$ und $H(X \setminus E) = X \setminus K(E)$ für alle $E \subset X$.

(b) Zeige: $\quad E \subset F (\subset X) \implies K(E) \subset K(F)$ und $H(E) \subset H(F)$.

(c) Zeige (in dieser Reihenfolge) für alle $E \subset X$

- $K(E) \subset E \subset H(E)$,
- $K(E) \subset K(H(K(E))) \subset H(K(E)) \subset H(E)$,
- $K(E) \subset K(H(E)) \subset H(K(H(E))) \subset H(E)$.

(d) Sei $E \subset X$ gegeben. Zeige dass unter allen Mengen, welche durch wiederholtes Anwenden der Abbildungen H und K auf die Menge E entstehen, *höchstens* folgende sieben Mengen verschieden sein können:

$$E\,, \quad H(E)\,, \quad K(E)\,, \quad H(K(E))\,, \quad K(H(E))\,, \quad K(H(K(E)))\,, \quad H(K(H(E)))\,. \tag{1.9.1}$$

(e) Finde (in $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie) ein Beispiel einer Menge E, für welche die Mengen in (1.9.1) alle verschieden sind.

Kapitel 2

Stetige Abbildungen und Konvergenz

Wenn nichts anderes gesagt wird, bezeichnen $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ und $(Z, \mathcal{T}_Z)$ im Folgenden immer feste, aber beliebige topologische Räume.

2.1 Definition der Stetigkeit

Definition 2.1.1 *Eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ heißt* stetig in einem Punkt $x_0 \in X$*, falls für jedes $U \in \mathcal{U}(f(x_0))$ gilt $f^{-1}(U) \in \mathcal{U}(x_0)$. Wir nennen f auch* stetig auf X*, wenn es in jedem Punkt $x_0 \in X$ stetig ist.*

Aufgabe 2.1.2 *Zeige: Konstante Abbildungen $f : X \longrightarrow Y$ sind stetig auf X. Zeige weiter: Ist $f : X \longrightarrow Y$ stetig in $x_0 \in X$, und ist $x_0 \in E \subset X$, so ist die Restriktion $f : E \longrightarrow Y$ stetig in x_0.*

Aufgabe 2.1.3 *Untersuche, welche Abbildungen $f : X \longrightarrow Y$ stetig sind, wenn die Topologie auf X und/oder Y gleich der diskreten bzw. indiskreten Topolgie ist.*

Satz 2.1.4 *Eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ ist genau dann stetig auf X, wenn für alle $O \in \mathcal{T}_Y$ gilt $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}_X$.*

Beweis: Sei f stetig auf X, und sei $O \in \mathcal{T}_Y$. Falls $f^{-1}(O) \neq \emptyset$ ist, sei $x_0 \in f^{-1}(O)$. Dann ist $O \in \mathcal{U}(f(x_0))$, und deshalb ist $f^{-1}(O) \in \mathcal{U}(x_0)$ nach Definition der Stetigkeit im Punkt x_0. Da x_0 ein beliebiger Punkt von $f^{-1}(O)$ sein kann, ist $f^{-1}(O)$ offen. Für die Umkehrung seien $x_0 \in X$ und $U \in \mathcal{U}(f(x_0))$ gegeben. Dann gibt es ein $O \in \mathcal{T}_Y$ mit $f(x_0) \in O \subset U$, und nach Voraussetzung ist $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}_X$. Wegen $x_0 \in f^{-1}(O) \subset f^{-1}(U)$ folgt hieraus $f^{-1}(U) \in \mathcal{U}(x_0)$. Also ist f stetig im Punkt x_0. Da x_0 ein beliebiger Punkt von X war, folgt die Stetigkeit von f auf X. □

Aufgabe 2.1.5 *Zeige: Eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ ist genau dann stetig auf X, wenn für alle* (bezüglich der Topologie auf Y) *abgeschlossenen Teilmengen $A \subset Y$ auch $f^{-1}(A)$ abgeschlossen* (in der Topologie auf X) *ist.*

Satz 2.1.6 (Hintereinanderausführung stetiger Abbildungen) *Seien $f : X \longrightarrow Y$ und $g : Y \longrightarrow Z$ gegeben. Falls f in einem Punkt $x_0 \in X$ und g im Punkt $f(x_0)$ stetig sind, dann ist $h = g \circ f$ stetig im Punkt x_0.*

Beweis: Sei $U \in \mathcal{U}(h(x_0))$. Nach Voraussetzung und der Definition der Stetigkeit ist dann $g^{-1}(U) \in \mathcal{U}(f(x_0))$ und $f^{-1}(g^{-1}(U)) = h^{-1}(U) \in \mathcal{U}(x_0)$. Das ist die Behauptung. □

Aufgabe 2.1.7 *Zeige folgendes*

Klebelemma *Sei $X = A_1 \cup A_2$, mit abgeschlossenen Mengen $A_1, A_1 \subset X$, und seien $f_j : A_j \to Y$ stetig auf A_j, für $1 \leq j \leq 2$. Falls $f_1(x) = f_2(x)$ für alle $x \in A_1 \cap A_2$ gilt, dann existiert genau eine auf X stetige Abbildung $f : X \to Y$ mit $f(x) = f_j(x)$ für $x \in A_j$, $1 \leq j \leq 2$.*

2.2 Stetigkeit und Basen

Der ε-δ-Definition der Stetigkeit aus der Analysis entspricht allgemein die folgende Charakterisierung von Stetigkeit mit Basen der beiden Topologien $\mathcal{T}_X$ und $\mathcal{T}_Y$:

Satz 2.2.1 *Seien $\mathcal{B}_X$ und $\mathcal{B}_Y$ Basen für die Topologien $\mathcal{T}_X$ bzw. $\mathcal{T}_Y$. Genau dann ist eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ stetig in einem Punkt $x_0 \in X$, wenn gilt*

$$\forall\ B_1 \in \mathcal{B}_Y \quad \text{mit } f(x_0) \in B_1 \qquad \exists\ B_2 \in \mathcal{B}_X \quad \text{mit } x_0 \in B_2\ :\ f(B_2) \subset B_1\,.$$

Beweis: Sei f stetig im Punkt x_0, und sei $B_1 \in \mathcal{B}_Y$ mit $f(x_0) \in B_1$ gegeben. Da B_1 offen und deshalb Umgebung von $f(x_0)$ ist, folgt dass $f^{-1}(B_1) \in \mathcal{U}(x_0)$ ist, und nach Definition von Umgebungen bzw. Basen existiert deshalb ein $B_2 \in \mathcal{B}_X$ mit $x_0 \in B_2 \subset f^{-1}(B_1)$. Daher gilt eine Richtung der Behauptung. Zur Umkehrung sei $U \in \mathcal{U}(f(x_0))$. Dann gibt es ein $B_1 \in \mathcal{B}_Y$ mit $f(x_0) \in B_1 \subset U$, und nach Voraussetzung existiert dazu wiederum ein $B_2 \in \mathcal{B}_X$ mit $x_0 \in B_2 \subset f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(U)$. Also ist $f^{-1}(U) \in \mathcal{U}(x_0)$, und daher ist f stetig im Punkt x_0. □

Aufgabe 2.2.2 *Im Falle von zwei metrischen Räumen können wir als Basen $\mathcal{B}_X$ und $\mathcal{B}_Y$ bekanntlich die Menge aller Kugeln mit beliebigen Mittelpunkten und Radien wählen. Zeige für diesen Fall, dass obiger Satz genau der ε-δ-Definition der Stetigkeit in metrischen Räumen entspricht.*

2.3 Erzeugen von Topologien zu vorgegebenen Abbildungen

Lemma 2.3.1 *Seien X eine beliebige nicht-leere Menge und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ ein topologischer Raum, sowie $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Dann ist*

$$\mathcal{T}_{X,f} \;=\; \{f^{-1}(O) : \quad O \in \mathcal{T}_Y\} \tag{2.3.1}$$

eine Topologie auf X, und zwar die gröbste Topologie, bezüglich der f stetig auf X ist.

Beweis: Wegen $\emptyset = f^{-1}(\emptyset)$ und $X = f^{-1}(Y)$ folgt $\emptyset, X \in \mathcal{T}_{X,f}$. Sind $O_j \in \mathcal{T}_{X,f}$ für $j \in J$, so gibt es $\tilde{O}_j \in \mathcal{T}_Y$ mit $O_j = f^{-1}(\tilde{O}_j)$ für alle $j \in J$. Wegen $\cup_j O_j = f^{-1}(\cup_j \tilde{O}_j)$ folgt dann $\cup_j O_j \in \mathcal{T}_{X,f}$. Analog schließt man für den Durchschnitt endlich vieler $O_j \in \mathcal{T}_{X,f}$. Ist $\mathcal{T}_X$ irgendeine Topologie auf X, bezüglich der f stetig ist, so folgt aus Satz 2.1.4 dass $\mathcal{T}_{X,f} \subset \mathcal{T}_X$, also $\mathcal{T}_X$ feiner als $\mathcal{T}_{X,f}$ sein muss. □

Beispiel 2.3.2 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, sei $U \subset X$, und sei $i : U \longrightarrow X$ die* Injektion, *also $i(x) = x$ für alle $x \in U$. Es folgt aus obigem Lemma, dass die Unterraumtopologie auf U gleich $\mathcal{T}_{U,i}$ ist, also gleich der gröbsten Topologie, bezüglich der die Injektion stetig ist, denn für $O \in \mathcal{T}_X$ ist $i^{-1}(O) = O \cap U$.*

Definition 2.3.3 *Seien X eine beliebige nicht-leere Menge und $(Y_j, \mathcal{T}_j)$, für $j \in J$, topologische Räume, sowie $f_j : X \longrightarrow Y_j$, für $j \in J$, beliebige Abildungen. Die gröbste Topologie auf X, bezüglich der alle f_j stetig auf X sind, heißt dann* die von den f_j auf X (rückwärts) induzierte Topologie. *Da die Menge der Topologien auf X, für die alle f_j stetig sind, die diskrete Topologie enthält und somit nicht leer ist, gibt es diese gröbste Topologie, denn sie ist einfach der Durchschnitt aller Topologien auf X mit dieser Eigenschaft.*

Beispiel 2.3.4 (Schwache Topologie) *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$, und sei X^* die Menge aller stetigen und linearen Funktionale auf X, also die Menge aller stetigen linearen Abbildungen f von X nach $\mathbb{K}$. Die von diesen f auf X rückwärts induzierte Topologie heißt* die schwache Topologie auf X.

Beim „Berechnen" der rückwärts induzierten Topologie kann folgendes Resultat helfen:

Proposition 2.3.5 *Seien X eine beliebige nicht-leere Menge und $(Y_j, \mathcal{T}_j)$, für $j \in J$, topologische Räume, sowie $f_j : X \longrightarrow Y_j$, für $j \in J$, beliebige Abildungen. Sind $\mathcal{B}_j$, für $j \in J$, Basen der Topologien $\mathcal{T}_j$, so bilden die Mengen*

$$B^{(n)}_{j_1,\dots,j_n} \;=\; \bigcap_{k=1}^{n} f_{j_k}^{-1}(B_k) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad j_1,\dots,j_n \in J\,, \quad B_k \in \mathcal{B}_{j_k}$$

eine Basis für die rückwärts induzierte Topologie auf X.

Beweis: Wie man direkt überprüfen kann, sind die Eigenschaften einer Basis erfüllt. Seien $\mathcal{T}$ die rückwärts induzierte und $\tilde{\mathcal{T}}$ die zu dieser Basis gehörige Topologie. Da alle f_j bezüglich $\mathcal{T}$ stetig sind, folgt $f_{j_k}^{-1}(B_k) \in \mathcal{T}$ für alle $k = 1, \dots, n$, und deshalb sind auch alle $B^{(n)}_{j_1,\dots,j_n}$ in $\mathcal{T}$. Also gilt $\tilde{\mathcal{T}} \subset \mathcal{T}$. Für die Umkehrung seien $j \in J$ und $B \in \mathcal{B}_j$. Dann folgt $B^{(1)}_j = f_j^{-1}(B) \in \tilde{\mathcal{T}}$, und daher ist f_j bezüglich der Topologie $\tilde{\mathcal{T}}$ stetig auf X. Da dies für alle $j \in J$ gilt, folgt nach Definition der rückwärts induzierten Topologie $\mathcal{T} \subset \tilde{\mathcal{T}}$. □

Aufgabe 2.3.6 *Seien X eine beliebige nicht-leere Menge und $(Y_j, \mathcal{T}_j)$, für $j \in J$, topologische Räume, sowie $f_j : X \longrightarrow Y_j$, für $j \in J$, beliebige Abildungen, und $\mathcal{T}_X$ bezeichne die durch die f_j auf X rückwärts induzierte Topologie. Sei $(Z, \mathcal{T}_Z)$ ein weiterer topologischer Raum, und $f : Z \to X$ eine Abbildung. Zeige: Genau dann ist f auf Z stetig, wenn alle Abbildungen $f_j \circ f$ auf Z stetig sind.*

2.4 Die Produkttopologie

Definition 2.4.1 *Seien X_j, für $j \in J$, beliebige nicht-leere Mengen. Als* kartesisches Produkt *dieser Mengen bezeichnen wir die Menge aller Abbildungen $f : J \longrightarrow \cup_j X_j$ mit $f(j) \in X_j$ für alle $j \in J$. Wir schreiben für diese Menge auch $\prod_{j \in J} X_j$, und für ihre Elemente schreiben wir auch $(x_j, j \in J)$ oder einfach (x_j) und nennen jedes solche Element ein J-Tupel. Das sogenannte* Auswahlaxiom der Mengenlehre *besagt gerade, dass das kartesische Produkt nicht-leerer Mengen nicht leer ist. Wenn J eine endliche Menge ist, also o. B. d. A. $J = \{1, \dots, n\}$, so schreiben wir oft auch*

$$\prod_{j=1}^{n} X_j \;=\; X_1 \times \ldots \times X_n\,.$$

Für $j_0 \in J$ heißt die Abbildung

$$\pi_{j_0} : \prod_{j \in J} X_j \to X_{j_0}\,, \qquad \pi_{j_0}((x_j, j \in J)) \mapsto x_{j_0}$$

die j_0-te Projektion *auf* X_{j_0}. *Offenbar ist diese Abbildung surjektiv. Für topologische Räume* $(X_j, \mathcal{T}_j)$, $j \in J$, *heißt die von den Projektionen rückwärts induzierte Topologie auf dem kartesischen Produkt der* X_j die Produkttopologie *auf* $\prod_{j \in J} X_j$. *Wenn nichts anderes gesagt wird, soll in Zukunft ein kartesisches Produkt immer mit der Produkttopologie versehen sein.*

Aufgabe 2.4.2 *Überprüfe, dass die Produkttopologie in* $\mathbb{R}^n$, *aufgefasst als kartesisches Produkt von* n *„Kopien" der Menge der reellen Zahlen, gleich der euklidischen Topologie ist.*

Aufgabe 2.4.3 *Für topologische Räume* $(X_j, \mathcal{T}_j)$, $j \in J$ *sei das kartesische Produkt mit der Produkttopologie versehen. Zeige: Genau dann ist* U *eine Umgebung eines Punktes* (x_j) *des kartesischen Produktes, wenn es Mengen* $O_j \in \mathcal{T}_j$ *gibt, von denen höchstens endlich viele von* X_j *verschieden sind, so dass*

$$(x_j) \ \in \ \prod_{j \in J} O_j \ \subset U \,.$$

Aufgabe 2.4.4 *Gegeben seien topologische Räume* $(X_j, \mathcal{T}_j)$, $j \in J$ *und* $(Y, \mathcal{T}_Y)$, *sowie eine Abbildung* $f : Y \to \prod_{j \in J} X_j$. *Folgere aus* Aufgabe 2.3.6: f *ist genau dann stetig auf* Y, *wenn für alle* $j \in J$ *die Abbildungen* $\pi_j \circ f$ *auf* Y *stetig sind.*

Aufgabe 2.4.5 *Es seien* $(X_1, \mathcal{T}_1)$ *und* $(X_2, \mathcal{T}_2)$ *topologische Räume, und* $f : X_1 \to X_2$ *sei eine beliebige Abbildung. Mit* $G_f = \{(x, f(x)) : \ x \in X_1\} \subset X_1 \times X_2$ *sei* der Graph *von* f *bezeichnet. Zeige:*

(a) *Die Projektion* π_1, *eingeschränkt auf* G_f, *ist bijektiv und stetig.*

(b) *Die Umkehrabbildung* $\pi_1^{-1} : X_1 \to G_f$ *ist genau dann stetig auf* X_1, *wenn* f *auf* X_1 *stetig ist.*

2.5 Quotiententopologie

Lemma 2.5.1 *Seien* $(X, \mathcal{T})$ *ein topologischer Raum und* Y *eine nicht-leere Menge, sowie* $f : X \to Y$ *eine Abbildung. Dann ist*

$$\mathcal{T}_{Y,f} \ = \ \{O \subset Y : \ f^{-1}(O) \in \mathcal{T}\}$$

eine Topologie auf Y, *und zwar die feinste Topologie, für die* f *stetig auf* X *ist.*

Beweis: Wegen $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ und $f^{-1}(Y) = X$ folgt $\emptyset, X \in \mathcal{T}_{Y,f}$. Sind $O_j \in \mathcal{T}_{Y,f}$ für $j \in J$, so folgt wegen $\cup_j f^{-1}(O_j) = f^{-1}(\cup_j O_j)$ dass $\cup_j O_j \in \mathcal{T}_{Y,f}$ ist, und genauso schließt man für den Durchschnitt endlich vieler $O_j \in \mathcal{T}_{Y,f}$. In jeder Topologie $\mathcal{T}_1$ auf Y, für die f auf X stetig ist, folgt mit der Definition der Stetigkeit, dass für $O \in \mathcal{T}_1$ immer $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}$ sein muss, und deshalb folgt $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_{Y,f}$. □

Definition 2.5.2 *Unter den Voraussetzungen von* Lemma 2.5.1 *heißt* $\mathcal{T}_{Y,f}$ die von f auf Y (vorwärts) induzierte Topologie.

Aufgabe 2.5.3 *Unter den Voraussetzungen von* Lemma 2.5.1 *sei* $U = f(X)$ *eine echte Teilmenge von* Y, *d. h. mit anderen Worten,* f *ist nicht surjektiv. Zeige dass die von* f *auf* Y *vorwärts induzierte Topologie auf* $Y \setminus U$ *gleich der diskreten Topologie ist. Aus diesem Grund wird in Büchern oft bei der Einführung der vorwärts induzierten Topologie vorausgesetzt, dass* f *surjektiv ist.*

Definition 2.5.4 (Äquivalenzrelationen und Zerlegungen) *Sei eine nicht-leere Menge* X *gegeben. Eine Teilmenge* $R \subset X \times X$ *heißt* eine Relation *auf* X. *Wir sagen dass ein* $x_1 \in X$ *zu einem* $x_2 \in X$ in Relation steht, *wenn das Paar* (x_1, x_2) *zu* R *gehört. Eine solche Relation auf* X *heißt eine* Äquivalenzrelation, *falls für beliebige* $x, x_1, x_2, x_3 \in X$ *gilt:*

(R) $\quad (x,x) \in R$ (Reflexivität)

(S) $\quad (x_1,x_2) \in R \implies (x_2,x_1) \in R$ (Symmetrie)

(T) $\quad (x_1,x_2) \in R$ und $(x_2,x_3) \in R \implies (x_1,x_3) \in R$ (Transitivität)

Statt $(x_1,x_2) \in R$ schreiben wir dann auch $x_1 \sim x_2$ und sagen in Worten, dass x_1 äquivalent zu *x_2 ist. Für $x \in X$ nennen wir $A_x = \{\tilde{x} \in X : \quad x \sim \tilde{x}\ \}$ eine* Äquivalenzklasse*. Ein beliebiges Element von A_x heißt auch* ein Repräsentant *dieser Äquivalenzklasse.*

Für eine nicht-leere Menge X heißen nicht-leere Teilmengen X_j mit $j \in J$ eine Zerlegung von *X, falls*

$$\bigcup_{j\in J} X_j \;=\; X\,, \qquad X_j \cap X_k \;=\; \emptyset \qquad \forall\, j,k \in J \quad \text{mit } j \neq k\,.$$

Ist $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum, und ist eine solche Zerlegung von X gegeben, so sei $X^* = \{X_j : j \in J\}$, und $f : X \to X^*$ mit $f(x) = X_j$ für die eindeutig bestimmte Menge X_j mit $x \in X_j$ gesetzt. Die von diesem f auf X^* vorwärts induzierte Topologie heißt die Quotiententopologie *auf X^*.*

Aufgabe 2.5.5 *Wiederhole, dass eine Äquivalenzrelation auf X immer zu einer Zerlegung von X in Äquivalenzklassen führt. Zeige, dass umgekehrt eine Zerlegung von X auch eine Äquivalenzrelation auf X definiert, für die die Mengen X_j gerade die Äquivalenzklassen sind.*

Beispiel 2.5.6 (Torus) *Sei $X = [0,1]\times[0,1] \subset \mathbb{R}^2$. Wir zerlegen dieses Quadrat in folgende Teilmengen: Alle einelementigen Teilmengen von X, die einen inneren Punkt enthalten, sowie alle zweielementigen Mengen der Form $\{(x,0),(x,1)\}$ und $\{(0,y),(1,y)\}$ mit $0 < x,y < 1$ und eine vierelementige Menge $\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$. Der zu dieser Zerlegung gehörige, mit der Quotiententopologie versehene topologische Raum ist ein mögliches Modell des* Torus.

2.6 Konvergente Folgen und Folgenstetigkeit

Definition 2.6.1 *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum, und sei $(x_n, n \in \mathbb{N})$ eine Folge in X. Wir sagen, dass die Folge* konvergiert*, falls für ein $x \in X$ folgendes gilt:*

$$\forall\, U \in \mathcal{U}(x) \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geq N \;:\quad x_n \in U\,. \tag{2.6.1}$$

Jedes $x \in X$, für welches diese Bedingung erfüllt ist, heißt Grenzwert *der Folge, und wir schreiben dann*

$$x_n \;\to\; x \quad (n \to \infty) \qquad \text{oder} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x\,,$$

und sagen dann auch, dass (x_n) gegen x konvergiert.

Sind $(X,\mathcal{T}_X)$ und $(Y,\mathcal{T}_Y)$ zwei topologische Räume, so heißt eine Abbildung $f : X \to Y$ im Punkt *$x \in X$* folgenstetig*, wenn für alle Folgen (x_n) gilt*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \;=\; x \quad\implies\quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) \;=\; f(x)\,.$$

Beispiel 2.6.2 *Eine Folge $(x_n, n \in \mathbb{N})$ mit $x_n = x$ für alle genügend großen n soll im Folgenden „schließlich konstant“ genannt werden. Jede solche Folge erfüllt sicher (2.6.1) und ist also immer konvergent gegen x. Wenn auf X die diskrete Topologie betrachtet wird, dann ist $U = \{x\}$ offen, also eine Umgebung von x, und dann folgt dass (2.6.1) für dieses U nur dann gilt, wenn $(x_n, n \in \mathbb{N})$ schließlich konstant ist. Also sind die schließlich konstanten Folgen* die einzigen, welche in der diskreten Topologie konvergieren. *Wenn dagegen X mit der indiskreten Topologie versehen ist, dann ist $U = X$ die einzige Umgebung von x, und daher ist jetzt jede Folge gegen jedes $x \in X$ konvergent. Man sieht also insbesondere, dass* in einem allgemeinen topologischen Raum ein Grenzwert nicht eindeutig bestimmt sein muss.

Proposition 2.6.3 *Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ zwei topologische Räume, und sei die Abbildung $f : X \to Y$ stetig in einem Punkt $x \in X$. Dann ist f dort auch folgenstetig.*

Beweis: Sei $U \in \mathcal{U}(f(x))$. Dann ist auf Grund der Stetigkeitsvoraussetzung $f^{-1}(U) \in \mathcal{U}(x)$, und deshalb gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in f^{-1}(U)$ für alle $n \geq N$. Das bedeutet aber $f(x_n) \in U$ für alle diese n, woraus die Behauptung folgt. □

Bemerkung 2.6.4 *In der Analysis zeigt man, dass die Umkehrung von obiger Aussage in den dort betrachteten Fällen auch gilt. Dies ist in allgemeinen topologischen Räumen nicht der Fall und führt dann zur Einführung von Netzen an Stelle von Folgen. Dies soll hier ausgelassen werden. Wir werden aber sehen, dass die Umkehrung jedenfalls in metrischen Räumen richtig ist.*

Aufgabe 2.6.5 *Sei $E \subset X$, und sei $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge, deren Glieder alle zu E gehören. Zeige: Wenn $(x_n, n \in \mathbb{N})$ gegen ein $x \in X$ konvergiert, dann ist dieses x ein Berührungspunkt von E, und sogar ein Häufungspunkt, wenn $x_n \neq x$ für unendlich viele n gilt. Auch hier gilt im Allgemeinen nicht die Umkehrung!*

Kapitel 3

Trennungsaxiome

Die Tatsache, dass eine konvergente Folge im Allgemeinen mehrere Grenzwerte haben kann, ist ein Anlass dafür, zu den Axiomen für eine Topologie noch ein weiteres Axiom hinzuzufügen, welches dann zum Beispiel die Eindeutigkeit des Grenzwertes garantiert. Es gibt dabei verschiedene solche *Trennungsaxiome*. Wir wollen uns hier auf das nach *Hausdorff* benannte Axiom beschränken und dann als Verschärfung normale und reguläre Räume untersuchen.

3.1 Hausdorff-Räume

Definition 3.1.1 *Ein topologischer Raum* $(X, \mathcal{T})$ *heißt* Hausdorff-Raum, *wenn folgendes gilt:*

$$\text{(H)} \ \forall\, x_1, x_2 \in X \text{ mit } x_1 \neq x_2 \quad \exists\, U_1 \in \mathcal{U}(x_1)\,,\ U_2 \in \mathcal{U}(x_2)\ : \qquad U_1 \cap U_2 \ = \ \emptyset.$$

Die Bedingung (H) *heißt auch* Hausdorffsches Trennungsaxiom *oder* Hausdorff-Axiom. *In Worten ausgedückt bedeutet* (H) *dass man zu zwei verschiedenen Punkten von* X *zwei Umgebungen finden kann, welche diese Punkte trennen.*

Aufgabe 3.1.2 *Zeige dass jeder metrische Raum ein Hausdorff-Raum ist. Zeige weiter, dass in einem Hausdorff-Raum eine Folge höchstens eine Grenzwert haben kann.*

Aufgabe 3.1.3 *Sei* $(X, \mathcal{T})$ *ein Hausdorff-Raum, und seien* $x_0, x_1, \ldots, x_n \in X$ *alle verschieden, für ein* $n \in \mathbb{N}$. *Zeige: Dann gibt es* $U_j \in \mathcal{U}(x_j)$, *für* $j = 0, \ldots, n$, *welche paarweise disjunkt sind, für welche also* $U_j \cap U_k = \emptyset$ *ist für* $j \neq k$.

Aufgabe 3.1.4 *Gib ein Beispiel eines topologischen Raumes, für den endliche Teilmengen nicht immer abgeschlossen sind. Vergleiche dies mit Teil* (a) *des folgenden Satzes.*

Wenn nichts anderes gesagt ist, sei im Folgenden $(X, \mathcal{T})$ immer ein Hausdorff-Raum.

Satz 3.1.5 *In einem Hausdorff-Raum* $(X, \mathcal{T})$ *gelten folgende Aussagen:*

(a) *Jede endliche Teilmenge* $E \subset X$ *ist abgeschlossen.*

(b) *Für* $E \subset X$ *ist* $x \in E'$ *genau dann, wenn in jeder Umgebung von* x *unendlich viele Elemente von* X *liegen.*

Beweis: Eine endliche Menge ist Vereinigung von endlich vielen einelementigen Mengen, und deshalb genügt es für den Beweis von (a), eine einelementige Menge $E = \{x\}$ zu betrachten. Ist dann $x_1 \in X \setminus \{x\}$, so gibt es wegen (H) eine Umgebung U von x_1, welche x nicht enthält und deshalb ganz zu $X \setminus \{x\}$ gehört. Deshalb ist also $X \setminus \{x\}$ offen, und damit ist E abgeschlossen. Für den Beweis von (b) seien $x \in X$ und $U \in \mathcal{U}(x)$ so, dass in U nur endlich viele $x_1, \ldots, x_n \in E$ liegen. Aus der Aufgabe 3.1.3 folgt dann die Existenz einer kleineren Umgebung von x, welche keinen der Punkte von $E \setminus \{x\}$ enthält, und somit kann x kein Häufungspunkt von E sein. Die umgekehrte Implikation ist trivialerweise immer richtig. □

Satz 3.1.6

(a) *Jeder Unterraum eines Hausdorff-Raumes ist ein Hausdorff-Raum.*

(b) *Genau dann ist das kartesische Produkt $\prod_{j \in J} X_j$ von topologischen Räumen $(X_j, \mathcal{T}_j)$ ein Hausdorff-Raum, wenn alle $(X_j, \mathcal{T}_j)$ selber Hausdorff-Räume sind.*

Beweis: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein Hausdorff-Raum, und sei U eine nicht-leere Teilmenge von X, sowie $u_1, u_2 \in U$, mit $u_1 \neq u_2$. Dann gibt es (in X) Umgebungen $U_1 \in \mathcal{U}(u_1)$ und $U_2 \in \mathcal{U}(u_2)$ mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. O. B. d. A. seien U_1, U_2 offen. Dann sind aber $U \cap U_1$ und $U \cap U_2$ offen in der Spurtopologie, und daher gilt (a). Zum Beweis von (b) seien zunächst alle $(X_j, \mathcal{T}_j)$ Hausdorff-Räume. Wenn $(x_j^{(1)})$ und $(x_j^{(2)})$ zwei verschiedene Punkte des kartesischen Produktes sind, dann existiert ein $j_0 \in J$ mit $x_{j_0}^{(1)} \neq x_{j_0}^{(2)}$. Daher gibt es Umgebungen $U_{j_0}^{(1)} \in \mathcal{U}(x_{j_0}^{(1)})$ und $U_{j_0}^{(2)} \in \mathcal{U}(x_{j_0}^{(2)})$, deren Durchschnitt leer ist. Da nach Definition der Produkttopologie alle Projektionen stetig sind, sind die Mengen $\pi_{j_0}^{-1}(U_{j_0}^{(\nu)})$ Umgebungen von $(x_j^{(\nu)})$, und ihr Durchschnitt ist leer. Daher ist das kartesische Produkt ein Hausdorff-Raum. Umgekehrt, sei das kartesische Produkt Hausdorffsch, und seien $j_0 \in J$ und $x_{j_0}^{(1)} \neq x_{j_0}^{(2)}$ zwei Punkte aus X_{j_0}. Für $j \in J \setminus \{j_0\}$ wählen wir $x_j^{(1)} = x_j^{(2)} \in X_j$ und erhalten so zwei verschiedene Punkte $(x_j^{(1)})$ und $(x_j^{(2)})$ des kartesischen Produktes. Zu diesen gibt es dann disjunkte Umgebungen U_1 und U_2. Nach Aufgabe 2.4.3 existieren dann $O_j^{(1)}, O_j^{(2)} \in \mathcal{T}_j$ mit $O_j^{(\nu)} \neq X_j$ höchstens für endlich viele j, so dass für $\nu = 1$ und $\nu = 2$

$$(x_j^{(\nu)}) \;\in\; \prod_{j \in J} O_j^{(\nu)} \;\subset\; U_\nu\,.$$

Aus $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ folgt dann $O_{j_0}^{(1)} \cap O_{j_0}^{(2)} = \emptyset$, und daher ist X_{j_0} ein Hausdorff-Raum. Da aber j_0 jedes Element von J sein kann, folgt die Umkehrung. □

Satz 3.1.7 *In einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *$(X, \mathcal{T})$ ist ein Hausdorff-Raum.*

(b) $\forall\, x \in X \;:\; \displaystyle\bigcap_{U \in \mathcal{U}(x)} \overline{U} \;=\; \{x\}$.

(c) *Die* Diagonale $\Delta = \{\ (x,x) :\ x \in X\ \}$ *ist eine abgeschlossene Menge bezüglich der Produkttopologie auf $X \times X$.*

Beweis: Es gelte (a). Für $x_1 \neq x$ gibt es Umgebungen U von x und U_1 von x_1, welche leeren Durchschnitt haben. O. B. d. A. sei U_1 offen; sonst kann man zu einer offenen Teilmenge übergehen, die immer noch x_1 enthält. Dann ist $A = X \setminus U_1$ eine abgeschlossene Obermenge von U, also $\overline{U} \subset A$, und $x_1 \notin A$. Daher gilt (b). Um (c) aus (b) zu folgern, zeigen wir dass $X \times X \setminus \Delta$ offen ist. Dazu seien $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$. Dann gibt es ein $U \in \mathcal{U}(x_1)$ mit $x_2 \notin \overline{U}$, und somit ist $O = X \setminus \overline{U}$ offene Umgebung von x_2, also $U \times O$ eine Umgebung von (x_1, x_2), die keinen Punkt von Δ enthält. Das war zu zeigen. Wenn (c) gilt, wenn also $X \times X \setminus \Delta$ offen ist, dann gibt es zu $x_1 \neq x_2$ nach Aufgabe 2.4.3 zwei offene Mengen O_1, O_2 mit $(x_1, x_2) \in O_1 \times O_2 \subset X \times X \setminus \Delta$. Das heißt aber, dass O_j offene Umgebung von x_j ist, und dass $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ ist, und deshalb gilt (a). □

Aufgabe 3.1.8 *Zeige: Ein topologischer Raum* $(X, \mathcal{T})$ *ist genau dann ein Hausdorff-Raum, wenn es zu allen* $x_1, x_2 \in X$ *mit* $x_1 \neq x_2$ *eine abgeschlossene Umgebung von* x_1 *gibt, welche* x_2 *nicht enthält.*

Aufgabe 3.1.9 *Zeige unter den Voraussetzungen und mit den Bezeichnungen von* Aufgabe 2.4.5*: Wenn* $(X_2, \mathcal{T}_2)$ *ein Hausdorff-Raum und* f *auf* X_1 *stetig ist, dann ist* G_f *abgeschlossen in* $X_1 \times X_2$*.*

3.2 Reguläre Räume

Definition 3.2.1 *Ein Hausdorff-Raum* $(X, \mathcal{T})$ *heißt* regulär*, wenn folgendes richtig ist:*

$$\forall\ A \subset X\,,\ A \text{ abgeschl.} \quad \forall\ x \in X \setminus A \quad \exists\ O_1, O_2 \in \mathcal{T}\ :\quad x \in O_1\,,\ A \subset O_2\,,\quad O_1 \cap O_2\ =\ \emptyset\,. \tag{3.2.1}$$

Man sagt dann auch, dass man in einem regulären Raum eine abgeschlossene Menge A von jedem Punkt $x \notin A$ trennen kann*.*

Proposition 3.2.2 *Ein Hausdorff-Raum* $(X, \mathcal{T})$ *ist genau dann regulär, wenn gilt*

$$\forall\ x \in X \quad \forall\ U \in \mathcal{U}(x) \quad \exists\ O \in \mathcal{T}\ :\quad x \in O \subset \overline{O} \subset U\,.$$

Beweis: Sei X regulär, und seien $x \in X$ und $U \in \mathcal{U}(x)$. Dann gibt es ein $O_0 \in \mathcal{T}$ mit $x \in O_0 \subset U$, und zu $A = X \setminus O_0$ gibt es nach Definition der Regularität disjunkte Mengen $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ mit $x \in O_1$, $A \subset O_2$. Für $A_1 = X \setminus O_2$ folgt dann $x \in O_1 \subset A_1 \subset U$, und deshalb gilt die Bedingung des Satzes für $O = O_1$. Umgekehrt, sei jetzt A abgeschlossen, und sei $x \notin A$. Dann ist $U = X \setminus A$ eine offene Umgebung von x, und nach Voraussetzung gibt es ein $O \in \mathcal{T}$ mit $x \in O \subset \overline{O} \subset U$. Daher gilt (3.2.1) für $O_1 = O$ und $O_2 = X \setminus \overline{O}$, und somit ist $(X, \mathcal{T})$ regulär. □

Aufgabe 3.2.3 *Zeige: Unterräume von regulären Räumen sind wieder regulär.*

3.3 Normale Räume

Definition 3.3.1 *Ein Hausdorff-Raum* $(X, \mathcal{T})$ *heißt* normal*, wenn folgendes richtig ist:*

$$\forall\ A_1, A_2 \subset X\,,\ \text{abgeschl. und disjunkt,} \quad \exists\ O_1, O_2 \in \mathcal{T}\ :\quad A_1 \subset O_1\,,\ A_2 \subset O_2\,,\quad O_1 \cap O_2\ =\ \emptyset\,. \tag{3.3.1}$$

Man sagt dann auch, dass man in einem normalen Raum zwei disjunkte abgeschlossene Mengen trennen kann.

Aufgabe 3.3.2 *Zeige dass ein normaler Raum auch regulär ist.*

Proposition 3.3.3 *In einem Hausdorff-Raum* $(X, \mathcal{T})$ *sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $(X, \mathcal{T})$ *ist normal.*

(b) *Für jede abgeschlossene Menge* $A \subset X$ *und jede offene Obermenge* O *von* A *existiert eine offene Menge* O_1 *mit* $A \subset O_1 \subset \overline{O}_1 \subset O$*.*

(c) *Für zwei abgeschlossene disjunkte Mengen* $A_1, A_2 \subset X$ *gibt es eine offene Menge* O *mit* $A_1 \subset O$ *und* $\overline{O} \cap A_2 = \emptyset$*.*

Beweis: Sei (a) erfüllt, und sei A abgeschlossen sowie O offene Obermenge von A. Mit $A_1 = A$ und $A_2 = X \setminus O$ gilt $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, und deshalb gibt es $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ mit $A_\nu \subset O_\nu$ und $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Da $O_1 \subset X \setminus O_2$ ist, folgt $\overline{O}_1 \subset X \setminus O_2$. Das impliziert aber (b). Wenn jetzt $A_1, A_2 \subset X$ abgeschlossen und disjunkt sind, so folgt aus (b), angewandt auf $A = A_1$ und $O = X \setminus A_2$, die Existenz von $O_1 \in \mathcal{T}$ mit $A_1 \subset O_1 \subset \overline{O}_1 \subset X \setminus A_2$. Also gilt (c) für $O = O_1$. Seien schließlich A_1, A_2 abgeschlossen und disjunkt, dann folgt aus (c) die Existenz von $O \in \mathcal{T}$ mit $A_1 \subset O$ und $\overline{O} \cap A_2 = \emptyset$, also $A_2 \subset X \setminus \overline{O}$. Das ist aber gleichbedeutend mit (a). □

3.4 Reellwertige Funktionen und der Satz von Urysohn

Lemma 3.4.1 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, und sei $f : X \to \mathbb{R}$, wobei $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie versehen sei. Genau dann ist f stetig auf X, wenn die Mengen $\{x \in X : \ f(x) < a\}$ und $\{x \in X : \ f(x) > a\}$ für alle $a \in \mathbb{R}$ offen sind.*

Beweis: Die Notwendigkeit der Bedingung ist klar nach Satz 2.1.4. Wegen

$$\{x \in X : \ a < f(x) < b\} \ = \ \{x \in X : \ f(x) > a\} \cap \{x \in X : \ f(x) < b\} \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$$

und der Tatsache, dass die offenen Intervalle eine Basis der euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}$ bilden, gilt auch die Umkehrung. □

Lemma 3.4.2 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, und seien $f, g : X \to \mathbb{R}$ stetig auf X. Dann gilt:*

(a) $\forall\, a \geq 0 : \quad |f|^a$ *ist stetig auf X.*

(b) $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \quad \alpha\, f \ + \ \beta\, g$ *ist stetig auf X.*

(c) $f\, g$ *ist stetig auf X.*

(d) f/g *ist stetig auf X, falls $g(x) \neq 0$ ist für alle $x \in X$.*

Beweis: Zu (a): Der Fall $a = 0$ ist klar nach Aufgabe 2.1.2. Wegen $\{x \in X : \ |f(x)|^a > b\} = X$ für $b < 0$ bzw. $= \{x \in X : \ f(x) < -b^{1/a}\} \cup \{x \in X : \ f(x) > b^{1/a}\}$ für $b \geq 0$ folgt dass $\{x \in X : \ |f(x)|^a > b\}$ immer offen ist. Entsprechend argumentiert man für die Menge $\{x \in X : \ |f(x)|^a < b\}$. Die übrigen Aussagen folgen aus Satz 2.1.6, da die Abbildungen $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$ und $(x_1, x_2) \mapsto x_1\, x_2$ von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$, und die Inversion $x \mapsto 1/x$ von $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nach $\mathbb{R}$ bekanntlich stetig sind. □

Aufgabe 3.4.3 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, und seien $f_j : X \to \mathbb{R}$, für $j \in \mathbb{N}$, alle stetig auf X. Zeige: Falls es Konstanten $a_j > 0$ gibt, für welche*

$$|f_j(x)| \ \leq \ a_j \qquad \forall\, x \in X\,, \quad j \in \mathbb{N}\,, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} a_j \ < \ \infty\,,$$

dann definiert die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$ eine auf X stetige reellwertige Funktion.

Satz 3.4.4 (Satz von Urysohn) *Ein Hausdorff-Raum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann normal, wenn es zu zwei abgeschlossenen und disjunkten Mengen $A_1, A_2 \subset X$ eine stetige Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ gibt, für welche gilt:*

$$\forall\, x \in X \ : \quad 0 \leq f(x) \leq 1\,, \qquad f(x) \ = \ \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \in A_1\,, \\ 1 & \text{für} \quad x \in A_2\,. \end{cases}$$

Beweis: Es seien abgeschlossene und disjunkte Mengen A_1, A_2 gegeben. Wenn es solch ein f gibt, so seien $O_1 = f^{-1}((-\infty, 1/2))$ und $O_2 = f^{-1}((1/2, \infty))$ gesetzt. Dann sind O_1, O_2 offene und disjunkte Mengen, und $A_1 \subset O_1$ sowie $A_2 \subset O_2$. Also ist der Raum normal. Sei jetzt $(X, \mathcal{T})$ als normal vorausgesetzt. Die rationalen Zahlen im Intervall $[0,1]$ sind abzählbar, können also als eine Folge $(r_k, k \in \mathbb{N}_0)$, mit $r_0 = 0$ und $r_1 = 1$, geschrieben werden. Zu jedem r_k definieren wir induktiv eine offene Menge O_{r_k} nach folgendem Schema: Sei $O_1 = X \setminus A_2$, und O_0 so, dass $A_1 \subset O_0 \subset \overline{O}_0 \subset O_1$; dies ist möglich auf Grund von Proposition 3.3.3. Für ein $n \geq 1$ seien jetzt O_{r_k} mit $k = 0, \ldots, n$ bereits gewählt, und zwar so, dass gilt:

$$\forall\, 0 \leq j, k \leq n: \quad r_k < r_j \implies \overline{O}_{r_k} \subset O_{r_j}\,.$$

Beachte, dass dies für $n = 1$ richtig ist. Sei dann $\overline{r} = \min\{r_k : r_k > r_{n+1},\ 0 \leq k \leq n\}$ und $\underline{r} = \max\{r_k : r_k < r_{n+1},\ 0 \leq k \leq n\}$. Dann gilt also $\overline{O}_{\underline{r}} \subset O_{\overline{r}}$, und wir wählen $O_{r_{n+1}}$ so, dass $\overline{O}_{\underline{r}} \subset O_{r_{n+1}} \subset \overline{O}_{r_{n+1}} \subset O_{\overline{r}}$, was nach Proposition 3.3.3 immer möglich ist. Damit ist der nächste Schritt der Konstruktion gelungen. Zusammenfassend zeigt dies, dass wir zu jeder rationalen Zahl $r \in [0,1]$ eine offene Menge O_r bekommen, so dass $\overline{O}_r \subset O_s$ für $0 \leq r < s \leq 1$, $r, s \in \mathbb{Q}$. Wir setzen noch $O_r = \emptyset$ für $r < 0$ und $= X$ für $r > 1$. Sei jetzt $f(x) = \inf\{r \in \mathbb{Q} :\ x \in O_r\}$, für alle $x \in X$. Dann gilt immer:

(a) $\forall\, x \in X$: $\quad 0 \leq f(x) \leq 1$.

(b) $\forall\, x \in A_1$: $\quad x \in O_0$, also $f(x) = 0$.

(c) $\forall\, x \in A_2$: $\quad x \notin O_1$, also $f(x) = 1$.

(d) $\forall\, x \in \overline{O}_r$: $\quad x \in O_s$ für alle $s > r$, also $f(x) \leq r$.

(e) $\forall\, x \notin O_r$: $\quad x \notin O_s$ für alle $s \leq r$, also $f(x) \geq r$.

Für $a < b$ sei jetzt x_0 so, dass $f(x_0) \in (a, b)$ liegt. Dann gibt es $r, s \in \mathbb{Q}$ mit $a < r < f(x_0) < s < b$. Die Menge $O = O_s \setminus \overline{O}_r$ ist offen, und aus (d) und (e) folgt $x_0 \in O$. Weiter folgt

$$x \in O \implies \begin{cases} x \in O_s & \text{also} \quad f(x) \leq s < b\,, \\ x \notin O_r & \text{also} \quad f(x) \geq r > a\,. \end{cases}$$

Daher ist $f(O) \subset (a, b)$, oder anders ausgedrückt $O \subset f^{-1}((a, b))$. Also ist $f^{-1}((a, b))$ eine Umgebung von x_0, woraus die Stetigkeit von f im Punkt x_0 folgt. □

Aufgabe 3.4.5 *Zeige mit Hilfe des Satzes von Urysohn: Ist $(X, \mathcal{T})$ normal, und sind A_1, A_2 abgeschlossene und disjunkte Teilmengen von X, dann gibt es zu jedem abgeschlossenen Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ eine auf X stetige Funktion mit Werten in $[a, b]$, die auf A_1 bzw. A_2 konstant gleich a bzw. b ist.*

3.5 Der Fortsetzungssatz von Tietze

Satz 3.5.1 (Fortsetzungssatz von Tietze) *Sei A eine abgeschlossene Teilmenge eines normalen Raumes $(X, \mathcal{T})$. Dann lässt sich jede auf A bezüglich der Spurtopologie stetige reellwertige Funktion zu einer auf ganz X stetigen reellwertigen Funktion fortsetzen. Falls für $a, b \in \mathbb{R}$ die Werte von $f(x)$ für alle $x \in A$ im abgeschlossenen Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ liegen, so kann man dasselbe für die fortgesetzte Funktion erreichen.*

Beweis: (a) Sei f stetig auf A, und sei für ein $r > 0$ angenommen, dass $|f(x)| \leq r$ für alle $x \in A$ gilt. Nach Aufgabe 2.1.5 gilt für $I_1 = [-r, -r/3]$ und $I_2 = [r/3, r]$ dass $A_1 = f^{-1}(I_1)$ und $A_2 = f^{-1}(I_2)$ abgeschlossene Teilmengen in der Unterraumtopologie auf A sind. Da A in X abgeschlossen ist, folgt mit Aufgabe 1.7.3 dass A_1 und A_2 auch in der Topologie auf X abgeschlossen sind, und außerdem sind die beiden offenbar disjunkt. Nach dem Satz von Urysohn bzw. Aufgabe 3.4.5 gibt es also eine auf X stetige

Funktion g mit Werten im Intervall $[-r/3, r/3]$, mit $g(x) = -r/3$ für $x \in A_1$ bzw. $= r/3$ für $x \in A_2$. Für alle $x \in A$ gilt dann

$$|f(x) - g(x)| \leq \begin{cases} f(x) - r/3 \leq 2\,r/3 & \text{falls} \quad x \in A_2\,, \\ |f(x)| - r/3 \leq 2\,r/3 & \text{falls} \quad x \in A_1\,, \\ |f(x)| + |g(x)| \leq 2\,r/3 & \text{falls} \quad x \in A \setminus (A_1 \cup A_2)\,. \end{cases}$$

(b) Sei jetzt f stetig auf A, und sei angenommen, dass $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in A$ gilt. Nach (a) (mit $r = 1$) gibt es dann ein g_1, welches auf X stetig ist, Werte in $[-1/3, 1/3]$ hat, und die Abschätzung $|f(x) - g_1(x)| \leq 2/3$ für alle $x \in A$ erfüllt. Zu $f_1 = f - g_1$ gibt es dann, wiederum nach (a), aber jetzt mit $r = 2/3$, ein g_2, welches auf X stetig ist, Werte in $[-2/9, 2/9]$ hat, und die Abschätzung $|f_1(x) - g_2(x)| \leq (2/3)^2$ für alle $x \in A$ erfüllt. Allgemein seien schon $g_1, \ldots, g_n$ gefunden, welche auf X stetig sind, mit $|g_j(x)| \leq (2/3)^{j-1}/3$ für alle $x \in X$ und $j = 1, \ldots, n$, und für $f_j = f - \sum_{k=1}^{j} g_k$ sei $|f_j(x)| \leq (2/3)^j$ für alle $x \in A$ und $j = 1, \ldots, n$. Dies ist offenbar richtig für $n = 1$ und $n = 2$. Nach (a) gibt es dann zu f_n wieder ein g_{n+1}, stetig auf X, mit $|g_{n+1}(x)| \leq (2/3)^n/3$ für $x \in X$, und so dass $|f_n(x) - g_{n+1}(x)| \leq (2/3)^{n+1}$ ist für $x \in A$. Also erhalten wir eine Folge von Funktionen (g_j), welche alle auf X stetig sind, so dass die Reihe $g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j(x)$ auf X durch die geometrische Reihe $\sum (2/3)^j$ majorisiert wird. Nach Aufgabe 3.4.3 ist dann g auf X stetig, und

$$|f(x) - \sum_{j=1}^{n+1} g_j(x)| = |f_n(x) - g_{n+1}(x)| \leq (2/3)^{n+1} \qquad \forall\, x \in A\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Daraus folgt aber $f(x) = g(x)$ für $x \in A$. Das beweist den Fortsetzungssatz für den Fall $|f(x)| \leq 1$. Durch eine einfache Substitution führt man den Fall, dass die Werte von f in irgendeinem abgeschlossenen Intervall liegen, auf diesen Spezialfall zurück.

(c) Sei jetzt f beliebig, und sei $\tilde{f}(x) = \arctan(f(x))$ für $x \in A$. Die Werte dieser neuen Funktion liegen dann in $[-\pi/2, \pi/2]$, und deshalb gibt es ein $\tilde{g}$ mit Werten in diesem Intervall, welches $\tilde{f}$ fortsetzt. Sei $\tilde{A}$ die Menge der Punkte , für die $\tilde{g}$ die Werte $\pm\pi/2$ annimmt. Dies ist eine abgeschlossene Menge, und $\tilde{A} \cap A = \emptyset$. Also gibt es nach dem Satz von Urysohn eine auf X stetige Funktion h mit $h(x) = 0$ auf $\tilde{A}$ und $h(x) = 1$ auf A, und $0 \leq h(x) \leq 1$ sonst. Die Funktion $h\,\tilde{g}$ ist dann stetig auf X und hat Werte im offenen Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$, so dass $g(x) = \tan(h(x)\,\tilde{g}(x))$ auf X stetig ist. Nach Konstruktion folgt $g(x) = f(x)$ auf A. □

Definition 3.5.2 *Als* Träger*, in Englisch* support*, einer reellwertigen Funktion f auf einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ bezeichnen wir die Menge*

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in X : \ f(x) \neq 0\}}\,.$$

Satz 3.5.3 (Partition der Eins) *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein normaler Raum, und seien $O_1, \ldots, O_n \in \mathcal{T}$, mit $\cup_{j=1}^{n} O_j = X$. Dann gibt es auf X stetige Funktionen ϕ_j mit Werten im Intervall $[0, 1]$ und*

$$\operatorname{supp} \phi_j \subset O_j \quad \forall\, j = 1, \ldots, n\,, \qquad \sum_{j=1}^{n} \phi_j(x) = 1 \quad \forall\, x \in X\,.$$

Beweis: (a) Wir zeigen durch Induktion über $k \leq n$, dass es offene Mengen $V_1, \ldots, V_k$ gibt, für die $\overline{V}_j \subset O_j$, $1 \leq j \leq k$, und $V_1 \cup \ldots V_k \cup O_{k+1} \ldots \cup O_n = X$ gilt. Dies ist richtig für $k = 0$. Wenn es für $0 \leq k \leq n-1$ schon gilt, sei $A = X \setminus (V_1 \cup \ldots V_k \cup O_{k+2} \ldots \cup O_n)$ gesetzt. Dann ist A eine abgeschlossene Teilmenge von O_{k+1}, und wegen der Normalität gibt es eine offene Menge V_{k+1} so, dass $A \subset V_{k+1} \subset \overline{V}_{k+1} \subset O_{k+1}$. Also gilt die Behauptung auch für $k+1$.

(b) Durch zweimalige Anwendung von (a) folgt die Existenz von offenen Mengen W_j, V_j mit

$$W_j \subset \overline{W}_j \subset V_j \subset \overline{V}_j \subset O_j \quad 1 \leq j \leq n\,, \qquad W_1 \cup \ldots W_n \;=\; X\,.$$

Mit dem Satz von Urysohn folgt die Existenz von auf X stetigen Funktionen ψ_j mit Werten in $[0,1]$ und $\psi_j(x) = 1$ auf $\overline{W}_j$, $\psi_j(x) = 0$ auf $X \setminus V_j$. Es folgt supp $\psi_j \subset \overline{V}_j \subset O_j$, und $\psi(x) := \psi_1(x) + \ldots + \psi_n(x) > 0$ für alle $x \in X$. Also sind $\phi_j = \psi_j/\psi$ auf X stetig mit Werten in $[0,1]$ und Träger in O_j, und es gilt $\phi_1 + \ldots + \phi_2 \equiv 1$. □

Kapitel 4

Die Topologie metrischer Räume

Im ersten Abschnitt haben wir metrische Räume definiert und im folgenden Abschnitt ihre Topologie eingeführt. Jetzt wollen wir diese genauer untersuchen. Dabei soll, wenn nichts anderes gesagt ist, immer ein metrischer Raum (X, d) gegeben sein.

4.1 Normalität metrischer Räume

Definition 4.1.1 *Sei $F \subset X$ eine beliebige nicht-leere Teilmenge von X. Wir definieren*

$$d(x, F) \;=\; \inf\{d(x, u) :\; u \in F\} \qquad \forall\, x \in X\ . \tag{4.1.1}$$

Offenbar ist $d(x, F) = 0$ falls $x \in F$ ist, aber die Umkehrung braucht nicht zu gelten. Ist allgemeiner $G \subset X$ eine weitere nicht-leere Teilmenge von X, so sei

$$d(F, G) \;=\; \inf\{d(x, u) :\; x \in F\,,\; u \in G\}\ . \tag{4.1.2}$$

In Worten sprechen wir auch vom Abstand zweier Mengen *bzw. dem* Abstand eines Punktes von einer Menge.

Aufgabe 4.1.2 *Zeige: Ist A abgeschlossen, so ist $d(x, A) = 0$ genau dann, wenn $x \in A$ ist. Ist eine analoge Aussage für $d(A_1, A_2)$ richtig?*

Lemma 4.1.3 *Für jedes nicht-leere $F \subset X$ ist die Funktion $f(x) = d(x, F)$ auf X stetig.*

Beweis: Mit Hilfe der Dreiecksungleichung nach unten erhalten wir die Ungleichung $d(x_1, u) - d(x_2, u) \leq d(x_1, x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in X$ und $u \in F$. Daraus folgt auf Grund der Definition $d(x_1, F) - d(x_2, u) \leq d(x_1, x_2)$. Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $u \in F$ mit $d(x_2, F) \leq d(x_2, u) \leq d(x_2, F) + \varepsilon$, und für dieses u folgt $d(x_1, F) - d(x_2, F) - \varepsilon \leq d(x_1, x_2)$. Da dies für alle $\varepsilon > 0$ richtig ist, und da wir auch x_1 und x_2 vertauschen können, folgt $|d(x_1, F) - d(x_2, F)| \leq d(x_1, x_2)$. Daraus folgt aber die Behauptung. □

Satz 4.1.4 *Jeder metrische Raum ist normal.*

Beweis: Nach Aufgabe 3.1.2 ist jeder metrische Raum (X, d) ein Hausdorff-Raum. Sind A_1 und A_2 zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen von X, so setzen wir

$$f(x) \;=\; \frac{d(x, A_1)}{d(x, A_1) + d(x, A_2)} \qquad \forall\, x \in X\,.$$

Aus Aufgabe 4.1.2 folgt, dass der Nenner nie verschwindet, so dass f wohldefiniert ist. Mit Hilfe des vorangegangen Lemmas folgt die Stetigkeit von f auf X, und offenbar ist $0 \leq f(x) \leq 1$ für alle $x \in X$, sowie $f(x) = 0$ für $x \in A_1$ und $f(x) = 1$ für $x \in A_2$. Daraus folgt mit dem Satz von Urysohn die Behauptung. □

4.2 Folgenstetigkeit und gleichmäßige Konvergenz

Lemma 4.2.1 *Sei (X, d) metrischer Raum. Eine Folge (x_n) konvergiert genau dann gegen ein $x \in X$, wenn gilt:*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geq N : \quad d(x_n, x) < \varepsilon\,.$$

Ein $x \in X$ ist genau dann ein Berührungspunkt einer Teilmenge $F \subset X$, wenn es eine Folge von Punkten aus F gibt, welche gegen x konvergiert. Genau dann ist x sogar ein Häufungspunkt von F, wenn es eine Folge von Punkten aus $F \setminus \{x\}$ gibt, welche gegen x konvergiert.

Beweis: Es gelte $x_n \to x$ für $n \to \infty$. Da $U_\varepsilon(x)$ für $\varepsilon > 0$ eine Umgebung von x ist, folgt die Existenz von $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U_\varepsilon(x)$ für $n \geq N$. Die Umkehrung gilt aber ebenfalls, da jede Umgebung von x eine ε-Umgebung enthält. Per Definition ist x benau dann ein Berührungspunkt von F, wenn jede Umgebung U von x mindestens einen Punkt von F enthält und ein Häufungspunkt, wenn in jeder Umgebung ein Punkt von $F \setminus \{x\}$ liegt. Für $U = U_{1/n}(x)$ sei ein solcher Punkt mit x_n bezeichnet. Dann folgt sofort, dass die Folge (x_n) gegen x konvergiert. Die Umkehrung dieser Aussagen wurde allgemein in Aufgabe 2.6.5 gezeigt. □

Proposition 4.2.2 *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, und sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Genau dann ist f in einem Punkt $x \in X$ stetig, wenn es dort folgenstetig ist.*

Beweis: Nach Proposition 2.6.3 gilt die eine Richtung dieser Aussage sogar in topologischen Räumen. Für die Umkehrung sei angenommen, dass f in x nicht stetig ist. Dann gilt die Verneinung der Aussage (1.1.1), d. h.,

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, \delta > 0 \quad \exists\, x_\delta \in X \ : \quad d_X(x, x_\delta) < \delta\,, \quad d_Y(f(x), f(x_\delta)) \geq \varepsilon\,.$$

Wenn man $\delta = 1/n$ wählt, erhält man eine Folge von Punkten $x_n \in X$, die gegen x konvergieren, während die Bildfolge $(f(x_n))$ nicht gegen $f(x)$ geht. Also ist f nicht folgenstetig in x. □

Aufgabe 4.2.3 *Zeige, dass obige Proposition noch richtig bleibt, wenn man Abbildungen von einem metrischen in einen topologischen Raum betrachtet.*

Definition 4.2.4 *Seien X eine nicht-leere Menge und (Y, d) ein metrischer Raum. Eine Folge (f_n) von Abbildungen $f_n : X \to Y$ heißt* auf X

- punktweise konvergent*, falls die Folgen $(f_n(x))$ für alle $x \in X$ konvergieren. In diesem Fall sei der eindeutig bestimmte Grenzwert von $(f_n(x))$ mit $f(x)$ bezeichnet, und die hierdurch definierte Abbildung $f : X \to Y$ heißt auch die* Grenzfunktion *der Funktionenfolge (f_n).*
- gleichmäßig konvergent*, falls sie punktweise konvergent ist, und falls zusätzlich für die Grenzfunktion f gilt*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, x \in X : \quad d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon\,.$$

Beachte, dass die Definition der punktweisen Konvergenz auch in allgemeinen Hausdorff-Räumen sinnvoll ist. Die gleichmäßige Konvergenz allerdings läßt sich nicht allgemein formulieren, da man Umgebungen verschiedener Punkte nicht hinsichtlich ihrer „Größe“ vergleichen kann.

Satz 4.2.5 *Seien $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer und (Y,d) ein metrischer Raum, und sei die Folge (f_n) von Abbildungen von X nach Y auf X gleichmäßig konvergent. Wenn alle f_n in einem Punkt $x_0 \in X$ stetig sind, dann gilt dies auch für die Grenzfunktion f.*

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$, und sei $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $x \in X$ gilt $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon/3$, sofern $n \geq N$ ist. Sei weiter $U \in \mathcal{U}(x_0)$ derart, dass für $x \in U$ immer $d(f_N(x), f_N(x_0)) < \varepsilon/3$ ist. Dann folgt für diese x:

$$d(f(x), f(x_0)) \;\leq\; d(f(x), f_N(x)) \;+\; d(f_N(x), f_N(x_0)) \;+\; d(f_N(x_0), f(x_0)) \;<\; \varepsilon\,,$$

weswegen die Behauptung gilt. □

4.3 Äquivalente Metriken

Definition 4.3.1 *Zwei Metriken auf derselben nicht-leeren Menge X heißen* äquivalent *oder genauer* topologisch äquivalent*, wenn sie dieselbe Topologie erzeugen.*

Aufgabe 4.3.2 *Zeige: Der Begriff der Äquivalenz hat auf der Menge aller Metriken auf einer festen, nicht-leeren Menge X die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation.*

Satz 4.3.3 *Zwei Metriken d_1, d_2 auf einer nicht-leeren Menge X sind genau dann äquivalent, wenn folgendes gilt:*

$$\forall\ x_0 \in X \quad \forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta_1, \delta_2 > 0 \quad \forall\ x \in X \ : \qquad \begin{cases} d_1(x,x_0) < \delta_1 & \Longrightarrow \quad d_2(x,x_0) < \varepsilon\,, \\ d_2(x,x_0) < \delta_2 & \Longrightarrow \quad d_1(x,x_0) < \varepsilon\,. \end{cases}$$

Beweis: Seien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ die von den beiden Metriken erzeugten Topologien auf X. Genau dann sind die Metriken äquivalent, wenn die identische Abildung *id*, aufgefasst als Abbildung zwischen den topologischen Räumen $(X,\mathcal{T}_1)$ und $(X,\mathcal{T}_2)$ und umgekehrt, auf X stetig ist. Wenn man dies mit (1.1.1) vergleicht, folgt der Beweis. □

Beispiel 4.3.4 *In $\mathbb{R}^n$ benutzt man oft die Metriken d_p aus* Beispiel 1.1.5 *für $1 \leq p \leq \infty$. Man beweist sehr einfach die Ungleichung*

$$d_\infty(x,y) \;\leq\; d_p(x,y) \;\leq\; n^{1/p}\, d_\infty(x,y) \qquad \forall\ x,y \in \mathbb{R}^n \quad \forall\ p \in [1,\infty)\,,$$

woraus zunächst die Äquivalenz von d_∞ und d_p folgt. Die Eigenschaften der Äquivalenzrelation sichern dann dass allgemein zwei beliebige solche Metriken äquivalent sind. Beachte aber, dass z. B. die diskrete Metrik auf $\mathbb{R}^n$ nicht *zu einer der p-Metriken äquivalent ist.*

Aufgabe 4.3.5 *Sei (X,d) ein metrischer Raum, und sei $d_b(x,y) = d(x,y)/(1+d(x,y))$ für alle $x,y \in X$ gesetzt. Zeige:*

(a) *d_b ist eine Metrik auf X.*

(b) *Es gilt $(1/2)\,\min\{1, d(x,y)\} \leq d_b(x,y) \leq d(x,y)$ für alle $x,y \in X$.*

(c) *Die Metriken d und d_b sind äquivalent auf X.*

Satz 4.3.6 *Seien $((X_n, d_n), n \in \mathbb{N})$ abzählbar unendlich viele metrische Räume. Dann ist ihr kartesisches Produkt ebenfalls ein metrischer Raum mit der Metrik*

$$d((x_n),(y_n)) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \,\frac{d_n(x_n,y_n)}{1+d_n(x_n,y_n)}\;,$$

und die von d erzeugte Topologie ist gleich der Produkttopologie.

Beweis: Die Eigenschaften der Metrik folgen mit Hilfe der oben stehenden Aufgabe. Mit derselben Aufgabe und der Ungleichung

$$d((x_n),(y_n)) \;\geq\; 2^{-n}\,\frac{d_n(x_n,y_n)}{1+d_n(x_n,y_n)} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

folgt die Stetigkeit aller Projektionen, und deshalb ist die Produkttopologie gröber als die von d erzeugte. Sei jetzt $O \subset X$ offen bezüglich d, und sei $(x_n) \in O$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ so dass alle (y_n) mit $d((x_n),(y_n)) < \varepsilon$ zu O gehören. Sei $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $\sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} < \varepsilon/2$, und sei

$$\tilde{O} \;=\; U_{\varepsilon/2}(x_1) \times \ldots \times U_{\varepsilon/2}(x_N) \times X_{N+1} \times X_{N+1} \times \ldots$$

Dann ist $\tilde{O}$ eine der offenen Mengen der Produkttopologie, und für $(y_n) \in \tilde{O}$ folgt $d((x_n),(y_n)) \leq (\varepsilon/2)\sum_{n=1}^{N} 2^{-n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} < \varepsilon$, also $(y_n) \in O$. Daher ist O auch in der Produkttopolgie offen, und daher gilt die Behauptung. □

Aufgabe 4.3.7 *Zeige: Auf dem kartesischen Produkt* endlich vieler *metrischer Räume (X_n, d_n), für $n = 1, \ldots, m$, ist*

$$d((x_1,\ldots,x_m),(y_1,\ldots,y_m)) \;=\; \sum_{n=1}^{m} d_n(x_n,y_n)\,.$$

eine Metrik, die die Produkttopologie erzeugt.

Aufgabe 4.3.8 *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Zeige: Die Abbildung $(x_1,x_2) \mapsto d(x_1,x_2)$ von $X \times X$ nach $\mathbb{R}$ ist stetig auf $X \times X$.*

Kapitel 5

Die Abzählbarkeitsaxiome

5.1 Das erste Abzählbarkeitsaxiom

Definition 5.1.1 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, und sei $x \in X$. Dann sagen wir:*

(a) *Im Punkt x gibt es eine* abzählbare Umgebungsbasis*, falls es eine Folge von $O_n \in \mathcal{U}_0(x)$, mit $n \in \mathbb{N}$, gibt sodass*

$$\forall\, U \in \mathcal{U}(x) \quad \exists\, n \in \mathbb{N} \; : \qquad x \in O_n \subset U\,.$$

(b) *Der Raum $(X, \mathcal{T})$ genügt dem* ersten Abzählbarkeitsaxiom*, wenn in jedem Punkt $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis existiert.*

Beispiel 5.1.2 *In einem metrischen Raum sind $U_{1/n}(x)$, $n \in \mathbb{N}$, eine abzählbare Umgebungsbasis eines Punktes x, und deshalb ist das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Kartesische Produkte von überabzählbar vielen metrischen Räumen erfüllen dagegen im Allgemeinen dieses Axiom nicht.*

Proposition 5.1.3 *Sei das erste Abzählbarkeitsaxiom in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ erfüllt. Dann gilt:*

(a) *Für eine Teilmenge $E \subset X$ ist $x \in \overline{E}$ genau dann, wenn x Grenzwert einer Folge von Punkten aus E ist.*

(b) *Ist $(Y, \mathcal{T}_Y)$ ein beliebiger topologischer Raum, so ist eine Abbildung $f : X \to Y$ genau dann in einem Punkt $x_0 \in X$ stetig, wenn sie dort folgenstetig ist.*

Beweis: Die eine Richtung von (a) und (b) gilt für allgemeine topologische Räume $(X, \mathcal{T})$. Sei jetzt $x_0 \in \overline{E}$, und seien die O_n eine Umgebungsbasis im Punkt x_0. Dann gibt es in $U_n = O_1 \cap \ldots \cap O_n$ immer einen Punkt $x_n \in E$. Wenn $U \in \mathcal{U}(x_0)$ ist, dann gibt es nach Definition der Umgebungsbasis ein $m \in \mathbb{N}$ mit $x \in O_m \subset U$, und nach Wahl der x_n folgt hieraus $x_n \in U$ für $n \geq m$. Daher konvergiert die Folge (x_n) gegen x_0. Sei jetzt f im Punkt x_0 unstetig. Dann gibt es eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(f(x_0))$ so, dass $f^{-1}(U)$ keine Umgebung von x_0 ist. Mit U_n wie oben gibt es dann in jedem U_n einen Punkt x_n, welcher nicht zu $f^{-1}(U)$ gehört. Genau wie zuvor folgt die Konvergenz von (x_n) gegen x_0, während die Bildfolge $(f(x_n))$ nicht gegen $f(x_0)$ konvergieren kann, da alle $f(x_n)$ außerhalb von U liegen. Daher ist f in x_0 nicht folgenstetig. $\square$

5.2 Das zweite Abzählbarkeitsaxiom

Definition 5.2.1 *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ genügt dem* zweiten Abzählbarkeitsaxiom*, wenn seine Topologie eine abzählbare Basis hat.*

Bemerkung 5.2.2 *Offenbar folgt aus der Gültigkeit des zweiten Abzählbarkeitsaxioms die des ersten. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.*

Proposition 5.2.3 *Genügt ein topologischer Raum dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom, so tut dies auch jeder Unterraum. Gilt das zweite Abzählbarkeitsaxiom in abzählbar vielen topologischen Räumen, dann ist es auch in deren kartesischem Produkt erfüllt.*

Beweis: Die erste Behauptung ist klar nach Definition der Spurtopologie. Die zweite folgt ebenfalls leicht aus der Definition der Produkttopologie und der Tatsache, dass die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen selber abzählbar ist. □

Definition 5.2.4 *In einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ nennt man eine Teilmenge $E \subset X$* dicht in X*, wenn $\overline{E} = X$ ist. Besitzt X eine abzählbare dichte Teilmenge, so heißt der Raum auch* separabel*. Weiter heißen Mengen $O_j \in \mathcal{T}$, $j \in J$, eine* offene Überdeckung *von X, falls $\cup_j O_j = X$ ist. Man nennt $(X, \mathcal{T})$ auch* Lindelöf-Raum*, wenn jede offene Überdeckung eine abzählbare Teilüberdeckung enthält.*

Satz 5.2.5

(a) *Ein topologischer Raum, welcher dem zweiten Abzählbarkeitaxiom genügt, ist separabel und ein Lindelöf-Raum.*

(b) *Ein separabler metrischer Raum genügt dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom.*

(c) *Ein metrischer Lindelöf-Raum genügt dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom.*

Beweis: Zu (a): Sei $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ Basis der Topologie auf X, und seien o. B. d. A alle $B_n \neq \emptyset$. Wähle ein $x_n \in B_n$ für $n \geq 1$ und setze $E = \{x_n : n \geq 1\}$. Zu jedem $x \in X$ und jedem $U \in \mathcal{U}(x)$ gibt es ein $n \geq 1$ so, dass $x \in B_n \subset U$ ist, und deshalb ist $x \in \overline{E}$, also E dicht in X. Ist weiter $(O_j, j \in J)$ eine offene Überdeckung von X, so bilden diejenigen $n \in \mathbb{N}$, für die ein $j \in J$ mit $O_j \supset B_n$ existiert, eine (evtl. sogar endliche) Teilfolge n_m der natürlichen Zahlen. Nach Definition der Basis gibt es aber zu jedem $j \in J$ und jedem $x \in O_j$ ein B_n mit $x \in B_n \subset O_j$, und da $(O_j, j \in J)$ eine offene Überdeckung sind, gilt dasselbe auch für die B_{n_m}. Wenn wir jetzt zu jedem m ein $j_m \in J$ auswählen, für welches $B_{n_m} \subset O_{j_m}$ ist, erhalten wir eine abzählbare Teilüberdeckung.

Zu (b): Sei $E = \{x_1, x_2, \dots\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge des metrischen Raumes (X, d). Für jede offene Menge O und jedes $x \in O$ gibt es dann ein $n \in \mathbb{N}$ mit $U_{1/n}(x) \subset O$. In $U_{1/(3n)}(x)$ findet sich mindestens ein $x_m \in E$, und dann ist $x \in U_{2/(3n)}(x_m) \subset U_{1/n}(x) \subset O$. Daher bildet die Menge aller Kugeln mit den Mittelpunkten $x_1, x_2, \dots$ und Radien $2/(3m)$, $m \in \mathbb{N}$, eine abzählbare Basis der Topologie.

Zu (c): Die Menge der Kugeln mit beliebigen Mittelpunkten und Radius $1/n$, mit festem $n \in \mathbb{N}$, sind eine offene Überdeckung des Raumes und besitzen deshalb eine abzählbare Teilüberdeckung. In anderen Worten heißt das, dass es eine abzählbare Menge E_n gibt, so dass die Kugeln mit Radius $1/n$ und Mittelpunkten in E_n den Raum überdecken. Die Vereinigung aller E_n ist ebenfalls abzählbar und dicht im Raum, denn zu jedem Punkt x und jedem $U \in \mathcal{U}(x)$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $U_{1/n}(x) \subset U$, und in $U_{1/n}(x)$ findet sich dann mindestens ein $x_m \in E_n$; also folgt $x_m \in U$. Das bedeutet, dass dieser Raum separabel ist und deshalb wegen (b) das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. □

Satz 5.2.6 *Ein regulärer Raum, welcher dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügt, ist normal.*

Beweis: Sei $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots\}$ Basis von $(X, \mathcal{T})$, und seien A_1, A_2 abgeschlossene und disjunkte Teilmengen von X. Zu $x \in A_1$ existiert nach Proposition 3.2.2 ein $O \in \mathcal{T}$ mit $x \in O \subset \overline{O} \subset X \setminus A_2$, und hierzu gibt es wiederum ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in B_n \subset O$. Also gibt es eine Teilfolge $(n_k^{(1)})$ der natürlichen Zahlen mit

$$A_1 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{n_k^{(1)}}, \qquad \overline{B}_{n_k^{(1)}} \subset X \setminus A_2 .$$

Durch Vertauschen der Bezeichungen folgt die Existenz einer anderen Teilfolge $(n_k^{(2)})$ mit

$$A_2 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{n_k^{(2)}}, \qquad \overline{B}_{n_k^{(2)}} \subset X \setminus A_1 .$$

Wir definieren jetzt

$$U_k = B_{n_k^{(1)}} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k} \overline{B}_{n_j^{(2)}} \right), \qquad V_k = B_{n_k^{(2)}} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k} \overline{B}_{n_j^{(1)}} \right).$$

Wegen $V_k \subset B_{n_k^{(2)}} \subset X \setminus U_j$ für $j \geq k$, bzw. $U_j \subset B_{n_1^{(1)}} \subset X \setminus V_k$ für $k \geq j$ finden wir, dass $U_j \cap V_k = \emptyset$ gilt für alle $j, k \in \mathbb{N}$. Daher folgt

$$A_1 \subset U := \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k, \qquad A_2 \subset V := \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k, \qquad U \cap V = \emptyset,$$

und deshalb ist der Raum normal. □

Satz 5.2.7 *In jedem regulären Raum $(X, \mathcal{T})$, welcher dem zweiten Abzählbarkeitsaxion genügt, gilt:*

(a) *Eine offene Teilmenge O von X ist Vereinigung von abzählbar vielen abgeschlossenen Mengen.*

(b) *Zu jedem $O \in \mathcal{T}$ gibt es eine auf X stetige Abbildung $f : X \to [0, 1]$, die auf O positiv ist und außerhalb von O identisch verschwindet.*

Beweis: Sei $x \in O$. Mit Proposition 3.2.2 folgt die Existenz einer offenen Menge O_1 mit $x \in O_1 \subset \overline{O}_1 \subset O$, und daher gibt es eine Basismenge B_n mit $x \in B_n \subset O_1$, also $x \in \overline{B}_n \subset \overline{O}_1 \subset O$. Also ist O Vereinigung der abgeschlossenen Hüllen einer Teilfolge von Basismengen, und daher gilt (a). Sei jetzt $O = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, mit abgeschlossenen Mengen A_n, und sei $A = X \setminus O$. Dann ist also A abgeschlossen und mit jedem A_n disjunkt. Wegen Satz 5.2.6 ist der Raum $(X, \mathcal{T})$ normal, und deshalb gibt es nach dem Urysohnschen Satz eine auf X stetige Funktion $f_n : X \to [0, 1]$, die auf A_n den Wert 1 und auf A den Wert 0 annimmt. Die Reihe $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f_n(x)$ ist auf X gleichmäßig konvergent, und daher hat f die für (b) gewünschten Eigenschaften. □

5.3 Der Urysohnsche Metrisationssatz

Definition 5.3.1 *Wir nennen einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$* metrisierbar*, wenn es auf X eine Metrik gibt, welche die Topologie $\mathcal{T}$ erzeugt; genauer heißt das, dass die Mengen $O \in \mathcal{T}$ genau diejenigen sind, welche offen im Sinn von* Definition 1.1.13 *sind.*

Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen zwei topologischen Räumen $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ heißt bistetig *oder* ein Homöomorphismus*, wenn sie bijektiv ist und wenn f und f^{-1} stetig auf X bzw. Y sind. Falls es ein solches f gibt, dann heißen die Räume $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$* homöomorph.

Aufgabe 5.3.2 *Zeige dass eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$, für topologische Räume $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$, genau dann bistetig ist, wenn gilt $O \in \mathcal{T}_X \iff f(O) \in \mathcal{T}_Y$. Zeige weiter, dass die Eigenschaft der Homöomorphie eine Äquivalenzrelation auf jeder Menge von topologischen Räumen ist.*

Lemma 5.3.3 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, sei (Y, d) ein metrischer Raum, und seien die Räume homöomorph. Dann ist $(X, \mathcal{T})$ metrisierbar. Anders ausgedrückt: Ist von zwei homöomorphen topologischen Räumen einer metrisierbar, so ist es auch der andere.*

Beweis: Sei $f : X \to Y$ bistetig, und sei für $x_1, x_2 \in X$ definiert $d_X(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2))$. Dann ist d_X eine Metrik auf X, und bezüglich dieser Metrik sind Mengen $O \subset X$ genau dann offen, wenn $f(O)$ (in Y) offen ist. Dies ist aber genau dasselbe wie die Bistetigkeit von f. □

Satz 5.3.4 (Urysohnscher Metrisationssatz) *Ein regulärer Raum $(X, \mathcal{T})$, welcher dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügt, ist metrisierbar.*

Beweis: Sei $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Basis von $\mathcal{T}$. Nach dem letzten Satz gibt es auf X stetige Abbildungen $f_n : X \to [0, 1]$, welche auf B_n positiv sind und außerhalb von B_n identisch verschwinden. Auf Grund der Basiseigenschaft folgt

$$\forall\, x_0 \in X \quad \forall\, U \in \mathcal{U}(x_0) \quad \exists\, n \in \mathbb{N}\ : f_n(x_0)\ >\ 0\,, \quad f_n(x) = 0\ \forall\, x \notin U\,. \tag{5.3.1}$$

Wir definieren F als Abbildung von X in $Y := \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}$ durch $F(x) = (f_n(x))_{n=1}^{\infty}$. Wenn wir auf Y die Produkttopologie betrachten, ist F stetig auf X; dies folgt z. B. mit Aufgabe 4.3.6, da für jede Projektion π_j gilt $\pi_j \circ f = f_j$. Aus $F(x) = F(\tilde{x})$ folgt $f_n(x) = f_n(\tilde{x})$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und hieraus folgt $x = \tilde{x}$, denn sonst gäbe es ein $U \in \mathcal{U}(\tilde{x})$ mit $x \notin U$, und daraus ergäbe sich ein Widerspruch zu (5.3.1). Also ist F injektiv. Nach Satz 4.3.6 ist Y metrisierbar. Also ist die Menge $\tilde{Y} = F(X)$ ebenfalls ein metrischer Raum, und $F : X \to \tilde{Y}$ ist bijektiv und stetig auf X. Wenn wir jetzt noch die Stetigkeit der Umkehrfunktion F^{-1} zeigen, folgt die Behauptung aus dem letzten Lemma. Wenn $O \in \mathcal{T}$ und $x_0 \in O$ ist, dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_0 \in B_{n_0} \subset \overline{B}_{n_0} \subset O$, und deshalb ist $f_{n_0}(x_0) > 0$ und $f_{n_0}(x) = 0$ für $x \notin O$. Die Menge $W = \{(y_n) :\ \ y_{n_0} > 0\}$ ist offen in Y, und somit ist $W \cap \tilde{Y}$ offen im Unterraum $\tilde{Y}$. Es gilt $F(x_0) \in W \cap \tilde{Y} \subset F(O)$, wobei die letzte Inklusion sich wie folgt ergibt: Für $y \in W \cap \tilde{Y}$ gibt es ein x so, das $y = F(x)$, und aus $F(x) \in W$ folgt dass $f_{n_0}(x) > 0$ ist, und somit ist $x \in O$. Das zeigt, dass $F(O)$ offen ist, und daraus folgt die Stetigkeit von F^{-1} auf X. □

Kapitel 6

Kompakte Räume

6.1 Definition der Kompaktheit

Definition 6.1.1 *Eine Teilmenge K eines Hausdorff-Raumes $(X, \mathcal{T})$ heißt* kompakt*, wenn jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Ist dies der Fall für $K = X$, so nennen wir $(X, \mathcal{T})$ auch* einen kompakten Raum*.*

Aufgabe 6.1.2 *Zeige: Eine Teilmenge eines Hausdorff-Raumes $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann kompakt, wenn sie als Unterraum, versehen mit der Spurtopologie, ein kompakter Raum ist.*

Aufgabe 6.1.3 *Zeige: Sind Teilmengen $K_1, \ldots, K_N$ eines Hausdorff-Raumes $(X, \mathcal{T})$ alle kompakt, so ist es auch ihre Vereinigung. Finde selber heraus, was man über den Durchschnitt kompakter Teilmengen sagen kann, und welche Teilmengen immer kompakt sind.*

Proposition 6.1.4 *Ein Hausdorff-Raum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann kompakt, wenn für jedes System $(A_j, j \in J)$ von abgeschlossenen Teilmengen von X, für die $\cap_j A_j = \emptyset$ ist, die Existenz von $j_1, \ldots, j_n \in J$ folgt, für welche bereits $\cap_{\nu=1}^{n} A_{j_\nu} = \emptyset$ ist.*

Beweis: Folgt mit der Definition der Kompaktheit aus den de Morganschen Regeln. □

Proposition 6.1.5 *In jedem Hausdorff-Raum sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *Jede abzählbare offene Überdeckung von X besitzt eine endliche Teilüberdeckung.*

(b) *Jede unendliche Teilmenge von X besitzt mindestens einen Häufungspunkt.*

(c) *Sind A_k, für $k \in \mathbb{N}$, nicht-leere abgeschlossene Mengen, für welche $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ gilt, so folgt $\cap_{k=1}^{\infty} A_k \neq \emptyset$.*

Beweis: Sei E eine unendliche Teilmenge von X ohne Häufungspunkt. O. B. d. A. sei $E = \{x_1, x_2, \ldots\}$ abzählbar unendlich, denn sonst können wir E verkleinern. Zu jedem $x_n \in E$ gibt es dann eine offene Umgebung O_n, die keinen der anderen Punkte von E enthält, denn andernfalls wäre x_n ein Häufungspunkt von E. Da E' leer ist, ist E insbesondere abgeschlossen. Also ist $O = X \setminus E$ offen, und O zusammen mit allen O_n ergibt eine offene Überdeckung von X *ohne endliche Teilüberdeckung.* Also folgt, dass (a) die Aussage (b) impliziert.

Seien jetzt die A_k wie in (c). Wir wählen ein $x_k \in A_k$ für $k \in \mathbb{N}$ und setzen $A = \{x_k : \ k \in \mathbb{N}\}$. Falls A eine endliche Menge ist, gibt es ein x_n, welches in unendlich vielen A_k liegt, und dann ist aber $x_n \in A_k$ für alle k, also auch in deren Durchschnitt. Falls dies nicht eintritt, und falls (b) richtig ist, muss A einen Häufungspunkt x besitzen. Nach Satz 3.1.5 liegen dann in jeder Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ unendlich viele der $x_k \in E$. Daher ist x auch ein Häufungspunkt jeder der Mengen A_k, und da diese abgeschlossen sind, folgt $x \in A_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Also folgt (c) aus (b). Seien jetzt $(O_k, k \in \mathbb{N})$ eine offene Überdeckung von X. Dann sind die Mengen

$$A_k = X \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k} O_j \right) \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

abgeschlossen, und es gilt $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ sowie $\cap_{k=1}^{\infty} A_k = \emptyset$. Also folgt aus (c), dass mindestens ein A_k leer sein muss. Dies ist aber äquivalent zu (a). □

Korollar zu Proposition 6.1.5 *Ein Hausdorff-Raum, welcher zugleich ein Lindelöf-Raum ist, ist kompakt, wenn eine der drei Aussagen aus* Proposition 6.1.5 *erfüllt ist.*

6.2 Kompaktheit von Unterräumen und Normalität

Satz 6.2.1 *In jedem Hausdorff-Raum $(X, \mathcal{T})$ gilt stets:*

(a) *Falls $(X, \mathcal{T})$ kompakt ist, dann ist jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset X$ ebenfalls kompakt.*

(b) *Falls eine Teilmenge $E \subset X$ kompakt ist, dann ist sie auch abgeschlossen.*

(c) *Für jede kompakte Teilmenge $A \subset X$ gilt immer*

$$\forall\, x \notin A \quad \exists\, O_1, O_2 \in \mathcal{T}: \quad x \in O_1\,, \quad A \subset O_2\,, \quad O_1 \cap O_2 = \emptyset\,.$$

Beweis: Zu (a): Seien $(O_j, j \in J)$ eine offene Überdeckung von A. Zusammen mit $O = X \setminus A$ bilden diese eine Überdeckung von X, und es muss also eine endliche Teilüberdeckung geben. Diese endlich vielen Mengen, evtl. nach Auslassen von O, bilden eine endliche Teilüberdeckung (für A) von $(O_j, j \in J)$, was zu zeigen war. Für den Beweis von (b) sei $x_0 \notin E$. Da $(X, \mathcal{T})$ ein Hausdorff-Raum ist, folgt für jedes $x \in E$ die Existenz von offenen Mengen O_x und V_x mit $x_0 \in V_x$, $x \in O_x$, und $O_x \cap V_x = \emptyset$. Die O_x sind offenbar eine Überdeckung von E, und deshalb muss es endlich viele $x_1, \ldots, x_n$ mit $E \subset O_{x_1} \cup \ldots \cup O_{x_n}$. Sei $V = V_{x_1} \cap \ldots \cap V_{x_n}$. Dieses V ist offen, und $V \cap (O_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n}) = \emptyset$. Also folgt $x_0 \in V \subset X \setminus E$, und daher ist $X \setminus E$ offen, also E abgeschlossen. Teil (c) folgt bereits aus dem Beweis von (b). □

Satz 6.2.2 *Jeder kompakte Raum $(X, \mathcal{T})$ ist normal.*

Beweis: Sind $A_1, A_2 \subset X$ abgeschlossen und disjunkt, so folgt aus Teil (a) und (c) von Satz 6.2.1

$$\forall\, x \in A_1 \quad \exists\, O_x, V_x \in \mathcal{T}: \quad x \in O_x\,, \quad A_2 \subset V_x\,, \quad O_x \cap V_x = \emptyset\,.$$

Die $(O_x, x \in A_1)$ sind eine offene Überdeckung der (kompakten) Menge A_1, und daher gibt es endlich viele $x_1, \ldots, x_n \in A_1$ mit $A_1 \subset O_{x_1} \cup \ldots \cup O_{x_n}$. Seien $O = O_{x_1} \cup \ldots \cup O_{x_n}$ und $V = V_{x_1} \cap \ldots \cap V_{x_n}$. Dann sind $O, V \in \mathcal{T}$ und $A_1 \subset O$, $A_2 \subset V$, sowie $O \cap V = \emptyset$, woraus die Normalität folgt. □

6.3 Stetige Abbildungen auf kompakten Räumen

Satz 6.3.1 *Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ Hausdorff-Räume, und sei $f : X \to Y$ stetig auf X und surjektiv. Ist dann $(X, \mathcal{T}_X)$ kompakt, so ist es auch $(Y, \mathcal{T}_Y)$.*

Beweis: Sind $(O_j, j \in J)$ eine offene Überdeckung von Y, so sind $(f^{-1}(O_j), j \in J)$ eine solche für X. Also gibt es $j_1, \ldots, j_n \in J$ so, dass $X \subset f^{-1}(O_{j_1}) \cup \ldots \cup f^{-1}(O_{j_n})$ ist. Daraus folgt aber $Y = f(X) \subset (O_{j_1} \cup \ldots \cup O_{j_n})$. □

Satz 6.3.2 (Existenz von Maximum und Minimum) *Sei $(X, \mathcal{T})$ kompakt, und sei $f : X \to \mathbb{R}$ stetig auf X. Dann gibt es $x_-, x_+ \in X$, für welche*

$$f(x_-) \;\leq\; f(x) \;\leq\; f(x_+) \qquad \forall\, x \in X\,.$$

Beweis: Nach dem vorangegangenen Satz ist $f(X)$ kompakt, also nach Analysis II abgeschlossen und beschränkt. Also gibt es Zahlen $y_-, y_+ \in f(X)$ mit $y_- \leq f(x) \leq y_+$ für alle $x \in X$. Nach Definition von $f(X)$ folgt aber die Existenz von $x_-, x_+ \in X$ mit $f(x_-) = y_-$ und $f(x_+) = y_+$. □

Satz 6.3.3 (Stetigkeit der Umkehrabbildung) *Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ Hausdorff-Räume, und sei $f : X \to Y$ stetig auf X und bijektiv. Ist dann $(X, \mathcal{T}_X)$ kompakt, so ist f^{-1} stetig auf Y.*

Beweis: Wenn $A \subset X$ abgeschlossen ist, dann ist A auch kompakt, und deshalb ist $f(A)$ kompakt (in Y), also wegen Satz 6.2.1 insbesondere abgeschlossen. Dies ist nach Aufgabe 2.1.5 äquivalent zur Stetigkeit von f^{-1}. □

6.4 Kompaktheit kartesischer Produkte

Lemma 6.4.1 *Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ ein topologischer und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ ein kompakter Raum. Dann gilt:*

(a) *Für jedes $x_0 \in X$ ist $\{x_0\} \times Y$ kompakter Unterraum von $X \times Y$.*

(b) *Ist $W \subset (X \times Y)$ offen, und ist $(\{x_0\} \times Y) \subset W$ für ein $x_0 \in X$, so existiert ein $O \in \mathcal{U}_0(x_0)$ mit $(O \times Y) \subset W$.*

Beweis: Offenbar ist $\{x_0\} \times Y$ homöomorph zu Y, und daher gilt (a) wegen Satz 6.3.1. Zum Beweis von (b) wählen wir zu jedem $y \in Y$ ein $O_y \in \mathcal{U}_0(x_0)$ und ein $V_y \in \mathcal{U}_0(y)$ mit $(O_y \times V_y) \subset W$; dies ist möglich nach Aufgabe 2.4.3. Die V_y sind eine offene Überdeckung von Y, und somit gibt es $y_1, \ldots, y_n \in Y$ mit $Y = \cup_{j=1}^n V_{y_j}$. Sei $O = \cap_{j=1}^n O_{y_j}$, dann folgt

$$x_0 \;\in\; O\,, \qquad O \times Y \;=\; \bigcup_{j=1}^n (O \times V_{y_j}) \;\subset\; \bigcup_{j=1}^n (O_{y_j} \times V_{y_j}) \;\subset\; W\,,$$

woraus die Behauptung folgt. □

Satz 6.4.2 (Satz von Tychonoff) *Das kartesische Produkt beliebig vieler kompakter Räume ist kompakt.*

Beweis: Wir führen den Beweis hier nur für das kartesische Produkt *zweier kompakter Räume* $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$, woraus durch vollständige Induktion ein Beweis für endlich viele Räume abgeleitet werden kann; der Beweis für den allgemeinen Fall benutzt weitere mengentheoretische Hilfsmittel und folgt auf Seite 72 im letzten Kapitel.

Seien $(O_j, j \in J)$ eine offene Überdeckung von $X \times Y$. Nach Teil (a) des letzten Lemmas ist $\{x\} \times Y$ für jedes $x \in X$ immer kompakt, und deshalb gibt es $j_1(x), \ldots, j_{n(x)}(x) \in J$ mit $(\{x\} \times Y) \subset \cup_{k=1}^{n(x)} O_{j_k(x)} =: W_x$. Zu x gibt es nach Teil (b) desselben Lemmas ein $V_x \in \mathcal{U}_0(x)$ mit $(V_x \times Y) \subset W_x$. Da auch $(X, \mathcal{T}_X)$ kompakt ist, folgt die Existenz von $x_1, \ldots, x_m \in X$ mit $X = \cup_{k=1}^{m} V_{x_k}$. Daraus ergibt sich

$$X \times Y \;=\; \bigcup_{k=1}^{m} (V_{x_k} \times Y) \;=\; \bigcup_{k=1}^{m} \bigcup_{\nu=1}^{n(x_k)} O_{j_\nu(x_k)}\,,$$

woraus die Behauptung folgt. □

6.5 Lokalkompaktheit

Definition 6.5.1 *Ein Hausdorff-Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt* lokalkompakt*, wenn es zu jedem $x \in X$ eine kompakte Umgebung von x gibt.*

Proposition 6.5.2 *Ein Hausdorff-Raum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann lokalkompakt, wenn gilt*

$$\forall\, x \in X \quad \forall\, U \in \mathcal{U}(x) \quad \exists\, O \in \mathcal{U}_0(x) \;:\quad \overline{O} \text{ ist kompakt, und } \quad \overline{O} \subset U\,.$$

Beweis: Sei $(X, \mathcal{T})$ lokalkompakt, sei $x \in X$, und sei $U \in \mathcal{U}(x)$. O. B. d. A. sei U offen; sonst kann U verkleinert werden. Nach Definition existiert dann eine kompakte Umgebung K von x, und dazu gibt es ein $W \in \mathcal{U}_0(x)$ mit $W \subset K$. Nach Satz 6.2.2 ist K, bezüglich der Unterraumtopologie, normal, also insbesondere regulär. Daher gibt es zu $\tilde{W} := K \cap W \cap U = W \cap U$ eine (in K) offene Menge $\tilde{O}$ mit $x \in \tilde{O} \subset \overline{\tilde{O}} \subset \tilde{W}$. Zu $\tilde{O}$ existiert dann ein $\hat{O} \in \mathcal{T}$ mit $\tilde{O} = K \cap \hat{O}$. Sei jetzt $O = \tilde{W} \cap \hat{O}$. Dann ist $O \in \mathcal{T}$ und $O \subset \tilde{W} \subset K$, und somit ist $\overline{O} \subset K$. Nach Satz 6.2.1 ist $\overline{O}$ kompakt, und $O = \tilde{W} \cap \hat{O} \cap K \subset \tilde{O}$, also $\overline{O} \subset \overline{\tilde{O}} \subset \tilde{W} \subset U$. Daher gilt eine Richtung der Behauptung. Die Umkehrung ist aber klar nach Definition der Lokalkompaktheit. □

Korollar zu Proposition 6.5.2 *Jeder lokalkompakte Raum ist regulär.*

6.6 Ein-Punkt-Kompaktifizierung lokalkompakter Räume

Satz 6.6.1 (Satz von Alexandroff) *Sei $(X, \mathcal{T})$ lokalkompakt aber nicht kompakt. Seien $\infty \notin X$ und $Y = X \cup \{\infty\}$. Dann gibt es auf Y genau eine Topologie $\mathcal{T}_Y$, bezüglich der $(Y, \mathcal{T}_Y)$ kompakt und $(X, \mathcal{T})$ ein dichter Unterraum von $(Y, \mathcal{T}_Y)$ ist. Dabei ist*

$$\mathcal{T}_Y \;=\; \{O \subset Y :\; O \in \mathcal{T} \text{ oder } Y \setminus O \text{ ist kompakt in X}\}\,.$$

Beweis: (a) Sei $\mathcal{T}_Y$ wie im Satz angegeben; wir zeigen: $\mathcal{T}_Y$ ist eine Topologie auf Y. Klar ist $\emptyset, Y \in \mathcal{T}_Y$, denn $\emptyset \in \mathcal{T} \subset \mathcal{T}_Y$, und $Y \setminus Y = \emptyset$ ist eine kompakte Teilmenge von X. Seien jetzt $O_j \in \mathcal{T}_Y$ für $j \in J$, und sei O ihre Vereinigung. Wir zerlegen $J = J_1 \cup J_2$, wobei J_1 genau diejenigen j enthält, für die $\infty \notin O_j$ ist (beachte, dass evtl. J_1 oder J_2 auch leer sein können). Für $j \in J_1$ ist $O_j \in \mathcal{T}$, und somit ist die

Vereinigung dieser Mengen in $\mathcal{T}$, also auch in $\mathcal{T}_Y$. Falls $J_2 = \emptyset$ ist, dann folgt $O \in \mathcal{T}_Y$. Andernfalls ist $\infty \in O$, und dann ist

$$A := Y \setminus O = \bigcap_{j \in J} (Y \setminus O_j) = \bigcap_{j \in J} (X \setminus O_j).$$

Also ist A Durchschnitt von abgeschlossenen Teilmengen von X, also selber abgeschlossen. Da aber für $j \in J_2$ die Mengen $K = Y \setminus O_j$ kompakt sind, ist A eine abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge (in X), also selber kompakt. Daraus folgt aber $O \in \mathcal{T}_Y$. Seien jetzt $O_1, \ldots, O_n \in \mathcal{T}_Y$, und sei jetzt O gleich deren Durchschnitt. Falls $\infty \notin O$ ist, dann ist $O = \cap_j (O_j \setminus \{\infty\})$, und da alle $(O_j \setminus \{\infty\}) \in \mathcal{T}$ sind, folgt $O \in \mathcal{T}$. Falls dagegen immer $\infty \in O_j$ ist, müssen nach Definition von $\mathcal{T}_Y$ die Mengen $Y \setminus O_j$ alle kompakte Teilmengen von X sein, und dann ist ihre Vereinigung ebenfalls kompakt in X. Also ist O, als das Komplement dieser kompakten Menge, in $\mathcal{T}_Y$.

(b) Wir zeigen jetzt: Genau dann ist $O \in \mathcal{T}$, wenn es ein $V \in \mathcal{T}_Y$ gibt mit $O = X \cap V$ (d. h. genau, dass $(X, \mathcal{T})$ topologischer Unterraum von $(Y, \mathcal{T}_Y)$ ist). Dazu sei $V \in \mathcal{T}_Y$, und $O = X \cap V$. Falls $\infty \notin V$ ist, folgt $V \in \mathcal{T}$, also $O = V \in \mathcal{T}$. Im anderen Fall ist $K = Y \setminus V$ in X kompakt, also abgeschlossen, und dann ist $O = X \setminus K \in \mathcal{T}$. Die Umkehrung dieser Folgerung ist klar nach Definition von $\mathcal{T}_Y$.

(c) Wir zeigen jetzt, dass X dicht in $(Y, \mathcal{T}_Y)$ ist. Dazu ist nur zu zeigen, dass in jeder Umgebung von ∞ mindestens ein Punkt von X liegt. Sei also $U \in \mathcal{U}(\infty)$, und sei o. B. d. A. U offen. Dann ist nach Definition von $\mathcal{T}_Y$ die Menge $K = Y \setminus U$ kompakt in X, und da X selber nicht kompakt ist, folgt hieraus $K \neq X$, also $U \cap X \neq \emptyset$.

(d) Jetzt zeigen wir, dass $(Y, \mathcal{T}_Y)$ ein Hausdorff-Raum ist. Dazu seien $x, y \in Y$ mit $x \neq y$. Falls beide Punkte in X liegen, ist nichts zu zeigen, deshalb sei $y = \infty$. Da X lokalkompakt ist, gibt es eine kompakte Umgebung $K \in \mathcal{U}(x)$, und dann ist $O = Y \setminus K \in \mathcal{T}_Y$, und $\infty \in O$. Da $O \cap K = \emptyset$ ist, ist die Behauptung bewiesen.

(e) Nun soll gezeigt werden, dass $(Y, \mathcal{T}_Y)$ kompakt ist. Dazu sei $(O_j, j \in J)$ eine offene Überdeckung von Y, also insbesondere $\infty \in O_{j_0}$ für ein $j_0 \in J$. Dann ist $K = Y \setminus O_{j_0}$ kompakt, und $(O_j \cap X, j \in J)$ ist eine offene Überdeckung von K. Somit bilden bereits endlich viele dieser Mengen eine Überdeckung von K, und diese O_j zusammen mit O_{j_0} bilden eine endliche Teilüberdeckung von Y.

(f) Zuletzt ist noch zu zeigen, dass die Topologie $\mathcal{T}_Y$ die einzige ist, die alle diese Eigenschaften hat. Dazu sei $\tilde{\mathcal{T}}$ eine Topologie auf Y mit folgenden Eigenschaften:

1. $(Y, \tilde{\mathcal{T}})$ ist kompakt.
2. $O \in \mathcal{T} \iff \exists\, V \in \tilde{\mathcal{T}} : \; O = V \cap X$.
3. X ist dicht in $(Y, \tilde{\mathcal{T}})$.

Da $(Y, \tilde{\mathcal{T}})$ ein Hausdorff-Raum ist, ist $\{\infty\}$ abgeschlossen, also $X \in \tilde{\mathcal{T}}$. Wir zeigen zunächst $\mathcal{T}_Y \subset \tilde{\mathcal{T}}$, und wählen dazu ein $O \in \mathcal{T}_Y$. Falls sogar $O \in \mathcal{T}$ ist, dann gibt es nach Punkt 2 ein $V \in \tilde{\mathcal{T}}$ mit $O = V \cap X$ und daraus folgt $O \in \tilde{\mathcal{T}}$. Im anderen Fall ist $K = Y \setminus O$ kompakt in $(X, \mathcal{T})$. Wir zeigen, dass K auch kompakt in $(Y, \tilde{\mathcal{T}})$ ist, woraus dann $O \in \tilde{\mathcal{T}}$ folgt. Seien also $O_j \in \tilde{\mathcal{T}}$ für $j \in J$ eine Überdeckung von K, dann sind aber $O_j \cap X \in \mathcal{T}$ und ebenfalls Überdeckung. Also reichen endlich viele dieser Mengen bereits zur Überdeckung von K aus, was zu zeigen war. Jetzt muss noch $\mathcal{T}_Y \supset \tilde{\mathcal{T}}$ gezeigt werden. Sei also $O \in \tilde{\mathcal{T}}$. Falls $\infty \notin O$ ist, dann ist $O = O \cap X \in \mathcal{T}$ nach Punkt 2. Im anderen Fall ist $K = Y \setminus O$ abgeschlossen, also auch kompakt in $(Y, \tilde{\mathcal{T}})$, und man zeigt analog zu oben, dass K dann auch kompakt in $(X, \mathcal{T})$ ist, woraus $O \in \mathcal{T}_Y$ folgt. $\square$

Kapitel 7

Zusammenhang

7.1 Topologischer Zusammenhang

Definition 7.1.1 *Eine Teilmenge Y eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ heißt* unzusammenhängend*, wenn gilt*

$$\exists\, O_1, O_2 \in \mathcal{T} \;: \qquad Y \cap O_1 \neq \emptyset\,, \quad Y \cap O_2 \neq \emptyset\,, \quad Y \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset\,, \quad Y \subset O_1 \cup O_2\,. \tag{7.1.1}$$

Ist dies nicht der Fall, so nennen wir Y zusammenhängend. *Wenn X selber zusammenhängend ist, sprechen wir auch von einem* zusammenhängenden topologischen Raum.

Bemerkung 7.1.2 *Wenn man den Zusammenhang von Y beweisen möchte, so muss man zeigen, dass für zwei beliebige $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ von den vier Eigenschaften in* (7.1.1) *höchstens drei gelten können. Z. B. kann man annehmen, dass der Durchschnitt beider Mengen mit Y nicht leer ist und sie eine Überdeckung von Y bilden, und muss dann zeigen dass der dreifache Durchschnitt nicht leer sein kann. Genausogut kann man annehmen, dass die ersten drei Bedingungen erfüllt sind und muss dann die letzte widerlegen.*

Auf Grund der Definition der Spurtopologie kann man überprüfen, dass eine nicht-leere Teilmenge Y genau dann zusammenhängend ist, wenn Y als Unterraum von X *ein zusammenhängender Raum ist.*

Aufgabe 7.1.3 *Zeige, dass die leere Menge und alle einelementigen Teilmengen von X in jedem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ zusammenhängend sind. Was kann man allgemein über zweielementige Teilmengen sagen? Welche Teilmengen sind bezüglich der diskreten bzw. der indiskreten Topologie auf X zusammenhängend?*

Satz 7.1.4 *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann zusammenhängend, wenn X und $\emptyset$ die einzigen Teilmengen von X sind, die zugleich offen und abgeschlossen sind.*

Beweis: Folgt sofort aus der Definition. □

Proposition 7.1.5 *In $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie ist eine Teilmenge Y genau dann zusammenhängend, wenn sie ein Intervall ist.*

Beweis: Wir sagen, dass Y *die Zwischenpunkteigenschaft hat*, wenn für zwei Elemente $a, b \in Y$ mit $a < b$ immer das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ Untermenge von Y ist. Es ist leicht einzusehen, dass genau die

Intervalle diese Eigenschaft haben. Sei jetzt angenommen, dass Y nicht diese Zwischenpunkteigenschaft hat. Dann gibt es $a, b \in Y$, mit $a < b$, derart dass ein $x \notin Y$ existiert mit $a < x < b$. In diesem Fall haben die Intervalle $O_1 = (-\infty, x)$ und $O_2 = (x, \infty)$ alle Eigenschaften in (7.1.1), sodass Y unzusammenhängend ist. Wenn dagegen Y die Zwischenpunkteigenschaft besitzt, dann seien $O_1,\ O_2 \in \mathcal{T}$ so, dass es ein $a \in Y \cap O_1$ und $b \in Y \cap O_2$ gibt, und sei o. B. d. A. angenommen dass $a < b$ ist. Weiter gelte $Y \subset O_1 \cup O_2$. Sei $x = \sup\{c \in Y \cap O_1 :\ x < b\}$. Dann ist $x \in Y$ auf Grund der Zwischenpunkteigenschaft, und daher muss $x \in O_1$ oder $x \in O_2$ sein. Im ersten Fall muss $x = b$ sein, da sich sonst ein Widerspruch zur Wahl von x ergibt. Also ist in diesem Fall $Y \cap O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$. Im zweiten Fall gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass $(x - \varepsilon, x] \subset O_2$ ist, und wegen der Definition von x ist $(x - \varepsilon, x] \cap O_1 \neq \emptyset$. Also folgt in beiden Fällen $Y \cap O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$, und deshalb ist Y zusammenhängend. □

7.2 Stetige Abbildungen auf zusammenhängenden Räumen

Satz 7.2.1 *Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume, und sei $f : X \to Y$ stetig auf X und surjektiv. Ist dann $(X, \mathcal{T}_X)$ zusammenhängend, so ist es auch $(Y, \mathcal{T}_Y)$.*

Beweis: Seien $O_1, O_2 \in \mathcal{T}_Y$ beide nicht leer, und sei $Y = O_1 \cup O_2$. Dann sind die Mengen $V_j = f^{-1}(O_1)$ beide nicht leer und in $\mathcal{T}_X$, und $V_1 \cup V_2 = X$. Da $(X, \mathcal{T}_X)$ zusammenhängend ist, folgt hieraus dass $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ ist. Daraus aber folgt $O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$, was zu zeigen war. □

Aufgabe 7.2.2 *Zeige: Kreise in $\mathbb{R}^2$ und Kugeloberflächen in $\mathbb{R}^3$ sind zusammenhängend.*

Korollar zu Satz 7.2.1 (Zwischenwertsatz) *Sei $(X, \mathcal{T}_X)$ ein zusammenhängender topologischer Raum, und sei $f : X \to \mathbb{R}$ stetig auf X. Dann ist $f(X)$ ein Intervall.*

Beweis: Folgt mit Hilfe der letzten Proposition. □

7.3 Weitere Eigenschaften des Zusammenhangs

Satz 7.3.1 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, und sei $Y \subset X$ eine zusammenhängende Teilmenge. Dann ist jede Menge F mit $Y \subset F \subset \overline{Y}$ ebenfalls zusammenhängend.*

Beweis: Sei F unzusammenhängend. Dann existieren $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ mit $F \subset O_1 \cup O_2$, $O_1 \cap O_2 \cap F = \emptyset$, $O_1 \cap F \neq \emptyset$ und $O_2 \cap F \neq \emptyset$. Dann folgt $Y \subset O_1 \cup O_2$ und $O_1 \cap O_2 \cap Y = \emptyset$. Alle $x \in F \setminus Y$ sind Berührungspunkte von Y, und daher gibt es zu jedem $x \in F \cap O_1$ auch ein $x_1 \in Y \cap O_1$, und deshalb ist $Y \cap O_1 \neq \emptyset$. Genauso folgt $Y \cap O_2 \neq \emptyset$, und deshalb ist auch Y unzusammenhängend. □

Lemma 7.3.2 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, und seien Y_j, für $j \in J$, zusammenhängende Teilmengen von X. Wenn $\cap_j Y_j \neq \emptyset$ ist, dann ist $\cup_j Y_j$ zusammenhängend.*

Beweis: Sei $Y = \cup_j Y_j$ unzusammenhängend. Dann gibt es O_1, O_2, für welche (7.1.1) gilt. Sei $x \in \cap_j Y_j$, und sei o. B. d. A. $x \in O_1$ angenommen. Dann gilt für alle $j \in J$: $Y_j \subset O_1 \cup O_2$, $x \in Y_j \cap O_1$, und $Y_j \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Für $x_0 \in Y \cap O_2$ gibt es mindestens ein $j_0 \in J$, für welches $x_0 \in Y_{j_0} \cap O_2$ ist, und dann ist Y_{j_0} unzusammenhängend. □

Aufgabe 7.3.3 *Zeige: Polygonzüge in $\mathbb{R}^n$ sind zusammenhängend.*

Satz 7.3.4 *Kartesische Produkte beliebig vieler topologischer Räume $(X_j, \mathcal{T}_j)$ sind genau dann zusammenhängend, wenn alle $(X_j, \mathcal{T}_J)$ zusammenhängend sind.*

Beweis: Sei das kartesische Produkt mit $(X, \mathcal{T})$ bezeichnet und als zusammenhängend vorausgesetzt. Da alle Projektionen stetig sind, folgt aus Satz 7.2.1 der Zusammenhang aller $(X_j, \mathcal{T}_j)$. Seien jetzt umgekehrt alle $(X_j, \mathcal{T}_j)$ zusammenhängend. Wir unterscheiden folgende Fälle:

(a) Sei $J = \{1, 2\}$. Für $x_0 \in X_1$ und $y_0 \in X_2$ sei

$$Y_{x_0,y_0} \;=\; \{(x_0, y) : \; y \in X_2\} \,\cup \{(x, y_0) : \; x \in X_1\} \;\subset\; X_1 \times X_2\,.$$

Dann besteht Y_{x_0,y_0} aus zwei Anteilen, welche zu X_2 bzw. X_1 homöomorph und deshalb zusammenhängend sind, und der Durchschnitt der beiden Teile ist nicht leer. Daher ist Y_{x_0,y_0} nach obigem Lemma zusammenhängend. Bei festem y_0 ist auch der Durchschnitt aller Y_{x_0,y_0} nicht leer, und somit folgt genauso dass $\cup_{x_0} Y_{x_0,y_0}$ zusammenhängend ist; diese Menge ist aber gleich $X_1 \times X_2$.

(b) Für endliche Mengen J folgt die Behauptung aus (a) mit Hilfe von Induktion über die Anzahl der Elemente von J.

(c) Sei jetzt J beliebig, und sei $(x_j^{(0)}) \in X$ gewählt. Für eine endliche Teilmenge J_e von J sei

$$X_{J_e} \;=\; \{(x_j) \in X : \; x_j \;=\; x_j^{(0)} \quad \forall\, j \in J \setminus J_e\} \;\subset X\,.$$

Jedes solche X_{J_e} ist homöomorph zu dem kartesischen Produkt der $(X_j, \mathcal{T}_j)$ für $j \in J_e$, also zusammenhängend nach (b). Da $(x_j^{(0)}) \in X_{J_e}$ ist, haben alle diese Mengen nicht-leeren Durchschnitt, und deshalb ist ihre Vereinigung zusammenhängend; diese Vereinigung ist aber dicht in X, wie man aus der Definition der Produkttopologie abliest. Daher folgt die Behauptung aus Satz 7.3.1. □

7.4 Zusammenhangskomponenten

Lemma 7.4.1 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann wird auf jeder Menge $Y \subset X$ durch*

$$\forall\, x, y \in Y : \qquad x \sim y \iff \exists\, E \subset Y : \quad E \text{ ist zusammenhängend in } X, \text{ und } x, y \in E\,.$$

eine Äquivalenzrelation definiert.

Beweis: Da einelementige Mengen zusammenhängend sind, folgt die Reflexivität, und die Symmetrie ist klar nach Definition. Die Transitivität folgt mit Hilfe von Lemma 7.3.2. □

Definition 7.4.2 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, und sei $Y \subset X$ mit der Äquivalenzrelation aus obigem Lemma versehen. Dann heißen die Äquivalenzklassen*

$$Y_x \;=\; \{y \in Y : \quad x \sim y\} \qquad \forall\, x \in Y$$

die Zusammenhangskomponenten *von Y. Offenbar ist Y genau dann zusammenhängend, wenn es nur eine solche Zusammenhangskomponente gibt.*

Proposition 7.4.3 *In jedem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ gilt für alle $Y \subset X$:*

(a) $\forall\ x \in Y: \quad Y_x$ *ist zusammenhängend.*

(b) $\forall\ x \in Y$*: Ist* $F \subset Y$ *zusammenhängend, und ist* $x \in F$*, so ist* $F \subset Y_x$*. Das heißt also, dass die Zusammenhangskomponente zu* x *die größte zusammenhängende Teilmenge von* Y *ist, welche* x *enthält.*

(c) $\forall\ x, y \in Y: \quad Y_x \cap Y_y \neq \emptyset \implies Y_x = Y_y$.

(d) $\forall\ x \in Y: \quad Y_x$ *ist abgeschlossen in der Unterraumtopologie auf* Y.

Beweis: Teil (b) ist klar nach Definition der Äquivalenzrelation, und (c) gilt immer für Äquivalenzklassen. Nach (b) und der Definition der Äquivalenzrelation ist Y_x Vereinigung aller zusammenhängenden Teilmengen von X, welche x enthalten, und deshalb folgt aus Lemma 7.3.2 die Behauptung (a). Schließlich folgt (d) aus (b), weil der Abschluss zusammenhängender Mengen selber zusammenhängt. □

7.5 Lokaler Zusammenhang

Definition 7.5.1 *Ein topologischer Raum* $(X, \mathcal{T})$ *heißt* lokal zusammenhängend*, wenn es in jeder Umgebung jedes Punktes eine kleinere Umgebung gibt, welche zusammenhängend ist. Eine äquivalente Formulierung ist, dass es in jedem Punkt eine Umgebungsbasis aus zusammenhängenden Mengen gibt. Wir nennen den Raum* total unzusammenhängend*, wenn die einelementigen Teilmengen die einzigen zusammenhängenden Mengen sind.*

Beispiel 7.5.2 *Die Menge* $\mathbb{Q}$ *der rationalen Zahlen mit der euklidischen Topologie ist total unzusammenhängend, da es zwischen zwei rationalen immer eine irrationale Zahl gibt.*

Satz 7.5.3 *Ein topologischer Raum* $(X, \mathcal{T})$ *ist genau dann lokal zusammenhängend, wenn die Zusammenhangskomponenten offener Teilmengen selber offen sind.*

Beweis: Sei der Raum lokal zusammenhängend, sei $O \in \mathcal{T}$, und sei V eine Zusammenhangskomponente von O. Für $x \in V \subset O$ ist $O \in \mathcal{U}(x)$, und deshalb gibt es ein $U \in \mathcal{U}(x)$, welches zusammenhängt und Teilmenge von O ist. Daraus folgt $U \subset V$, und deshalb ist V Umgebung jedes seiner Punkte, also offen. Für die Umkehrung seien $x \in X$ und $U \in \mathcal{U}(x)$. Dann enthält U eine offene Umgebung von x, und deren Zusammenhangskomponenten sind nach Voraussetzung alle offen. Eine davon enthält dann x und ist demnach eine zusammenhängende Umgebung von x, welche in U enthalten ist. Also ist X lokal zusammenhängend. □

7.6 Kurvenzusammenhang

Definition 7.6.1 *Sei* $(X, \mathcal{T})$ *ein topologischer Raum, und* Y *eine nicht-leere Teilmenge von* X*. Eine stetige Abbildung* $f : [0, 1] \to Y$ *heißt* eine Parameterdarstellung einer Kurve *in* Y*. Manchmal sagen wir auch einfach* eine Kurve *in* Y*, obwohl dies nicht genau dasselbe ist. Der Punkt* $f(0)$ *heißt der* Anfangs-, $f(1)$ *der* Endpunkt*, und die Menge* $f([0, 1])$ *heißt* Träger *der Kurve. Wir sagen auch: Die Kurve* verbindet $x = f(0)$ und $y = f(1)$.

Eine Teilmenge $Y \subset X$ *heißt* kurvenzusammenhängend*, wenn es zu beliebigen Punkten* $x, y \in Y$ *eine Kurve in* Y *gibt, welche* x *und* y *verbindet.*

Der Raum $(X, \mathcal{T})$ *heißt* lokal kurvenzusammenhängend*, wenn in jeder Umgebung jedes Punktes* $x \in X$ *eine kurvenzusammenhängende Umgebung von* x *enthalten ist.*

Satz 7.6.2 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann ist jede kurvenzusammenhängende Teilmenge von X auch zusammenhängend. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.*

Beweis: Sei $Y \subset X$ kurvenzusammenhängend, und o. B. d. A. sei Y nicht leer. Sei $x_0 \in Y$ gewählt. Dann gibt es nach Definition zu jedem $x \in Y$ eine Kurve in Y, die x_0 und x verbindet. Aus Satz 7.2.1 folgt, dass der Träger der Kurve zusammenhängend ist, und demnach ist $x_0 \sim x$, also Y zusammenhängend.

Sei jetzt $Y \subset \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$Y = \{(x, 0)^T : \, 0 \le x \le 1\} \, \cup \, \{(1/n, y)^T : \, n \in \mathbb{N}, \, 0 \le y \le 1\} \, .$$

Man sieht schnell, dass Y kurvenzusammenhängend, also zusammenhängend ist, denn man kann zwei Punkte in Y durch einen Polygonzug verbinden. Es ist $\overline{Y} = Y \cup \{(0, y)^T : 0 \le y \le 1\}$, und nach Satz 7.3.1 ist jedes X mit $Y \subset X \subset \overline{Y}$ zusammenhängend. Wir wählen $X = Y \cup \{(0, 1)^T\}$. Wenn $f = (f_1, f_2)^T : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ Parameterdarstellung eine Kurve mit Anfangspunkt $(0, 0)^T$ und Endpunkt $(0, 1)^T$ ist, so sind f_1 und f_2 beide stetig auf $[0, 1]$. Also muss es ein $\delta > 0$ geben, für welches $f_2(t) > 1/2$ ist für alle $t \in [1 - \delta, 1]$. Nach dem Zwischenwertsatz muss $f_1(t)$ für solche t auch irrationale Werte annehmen, und daher kann der Träger dieser Kurve nicht in X liegen. Also kann X nicht kurvenzusammenhängend sein. $\square$

Lemma 7.6.3 *Eine nicht-leere Teilmenge $Y \subset X$ eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann kurvenzusammenhängend, wenn es ein $x_0 \in Y$ gibt, welches mit jedem $x \in Y$ in Y verbunden werden kann.*

Beweis: Die eine Richtung der Aussage ist klar. Sei jetzt angenommen, dass ein solches $x_0 \in Y$ existiert. Seien $x_1, x_2 \in Y$. Dann gibt es nach Voraussetzung stetige Abbildungen $f_1, f_2 : [0, 1] \to Y$ mit $f_1(0) = f_1(0) = x_0$ und $f_1(1) = x_1$, $f_1(1) = x_2$. Sei dann

$$f(t) = \begin{cases} f_1(1 - 2\,t) & \text{für} \quad 0 \le t \le 1/2 \, , \\ f_2(2\,t - 1) & \text{für} \quad 1/2 < t \le 1 \, . \end{cases}$$

Dann ist $f : [0, 1] \to Y$ stetig, und $f(0) = x_1$, $f(1) = x_2$. Also ist Y kurvenzusammenhängend. $\square$

Bemerkung 7.6.4 *Man sieht schnell ein, dass* Satz 7.2.1 *und* Lemma 7.3.2 *sowie deren Beweise auch für den Kurvenzusammenhang gelten. Der Beweis von* Satz 7.3.4 *gilt jedenfalls für das kartesische Produkt endlich vieler Räume.*

Satz 7.6.5 *Sei $(X, \mathcal{T})$ lokal kurvenzusammenhängend. Genau dann ist eine Menge $O \in \mathcal{T}$ kurvenzusammenhängend, wenn sie zusammenhängend ist.*

Beweis: Nur eine Richtung ist noch zu zeigen: Sei O zusammenhängend und o. B. d. A. nicht leer. Sei $x_0 \in O$, und sei $V \subset O$ die Menge aller $x \in O$, die sich in O mit x_0 verbinden lassen. Aus dem lokalen Kurvenzusammenhang folgt dann, dass $V \in \mathcal{T}$ ist. Aber aus dem gleichen Grund ist auch $O \setminus V$ offen, und deshalb kann O nur dann zusammenhängend sein, wenn $V = O$ ist. Nach dem letzten Lemma ist deshalb O kurvenzusammenhängend. $\square$

Kapitel 8

Vollständigkeit metrischer Räume

In einem allgemeinen topologischen Raum kann man nicht definieren, was Cauchyfolgen sind, und deshalb ist es auch sinnlos, von Vollständigkeit zu sprechen. In metrischen Räumen dagegen machen diese Begriffe Sinn und sollen jetzt studiert werden.

8.1 Cauchyfolgen

Definition 8.1.1 *Eine Folge (x_n) in einem metrischen Raum (X, d) heißt* Cauchyfolge*, wenn gilt*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, n, m \geq N : \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon\,.$$

Lemma 8.1.2 *Sei (X, d) ein metrischer Raum.*

(a) *Wenn eine Folge (x_n) in (X, d) konvergiert, dann ist sie Cauchyfolge.*

(b) *Wenn eine Cauchyfolge eine konvergente Teilfolge besitzt, dann ist sie konvergent.*

Beweis: Falls gilt $x_n \to x$ für $n \to \infty$, dann folgt aus Lemma 4.2.1, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq N$ gilt $d(x_n, x) < \varepsilon$. Mit der Dreiecksungleichung folgt daraus aber $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < 2\,\varepsilon$ für alle $n, m \geq N$. Das ist äquivalent zur Cauchybedingung. Sei jetzt (x_n) eine Cauchyfolge, und gelte für ein $x \in X$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, N \in \mathbb{N} \quad \exists\, n_N \geq N \ : \quad d(x, x_{n_N}) < \varepsilon\,.$$

Dies ist gerade äquivalent zur Existenz einer Teilfolge, welche gegen x konvergiert. Daraus folgt für jedes $\varepsilon > 0$, mit N wie in der Cauchybedingung: $d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_N}) + d(x_{n_N}, x) < 2\,\varepsilon$, falls $n \geq N$ ist, was zu zeigen war. □

Beispiel 8.1.3 *Sei X die Menge der reellen Zahlenfolgen $x = (x^{(k)})$ mit nur endlich vielen Gliedern $x^{(k)} \neq 0$, und sei*

$$\|x\|_2 \ = \ \left(\sum_{k=1}^{\infty} (x^{(k)})^2 \right)^{1/2} \qquad \forall\, x \in X\ .$$

Dann ist $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, und für die Folgen $x_n = (x_n^{(k)})$ mit $x_n^{(k)} = 1/k$ für $1 \leq k \leq n$ bzw. $= 0$ für $k \geq n+1$ folgt dann $\|x_n - x_m\|_2 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-2}$ für $m > n \geq 1$. Daher ist $(x_n, n \in \mathbb{N})$ eine

Cauchyfolge, hat aber in X keinen Grenzwert, weil aus $x_n \to x = (x^{(k)})$ folgen würde, dass für jedes feste k gilt $x_n^{(k)} \to x^{(k)}$ für $n \to \infty$, und dann müsste $x^{(k)} = 1/k$ sein für alle $k \in \mathbb{N}$; diese Folge gehört aber nicht zur Menge X. Der Ausweg aus diesem Dilemma besteht darin, die Menge X zu erweitern und statt ihrer den Raum

$$\ell_2 \ = \ \Big\{(x^{(k)}) : \quad \sum_{k=1}^{\infty} |x^{(k)}|^2 \ < \ \infty\Big\}$$

zu betrachten; in diesem Raum ist nämlich jede Cauchyfolge konvergent. Vergleiche dazu auch den nächsten Abschnitt.

Aufgabe 8.1.4 *Zeige: In einem kompakten metrischen Raum ist jede Cauchyfolge konvergent.*

8.2 Vervollständigung metrischer Räume

Definition 8.2.1 *In einem metrischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt eine Teilmenge $Y \subset X$* vollständig, *wenn jede Cauchyfolge mit Gliedern aus Y konvergiert, und wenn ihr Grenzwert zu Y gehört. Trifft dies für X selber zu, so nennen wir $(X, \mathcal{T})$ einen* vollständigen metrischen Raum. *Eine nicht-leere Teilmenge Y ist also genau dann vollständig, wenn sie* als Unterraum von X *ein vollständiger metrischer Raum ist.*

Satz 8.2.2 *In einem vollständigen metrischen Raum $(X, \mathcal{T})$ ist eine Teilmenge Y genau dann vollständig, wenn sie abgeschlossen ist.*

Beweis: Falls Y leer ist, ist nichts zu zeigen. Sei jetzt (x_n) eine Cauchyfolge mit Gliedern in Y. Dann ist sie in X konvergent, und wenn Y abgeschlossen ist, muss ihr Grenzwert nach Lemma 4.2.1 zu Y gehören, also Y selbst vollständig sein. Umgekehrt: wenn Y vollständig und $x \in \overline{Y}$ ist, so gibt es nach dem gleichen Lemma eine in Y gelegene Folge, welche gegen x konvergiert. Diese Folge ist auch Cauchyfolge, und nach Definition der Vollständigkeit muss ihr Grenzwert zu Y gehören, woraus $Y = \overline{Y}$ folgt. $\square$

Definition 8.2.3 *Seien (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X_1 \to X_2$ heißt* längentreu *oder* eine Isometrie, *falls*

$$\forall\ x, y \in X_1 : \qquad d_1(x, y) \ = \ d_2(f(x), f(y))\,.$$

Offenbar ist jede Isometrie injektiv. Die beiden Räume heißen isometrisch, *wenn es eine surjektive Isometrie $f : X_1 \to X_2$ gibt.*

Eine auf einer nicht-leeren Menge X definierte Abbildung $d : X \to \mathbb{R}$ heißt eine Semimetrik *auf X, wenn gilt*

(S1) $\forall\ x, y \in X : \quad d(x, y) \ge 0\,, \quad d(x, x) \ = 0$ (Positive Semidefinitheit)

(S2) $\forall\ x, y \in X : \quad d(x, y) \quad = \quad d(y, x)$ (Symmetrie)

(S3) $\forall\ x, y, z \in X : \quad d(x, z) \quad \le \quad d(x, y) \ + \ d(y, z)$ (Dreiecksungleichung)

Eine Semimetrik hat also alle Eigenschaften einer Metrik, außer dass aus $d(x, y) = 0$ nicht $x = y$ gefolgert werden kann.

Aufgabe 8.2.4 (Semimetriken) *Sei X nicht leer, und sei $d : X \to \mathbb{R}$ eine Semimetrik auf X. Zeige:*

(a) *Auch für Semimetriken gilt eine Vierecksungleichung wie in* Aufgabe 1.1.9.

(b) *Definiert man offene Mengen genau wie in* Definition 1.1.13*, so erhält man auch für die Semimetrik d eine Topologie auf X, aber X ist mit dieser Topologie im Allgemeinen kein Hausdorff-Raum.*

(c) *Durch $x \sim y \iff d(x,y) = 0$ wird eine Äquivalenzrelation auf X definiert, und aus $x \sim \tilde{x}$ und $y \sim \tilde{y}$ folgt $d(x,y)) = d(\tilde{x},\tilde{y})$. Man kann also d auch als eine Abbildung auf der Menge der Äquivalenzklassen auffassen.*

(d) *Die Menge aller Äquivalenzklassen für die obige Relation, zusammen mit d, ist ein metrischer Raum.*

Satz 8.2.5 (Vervollständigungssatz) *Zu jedem metrischen Raum (X,d) gibt es einen vollständigen metrischen Raum $(\hat{X},\hat{d})$ sowie eine Isometrie $f : X \to \hat{X}$ derart, dass $f(X)$ in $\hat{X}$ dicht ist.*

Beweis: Sei Y die Menge aller Cauchyfolgen in X, und seien $(x_n),(y_n) \in Y$.

(a) Beh: Der Grenzwert $d_*((x_n),(y_n)) := \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)$ existiert.

Bew: Sei $\alpha_n = d(x_n,y_n)$, dann folgt aus Aufgabe 1.1.9, dass $|\alpha_n - \alpha_m| \le d(x_n,x_m) + d(y_n,y_m)$ ist, und deshalb ist (α_n) eine Cauchyfolge reeller Zahlen, also konvergent.

(b) Beh: Auf Y ist d_* eine Semimetrik, d. h., es gelten die Axiome einer Metrik mit der Ausnahme, dass aus $d_*((x_n),(y_n)) = 0$ nicht gefolgert werden kann, dass $(x_n) = (y_n)$ ist.

Bew: Zu zeigen ist nur die Dreiecksungleichung, da alles übrige direkt aus der Definition folgt. Seien deshalb $(x_n),(y_n),(z_n) \in Y$. Dann ist $d(x_n,z_n) \le d(x_n,y_n) + d(y_n,z_n)$ für alle n, und daraus folgt die Dreiecksungleichung für $n \to \infty$.

Nach Aufgabe 8.2.4 erhält man zu dieser Semimetrik eine Äquivalenzrelation, und die Menge der Äquivalenzklassen wird zu einem metrischen Raum, den wir mit $(\hat{X},\hat{d})$ bezeichnen. Wir schreiben für die Äquivalenzklasse einer Cauchyfolge (x_n) bezüglich dieser Relation auch $\widehat{(x_n)}$, und es gilt nach Definition von $\hat{d}$ dass $\hat{d}(\widehat{(x_n)},\widehat{(y_n)}) = d_*((x_n),(y_n))$ ist. In Worten ausgedrückt ist der Abstand zweier Äquivalenzklassen gleich dem von zwei beliebigen Repräsentanten.

(c) Beh: Die Abbildung $f : X \to \hat{X}$, die jedem $x \in X$ die Äquivalenzklasse $\widehat{(x)}$ zuordnet, in welcher die konstante Folge $(x_n = x)$ liegt, ist eine Isometrie.

Bew: Für $x,y \in X$ seien $x_n = x$, $y_n = y$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt $\hat{d}(\widehat{(x)},\widehat{(y)}) = d_*((x_n),(y_n)) = \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = d(x,y)$, also die Behauptung.

(d) Beh: $f(X)$ ist dicht in $\hat{X}$.

Bew: Sei $\widehat{(x_n)} \in \hat{X}$, und sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ für welches $d(x_n,x_m) < \varepsilon$ ist für alle $n,m \ge N$. Für $x = x_N$ folgt daraus $\hat{d}(\widehat{(x)},\widehat{(x_n)}) = d_*((x),(x_n)) = \lim_{n\to\infty} d(x,x_n) \le \varepsilon$, woraus die Behauptung folgt.

(e) Beh: $(\hat{X},\hat{d})$ ist vollständig.

Bew: Sei $(\widehat{(x_n)}_k)$ eine Cauchyfolge in $\hat{X}$. Für jedes (feste) $k \in \mathbb{N}$ ist also $\widehat{(x_n)}_k$ selber eine Äquivalenzklasse von Cauchyfolgen, von denen wir eine mit $(x_{nk}, n \in \mathbb{N})$ bezeichnen. Zu $\varepsilon > 0$ existiert deshalb ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $\hat{d}(\widehat{(x_n)}_k,\widehat{(x_n)}_j) = \lim_{n\to\infty} d(x_{nk},x_{nj}) < \varepsilon \quad \forall\, k,j \ge N$. Aus (d) folgt dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $x_k \in X$ existiert, für welches

$$\hat{d}(\widehat{(x_k)},\widehat{(x_n)}_k) \;=\; \lim_{n\to\infty} d(x_k,x_{nk}) \;\le\; 1/k\,.$$

Die Folge (x_k) ist eine Cauchyfolge, denn $d(x_k,x_j) = \hat{d}(\widehat{(x_k)},\widehat{(x_j)}) \le \hat{d}(\widehat{(x_k)},\widehat{(x_n)}_k) + \hat{d}(\widehat{(x_n)}_k,\widehat{(x_n)}_j) + \hat{d}(\widehat{(x_n)}_j,\widehat{(x_j)}) \le 1/k + \varepsilon + 1/j \le 2\,\varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$ und alle genügend großen $k,j \in \mathbb{N}$. Daher ist $(x_n) \in Y$

und

$$\hat{d}(\widehat{(x_n)}_k, \widehat{(x_n)}) \;=\; \lim_{n\to\infty} d(x_{nk}, x_n) \;\le\; \limsup_{n\to\infty} \Big(d(x_{nk}, x_k) \;+\; d(x_k, x_n) \Big) < 1/k \;+\; \varepsilon \le 2\,\varepsilon$$

falls nur k genügend groß ist. Das zeigt, dass die Folge $(\widehat{(x_n)}_k)$ für $k \to \infty$ gegen $\widehat{(x_n)}$ konvergiert. □

Definition 8.2.6 *Der Raum* $(\hat{X}, \hat{d})$ *aus dem letzten Satz heißt* Vervollständigung *des metrischen Raumes* (X, d)*. Aus dem Korollar zu* Proposition 8.3.4 *wird sich ergeben, dass die Vervollständigung bis auf Isometrie eindeutig bestimmt ist.*

Beispiel 8.2.7 *Im Folgenden sei* $1 \le p < \infty$ *fest gewählt.*

(a) *Sei* X *die Menge aller reellen Zahlenfolgen wie im* Beispiel 8.1.3*. Wir definieren eine Norm* $\|x\|_p = \big(\sum_{k=1}^\infty |x^{(k)}|^p\big)^{1/p}$ *für* $x \in X$*, wobei es wichtig ist zu beachten, dass diese Reihe konvergiert, da ja immer nur endlich viele ihrer Glieder von 0 verschieden sind. Dann ist* $(X, \|\cdot\|_p)$ *ein nicht vollständiger normierter Raum. Seine Vervollständigung ist, bis auf Isometrie, gleich*

$$\ell_p \;=\; \big\{ (x^{(k)}) : \quad \sum_{k=1}^\infty |x^{(k)}|^p \;<\; \infty \big\}\,.$$

(b) *Sei* $a < b$*, und sei für* $f \in C[a,b]$ *eine* p*-Norm* $\|f\|_p$ *wie in* Beispiel 1.1.3 *definiert. Dieser normierte Raum ist nicht vollständig. Seine Vervollständigung erhält man wie folgt: Auf der Menge aller auf* $[a,b]$ *definierten Funktionen* f*, für welche* $|f|^p$ *im Lebesgueschen Sinn über* $[a,b]$ *integrierbar ist, ist* $d(f,g) = \|f - g\|_p$ *eine Semimetrik und definiert daher eine Äquivalenzrelation. Die Menge aller Äquivalenzklassen wird dann zu einem vollständigen normierten Raum, den man mit* $L_p[a,b]$ *bezeichnet, und dieser Raum ist die gesuchte Vervollständigung.*

Analoge Aussagen gelten auch für $p = \infty$*, also die Supremumsnorm auf* X *bzw.* $C[a,b]$*. Man erhält dann im Fall* (a) *als Vervollständigung den Raum* c_0 *der Nullfolgen, während bei* (b) *der Raum* $C[a,b]$ *bereits vollständig ist.*

8.3 Gleichmäßige Stetigkeit und Fortsetzung stetiger Abbildungen

Lemma 8.3.1 *Seien* $(X, \mathcal{T}_X)$ *ein topologischer Raum und* $(Y, \mathcal{T}_Y)$ *ein Hausdorff-Raum, und sei* $E \subset X$ *dicht in* $(X, \mathcal{T}_X)$*. Sind* $f_1, f_2 : X \to Y$ *beide stetig auf* X*, und gilt* $f_1(x) = f_2(x)$ *für alle* $x \in E$*, so sind die Abbildungen auf ganz* X *gleich.*

Beweis: Sei $x \in X$, und seien $y_j = f_j(x)$ für $j = 1$ und $j = 2$. Für $U_j \in \mathcal{U}(y_j)$ gilt $f_j^{-1}(U_j) \in \mathcal{U}(x)$, und daraus folgt

$$U \;=\; f_1^{-1}(U_1) \cap f_2^{-1}(U_2) \;\in \mathcal{U}(x)\,.$$

Da E dicht ist, gibt es ein $\tilde{x} \in U \cap E$, und daher folgt $f_1(\tilde{x}) = f_2(\tilde{x}) \in U_1 \cap U_2$. Das bedeutet, dass sich die Punkte y_1 und y_2 in $(Y, \mathcal{T}_Y)$ nicht trennen lassen, und deshalb folgt aus der Hausdorff-Eigenschaft dass $y_1 = y_2$ ist. □

Definition 8.3.2 *Seien* (X, d_X) *und* (Y, d_Y) *metrische Räume, und sei* $\emptyset \neq E \subset X$*. Eine Abbildung* $f : E \to Y$ *heißt* auf E gleichmäßig stetig, *falls gilt*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x_1, x_2 \in E: \quad d_X(x_1, x_2) < \delta \implies d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon\,. \tag{8.3.1}$$

Offenbar ist jede gleichmäßig stetige Abbildung auch stetig auf E*, aber nicht umgekehrt. Eine Isometrie ist allerdings immer gleichmäßig stetig auf* E*.*

Satz 8.3.3 *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, und sei $f : X \to Y$ eine auf X stetige Abildung. Wenn (X, d_X) kompakt ist, dann ist f auf X gleichmäßig stetig.*

Beweis: Zu $\varepsilon > 0$ und $x \in X$ existiert ein $\delta_x > 0$ derart, dass aus $d_X(x, \tilde{x}) < \delta_x$ folgt, dass $d_Y(f(x), f(\tilde{x})) < \varepsilon/2$ ist. Die Umgebungen $U_{\delta_x/2}(x)$ sind eine offene Überdeckung von X, und wenn X kompakt ist, dann gibt es $x_1, \ldots, x_n \in X$ mit $X \subset \cup U_{r_j}(x_j)$, wobei $r_j = \delta_{x_j}/2$ gesetzt ist. Für $\delta = \min\{r_1, \ldots, r_n\}$ gilt dann: Sind $x, \tilde{x} \in X$, so existiert ein $j \in \{1, \ldots, n\}$, für welches $x \in U_{r_j}(x_j)$ ist, und ist dann $\tilde{x} \in U_\delta(x)$, so folgt mit der Dreiecksungleichung dass $\tilde{x} \in U_{2r_j}(x_j)$ ist. Daraus folgt aber $d_Y(f(x), f(\tilde{x})) \le d(f(x), f(x_j)) + d(f(x_j), f(\tilde{x})) < \varepsilon$. □

Proposition 8.3.4 *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, und sei (Y, d_Y) vollständig. Sei weiter $E \subset X$ dicht in (X, d_X) und $f : E \to Y$ gleichmäßig stetig auf E. Dann gibt es genau eine stetige Abbildung $F : X \to Y$ mit $F(x) = f(x)$ für alle $x \in E$, und F ist auf X sogar gleichmäßig stetig.*

Beweis: Sei $x \in X$. Da E dicht ist, gibt es nach Lemma 4.2.1 eine Folge (x_n) aus E, welche gegen x konvergiert.

Beh: Die Bildfolge $(y_n = f(x_n))$ ist wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f auf E eine Cauchyfolge.

Bew: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, und sei $\delta > 0$ so, dass (8.3.1) gilt. Da eine konvergente Folge auch Cauchyfolge ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n, m \ge N$ gilt $d_x(x_n, x_m) < \delta$, und dann folgt aus (8.3.1) dass $d_y(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$ ist.

Wegen der Vollständigkeit von (Y, d_Y) hat $(y_n = f(x_n))$ einen (eindeutig bestimmten) Grenzwert $y \in Y$.

Beh: y hängt nur von x, nicht aber von der Wahl der Folge (x_n) ab.

Bew: Seien $\tilde{x}_n \in E$, und gelte $x = \lim \tilde{x}_n$. Dann konvergiert $(f(\tilde{x}_n))$ in Y gegen ein $\tilde{y}$, und mit ε und δ wie in (8.3.1) folgt für alle n mit $d_X(x_n, \tilde{x}_n) \le d_X(x_n, x) + d_X(x, \tilde{x}_n) < \delta$, dass $d_Y(f(x_n), f(\tilde{x}_n) < \varepsilon$ ist. Für $n \to \infty$ folgt hieraus aber $d_Y(y, \tilde{y}) \le \varepsilon$, und da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt $\tilde{y} = y$.

Wegen dieses Zwischenergebnisses ist es gerechtfertigt, wenn wir eine Abbildung $F : X \to Y$ durch $F(x) = y$ definieren. Falls F auf X stetig sein soll, ist dies nach Definition von y zwingend der Fall, woraus die Eindeutigkeit von F folgt. Außerdem ist für $x \in E$ klar, dass $F(x) = f(x)$ ist, denn wir können dann ja $x_n = x$ wählen, woraus $y = f(x)$ folgt.

Beh: F ist auf X gleichmäßig stetig.

Bew: Seien ε und δ wie in (8.3.1), und seien $x_1, x_2 \in X$ mit $d_X(x_1, x_2) < \delta$. Wähle Folgen $(x_n^{(1)})$ und $(x_n^{(2)})$ aus E, die gegen x_1 bzw. x_2 konvergieren. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ für welches

$$d_X(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}) \ \le d_X(x_n^{(1)}, x_1) \ + \ d_X(x_1, x_2) \ + \ d_X(x_2, x_n^{(2)}) \ < \ \delta \qquad \forall\, n \ge N\,.$$

Hieraus folgt aber $d_Y(f(x_n^{(1)}), f(x_n^{(2)})) < \varepsilon$ für diese n, und für $n \to \infty$ folgt dann mit Aufgabe 4.3.8 $d_Y(F(x_1), f(x_2)) \le \varepsilon$. Daraus folgt die letzte Behauptung. □

Korollar zu Proposition 8.3.4 *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) vollständige metrische Räume, und seien E_X bzw. E_Y dichte Teilmengen von (X, d_X) bzw. (Y, d_Y). Wenn (E_X, d_X) und (E_Y, d_Y) isometrisch sind, dann sind es auch (X, d_X) und (Y, d_Y). Insbesondere ist die Vervollständigung eines metrischen Raumes bis auf Isometrie eindeutig bestimmt.*

Beweis: Nach Voraussetzung gibt es eine Isometrie f von (E_X, d_X) auf (E_Y, d_Y). Nach der Proposition lässt sich dieses f zu einem F von X nach Y fortsetzen, und man zeigt leicht, dass dieses F eine surjektive Isometrie ist. □

8.4 Der Banachsche Fixpunktsatz

Definition 8.4.1 *Eine Abbildung f eines metrischen Raumes (X,d) in sich selbst heißt* eine Kontraktion *oder* kontraktiv*, wenn es ein $\alpha \in (0,1)$ gibt, für welches*

$$\forall\ x,y \in X: \quad d(f(x),f(y)) \ \le\ \alpha\, d(x,y)\,. \tag{8.4.1}$$

Jedes solche α heißt dann auch Kontraktionsparameter *für f. Man sieht aus der Definition, dass eine Kontraktion auf X gleichmäßig stetig ist.*

Für eine beliebige Abbildung f einer nicht-leeren Menge X in sich selber schreiben wir f^n für die n-fach iterierte Abbildung $f \circ \ldots \circ f$, und setzen $f^0 = \mathrm{id}$, also gleich der identischen Abbildung. Wir nennen ein $x \in X$ einen Fixpunkt *von f, wenn $f(x) = x$ ist.*

Lemma 8.4.2 *Sei (X,d) ein metrischer Raum, und sei f eine Kontraktion auf X mit Kontraktionsparameter α. Dann gilt:*

(a) $\forall\ n \ge 0 \quad \forall\ x,y \in X: \quad d(f^n(x),f^n(y)) \ \le\ \alpha^n\, d(x,y)$.

(b) $\forall\ n \ge 1 \quad \forall\ x \in X: \quad d(f^n(x),x) \ \le\ \dfrac{1}{1-\alpha}\, d(f(x),x)$.

(c) $\forall\ x,y \in X: \quad d(x,y) \ \le\ \dfrac{1}{1-\alpha}\Big(d(x,f(x)) \ +\ d(y,f(y))\Big)$.

(d) *f besitzt höchstens einen Fixpunkt.*

Beweis: Teil (a) folgt mit vollständiger Induktion über n. Unter Benutzung von (a) zeigt man dann $d(f^n(x),x) \le \sum_{k=0}^{n-1} d(f^{(k+1)}(x),f^{(k)}(x)) \le d(f(x),x)\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k$ für $n \in \mathbb{N}$, und hieraus folgt (b). Wegen $d(x,y) \le d(x,f(x)) + d(f(x),f(y)) + d(f(y),y) \le d(x,f(x)) + \alpha\, d(x,y) + d(f(y),y)$ folgt (c). Wenn x und y Fixpunkte von f sind, so folgt mit (c) dass $d(x,y) \le 0$ ist, und deshalb gilt (d). □

Satz 8.4.3 (Banachscher Fixpunktsatz) *Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum, und sei f eine Kontraktion auf X mit Kontraktionsparameter α. Dann gilt:*

(a) *f besitzt genau einen Fixpunkt $\xi \in X$.*

(b) *Für beliebiges $x_0 \in X$ und $x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0)$, $n \ge 1$, konvergiert die Folge (x_n) gegen den Fixpunkt ξ.*

(c) $\forall\ n \in \mathbb{N}: \quad d(x_n,\xi) \ \le\ \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}\, d(x_1,x_0)$ (a-priori-Abschätzung).

(d) $\forall\ n \in \mathbb{N}: \quad d(x_n,\xi) \ \le\ \dfrac{1}{1-\alpha}\, d(x_{n+1},x_n)$ (a-posteriori-Abschätzung).

Beweis: Für x_n wie in (b) folgt mit dem letzten Lemma für $n,p \in \mathbb{N}$:

$$d(x_{n+p},x_n) \ =\ d(f^n(x_p),f^n(x_0)) \ \le \alpha^n\, d(x_p,x_0) \ \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\, d(x_1,x_0)\,. \tag{8.4.2}$$

Daraus schließen wir, dass (x_n) eine Cauchyfolge ist und wegen der Vollständigkeit einen Grenzwert ξ in X besitzt. Da f auf X stetig ist, folgt aus $x_n = f(x_{n-1})$ für $n \to \infty$, dass $\xi = f(\xi)$ gelten muss. Also ist ξ ein Fixpunkt, und da nach dem Lemma f höchstens einen solchen Fixpunkt hat, folgen (a) und (b). Lässt man in (8.4.2) $p \to \infty$ gehen, so folgt (c). Weiter folgt wie oben mit dem Lemma

$$d(x_{n+p},x_n) \ =\ d(f^p(x_n),x_n) \ \le \frac{1}{1-\alpha}\, d(f(x_n),x_n)\,,$$

und hieraus ergibt sich (d) für $p \to \infty$. □

8.5 Der Bairesche Kategoriensatz

Lemma 8.5.1 *In jedem vollständigen metrischen Raum (X, d) gilt: Sind die Mengen $A_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, alle abgeschlossen und nicht leer, und ist*

$$A_n \supset A_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,, \qquad d(A_n) \;:=\; \sup_{x,y \in A_n} d(x,y) \;\to\; 0 \quad (n \to \infty)$$

so enthält $\cap_n A_n$ genau einen Punkt $x_0 \in X$.

Beweis: Sei $x_n \in A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist für $n, p \in \mathbb{N}$ immer $x_{n+p} \in A_n$, und somit folgt $d(x_{n+p}, x_n) \leq d(A_n)$. Daraus schließen wir, dass (x_n) eine Cauchyfolge ist und wegen der Vollständigkeit einen Grenzwert x_0 besitzt. Da alle A_n abgeschlossen sind, folgt $x_0 \in A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist y ebenfalls im Durchschnitt aller A_n, so folgt $d(x_0, y) \leq d(A_N)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, weswegen $y = x_0$ sein muss. □

Definition 8.5.2 *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt* Baire-Raum*, falls gilt: Wenn Mengen $A_n \subset X$ abgeschlossen sind und keine inneren Punkte haben, für alle $n \in \mathbb{N}$, so hat auch ihre Vereinigung keine inneren Punkte.*

Beispiel 8.5.3 *Die Menge $\mathbb{Q}$ mit der euklidischen Topologie ist kein Baire-Raum, da sie die abzählbare Vereinigung von einelementigen Mengen ist. Allgemeiner ist jeder abzählbare Hausdorff-Raum ohne isolierte Punkte kein Baire-Raum.*

Satz 8.5.4 *Kompakte topologische sowie vollständige metrische Räume sind immer Baire-Räume.*

Beweis: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Raum bzw. ein vollständiger metrischer Raum mit Metrik d, und seien die Mengen $A_n \subset X$ abgeschlossen und ohne innere Punkte. Sei $O \in T$ und nicht leer. Dann wollen wir nicht-leere Mengen $O_n \in \mathcal{T}$ so wählen, dass $O_0 = O$ ist, dass $\overline{O_n} \subset O_{n-1}$ ist, und dass $\overline{O_n} \cap A_n = \emptyset$ ist, jeweils für $n \geq 1$. Wenn $O_0, \ldots, O_{n-1}$ bereits gewählt sind, dann ist $V := O_{n-1} \cap (X \setminus A_n)$ eine offene Menge und nicht leer, denn sonst wäre $O_{n-1} \subset A_n$, was $\mathring{A}_n = \emptyset$ widerspricht. Da der Raum in beiden Fällen regulär ist, gibt es zu $x \in V$ ein $O_n \in \mathcal{T}$ mit $x \in O_n \subset \overline{O}_n \subset V$. Also haben wir ein O_n mit den gewünschten Eigenschaften gefunden. Wenn wir im Fall eines metrischen Raumes sind, können wir noch zusätzlich O_n so verkleinern, dass $d(\overline{O}_n) \leq 1/n$ ist. Mit Hilfe von Satz 6.1.5 bzw. dem letzten Lemma folgt dann dass der Durchschnitt aller $\overline{O}_n$ nicht leer sein kann. Also gibt es ein $x \in \cap_n \overline{O}_n \subset \cap_n (X \setminus A_n) = X \setminus \cup_n A_n$. Wegen $x \in \overline{O}_1 \subset O_0 = O$ folgt dass $O \not\subset \cup_n A_n$ ist. Da $O \in \mathcal{T}$ beliebig gewesen ist, kann $\cup_n A_n$ keine inneren Punkte haben. □

Proposition 8.5.5 *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann ein Baire-Raum, wenn folgendes gilt: Sind die Mengen O_n offen und dicht in $(X, \mathcal{T})$, für $n \in \mathbb{N}$, dann ist ihr Durchschnitt dicht in $(X, \mathcal{T})$.*

Beweis: Ein O_n ist genau dann offen und dicht, wenn $A_n := X \setminus O_n$ abgeschlossen ist und keine inneren Punkte hat. Daraus folgt die Behauptung. □

Satz 8.5.6 *Sei $[a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall, seien $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ stetig und punktweise konvergent auf $[a, b]$. Dann ist die Menge aller Punkte, in denen die Grenzfunktion f stetig ist, dicht in $[a, b]$.*

Beweis: Für $n, m \in \mathbb{N}$ sei $A_{nm} = \{x \in [a,b] : \ |f_n(x) - f_{n+p}(x)| \leq 1/m \quad \forall\, p \in \mathbb{N}\}$. Wegen der Stetigkeit der Funktionen f_n folgt, dass alle A_{nm} abgeschlossen sind, und wegen der punktweisen Konvergenz ist $\cup_n A_{nm} = [a,b]$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Wir wollen zeigen, dass die Grenzfunktion f in allen Punkten $x \in B := \cap_m(\cup_n \overset{\circ}{A}_{nm})$ stetig ist. Dazu sei ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Wenn $x \in B$ ist, dann gibt es zu jedem m ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $\delta > 0$ mit $t \in A_{nm}$ für alle $t \in [a,b]$ mit $|x - t| < \delta$. Wir wählen ein m mit $1/m \leq \varepsilon/3$, und erhalten mit den dazu existierenden n und δ:

$$|f(t) - f(x)| = \lim_{p\to\infty} |f_{n+p}(t) - f_{n+p}(x)| \leq \limsup_{p\to\infty} \Big(|f_{n+p}(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_{n+p}(x)| \Big)$$

und die rechte Seite ist für x und t wie oben maximal gleich $2/m + |f_n(t) - f_n(x)| \leq 2\varepsilon/3 + |f_n(t) - f_n(x)|$. Wenn wir jetzt δ evtl. noch verkleinern, so können wir erreichen dass $|f_n(t) - f_n(x)| < \varepsilon/3$ ausfällt, was die Stetigkeit von f in x sichert.

Sei jetzt $O_{nm} = [a,b] \setminus (A_{nm} \setminus \overset{\circ}{A}_{nm})$. Dann hat $[a,b] \setminus O_{nm}$ keine inneren Punkte, was zeigt dass O_{nm} in $[a,b]$ dicht liegt. Außerdem ist O_{nm} offen, und daher folgt aus der obigen Proposition dass der Durchschnitt aller O_{nm} ebenfalls dicht in $[a,b]$ ist. Wenn aber x ein Punkt dieses Durchschnitts ist, dann folgt $x \notin (A_{nm} \setminus \overset{\circ}{A}_{nm})$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Da für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $x \in A_{nm}$, folgt für jedes m die Existenz eines n mit $x \in \overset{\circ}{A}_{nm}$. Demzufolge ist $\cap_{n,m} O_{nm} \subset B$. Daraus folgt die Behauptung. □

Definition 8.5.7 *Sei E Teilmenge eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$. Wir nennen E* nirgends dicht*, falls der Abschluss von E keine inneren Punkte besitzt. Wir sagen, dass E in $(X, \mathcal{T})$* von erster Kategorie *ist, falls es Vereinigung von abzählbar vielen nirgends dichten Mengen ist. Ist dies nicht der Fall, so heißt E* von zweiter Kategorie*.*

Aufgabe 8.5.8 *Zeige: Eine abgeschlossene Teilmenge A eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann nirgends dicht, wenn ihr Komplement dicht in $(X, \mathcal{T})$ ist. Zeige weiter, dass eine Vereinigung abzählbar vieler Mengen von erster Kategorie wieder von erster Kategorie ist.*

Satz 8.5.9 (Bairescher Kategoriensatz) *Ein vollständiger metrischer Raum ist von zweiter Kategorie.*

Beweis: Sei (X, d) ein metrischer Raum von erster Kategorie, also $X = \cup_n E_n$, mit nirgends dichten Mengen E_n, $n \in \mathbb{N}$. O. B. d. A. können alle E_n als abgeschlossen vorausgesetzt werden. Da X per Definition immer offen ist und deshalb innere Punkte hat, kann (X, d) kein Baire-Raum sein, und deshalb folgt die Behauptung aus Satz 8.5.4. □

Kapitel 9

Kompakte metrische Räume

9.1 Äquivalente Formulierungen der Kompaktheit

Definition 9.1.1 (Folgenkompaktheit) *Ein topologischer Raum* $(X, \mathcal{T})$ *heißt* folgenkompakt*, falls jede Folge mit Gliedern aus* X *eine konvergente Teilfolge besitzt.*

Satz 9.1.2 *In jedem metrischen Raum* (X, d) *sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) X *ist kompakt.*

(b) *Jede abzählbare offene Überdeckung besitzt eine endliche Teilüberdeckung.*

(c) *Jede unendliche Teilmenge von* X *besitzt einen Häufungspunkt.*

(d) *Sind die Mengen* A_k*, für* $k \in \mathbb{N}$*, nicht leer und abgeschlossen, und gilt* $A_k \supset A_{k+1}$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$*, so ist* $\cap_k A_k \neq \emptyset$*.*

(e) X *ist folgenkompakt.*

Beweis: Trivialerweise folgt (b) aus (a), und nach Proposition 6.1.5 sind (b),(c) und (d) äquivalent. Wenn (c) gilt, und wenn (x_n) eine Folge mit Gliedern in X ist, so ist entweder die Menge $\{x_n\}$ unendlich und hat dann einen Häufungspunkt $x \in X$, von welchem man mit Hilfe von Satz 3.1.5 zeigen kann, dass er Grenzwert einer Teilfolge von (x_n) ist, oder aber $\{x_n\}$ ist eine endliche Menge, woraus folgt dass mindestens ein Folgenglied x_n unendlich oft wiederholt wird, und dann ist dieses x_n Grenzwert einer Teilfolge. Also folgt (e) aus (c). Wenn jetzt (e) erfüllt ist, dann gilt auch (c), da eine unendliche Menge immer eine Folge mit paarweise verschiedenen Gliedern aus X enthält, welche dann eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert ein Häufungspunkt der Menge ist. Sei jetzt (c) richtig. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ muss es endlich viele $x_{n1}, \ldots, x_{nm} \in X$ geben, für welche $X \subset \cup_j U_{1/n}(x_{nj})$ ist, denn andernfalls gäbe es eine unendliche Teilmenge $\{x_{nj}\}$ in X mit $d(x_{nj}, x_{nk}) \geq 1/n$ für alle $j \neq k$, und diese Menge hätte keinen Häufungspunkt. Das System $(U_{1/n}(x_{nj}), j = 1, \ldots, m, n \in \mathbb{N})$ ist dann eine abzählbare Basis der Topologie auf (X, d), und damit folgt aus Satz 5.2.5 dass (X, d) ein Lindelöf-Raum ist, woraus wiederum (a) folgt, denn (c) und (b) sind ja äquivalent. □

Definition 9.1.3 *Eine Teilmenge* E *eines metrischen Raumes* (X, d) *heißt* präkompakt *oder auch* total beschränkt*, wenn gilt:*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ x_1, \ldots, x_n \in X \ : \quad E \ \subset \ \bigcup_{j=1}^{n} U_\varepsilon(x_j)\,. \tag{9.1.1}$$

Aufgabe 9.1.4 *Zeige für $E \neq \emptyset$, dass obige Definition auch so ausgesprochen werden kann, dass wir in* (9.1.1) *$x_1, \ldots, x_n \in E$ verlangen.*

Bemerkung 9.1.5 *Aus dem letzten Satz bzw. seinem Beweis folgt dass ein kompakter metrischer Raum total beschränkt ist. Weiter folgt aus dem Beweis, dass ein total beschränkter Raum das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt und deshalb nach* Satz 5.2.5 *separabel ist.*

Proposition 9.1.6 *Ein metrischer Raum (X, d) ist genau dann total beschränkt, wenn jede Folge aus X eine Teilfolge besitzt, welche Cauchyfolge ist.*

Beweis: Sei (x_n) eine Folge in dem total beschränkten Raum (X, d). Zu jedem $\nu \in \mathbb{N}$ gibt es endlich viele $y_{1\nu}, \ldots, y_{m\nu} \in X$ mit $X = \cup_k U_{1/\nu}(y_{k\nu})$. Für $\nu = 1$ liegen in mindestens einem $U_1(y_{k1})$ unendlich viele x_n, und wir bezeichnen die entsprechende Teilfolge mit x_{n1}. Zu dieser Folge und $\nu = 2$ gibt es wiederum ein $U_{1/2}(y_{k2})$, welches unendlich viele der x_{n1} enthält, und diese seien mit x_{n2} bezeichnet. Setzt man dies fort, so erhält man Folgen $x_{n\nu}$ mit $d(x_{n\nu}, x_{m\mu}) < 2/\nu$ für alle $n, m, \mu, \nu \in \mathbb{N}$ mit $\mu \geq \nu$. Die Diagonalfolge (x_{nn}) ist dann eine Teilfolge der Ausgangsfolge (x_n), welche Cauchyfolge ist. Wenn umgekehrt (X, d) nicht total beschränkt ist, dann gibt es zu mindestens einem $\varepsilon > 0$ keine Überdeckung von X mit endlich vielen Kugeln vom Radius ε. Daher gibt es eine Folge (x_n) von Punkten mit $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ für alle $n \neq m$. Diese Folge kann aber keine Teilfolge besitzen, welche Cauchyfolge ist. □

Satz 9.1.7 *Ein metrischer Raum ist genau dann kompakt, wenn er vollständig und total beschränkt ist.*

Beweis: Sei (X, d) kompakt. Nach Satz 9.1.2 ist der Raum folgenkompakt, also muss jede Cauchyfolge eine konvergente Teilfolge besitzen und deshalb wegen Lemma 8.1.2 konvergieren. Daher ist (X, d) vollständig und nach Bemerkung 9.1.5 auch total beschränkt. Umgekehrt folgt aus der Vollständigkeit und totalen Beschränktheit von (X, d) mit der letzten Proposition die Folgenkompaktheit, was nach Satz 9.1.2 zur Kompaktheit äquivalent ist. □

9.2 Funktionenräume

Lemma 9.2.1 *Sei (X, d) ein metrischer Raum, und sei $\bar{d}(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$ für alle $x, y \in X$. Dann ist $\bar{d}$ eine Metrik auf X und zu d äquivalent, und eine Folge (x_n) ist genau dann konvergent bzw. eine Cauchyfolge bezüglich d, wenn sie auch bezüglich $\bar{d}$ konvergiert bzw. Cauchyfolge ist. Insbesondere ist (X, d) genau dann vollständig, wenn auch $(X, \bar{d})$ vollständig ist.*

Beweis: Offenbar erfüllt $\bar{d}$ die ersten beiden Axiome einer Metrik. Für $x, y, z \in X$ gilt: Falls $\bar{d}(x, z) + \bar{d}(z, y) \geq 1$ ist, dann gilt auch die Dreiecksungleichung für $\bar{d}$. Im anderen Fall ist aber $\bar{d}(x, z) = d(x, z)$ und $\bar{d}(z, y) = d(z, y)$, und dann folgt $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < 1$, also $\bar{d}(x, y) = d(x, y)$, und die Dreiecksungleichung ist auch in diesem Fall erfüllt.

Für $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$ folgt mit $\delta_1 = \varepsilon$, $\delta_2 = \min\{1, \varepsilon\}$: $d(x, x_0) < \delta_1 \implies \bar{d}(x, x_0) < \varepsilon$ und $\bar{d}(x, x_0) < \delta_2 \implies d(x, x_0) < \varepsilon$. Daraus folgt mit Satz 4.3.3 die Äquivalenz der Metriken. Da die Konvergenz einer Folge nur von der Topologie des Raumes abhängt, können wir uns jetzt o. B. d. A. darauf beschränken, Cauchyfolgen (x_n) zu betrachten:

Wegen $\bar{d}(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_m)$ ist klar, dass jede Cauchyfolge bezüglich d auch eine für $\bar{d}$ ist. Für die Umkehrung sei $\varepsilon > 0$ und $\tilde{\varepsilon} = \min\{1, \varepsilon\}$. Dann existiert nach Voraussetzung ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\bar{d}(x_n, x_m) < \tilde{\varepsilon}$ für alle $n, m \geq N$. Da in diesem Fall $d(x_n, x_m) = \bar{d}(x_n, x_m)$ ist, folgt dass $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ ist. □

Definition 9.2.2 *Seien X eine nicht-leere Menge und (Y, d) ein metrischer Raum. Wir setzen $F(X, Y)$ gleich der Menge aller Abbildungen $f : X \to Y$. Für $f, g \in F(X, Y)$ definieren wir*

$$\rho(f, g) \;=\; \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))\,,$$

wobei zu beachten ist, dass ρ auch den Wert ∞ annehmen kann. Falls $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum ist, dann bezeichne $C(X, Y)$ die Menge aller stetigen Abbildungen von X nach Y.

Wir nennen $E \subset Y$ beschränkt, *falls $\sup_{y_y, y_2 \in E} d(y_1, y_2) < \infty$ ist. Beachte, dass wir d durch die äquivalente Metrik $\bar{d}$ ersetzen und dadurch erreichen können, dass alle E beschränkt sind.*

Aufgabe 9.2.3 *Sei (X, d) ein metrischer Raum, und sei $E \subset X$. Zeige: Genau dann ist E beschränkt, wenn es ein $x_0 \in X$ und ein $K \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $x \in E$ gilt $d(x, x_0) \le K$.*

Proposition 9.2.4 *Seien X eine nicht-leere Menge und (Y, d) ein beschränkter metrischer Raum. Dann ist ρ eine Metrik auf $F(X, Y)$, und falls (Y, d) vollständig ist, dann ist es auch $(F(X, Y), \rho)$. Falls $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum ist, dann ist $C(X, Y)$ abgeschlossen in $(F(X, Y), \rho)$, also ebenfalls vollständig, falls (Y, d) vollständig ist.*

Beweis: Da (Y, d) beschränkt ist, folgt $\rho(f, g) < \infty$ für alle $f, g \in F(X, Y)$. Die ersten beiden Axiome einer Metrik sind für ρ offenbar erfüllt, und die Dreiecksungleichung folgt, da

$$d(f(x), g(x)) \le d(f(x), h(x)) + d(h(x), g(x)) \le \rho(f, h) + \rho(h, g) \qquad \forall\, x \in X \quad \forall\, f, g, h \in F(X, Y)\,.$$

Wenn (f_n) eine Cauchyfolge in $(F(X, Y), \rho)$ ist, dann folgt für jedes feste $x \in X$ dass $(f_n(x))$ eine Cauchyfolge in (Y, d) ist. Wenn also (Y, d) vollständig ist, sind alle diese Folgen konvergent gegen ein $f(x) \in Y$. Für $\varepsilon > 0$ und genügend großes $N \in \mathbb{N}$ ist $\rho(f_n, f_m) < \varepsilon$ für alle $n, m \ge N$, und daraus folgt für $m \to \infty$ dass $\rho(f_n, f) \le \varepsilon$ ist für alle $n \ge N$. Also ist $(F(X, Y), \rho)$ vollständig. Um zu zeigen, dass $C(X, Y)$ in $(F(X, Y), \rho)$ abgeschlossen ist, reicht es zu beweisen, dass aus $\rho(f_n, f) \to 0$ für $n \to \infty$ folgt dass f stetig auf X sein muss, wenn nur alle f_n stetig sind. Das gilt aber nach Satz 4.2.5, denn die Konvergenz bezüglich der Metrik ρ ist dasselbe wie die gleichmäßige Konvergenz auf X. □

Satz 9.2.5 *Seien $(X, \mathcal{T})$ ein kompakter topologischer und (Y, d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann ist ρ eine Metrik auf $C(X, Y)$, und $(C(X, Y), \rho)$ ist vollständig.*

Beweis: Seien $f, g \in C(X, Y)$. Die Abbildung $x \mapsto d(f(x), g(x))$ ist auf X stetig, also beschränkt nach Satz 6.3.2, und deshalb ist $\rho(f, g) < \infty$. Genauso wie im Beweis des vorherigen Satzes folgt dann die Behauptung. □

9.3 Gleichgradige Stetigkeit

Definition 9.3.1 *Seien $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer und (Y, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $E \subset C(X, Y)$ heißt dann* gleichgradig stetig *in $x_0 \in X$, falls gilt*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, U \in \mathcal{U}(x_0) \quad \forall\, f \in E \quad \forall\, x \in U : \quad d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon\,.$$

Wenn dies für alle x_0 aus einer Menge $B \subset X$ erfüllt ist, nennen wir E gleichgradig stetig auf B.

Satz 9.3.2 *Seien $(X,\mathcal{T})$ ein kompakter topologischer und (Y,d) ein kompakter metrischer Raum. Eine Teilmenge $E \subset C(X,Y)$ ist genau dann gleichgradig stetig auf X, wenn E in dem metrischen Raum $(C(X,Y),\rho)$ total beschränkt ist.*

Beweis: Sei E total beschränkt, und seien $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in X$. Dann gibt es $f_1,\dots,f_n \in E$ so, dass $E \subset \cup_k U_\varepsilon(f_k)$. Zu jedem f_k existiert ein $U_k \in \mathcal{U}(x_0)$ mit $d(f_k(x),f_k(x_0)) < \varepsilon$ für alle $x \in U_k$. Wir bilden $U = \cap_k U_k \in \mathcal{U}(x_0)$. Für $f \in E$ gibt es dann ein $k \in \{1,\dots,n\}$ mit $f \in U_\varepsilon(f_k)$, und daher folgt für $x \in U$, dass $d(f(x),f(x_0)) \le d(f(x),f_k(x)) + d(f_k(x),f_k(x_0)) + d(f_k(x_0),f(x_0)) < 3\,\varepsilon$ ist. Daher folgt die gleichgradige Stetigkeit von E. Umgekehrt, sei E gleichgradig stetig, und sei $\varepsilon > 0$. Zu jedem $x \in X$ gibt es dann ein $U_x \in \mathcal{U}(x)$, für welches $d(f(x),f(y)) < \varepsilon$ ist für alle $f \in E$ und alle $y \in U_x$. Wegen der Kompaktheit von $(X,\mathcal{T})$ gibt es dann $x_1,\dots,x_n \in X$ für welche $X = \cup_j U_{x_j}$ ist. Da auch (Y,d) kompakt ist, gibt es $y_1,\dots,y_m \in Y$ mit $Y = \cup_k U_\varepsilon(y_k)$. Sei α eine beliebige Abbildung von $\{1,\dots,n\}$ nach $\{1,\dots,m\}$. Falls es ein $f \in E$ gibt mit $f(x_j) \in U_\varepsilon(y_{\alpha(j)})$, dann sei ein solches f mit f_α bezeichnet. Da es nur endlich viele Abbildungen α gibt, erhalten wir so eine endliche Teilmenge von E. Sei jetzt $f \in E$; dann gibt es ein α mit $f(x_j) \in U_\varepsilon(y_{\alpha(j)})$, für alle $j = 1,\dots,n$. Für $x \in X$ und alle $j = 1,\dots,n$ folgt dann

$$d(f(x),f_\alpha(x)) \;\le\; d(f(x),f(x_j)) \;+\; d(f(x_j),f_\alpha(x_j)) \;+\; d(f_\alpha(x_j),f_\alpha(x))\,.$$

Wenn wir jetzt j so wählen, dass $x \in U_{x_j}$ ist, so folgt $d(f(x),f(x_j)) < \varepsilon$, $d(f_\alpha(x_j),f_\alpha(x)) < \varepsilon$ und $d(f(x_j),f_\alpha(x_j)) < 2\,\varepsilon$, also $d(f(x),f_\alpha(x)) < 4\,\varepsilon$. Da x beliebig war, folgt die totale Beschränktheit der Menge E. □

9.4 Der Satz von Arzela-Ascoli

Definition 9.4.1 *Seien X eine nicht-leere Menge und (Y,d) ein metrischer Raum, und sei $E \subset F(X,Y)$. Wir nennen E* punktweise beschränkt*, falls gilt*

$$\forall\, x \in X \quad \exists\, K \in \mathbb{R} \quad \forall\, f_1,f_2 \in E: \quad d(f_1(x),f_2(x)) \;\le\; K\,.$$

Dagegen heißt E gleichmäßig beschränkt*, falls gilt*

$$\exists\, K \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in X \quad \forall\, f_1,f_2 \in E: \quad d(f_1(x),f_2(x)) \;\le\; K\,.$$

Im ersten Fall darf also K von x abhängen, im anderen Fall dagegen nicht.

Lemma 9.4.2 *Seien $(X,\mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Raum und (Y,d) ein metrischer Raum. Wenn $E \subset C(X,Y)$ gleichgradig stetig und punktweise beschränkt ist, dann ist E sogar gleichmäßig beschränkt.*

Beweis: Wegen der gleichgradigen Stetigkeit folgt für jedes $x \in X$ die Existenz eines $U_x \in \mathcal{U}(x)$ so dass für alle $f \in E$ und alle $y \in U_x$ gilt $d(f(x),f(y)) < 1$. Wegen der Kompaktheit von $(X,\mathcal{T})$ gibt es $x_1,\dots,x_n \in X$ mit $X = \cup_k U_{x_k}$, und aus der punktweisen Beschränktheit folgt die Existenz von K_k so, dass für alle $f_1,f_2 \in E$ gilt $d(f_1(x_k),f_2(x_k)) \le K_k$, für $k = 1,\dots,n$. Mit $K = 2 + \max\{K_1,\dots,K_n\}$ gilt dann: Zu $x \in X$ gibt es ein $k \in \{1,\dots,n\}$ mit $x \in U_{x_k}$, und daher ist

$$d(f_1(x),f_2(x)) \;\le\; d(f_1(x),f_1(x_k)) \;+\; d(f_1(x_k),f_2(x_k)) + d(f_2(x_k),f_2(x)) \;\le\; K_k + 2 \;\le K \quad \forall\, x \in X\,.$$

Das ist die gleichmäßige Beschränktheit. □

Definition 9.4.3 *Wir sagen dass ein metrischer Raum die* Heine-Borel-Eigenschaft *besitzt, wenn jede abgeschlossene und beschränkte*[1] *Teilmenge kompakt ist.*

[1] Man nennt eine Teilmenge B eines metrischen Raumes (X,d) beschränkt, wenn $\sup_{x,y\in X} d(x,y) < \infty$ ist. Beachte, dass dieser Begriff nicht nur von der Topologie auf X, sondern von der betrachteten Metrik abhängt!

Satz 9.4.4 (Satz von Arzela-Ascoli) *Seien $(X, \mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Raum und (Y, d) ein metrischer Raum mit der Heine-Borel-Eigenschaft. Für eine Teilmenge $E \subset C(X, Y)$ ist $\overline{E}$ genau dann kompakt, wenn E gleichgradig stetig und punktweise beschränkt ist.*

Beweis: Wenn $\overline{E}$ kompakt ist, dann ist es nach Satz 9.1.7 total beschränkt. Demnach existieren $f_1, \dots, f_n \in \overline{E}$ so, dass $E \subset \overline{E} \subset \cup_j U_1(f_j)$ ist. Also gibt es zu jedem $f \in E$ ein $k \in \{1, \dots, n\}$, für welches $\rho(f, f_k) = \sup_{x \in X} d(f(x), f_k(x)) < 1$ ist. Daher gilt für jedes feste $f_0 \in E$:

$$\forall\, f \in E \quad \forall\, x \in X : \quad d(f_0(x), f(x)) \;\le\; d(f_0(x), f_k(x)) + d(f_k(x), f(x)) \;\le\; K + 1\,,$$

mit $K = \max_{1 \le k \le n} \sup_{x \in X} d(f_0(x), f_k(x))$. Das ist die gleichmäßige Beschränktheit von E, und aus ihr folgt dass die Menge $Z = \overline{\cup_{f \in E} f(X)}$ beschränkt und somit kompakt ist, und wir haben dass alle f die Menge X in Z abbilden. Daraus folgt mit Hilfe des letzten Satzes die gleichgradige Stetigkeit von E, und die punktweise folgt trivialerweise aus der gleichmäßigen Beschränktheit.

Umgekehrt, sei jetzt E gleichgradig stetig und punktweise beschränkt. Mit dem letzten Lemma folgt dann die gleichmäßige Beschränktheit von E, und dann folgt wie oben, dass die Menge Z kompakt ist. Mit dem letzten Satz folgt dann die totale Beschränktheit von E, also auch die von $\overline{E}$, und daraus folgt wiederum die Kompaktheit. □

9.5 Der Satz von Stone-Weierstraß

Definition 9.5.1 *Für einen beliebigen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ schreiben wir $C(X) = C(X, \mathbb{R})$. Eine Teilmenge $A \subset C(X)$ heißt* eine Algebra, *falls folgendes gilt:*

$$\forall\, f, g \in A \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R} \;: \qquad f + g \in A\,, \quad f\,g \in A\,, \quad \lambda\, f \in A\,. \tag{9.5.1}$$

Eine Algebra in unserem Sinn ist also immer ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ von reellwertigen Funktionen, der gegenüber der Multiplikation abgeschlossen ist. Offenbar ist $C(X)$ selber eine Algebra.

Für beliebige Abbildungen $f, g : X \to \mathbb{R}$ definieren wir

$$|f|(x) = |f(x)|\,, \quad \max\{f, g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\}\,, \quad \min\{f, g\}(x) = \min\{f(x), g(x)\} \qquad \forall\, x \in X\,.$$

Aufgabe 9.5.2 *Zeige für alle $f, g : X \to \mathbb{R}$, mit einer beliebigen nicht-leeren Menge X, dass*

$$\min\{f, g\} \;=\; \frac{1}{2}\,(f + g - |f - g|)\,, \quad \max\{f, g\} \;=\; -\min\{-f, -g\}\,.$$

Zeige weiter, dass für jeden topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ aus $f, g \in C(X)$ folgt $|f|$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ $\in C(X)$.

Lemma 9.5.3 *Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein Polynom p mit $|p(t) - |t|| < \varepsilon$ für $|t| \le 1$.*

Beweis: Man überprüft, dass

$$\sqrt{1 - t} \;=\; 1 \;-\; \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, t^k \qquad \forall\, |t| < 1\,, \qquad \text{mit} \quad a_k > 0 \quad \forall\, k \ge 1\,.$$

Also ist $0 \le s_n(t) := \sum_{k=1}^{n} a_k\, t^k \le 1 - \sqrt{1 - t} \le 1$ für $0 \le t \le 1$ und $n \ge 1$, und insbesondere ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$. Daraus folgt die gleichmäßige Konvergenz von $s_n(t)$ auf $[0, 1]$. Dies wiederum zeigt, dass die Polynome $p_n(t) = 1 - s_n(1 - t^2)$ auf $[-1, 1]$ gleichmäßig gegen $\sqrt{t^2} = |t|$ konvergieren. Daraus folgt die Behauptung. □

Proposition 9.5.4 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Raum, also $C(X)$ ein metrischer Raum, und sei $A \subset C(X)$ eine Algebra. Dann gilt:*

(a) *$\overline{A}$ ist ebenfalls eine Algebra.*

(b) *Wenn A abgeschlossen ist, dann folgt*

$$f, g \in A \quad \Longrightarrow \quad |f|,\ \max\{f, g\},\ \min\{f, g\} \in A\,.$$

Beweis: Seien $f, g \in \overline{A}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, und sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $f_\varepsilon, g_\varepsilon \in A$ mit $\rho(f, f_\varepsilon) < \varepsilon$ und $\rho(g, g_\varepsilon) < \varepsilon$, und da A eine Algebra ist, gilt $f_\varepsilon + g_\varepsilon \in A$, $f_\varepsilon\, g_\varepsilon \in A$ und $\lambda\, f_\varepsilon \in A$. Daraus folgt mit der Definition der Metrik ρ:

$$\rho(f + g, f_\varepsilon + g_\varepsilon) \;\le\; \rho(f, f_\varepsilon) \;+\; \rho(g, g_\varepsilon) \;<\; 2\,\varepsilon\,,$$

und daraus folgt $f+g \in \overline{A}$. Weiter ergibt sich mit der Definition von ρ dass $\rho(\lambda\, f, \lambda\, f_\varepsilon) = |\lambda|\, \rho(f, f_\varepsilon) < |\lambda|\, \varepsilon$ ist, woraus $\lambda\, f \in \overline{A}$ folgt. Für das Produkt zeigt man

$$\rho(f\, g, f_\varepsilon\, g_\varepsilon) \;\le\; \rho(g, g_\varepsilon)\ \max_{x \in X} |f(x)| \;+\; \rho(f, f_\varepsilon)\ \max_{x \in X} |g_\varepsilon(x)| \;\le \varepsilon\ (\max_{x \in X} |f(x)| + \max_{x \in X} |g(x)| + \varepsilon)\,,$$

woraus auch $f\, g \in A$ folgt.

Für den Beweis zu (b) sei $f \in A$. Falls $|f(x)| \le 1$ ist für alle $x \in X$, dann wählen wir ein Polynom p wie im letzten Lemma. Da $|p(0)| < \varepsilon$ ist, folgt für $q(t) = p(t) - p(0)$ dass $|q(t) - |t|\,| < 2\,\varepsilon$ ist. Dann folgt $q(f) \in A$, und $|\,|f(x)| - q(f(x)\,| < 2\,\varepsilon$ für alle $x \in X$. Hieraus folgt $|f| \in A$ für diesen Fall. Im allgemeinen Fall schließen wir aus der Kompaktheit von $(X, \mathcal{T})$ auf die Beschränktheit von f, so dass für genügend kleines $c > 0$ aus dem ersten Fall folgt dass $|c\, f| \in A$ ist, was aber $|f| \in A$ zur Folge hat. Mit Aufgabe 9.5.2 folgt dann der Rest der Behauptung. $\square$

Satz 9.5.5 (Satz von Stone-Weierstraß) *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Raum, und sei $A \subset C(X)$ eine Algebra. Weiter gelte:*

(a) $\forall\ x, y \in X\,,\ x \ne y \quad \exists\ f \in \overline{A} \quad : \qquad f(x) \ne f(y).$

(b) *Die Funktion $f(x) \equiv 1$ liegt in $\overline{A}$.*

Dann ist A dicht in $C(X)$.

Beweis: Seien $f \in C(X)$ und $\varepsilon > 0$. Zu zwei verschiedenen Punkten $y, u \in X$ gibt es nach Voraussetzung ein $h \in \overline{A}$ mit $h(y) \ne h(u)$. Außerdem liegen alle konstanten Funktionen in $\overline{A}$. Also ist die Funktion

$$g(x; y, u) \;:=\; \frac{h(x) - h(u)}{h(y) - h(u)}\ f(y) \;+\; \frac{h(x) - h(y)}{h(u) - h(y)}\ f(u)$$

für feste u, y in $\overline{A}$, und $g(u; y, u) = f(u)$, $g(y; y, u) = f(y)$. Wegen der Stetigkeit von f und $g(\cdot\,; y, u)$ gibt es ein $U_{y,u} \in \mathcal{U}(y)$ so, dass $|g(x; y, u) - f(x)| < \varepsilon$ ist für alle $x \in U_{y,u}$. Aus der Kompaktheit von $(X, \mathcal{T})$ folgt die Existenz von $y_1, \dots, y_n \in X$, wobei n von u abhängen darf, mit $X = \cup_j U_{y_j,u}$. Sei jetzt

$$g(x; u) \;:=\; \min\{g(x; y_j, u) :\ j = 1, \dots, n\}\,.$$

Mit Induktion über n folgt aus der letzten Proposition dass $g(\cdot\,; u) \in \overline{A}$. Offensichtlich gilt $g(u; u) = f(u)$. Da zu jedem $x \in X$ ein $j \in \{1, \dots, n\}$ existiert, für welches $x \in U_{y_j,u}$ ist, folgt auf Grund der Definition von $g(\cdot\,; u)$ dass $g(x; u) - f(x) < \varepsilon$ ist für alle $x \in X$. Auf Grund der Stetigkeit gibt es zu jedem $u \in X$ ein $U_u \in \mathcal{U}(u)$ so, dass $|g(x; u) - f(x)| < \varepsilon$ ist für alle $x \in U_u$. Wegen Kompaktheit existieren dann $u_1, \dots, u_m \in X$ mit $X = \cup_j U_{u_j}$. Sei dann

$$g(x) \;:=\; \max\{g(x; u_j) :\ j = 1, \dots, m\}\,.$$

Dann ist $g(x) < f(x) + \varepsilon$ für alle $x \in X$. Wie oben folgt $g \in \overline{A}$ und $g(x) - f(x) > -\varepsilon$ für alle $x \in X$. Also ist insgesamt $\rho(g, f) < \varepsilon$, und daraus folgt $f \in \overline{A}$, also $\overline{A} = X$, was zu zeigen war. $\square$

Aufgabe 9.5.6 *Benutze den letzten Satz, um folgendes zu beweisen:*

Weierstraßscher Approximationssatz: *Zu jedem abgeschlossenen Intervall* $[a, b]$*, jeder stetigen Funktion* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*, und jedem* $\varepsilon > 0$ *gibt es ein Polynom* p *mit* $|f(t) - p(t)| < \varepsilon$ *für alle* $t \in [a, b]$.

Überlege, auf welchen Intervallen, falls überhaupt, derselbe Satz gilt, wenn wir nur gerade, oder nur ungerade, Polynome zulassen.

Kapitel 10

Die Fundamentalgruppe

In diesem Kapitel seien $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ und $(Z, \mathcal{T}_Z)$ immer beliebige topologische Räume.

10.1 Homotopie

Definition 10.1.1 *Wir nennen stetige Abbildungen $f_1, f_2 : X \to Y$* homotop zueinander*, falls eine stetige Abbildung $F : X \times [0,1] \to Y$ existiert, für welche*

$$\forall\, x \in X : \quad F(x,0) \;=\; f_1(x)\,, \quad F(x,1) \;=\; f_2(x)\,.$$

Die Abbildung F heißt dann auch Homotopie *zwischen f_1 und f_2, und wir schreiben $f_1 \sim f_2$, falls f_1 zu f_2 homotop ist. Kurven $f_1, f_2 : [0,1] \to X$ heißen* weghomotop zueinander*, falls es eine Homotopie F zwischen f_1 und f_2 gibt, für welche zusätzlich gilt*

$$\forall\, t \in [0,1] : \quad F(0,t) \;\equiv\; x_0\,, \quad F(1,t) \;\equiv\; x_1\,.$$

Es folgt dann, dass x_0 bzw. x_1 der gemeinsame Anfangs- bzw. Endpunkt der beiden Kurven sein muss. Die Abbildung F heißt dann auch Weghomotopie *zwischen f_1 und f_2, und wir schreiben $f_1 \sim_p f_2$, falls f_1 zu f_2 weghomotop ist; hierbei steht p für* path.

Aufgabe 10.1.2 *Zeige, dass die Homotopie und die Weghomotopie Äquivalenzrelationen sind.*

Definition 10.1.3 *Seien $f, g : [0,1] \to X$ Kurven mit $f(1) = g(0)$. Dann sei* die Komposition $f * g$ *die Kurve gegeben durch*

$$(f * g)(s) \;=\; \begin{cases} f(2s) & \text{für} \quad 0 \le s \le 1/2 \\ g(2s-1) & \text{für} \quad 1/2 \le s \le 1 \end{cases}$$

Man kann also die Komposition zweier Kurven immer dann bilden, wenn der Endpunkt der ersten gleich dem Anfangspunkt der zweiten Kurve ist. Nach dem Klebelemma ist $f * g$ stetig auf $[0,1]$, also selbst wieder eine Kurve.

Für $x \in X$ sei e_x die Einpunktkurve*, gegeben durch $e_x(s) \equiv x$ für $0 \le s \le 1$. Für eine Kurve f sei die* rückwärts durchlaufene Kurve *f^- gegeben durch $f^-(s) = f(1-s)$ für $0 \le s \le 1$.*

Für eine Kurve f bezeichne $[f]$ die Weghomotopieklasse*, d. h., die Äquivalenzklasse bzgl. der Weghomotopie, in der f liegt.*

Satz 10.1.4 (Regeln für Weghomotopie) *Für Kurven $f, g, h, \tilde{f}, \tilde{g}$ in X gilt:*

(a) *Wenn* $f * g$ *definiert und* $f \sim_p \tilde{f}$, $g \sim_p \tilde{g}$ *ist, dann ist auch* $\tilde{f} * \tilde{g}$ *definiert, und* $f * g \sim_p \tilde{f} * \tilde{g}$. *Wir setzen daher* $[f] * [g] = [f * g]$.

(b) *Ist* $[f] * ([g] * [h])$ *definiert, so ist auch* $([f] * [g]) * [h]$ *definiert, sowie auch umgekehrt, und beide sind gleich.*

(c) *Ist* x_0 *bzw.* x_1 *der Anfangs- bzw. Endpunkt von* f, *so gilt* $[f] * [e_{x_1}] = [e_{x_0}] * [f] = [f]$.

(d) *Für* x_0, x_1 *wie oben gilt* $[f] * [f^-] = [e_{x_0}]$, $[f^-] * [f] = [e_{x_1}]$.

Beweis: Zu (a): Sei F bzw. G Weghomotopie zwischen f und $\tilde{f}$ bzw. g und $\tilde{g}$. Setzt man

$$H(s,t) \;=\; \begin{cases} F(2s,t) & \text{für} \quad 0 \le s \le 1/2\,, \quad 0 \le t \le 1 \\ G(2s-1,t) & \text{für} \quad 1/2 \le s \le 1\,, \quad 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

so folgt für $0 \le s, t \le 1$:

$$H(s,0) \;=\; (f*g)(s)\,, \quad H(s,1) \;=\; (\tilde{f}*\tilde{g})(s)\,, \quad H(0,t) \;\equiv\; x_0\,, \quad H(1,t) \;\equiv\; x_1\,,$$

wobei x_0 bzw. x_1 der Anfangs- bzw. Endpunkt von $f * g$ ist. Also ist H Weghomotopie zwischen $f * g$ und $\tilde{f} * \tilde{g}$. Zu (b): Wegen

$$[f*(g*h)](s) \;=\; \begin{cases} f(2s) & \text{für} \quad 0 \le s \le 1/2 \\ g(4s-2) & \text{für} \quad 1/2 \le s \le 3/4 \\ h(4s-3) & \text{für} \quad 3/4 \le s \le 1 \end{cases}$$

$$[(f*g)*h](s) \;=\; \begin{cases} f(4s) & \text{für} \quad 0 \le s \le 1/4 \\ g(4s-1) & \text{für} \quad 1/4 \le s \le 1/2 \\ h(2s-1) & \text{für} \quad 1/2 \le s \le 1 \end{cases}$$

ist die Funktion

$$F(s,t) \;=\; \begin{cases} f(4s/(t+1)) & \text{für} \quad 0 \le s \le (t+1)/4\,, & 0 \le t \le 1 \\ g(4s-t-1) & \text{für} \quad (t+1)/4 \le s \le (t+2)/4\,, & 0 \le t \le 1 \\ h((4s-t-2)/(2-t)) & \text{für} \quad (t+2)/4 \le s \le 1\,, & 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

eine Weghomotopie zwischen $(f * g) * h$ und $f * (g * h)$. Die restlichen beiden Behauptungen folgen aus der nächsten Übungsaufgabe. □

Aufgabe 10.1.5 *Sei* f *eine Kurve in* X, *und sei* $g(s) = f(\phi(s))$, $0 \le s \le 1$, *für eine stetigen Abbildung* $\phi : [0,1] \to [0,1]$ *mit* $\phi(0) = 0$ *und* $\phi(1) = 1$. *Zeige* $f \sim_p g$. *Verwende dies, um die Teile* (c) *und* (d) *des obigen Satzes zu beweisen.*

10.2 Gruppen

Definition 10.2.1 *Eine Menge* G *mit einer Abbildung* $\cdot : G \times G \to G$ *heißt* eine Gruppe, *falls folgende Axiome gelten:*

(G1) $\forall\, g_1, g_2, g_3 \in G : \quad (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 \;=\; g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3).$ (Assoziativgesetz)

(G2) $\exists\, e \in G \quad \forall\, g \in G : \quad g \cdot e \;=\; g.$ (Existenz einer Rechtseins)

(G3) $\quad \forall\, g \in G \quad \exists\, g^{-1} \in G: \quad g \cdot g^{-1} \;=\; e.$ (Existenz eines Rechtsinversen)

Falls zusätzlich noch gilt

(G4) $\quad \forall\, g_1, g_2 \in G: \quad g_1 \cdot g_2 \;=\; g_2 \cdot g_1.$ (Kommutativgesetz)

dann heißt $(G, \cdot)$ kommutative oder abelsche Gruppe. *Sind* $(G, \cdot)$ *und* $(H, \cdot)$ *Gruppen, so heißt eine Abbildung* $f : G \to H$ *ein* Homomorphismus, *falls gilt*

(H) $\quad \forall\, g_1, g_2 \in G: \quad f(g_1 \cdot g_2) \;=\; f(g_1) \cdot f(g_2).$ (Relationstreue)

Wenn f *sogar bijektiv ist, nennen wir* f *einen* Isomorphismus, *und zwei Gruppen heißen* isomorph, *falls es einen Isomorphismus gibt, welcher die eine auf die andere abbildet.*

Beispiel 10.2.2 *Die Menge* $\mathbb{Z}$ *der ganzen Zahlen bildet eine Gruppe bzgl.* $+$*. Für* $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *bilden die Monome* t^k, $k \in \mathbb{Z}$, *eine Gruppe bzgl. der Multiplikation von Funktionen. Diese beiden Gruppen sind isomorph.*

Aufgabe 10.2.3 *Zeige: Ist* A *eine invertierbare Matrix, so bildet die Menge* $\{A^k : k \in \mathbb{Z}\}$ *eine Gruppe bzgl. der Matrixmultiplikation. Untersuche, wann diese Gruppe zu* $(\mathbb{Z}, +)$ *isomorph ist.*

10.3 Invarianz der Fundamentalgruppe

Definition 10.3.1 *Für einen fest gewählten* Basispunkt $x_0 \in X$ *folgt aus* Satz 10.1.4, *dass die Menge* $\Pi_1(X, x_0)$ *der Weghomotopieklassen von geschlossenen Kurven mit Anfangs- und Endpunkt* x_0 *eine Gruppe bzgl.* $*$ *ist. Sie heißt die* Fundamentalgruppe *oder* erste Homotopiegruppe *von* $(X, \mathcal{T})$ *zum Basispunkt* x_0.

Aufgabe 10.3.2 *Zeige: Ist* $X \subset \mathbb{R}^n$ *sternförmig bzgl. eines Punktes* x_0, *so ist jede geschlossene Kurve mit Anfangs- und Endpunkt* x_0 *weghomotop zur Einpunktkurve* e_{x_0}*. Folgere daraus, dass* $\Pi_1(X, x_0)$ *in diesem Fall die triviale Gruppe ist, die nur aus einem Element besteht.*

Satz 10.3.3 *Sind* $x_0, x_1 \in X$ *durch eine Kurve* f *verbindbar, so wird durch*

$$\hat{f} : \Pi_1(X, x_0) \;\to\; \Pi_1(X, x_1)\,, \quad \hat{f}([g]) \;=\; [f^-] * [g] * [f]$$

ein Isomorphismus definiert. Ist X *kurvenzusammenhängend, so sind also Fundamentalgruppen von* X *zu verschiedenen Basispunkten immer isomorph.*

Beweis: Mit Satz 10.1.4 folgt

$$\hat{f}\big([g] * [h]\big) \;=\; [f^-] * [g] * [h] * [f] \;=\; [f^-] * [g] * [f] * [f^-] * [h] * [f] \;=\; \hat{f}\big([g]\big) * \hat{f}\big([h]\big)\,,$$

und daher ist $\hat{f}$ ein Homomorphismus. Da $\hat{f}([g]) = [h]$ genau dann gilt, wenn $[g] = [f] * [h] * [f^-]$ ist, folgt die Bijektivität. $\square$

Definition 10.3.4 *Ein wegzusammenhängender Raum* $(X, \mathcal{T})$ *heißt* einfach zusammenhängend, *wenn seine Fundamentalgruppe trivial ist, d. h., nur aus einem Element besteht.*

Aufgabe 10.3.5 *Zeige: Ist* $(X, \mathcal{T})$ *einfach zusammenhängend, so sind zwei Kurven mit gemeinsamem Anfangs- und Endpunkt immer weghomotop.*

Satz 10.3.6 *Sei* $h : X \to Y$ *stetig, und sei* $x_0 \in X$*. Dann wird durch*

$$h^*\big([f]\big) \;=\; [h \circ f]$$

ein Homomorphismus von $\Pi_1(X, x_0)$ *in* $\Pi_1(Y, h(x_0))$ *definiert. Ist weiter* $k : Y \to Z$ *stetig, und definiert man* k^* *als Homomorphismus von* $\Pi_1(Y, h(x_0))$ *nach* $\Pi_1(Z, k(h(x_0)))$*, so folgt*

$$(k \circ h)^* \;=\; k^* \circ h^* \,.$$

Schließlich ist für die identische Abbildung $id : X \to X$ *auch* id^* *die identische Abbildung auf* $\Pi_1(X, x_0)$*.*

Beweis: Wenn F eine Weghomotopie zwischen f und g ist, dann überprüft man leicht, dass $h \circ F$ eine Weghomotopie zwischen $h \circ f$ und $h \circ g$ ist. Also ist h^* wohldefiniert. Die Relationstreue ergibt sich aber ebenfalls leicht mit der Definition der Komposition. Die restlichen Aussagen sind einfache Folgerungen aus der Definition von h^* und k^*. □

Korollar zu Satz 10.3.6 *Ist* h *ein Homöomorphismus von* X *auf* Y*, so ist* h^* *ein Isomorphismus von* $\Pi_1(X, x_0)$ *auf* $\Pi_1(Y, h(x_0))$*.*

Man drückt die Aussage des obigen Korollars auch so aus: Homöomorphe topologische Räume haben isomorphe Fundamentalgruppen.

10.4 Überlagerungsräume und Liftungen

Definition 10.4.1 *Eine stetige und surjektive Abbildung* $p : Y \to X$ *heißt* Überlagerung (von X)*, falls gilt:*

$$\forall\, x \in X \quad \exists\, U \in \mathcal{U}_0(x) : \quad p^{-1}(U) \;=\; \cup_{j \in J_x} V_j \,,\; V_j \in \mathcal{T}_Y \text{ paarweise disjunkt} \,, \quad p : V_j \to U \quad \text{bistetig} \,.$$

Wir nennen dann Y *auch* Überlagerungsraum von X*.*

Aufgabe 10.4.2 *Sei* $p : Y \to X$ *eine Überlagerung. Zeige: Für jedes* $x \in X$ *besteht* $p^{-1}(x)$ *nur aus isolierten Punkten.*

Aufgabe 10.4.3 *Zeige, dass die Abbildung* $p : \mathbb{R} \to S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 = 1\}$ *mit*

$$p(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))^T$$

eine Überlagerung ist. Zeige weiter: Ist J *eine nicht-leere Menge mit der diskreten Topologie, so ist* $p : J \times X \to X$ *mit* $p(j, x) = x$ *eine Überlagerung. Warum ist diese Überlagerung wahrscheinlich nicht sehr interessant?*

Definition 10.4.4 *Seien* $p : Y \to X$ *und* $f : Z \to X$ *stetig. Falls es eine stetige Abbildung* $\hat{f} : Z \to Y$ *gibt, für welche* $p \circ \hat{f} = f$ *ist, dann heißt* $\hat{f}$ Liftung (von f auf Z)*.*

Proposition 10.4.5 *Sei* $p : Y \to X$ *eine Überlagerung, und sei* $F : [0, 1]^2 \to X$ *stetig. Ist* $y_0 \in X$ *so, dass* $p(y_0) = F(0, 0)$ *ist, dann gibt es eine eindeutig bestimmte Liftung* $\hat{F}$ *von* F *auf* Y *mit* $\hat{F}(0, 0) = y_0$*.*

Beweis: Zu jedem $x \in X$ seien $U_x \in \mathcal{U}_0(x)$ und $V_{x,j}$, $j \in J_x$ wie in der Definition der Überlagerung. Auf Grund der Kompaktheit von $I = [0,1]^2$ folgt die Existenz von Zerlegungen

$$0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = 1\,, \quad 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$$

derart, dass alle Rechtecke $I_{j,k} = [s_{j-1}, s_j] \times [t_{k-1}, t_k]$ durch F vollständig in eine der Mengen U_x abgebildet werden. Diese Rechtecke zählen wir nun 'zeilenweise' ab und definieren jetzt die Liftung in endlich vielen Schritten nach folgendem Schema: Wenn $\hat{F}$ auf $I_{\nu k}$ noch nicht, aber auf den vorangehenden Rechtecken schon definiert ist, dann ist $\hat{F}$ jedenfalls auf einem Teil K des Randes von $I_{\nu k}$ definiert, und dieser Teil K ist zusammenhängend. Dies ist insbesondere der Fall für das in unserer Abzählung erste Rechteck I_{11}, denn dann ist $K = (0,0)^T$, und dort ist $\hat{F}(0,0) = y_0$ gewählt worden. Da $\hat{F}(K)$ zusammenhängend ist und für ein $x \in X$ in $p^{-1}(U_x)$ liegt, folgt dass es ein $j \in J$ gibt mit $\hat{F}(K) \subset V_{x,j}$. Wir können daher die Fortsetzung von $\hat{F}$ auf $I_{\nu k}$ durch $\hat{F} = p^{-1} \circ F$ definieren, und dies ist sogar die einzige Möglichkeit, wenn $\hat{F}$ stetig sein soll. Daraus folgt die Behauptung. □

Da Kurven spezielle Abbildungen von einer statt zwei Variablen sind, folgt aus obiger Proposition, dass sie immer Liftungen besitzen, und gleiches gilt natürlich auch für Weghomotopien.

Satz 10.4.6 *Sei $p : Y \to X$ eine Überlagerung, und seien f, g Kurven in X mit gemeinsamem Anfangspunkt x_0. Seien weiter $\hat{f}, \hat{g}$ ihre Liftungen mit gemeinsamem Anfangspunkt y_0, wobei $p(y_0) = x_0$ sei. Falls $f \sim_p g$ ist, dann folgt $\hat{f} \sim_p \hat{g}$.*

Beweis: Folgt aus der Proposition durch Liftung der Weghomotopie. □

10.5 Die Fundamentalgruppe des Einheitskreises

Satz 10.5.1 *Die Fundamentalgruppe von S^1 ist isomorph zu $(\mathbb{Z}, +)$.*

Beweis: Sei p wie in Aufgabe 10.4.3, und sei $x_0 = p(0)$. Wenn f eine geschlossene Kurve mit Anfangs- und Endpunkt x_0 ist, dann hat die Liftung $\hat{f}$ mit Anfangspunkt 0 einen Endpunkt x_f mit $p(x_f) = p(0)$, und daraus folgt $x_f \in \mathbb{Z}$. Dies ergibt eine Abbildung $f \mapsto x_f$. Ist $g \sim_p f$, so folgt mit dem letzten Satz dass $x_f = x_g$ sein muss, und daher ist die obige Abbildung eigentlich auf $\Pi_1(X, p(0))$ definiert. Für $f(s) = p(ks)$, $k \in Z$, $0 \le s \le 1$, haben wir eine geschlossene Kurve mit dem richtigen Anfangs- und Endpunkt, deren Liftung $\hat{f}(s) = ks$ ist, woraus $x_f = k$ folgt. Also ist die Abbildung surjektiv. Da $\mathbb{R}$ einfach zusammenhängend ist, folgt dass zwei Liftungen mit gleichem Anfangs- und Endpunkt immer weghomotop sind, und das ergibt die Injektivität. Die Relationstreue folgt ebenfalls: Für f und g mit Anfangs- und Endpunkt $p(0)$ seien $\hat{f}$ und $\hat{g}$ die Liftungen mit Anfangspunkt 0 und Endpunkt $x_f, x_g \in \mathbb{Z}$. Dann ist $\hat{f} * (x_f + \hat{g})$ die Liftung von $f * g$ mit Anfangspunkt 0 und Endpunkt $x_f + x_g$. □

Kapitel 11

Anwendungen und Zugaben

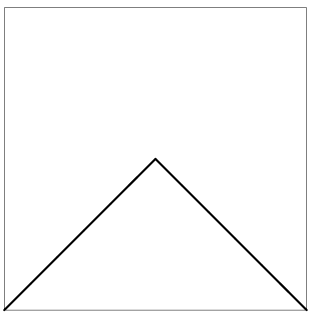
11.1 Peano-Kurven

Man ist geneigt anzunehmen, dass der Flächeninhalt des Trägers einer Kurve in $\mathbb{R}^2$ gleich 0 ist. Dass dies nicht so sein muss, zeigt der folgende Satz. Eine Kurve, deren Träger einen positiven Flächeninhalt hat, nennt man auch *Peano-Kurve*.

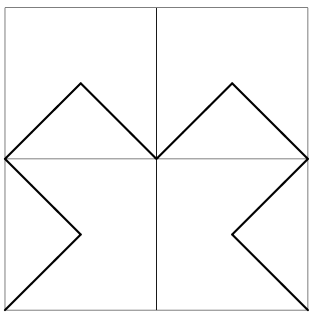
Satz 11.1.1 (Existenz von Peano-Kurven) *Es gibt eine stetige und surjektive Abbildung des Intervalles $I = [0,1]$ auf das Quadrat $Q = [0,1] \times [0,1]$.*

Beweis: (a) Seien $[a,b]$ ein abgeschlossenes Intervall und $[c,d] \times [c,d]$ ein achsenparalleles Quadrat, und sei $f : [a,b] \to [c,d] \times [c,d]$ eine (stetige) Parameterdarstellung eines Polygonzuges p aus zwei Strecken von $f(a) = (c,c)^T$ über $f((a+b)/2) = ((c+d)/2, (c+d)/2)^T$ nach $f(b) = (d,c)^T$. Vergleiche dazu auch das Bild unten links. Aus f und p bilden wir dann in einem *Verfeinerungsschritt* eine Parameterdarstellung g eines neuen Polygons q nach folgender Regel:

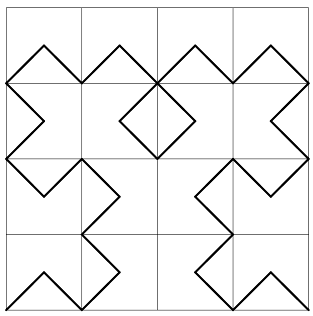
> Wir unterteilen das Intervall $[a,b]$ und das Quadrat $[c,d] \times [c,d]$ in vier gleiche Teile und nummerieren die Teilquadrate, links unten beginnend, im Uhrzeigersinn. Wir definieren dann eine Parameterdarstellung $g : [a,b] \to [c,d] \times [c,d]$ eines neuen Polygonzuges q, dessen Teile in den Teilquadraten genau wie p aussehen, allerdings im ersten bzw. vierten Teilquadrat um $-\pi/2$ bzw. $\pi/2$ gedreht sind. Das ergibt insgesamt das mittlere Bild unten.



$p = p_0$



$q = p_1$



p_2

Mit einem äquivalenten Verfeinerungsschritt kann man aus einem Polygonzug, der sich von dem linken durch Drehung um ein Vielfaches von $\pi/2$ unterscheidet, einen entsprechend gedrehten mittleren Polygonzug bilden. Wenn man dann diesen Verfeinerungsschritt auf jedes der vier Teilquadrate im mittleren Bild anwendet, dann ergibt sich das rechte. Beachte, dass bei diesem Schritt die Verfeinerung des Teils der Kurve in einem der Teilquadrate ebenfalls in diesem Teilquadrat liegt.

(b) Wir definieren jetzt eine Folge von Parameterdarstellungen $f_n : I \to Q$ für Polygonzüge p_n wie folgt: Seien f_0 und p_0 so wie f und p im Teil (a), aber mit $a = c = 0$, $b = d = 1$. Wenn allgemein f_n bereits definiert ist, dann soll das zugehörige Polygon p_n aus 4^n Anteilen bestehen, welche jeweils durch Restriktion von f_n auf das entsprechende Teilintervall von I der Länge 4^{-n} gegeben sind, in einem von 4^n Teilquadraten von Q der Seitenlänge 2^{-n} liegen und dort genau wie im linken Bild aussehen, allerdings eventuell um ein Vielfaches von $\pi/2$ gedreht. Die Funktion f_{n+1} bzw. das Polygon p_{n+1} entstehen dann durch Anwendung des Verfeinerungsschrittes aus (a) auf jeden der 4^n Anteile.

Für den folgenden Konvergenzbeweis ist die Metrik d_∞ aus Beispiel 1.1.5 besonders geeignet; sie soll im Folgenden einfach mit d bezeichnet werden.

Beh: Die Funktionen f_n bilden eine Cauchyfolge in $(C(I,Q),\rho)$ und sind deshalb wegen Satz 9.2.5 konvergent gegen ein $f \in C(I,Q)$.

Bew: Für jedes $x \in I$ und alle $n,p \in \mathbb{N}$ liegen $f_n(x)$ und $f_{n+p}(x)$ nach Konstruktion in ein und demselben Teilquadrat von Q mit Seitenlänge 2^{-n}, und daher ist $d(f_n(x), f_{n+p}(x)) \le 2^{-n}$. Daraus folgt aber sofort, dass $\rho(f_n, f_{n+p}) \le 2^{-n}$ ist, und daher gilt die Behauptung.

Beh: Die Funktion f ist surjektiv.

Bew: Sei $n \in \mathbb{N}$. Jeder Punkt $z = (x,y)^T \in Q$ liegt in einem der Teilquadrate der „Generation“ n, und die Funktion f_n „besucht“ jedes dieser Teilquadrate. Also gibt es ein $x_n \in I$ mit $d(f_n(x_n), z) \le 2^{-n}$. Aus dem Beweis der vorangegangenen Behauptung folgt für $p \to \infty$, dass $\rho(f_n, f) \le 2^{-n}$ ist, und daraus folgt $d(f(x_n), z) \le d(f(x_n), f_n(x_n)) + d(f_n(x_n), z) \le 2^{-n+1}$ ist. Also ist $f(I)$ dicht in Q, und aus Satz 6.3.1 folgt dass $f(I)$ kompakt, also abgeschlossen, sein muss. Daraus folgt aber $f(I) = Q$, also die Surjektivität von f. □

11.2 Nirgends differenzierbare stetige Funktionen

Satz 11.2.1 *Es gibt nirgends differenzierbare stetige Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Genauer: Die Menge $E \subset C([0,1])$ aller nirgends differenzierbaren Funktionen ist in $(C([0,1]),\rho)$ von zweiter Kategorie. Es gilt sogar, dass die Menge der auf $[0,1]$ stetigen Funktionen, welche wenigstens an einer Stelle differenzierbar sind, von erster Kategorie ist.*

Beweis: Sei $I = [0,1]$, und sei $f \in C(I)$. Wir setzen f durch $f(x) = f(0)$ für $x < 0$ bzw. $f(x) = f(1)$ für $x > 1$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig fort und definieren für $x \in I$ und $h > 0$ die Zahl $\Delta f(x,h)$ als den größeren der Werte $|f(x+h) - f(x)|/h$ und $|f(x-h) - f(x)|/h$. Für $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $h > 0$ sei dann

$$U(\alpha,h) \;=\; \{f \in C(I):\ \Delta f(x,h) \ge \alpha \quad \forall\, x \in I\}\,, \qquad O_n \;=\; \bigcup_{\substack{\alpha > n \\ 0 < h < 1/n}} U(\alpha,h)\,. \tag{11.2.1}$$

Man sieht aus der Definition dass $O_n \supset O_{n+1}$ ist, und wir zeigen weiter die folgenden Aussagen:

Beh: Alle O_n sind offen.

Bew: Sei $f \in O_n$, also $f \in U(\alpha,h)$ für ein $\alpha > n$ und ein $0 < h < 1/n$. Für $\delta > 0$ und $g \in U_\delta(f)$ gilt

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right| \;=\; \frac{1}{h}\,|f(x+h) - g(x+h) \;-\; (f(x) - g(x))| \;<\; 2\,\delta/h$$

für alle $x \in I$, und daraus folgt mit der Dreiecksungleichung nach unten $\Delta g(x,h) \geq \Delta f(x,h) - 2\,\delta/h \geq \alpha - 2\,\delta/h$. Für kleine $\delta > 0$ ist $\alpha - 2\,\delta/h > n$, und dann folgt dass $g \in O_n$ ist.

Beh: Alle O_n sind dicht in $C(I)$.

Bew: Seien $f \in C(I)$ und $\varepsilon > 0$. Dann ist f gleichmäßig stetig auf I, und daher gibt es ein $\delta > 0$ so, dass aus $|x - x_0| < \delta$ folgt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Sei jetzt $m \geq n$ und $1/m \leq \delta$, und seien $x_j = j/m$ für $j = 0, \ldots, m$. Für die stückweise lineare Funktion g_1, die an den Stellen x_j mit f bereinstimmt, ist dann $g_1(x)$ auf dem Intervall von x_{j-1} bis x_j zwischen $f(x_{j-1})$ und $f(x_j)$, und daraus folgt $|f(x) - g_1(x)| < 2\,\varepsilon$ auf jedem dieser Teilintervalle und somit auf ganz I. Für ein $\mu \in \mathbb{N}$ sei

$$g_2(x) \;=\; \left\{ \begin{array}{ccc} \varepsilon\,(\mu\,x - j) & \text{für} & j/\mu \leq x \leq (j+1/2)/\mu \\ \varepsilon\,(j+1-\mu\,x) & \text{für} & (j+1/2)/\mu \leq x \leq (j+1)/\mu \end{array} \right\} \qquad \forall\, j = 0, \ldots, \mu - 1\,.$$

Dann ist $g_2 \in C(I)$, $|g_2(x)| \leq \varepsilon/2$ für alle $x \in I$, und für $0 < h \leq 1/(4\mu)$ ist $\Delta g_2(x,h) = \varepsilon\,\mu$. Für $g = g_1 + g_2$ folgt dann $|f(x) - g(x)| < 5\,\varepsilon/2$ auf I, und für genügend große μ zeigt man ähnlich wie oben $g \in O_n$.

Da $A_n = X \setminus O_n$ abgeschlossen und nirgends dicht ist, ist deren Vereinigung von erster Kategorie, und da aus dem Baireschen Kategoriensatz folgt, dass $C(I)$ von zweiter Kategorie ist, muss der Durchschnitt aller O_n ebenfalls von zweiter Kategorie sein. Aber wenn $f \in O_n$ ist für alle n, dann ist f nirgends differenzierbar, und darum gilt die Behauptung. □

11.3 Das Zornsche Lemma und seine Anwendungen

Definition 11.3.1 *Sei X eine nicht-leere Menge und „$\leq$“ eine Relation auf X mit folgenden Eigenschaften:*

(a) $\forall\, x \in X:\qquad x \leq x.$

(b) $\forall\, x, y \in X:\qquad (x \leq y\,,\; y \leq x) \implies x = y.$

(c) $\forall\, x, y, z \in X:\qquad (x \leq y\,,\; y \leq z) \implies x \leq z.$

Dann sprechen wir von einer teilweisen *oder* partiellen Ordnung *auf X und nennen $(X, \leq)$ auch eine* teilweise geordnete Menge*, und wir definieren $x < y$ als $x \leq y$ und $x \neq y$. Falls für eine Teilmenge $E \subset X$ gilt*

(d) $\forall\, x, y \in E:\qquad x \leq y$ oder $y \leq x,$

dann nennen wir E vollständig geordnet*. Vergleiche dazu auch die nächste Aufgabe.*

Falls $(X, \leq)$ eine teilweise geordnete Menge ist, dann heißt ein $x_0 \in X$ ein maximales Element*, falls für alle $x \in X$ aus $x_0 \leq x$ folgt dass $x = x_0$ ist, und wir nennen x_0 eine* obere Schranke *für eine Teilmenge $E \subset X$, wenn für alle $x \in E$ gilt $x \leq x_0$. Entsprechend definieren wir minimale Elemente und untere Schranken.*

Aufgabe 11.3.2 *Sei $(X, \leq)$ eine teilweise geordnete Menge. Finde heraus, welche der Axiome einer Ordnungsrelation* (siehe Seite 13) *für die Relation „$<$“ gelten bzw. im Allgemeinen verletzt sind. Falls $E \subset X$ vollständig geordnet ist, zeige dass die Restriktion von „$<$“ auf E eine Ordnung ist. Zeige weiter, dass jede obere Schranke für X auch ein maximales Element ist. Gilt die Umkehrung?*

Aufgabe 11.3.3 *Sei X die abgeschlossene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{R}^2$, und sei*

$$(x_1, y_1)^T \;\leq\; (x_2, y_2)^T \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x_1 \;\leq\; x_2 \quad \text{und} \quad y_1 \;\leq\; y_2)\,.$$

Zeige, dass dies eine partielle Ordnung auf X ist, und finde alle maximalen Elemente und alle oberen Schranken.

Aufgabe 11.3.4 *Sei M eine beliebige Menge, und sei $\emptyset \neq X \subset \mathcal{P}_M$, wobei $\mathcal{P}_M$ die Potenzmenge, also die Menge aller Teilmengen, von M bezeichnet. Zeige dass die Teilmengenrelation „$\subset$“ eine partielle Ordnung auf X ist. Finde im Fall $X = \mathcal{P}_M$ ein maximales Element von X.*

Satz 11.3.5 (Zornsches Lemma) *Sei $(X, \leq)$ eine partiell geordnete Menge. Falls jede vollständig geordnete Teilmenge von X eine obere Schranke besitzt, dann gibt es mindestens ein maximales Element von X.*

Aufgabe 11.3.6 *Zeige mit Hilfe des Zornschen Lemmas, dass jeder Vektorraum eine Basis besitzt.*

Das Zornsche Lemma ist äquivalent zum Auswahlaxiom der Mengenlehre (siehe Seite 20), was hier nicht bewiesen werden soll. Mit seiner Hilfe zeigen wir jetzt:

Lemma 11.3.7 *Sei M eine beliebige Menge, und sei F die Menge aller Teilmengensysteme $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}_M$ mit der Eigenschaft*

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \quad \forall\ E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{X}: \qquad \bigcap_{j=1}^{n} E_j \ \neq\ \emptyset\,. \tag{11.3.1}$$

Sei jetzt $\mathcal{X}_0 \in F$, und sei F_0 die Menge aller $\mathcal{X} \in F$, welche $\mathcal{X}_0$ enthalten. Wenn wir auf F_0 die Inklusion „$\subset$“ als partielle Ordnung einführen, dann besitzt F_0 ein maximales Element.

Beweis: Sei $F_{0,v}$ eine vollständig geordnete Teilmenge von F_0, und sei $\mathcal{X}(s) = \cup_{\mathcal{X} \in F_{0,v}} \mathcal{X}$. Für $n \in \mathbb{N}$ und $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{X}(s)$ gibt es zu jedem $j \in \{1, \ldots, n\}$ ein $\mathcal{X}_j \in F_{0,v}$ mit $E_j \in \mathcal{X}_j$. Da $F_{0,v}$ vollständig geordnet ist, gilt für $1 \leq j < k \leq n$ die Inklusion $\mathcal{X}_j \subset \mathcal{X}_k$ oder $\mathcal{X}_k \subset \mathcal{X}_j$, und wir können nach eventueller Umnummerierung annehmen, dass o. B. d. A. immer der erste Fall eintritt. Dann folgt aber $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{X}_n$, und daher folgt aus (11.3.1) dass $\cap_j E_j \neq \emptyset$ ist. Also erfüllt auch $\mathcal{X}(s)$ die Bedingung (11.3.1), und da $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}(s)$ ist, ist $\mathcal{X}(s)$ eine obere Schranke für $F_{0,v}$. Mit dem Zornschen Lemma folgt daher die Behauptung. □

Lemma 11.3.8 *Seien M und F_0 wie im vorigen Lemma, und sei $\mathcal{X}_m$ ein maximales Element von F_0. dann gilt*

(a) $\forall\ n \in \mathbb{N} \quad \forall\ E_1, , \ldots, E_n \in \mathcal{X}_m: \qquad \displaystyle\bigcap_{j=1}^{n} E_j \ \in \mathcal{X}_m$.

(b) $\forall\ A \subset M$*: Falls für alle $E \in \mathcal{X}_m$ gilt $A \cap E \neq \emptyset$, dann folgt $A \in \mathcal{X}_m$.*

Beweis: Zu (a): Sei $E = \cap_j E_j$, und sei $\tilde{\mathcal{X}} = \mathcal{X}_m \cup \{E\}$. Dann erfüllt $\tilde{\mathcal{X}}$ die Bedingung (11.3.1) und gehört also zu F_0. Wegen der Maximalität von $\mathcal{X}_m$ folgt daraus aber $\tilde{\mathcal{X}} = \mathcal{X}_m$.

Zu (b): Setze jetzt $\tilde{\mathcal{X}} = \mathcal{X}_m \cup \{A\}$ und schließe genau wie oben. □

Beweis des Satzes von Tychonoff für beliebig viele Räume: Seien $(X_j, \mathcal{T}_j)$, für $j \in J$, kompakte topologische Räume, und sei $(X, \mathcal{T})$ ihr kartesisches Produkt. Sei $\mathcal{X}_0$ eine Menge von Teilmengen von X, für welche (11.3.1) gilt. Wenn wir zeigen, dass der Durchschnitt aller $\overline{E}$, $E \in \mathcal{X}_0$ nicht leer ist, dann folgt die Kompaktheit von $(X, \mathcal{T})$ mit Aufgabe 11.3.9. Dazu seien F_0 wie in den beiden letzten Lemmata, und

$\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}_m \in F_0$ sei maximal. Für jedes $j \in J$ seien dann $\mathcal{X}_{j,m} = \{\pi_j(E) : E \in \mathcal{X}_m\}$, also die Menge aller Projektionen der E „in Richtung" j. Man sieht, dass jedes $\mathcal{X}_{j,m}$ die Bedingung (11.3.1) erfüllt. Aus der Kompaktheit von X_j folgt also $\cap_{E\in\mathcal{X}_{j,m}}\overline{\pi_j(E)} \neq \emptyset$ ist, für alle $j \in J$. Sei jetzt $x = (x_j) \in X$ mit $x_j \in \cap_{E\in\mathcal{X}_m}\overline{\pi_j(E)}$, und sei U_j eine offene Umgebung von x_j für alle j. Dann ist $\pi_j^{-1}(U_j) \cap E \neq \emptyset$ für alle $E \in \mathcal{X}_m$, und deshalb folgt aus dem letzten Lemma $\pi_j^{-1}(U_j) \in \mathcal{X}_m$. Sei jetzt $E \in \mathcal{X}_m$, und sei U eine offene Umgebung von x. Dann existieren offene Umgebungen U_j von x_j, für alle $j \in J$, mit $U_j = X_j$ für alle bis auf endlich viele $j \in J$, derart dass $x \in \prod_j U_j = \cap_j \pi_j^{-1} U_j \subset U$. Nach dem, was oben gezeigt wurde, folgt $\prod_j U_j = \cap_j \pi_j^{-1} U_j \in \mathcal{X}_m$, denn die Menge ist ein Durchschnitt von *endlich vielen* $\pi_j^{-1} U_j$, und $\mathcal{X}_m$ ist nach dem letzten Lemma abgeschlossen gegenüber endlicher Durchschnittsbildung. Für $E \in \mathcal{X}_m$ folgt daher $(E \cap U) \supset (E \cap (\cap_j \pi_j^{-1} U_j) \neq \emptyset$, da ja $\mathcal{X}_m$ die Bedingung (11.3.1) erfüllt. Also muss x ein Berührungspunkt von E sein, und daher ist

$$x \in \bigcap_{E\in\mathcal{X}_m} \overline{E} \subset \bigcap_{E\in\mathcal{X}_0} \overline{E}.$$

Aufgabe 11.3.9 *Zeige: Ein Hausdorff-Raum* $(X;\mathcal{T})$ *ist genau dann kompakt, wenn für beliebige Teilmengen* $(E_j, j \in J)$ *mit der Eigenschaft* (11.3.1) *folgt* $\cap_{j\in J}\overline{E}_j \neq \emptyset$.

11.4 Topologische Vektorräume und Gruppen

Definition 11.4.1 *Ein topologischer Raum* $(X,\mathcal{T})$ *heißt* ein topologischer Vektorraum, *wenn* X *ein Vektorraum über* $\mathbb{K}$ *ist,*[1] *und wenn die Abbildungen* $+ : X \times X \to X\,,\ (x,y) \mapsto x+y$ *und* $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X\,,\ (\alpha,x) \mapsto \alpha\, x$ *stetig sind. Wenn* $(X,\mathcal{T})$ *das Hausdorffsche Trennungsaxiom erfüllt, spricht man auch von einem* separierten Raum.[2] *Ein topologischer Raum* $(G,\mathcal{T})$ *heißt* eine topologische Gruppe, *wenn* G *eine Gruppe ist, und wenn die Abbildungen* $\cdot : G \times G \to G\,,\ (g,h) \mapsto g\,h$ *und die Inversion* $\cdot^{-1} : G \to G\,,\ g \mapsto g^{-1}$ *stetig sind. Vereinfacht ausgedrückt verwendet man das Adjektiv „topologisch" für alle algebraischen Strukturen wie Ringe, Körper, Moduln etc., wenn auf diesen eine Topologie definiert ist, bezüglich der die entsprechenden algebraischen Operationen stetig sind.*

Beispiel 11.4.2 *Jeder normierte Vektorraum ist ein separierter topologischer Vektorraum, da die Stetigkeit der beiden Abbildungen sofort aus den Axiomen für eine Norm folgt. Die Menge* $\mathbb{K}^{n\times n}$ *aller quadratischen* n*-reihigen Matrizen mit Elementen in* $\mathbb{K}$ *ist ein Vektorraum und wird zum normierten Raum, wenn man*

$$\|A\| = \left(\sum_{j,k=1}^{n} |a_{jk}|^2 \right)^{1/2} \qquad \forall\ A = [a_{jk}] \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

setzt. Also ist dies ein topologischer Vektorraum, und die Untermenge $GL(n,\mathbb{K})$ *aller invertierbaren Matrizen ist eine Gruppe bezüglich der Matrixmultiplikation. Man kann leicht einsehen, dass sie in der Unterraumtopologie zur topologischen Gruppe wird.*

Definition 11.4.3 *Sei* X *ein Vektorraum über* $\mathbb{K}$*. Eine Abbildung* $p : X \to \mathbb{R}$ *heißt* eine Halbnorm *auf* X*, wenn folgendes gilt:*

(H1) $\forall\, x \in X : \quad p(x) \geq 0$ (Definitheit)

(H2) $\forall\, x \in X \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{K} : \quad p(\alpha\, x) = |\alpha|\, p(x)$ (Homogenität)

(H3) $\forall\, x_1, x_2 \in X : \quad p(x_1 + x_2) \leq p(x_1) + p(x_2)$ (Dreiecksungleichung)

[1] Dabei ist fast immer $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$; in jedem Fall muss aber $\mathbb{K}$ ein Körper sein, auf dem eine Topologie definiert ist, bezüglich der Addition und Multiplikation sowie die Inversion $x \mapsto 1/x$ für $x \neq 0$ stetig sind

[2] Manche Autoren sprechen nur dann von einem topologischer Vektorraum, wenn die Topologie separiert ist, wir wollen dies hier aber nicht tun.

Jede Norm auf X ist also auch eine Halbnorm, und umgekehrt ist jede Halbnorm auf X mit der Zusatzeigenschaft $p(x) > 0$ für alle $x \in X \setminus \{0\}$ eine Norm; vergleiche dazu auch die folgende Aufgabe. Eine Familie $(p_j, j \in J)$ von Halbnormen auf X heißt separierend, *wenn aus $p_j(x) = 0$ für alle $j \in J$ folgt dass $x = 0$ sein muss.*

Aufgabe 11.4.4 *Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, und sei $p : X \to \mathbb{R}$ eine Halbnorm auf X. Zeige $p(0) = 0$.*

Aufgabe 11.4.5 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene und zusammenhängende Menge. Zeige:*

(a) *Für jede kompakte Menge $K \subset \Omega$ ist*

$$p_K(f) \;=\; \sup_{z \in K} |f(z)| \qquad \forall\, f \in C(\Omega)$$

eine Halbnorm, aber keine Norm auf $C(\Omega)$.

(b) *Die Menge aller p_K, mit beliebigem kompakten $K \subset \Omega$, ist separierend auf $C(\Omega)$.*

Finde eine abzählbare Menge von kompakten Teilmengen von Ω, für die die zugehörigen Halbnormen ebenfalls separierend auf $C(\Omega)$ sind.

Aufgabe 11.4.6 *Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, und sei $(p_j, j \in J)$ eine Familie von Halbnormen auf X. Zeige: Mit der von den Abbildungen*

$$p_{j,x} = p_j(x - \cdot) \qquad j \in J\,, \quad x \in X$$

rückwärts induzierten Topologie wird X ein topologischer Vektorraum. Beschreibe die offenen Mengen in dieser Topologie, und zeige dass das Hausdorff-Axiom genau dann gilt, wenn die Familie $(p_j, j \in J)$ separierend ist.

Aufgabe 11.4.7 *Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, und sei $(p_j, j \in \mathbb{N}_0)$ eine abzählbare separierende Familie von Halbnormen auf X. Zeige: Die durch diese Halbnormen auf X definierte Topologie $\mathcal{T}$ ist metrisierbar; genauer: Durch*

$$d(x_1, x_2) \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j}\, \frac{p_j(x_1 - x_2)}{1 + p_j(x_1 - x_2)} \qquad \forall\, x_1, x_2 \in X$$

wird eine Metrik auf X definiert, welche die Topologie $\mathcal{T}$ auf X erzeugt.

Literaturverzeichnis

[1] **P. S. Alexandroff**, *Einführung in die Mengenlehre und in die allgemeine Topologie*, Hochschulbücher für Mathematik, 85, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1984. Aus dem Russischen von Manfred Peschel, Wolfgang Richter und Horst Antelmann.

[2] **B. H. Arnold**, *Elementare Topologie*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1974. Anschauliche Probleme und grundlegende Begriffe. Dritte, durchgesehene Auflage. Aus dem Englischen übersetzt von Helmut Freund, Gerhard Holland und Arnold Kirsch. Moderne Mathematik in elementarer Darstellung, No. 2.

[3] **W. Franz**, *Topologie. I: Allgemeine Topologie*, Dritte Auflage. Sammlung Göschen, Band 1181, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1968.

[4] **K. P. Grotemeyer**, *Topologie*, B.I.-Hochschulskripten, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1969.

[5] **E. Harzheim und H. Ratschek**, *Einführung in die allgemeine Topologie*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1975. Die Mathematik: Einführungen in Gegenstand und Ergebnisse ihrer Teilgebiete und Nachbarwissenschaften.

[6] **H. Herrlich**, *Einführung in die Topologie*, Berliner Studienreihe zur Mathematik, Heldermann Verlag, Berlin, 1986. Unter Mitarbeit von H. Bargenda und C. Trompelt.

[7] ——, *Topologie I: Topologische Räume*, Berliner Studienreihe zur Mathematik, Heldermann Verlag, Berlin, 1986. Unter Mitarbeit von H. Bargenda.

[8] ——, *Topologie. II*, Berliner Studienreihe zur Mathematik, Heldermann Verlag, Berlin, 1988. Uniforme Räume.

[9] **H. Heuser**, *Funktionalanalysis*, Mathematische Leitfäden, B. G. Teubner, Stuttgart, 1992.

[10] **J. Jäger**, *Elementare Topologie*, Uni-Taschenbücher, Ferdinand Schöningh, Paderborn, 1980.

[11] **K. Jänich**, *Topologie*, Springer-Lehrbuch. Vierte Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 1994. Mit einem Kapitel von Theodor Bröcker.

[12] **L. Jantscher**, *Topologie*, Studientexte Mathematik, Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden, 1982. Studienbuch für Studenten der Mathematik und Physik ab 3. Semester, 43.

[13] **E. P. Klement**, *Elementare Topologie*, Schriftenreihe für Mathematik, Rudolf Trauner, Linz, 1982. Mit Anwendungen.

[14] **J. R. Munkres**, *Topology: a first course*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.

[15] **E. Ossa**, *Topologie*, Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1992.

[16] **G. Preuss**, *Allgemeine Topologie*, Springer-Verlag, Berlin, 1975. Zweite korrigierte Auflage, Hochschultext.

[17] **W. Rinow**, *Lehrbuch der Topologie*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1975. Hochschulbücher für Mathematik, Band 79.

[18] **H. Schubert**, *Topologie: eine Einführung*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1971. Dritte Auflage, Mathematische Leitfäden.

[19] **R. Schwänzl**, *Elemente der Topologie*, Osnabrücker Schriften zur Mathematik. Reihe V: Vorlesungsskripten, Universität Osnabrück Fachbereich Mathematik, Osnabrück, 1984.

[20] **G. Springer**, *Einführung in die Topologie*, Aschendorffsche Verlagsbuchhandlung, Münster, 1955.

[21] **T. tom Dieck**, *Topologie*, de Gruyter Lehrbuch., Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1991.

[22] **B. von Querenburg**, *Mengentheoretische Topologie, 2. Auflage*, Springer-Verlag, Berlin, 1979. Hochschultext.

[23] **L. E. Ward, Jr.**, *Topology*, Marcel Dekker Inc., New York, 1972. An outline for a first course, Pure and Applied Mathematics, No. 10.

Index