Ramsey Theorie und die Stone–Čech–Kompaktifizierung diskreter Halbgruppen

Diplomarbeit am Mathematischen Institut der
Eberhard–Karls–Universität Tübingen

Vorgelegt von Markus Haase aus Nürnberg

Februar 1997

Betreut von Prof. Dr. Rainer Nagel

Ich erkläre, daß ich die Arbeit selbständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln angefertigt habe und daß alle Stellen, die dem Wortlaut oder dem Sinne nach anderen Werken entnommen sind, durch Angabe der Quellen als Entlehnungen kenntlich gemacht worden sind.

Tübingen, den 14. Februar 1997

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Ein Satz von Frank Plumpton Ramsey [71] aus dem Jahr 1930 bildet den Ausgangspunkt der Ramseytheorie, die sich seit Mitte der fünfziger Jahre zu einer eigenen mathematischen Disziplin entwickelt hat. Viele Ergebnisse, die bereits vor dem Krieg bekannt waren, wurden in dieser Zeit unter einem einheitlichen Gesichtspunkt begriffen: Sie wurden „*Färbungssätze*“. Ende der sechziger Jahre schließlich formulierten R. Graham und B. Rothschild in diesem Kontext folgende Vermutung:

> Werden die natürlichen Zahlen mit endlich vielen Farben eingefärbt, so existiert eine unendliche Menge von Zahlen, so daß alle aus ihr gebildeten endlichen Summen dieselbe Farbe haben[1].

N. Hindman gelang es im Jahre 1974 in [45], diese Vermutung durch einen aufwendigen kombinatorischen Beweis zu bestätigen. (Das Theorem ist seither als „Satz von Hindman“ bekannt.) Er hatte aber bereits zwei Jahre früher in [44] eine Verbindung zwischen der Graham-Rothschild-Vermutung und der Existenz gewisser Ultrafilter auf $\mathbb{N}$ untersucht, deren Entdeckung er in [55] F. Galvin zuschreibt. Weil bekannt war, daß die Ultrafilter einer Menge mit den Punkten der Stone–Čech–Kompaktifizierung dieser Menge — aufgefaßt als diskreter Raum — identifiziert werden können, richtete sich das Interesse nun auf die Theorie dieser auf M.H. Stone [75] und E. Čech [21] zurückgehenden Kompaktifizierung. Bereits seit Anfang der sechziger Jahre wußte man, daß die Stone–Čech–Kompaktifizierung βS einer diskreten Halbgruppe S eine in gewisser Weise kanonische Halbgruppenstruktur trägt (vgl. die Ausführungen am Ende von Kapitel 3). Nach Angaben von N. Hindman in [55] war es S. Glazer, der erkannte, daß die von Hindman und Galvin gesuchten Ultrafilter gerade die *Idempotente* der so erhaltenen Halbgruppe sind. Die Existenz solcher

[1] Hierbei sind Summen ohne doppelt auftretende Summanden gemeint.

Idempotente ist durch einen von R. Ellis im Jahre 1958 in [30] veröffentlichten Satz gewährleistet.
Seither ist sowohl die Theorie der Stone–Čech–Kompaktifizierung diskreter Halbgruppen als auch ihre Verbindung zur Ramseytheorie Gegenstand ausgedehnter Forschung. Als besonders wichtiges Ergebnis dieser Bemühungen ist ein Beweis des folgenden Satzes anzusehen:

> Werden die natürlichen Zahlen mit endlich vielen Farben eingefärbt, so gibt es beliebig lange arithmetische Progressionen, die dieselbe Farbe besitzen.

(Für die Bezeichnungen siehe Definition 4.15.) Dieses Resultat ist bereits 1927 von B.L. van der Waerden mit rein kombinatorischen Mitteln bewiesen worden (vgl. [81]). Es war jedoch lange Zeit fraglich, ob sich ein Beweis erbringen lassen würde, der die Theorie der Stone–Čech–Kompaktifizierung diskreter Halbgruppen ausnützt. Dies ist Ende der achtziger Jahre V. Bergelson, H. Furstenberg, N. Hindman und Y. Katznelson gelungen. Die Übersichtsartikel [54, 55] geben detaillierte Auskunft über geschichtliche Entwicklung und aktuellen Stand der Forschung auf diesem Gebiet.

In der vorliegenden Arbeit soll der angesprochene Zusammenhang systematisch vorgestellt werden. Dazu wird in einem ersten Kapitel die Theorie der Stone–Čech–Kompaktifizierung entwickelt, allerdings mit einem besonderen Schwerpunkt auf diskrete Räume. Verschiedene Interpretationen der Punkte der Stone–Čech–Kompaktifizierung werden angegeben (vgl. Satz 1.8).
Ein zweites Kapitel enthält die algebraische und topologische Theorie der Halbgruppen in für unsere Zwecke hinreichender Ausführlichkeit; es findet sein Ziel in dem Struktursatz von Ruppert 2.8 und dem Satz von Ellis 2.13.
Das dritte Kapitel kombiniert die Ergebnisse der beiden vorangegangenen. Nach Definition einer Halbgruppenstruktur auf der Stone–Čech–Kompaktifizierung βS der diskreten Halbgruppe S wird die Menge $\beta S \setminus S$ und das minimale Ideal von βS untersucht. Das Kapitel gipfelt in einer Korrespondenz von kombinatorischen und algebraisch-topologischen Eigenschaften von Teilmengen der Halbgruppe S.
In Kapitel 4 geben wir zunächst eine grundsätzliche Einführung in die Ramseytheorie. Dann wenden wir uns einer Reihe wichtiger Ergebnisse dieser Theorie und ihren Beweisen zu, darunter die Sätze von Hindman und van der Waerden.

Kapitel 5 ist sogenannten „kombinatorisch reichhaltigen Ultrafiltern“ gewidmet. Die wesentliche Frage ist hier, ob sich etwa die Aussagen der Sätze von Hindman und van der Waerden in der Weise kombinieren lassen, daß in einer Färbung der Menge $\mathbb{N}$ endliche Summen *und* beliebig lange arithmetische Progressionen von ein und derselben Farbe zu finden sind.
Im sechsten Kapitel werden Resultate einer 1993 erschienenen Arbeit [7] von V. Bergelson, A. Blass und N. Hindman verallgemeinert. Der Begriff des „Ungetüms“ wird eingeführt und ein Satz bewiesen, der es gestattet, viele Ramseytheoreme auf einen Ursprung zurückzuführen. Darunter ist auch der gefeierte Satz von Hales und Jewett, der nach Auffassung der Autoren R. Graham, B. Rothschild und J. Spencer im Herzen der Ramseytheorie liegt (vgl. [42], S. 32).

Bevor wir uns der Sache selbst zuwenden, sollen einige wenige Notationen und Konventionen eingeführt werden.
Es ist $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$ die Menge der *natürlichen Zahlen* und $\omega := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Für eine endliche Teilmenge $\{x_1, \ldots, x_n\}$ von ω mit $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ schreiben wir kurz $\{x_1, \ldots, x_n\}_<$. Sind A, B Teilmengen von ω, so bedeute $A < B$, daß jedes Element von A strikt kleiner als jedes Element von B ist.
Für jede Menge X sei $\mathfrak{P}(X)$ ihre *Potenzmenge*, $[X]^{<\omega}$ die Menge der endlichen und $[X]^{\geq\omega}$ die Menge der unendlichen Teilmengen von X. Eine Familie $\mathcal{A} \subset \mathfrak{P}(X)$ von Teilmengen von X heißt $\cap$–*stabil* , falls mit je zwei Mengen auch ihr Durchschnitt in $\mathcal{A}$ liegt. Steht X als Bezugsraum fest, so ist für jede Teilmenge $A \subset X$ die Menge $A^c := X \setminus A$ das *Komplement* von A in X und $\mathbb{1}_A$ die *charakteristische Funktion* von A. Das *Urbild* von A unter einer Abbildung $f : Y \longrightarrow X$ wird mit $f^{\leftarrow}(A)$ bezeichnet. Eine Folge $(x_n)_n$ in X heißt *injektiv*, wenn aus $n \neq m$ stets $x_n \neq x_m$ folgt.
Eine *partielle Funktion* u von X nach Y mit Definitionsbereich $\mathrm{dom}(u)$ ist eine Abbildung $u : \mathrm{dom}(u) \longrightarrow Y$ mit $\emptyset \neq \mathrm{dom}(u) \subset X$. Falls u an der Stelle $x \in X$ undefiniert ist, schreiben wir $u(x) = \perp$.

Zum Schluß dieser Einleitung möchte ich noch meinem Betreuer Professor Dr. Rainer Nagel herzlich danken. Sein großes Vertrauen in meine Fähigkeiten und das stetige Lob hat viel zum Enstehen dieser Arbeit beigetragen. Dies gilt in ähnlicher Weise für Professor Dr. Ulf Schlotterbeck, dem ich für etliche hilfreiche Gespräche danke. Mein größter Dank gilt aber meinen Freunden Frank Fischer und Hans Kiesl, mit denen ich dieses Studium durchlebt und durchlitten habe.

Kapitel 1

Die Stone–Čech–Kompaktifizierung eines diskreten Raumes

1.1 Definition

Wir führen in diesem Kapitel die Stone–Čech–Kompaktifizierung βX eines topologischen Raumes X ein. Nach dem Beweis einer Eindeutigkeitseigenschaft beweisen wir mit funktionalanalytischen Mitteln, daß jeder topologische Raum eine Stone–Čech–Kompaktifizierung besitzt. Sodann werden für den Fall, daß der zugrundeliegende Raum X diskret ist, verschiedene Interpretationsmöglichkeiten für die Punkte von βX angegeben. Die wichtigste dieser Interpretationen identifiziert βX mit dem Raum der Ultrafilter auf X. Auf diesem Raum wird die kompakte Topologie durch Angabe von Umgebungsbasen beschrieben.

Für den Topologen besteht eine Kompaktifizierung eines topologischen Raumes X aus einem kompakten, topologischen Raum Y und einer homöomorphen Einbettung $\varphi : X \longrightarrow Y$ auf einen dichten Teilraum von Y. Abweichend von dieser Sprechweise definieren wir in diesem Kapitel den Begriff der Stone–Čech–Kompaktifizierung etwas allgemeiner, um dann jene Fälle vollständig zu beschreiben, in denen es sich tatsächlich um eine Kompaktifizierung im Sinne des Topologen handelt.

1.1 Definition Eine *Stone–Čech–Kompaktifizierung* des topologischen Raumes X ist ein Paar (K, ι), bestehend aus einem kompakten topologischen Raum K und einer stetigen Abbildung $\iota : X \longrightarrow K$, das folgende universelle Eigenschaft (UE) besitzt:

> *Ist Y ein kompakter Raum und $\varphi : X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung, so existiert genau eine stetige Abbildung $\hat{\varphi} : K \longrightarrow Y$ mit $\hat{\varphi} \circ \iota = \varphi$, d.h. so daß das Diagramm*
>
> $$\begin{tikzcd} K \arrow[rr, "\hat{\varphi}"] & & Y \\ & X \arrow[ul, "\iota"] \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$
>
> *kommutiert.*

Eine Stone–Čech–Kompaktifizierung von X ist demnach initial in der Kategorie der Paare (Y, φ) von kompakten Räumen Y und stetigen Abbildungen $\varphi : X \longrightarrow Y$. Die Eindeutigkeit initialer Objekte wird in unserem Kontext in nächsten Lemma formuliert. Der Beweis läßt sich unmittelbar mit (UE) erbringen und sei dem Leser überlassen.

1.2 Lemma

Sind (K, ι) und (L, φ) zwei Stone–Čech–Kompaktifizierungen von X, so ist die durch (UE) gegebene Abbildung $\hat{\varphi} : K \longrightarrow L$ mit $\hat{\varphi} \circ \iota = \varphi$ ein Homöomorphismus.

Man ist also berechtigt, von *der* Stone–Čech–Kompaktifizierung von X zu sprechen, wenn eine solche existiert. In diesem Fall bezeichnen wir sie mit $(\beta X, \iota)$. Bevor wir uns der Frage der Existenz zuwenden, ziehen wir ein paar wichtige Folgerungen.

1.3 Satz

Für jede Stone–Čech–Kompaktifizierung $(\beta X, \iota)$ von X gelten:

a) ιX ist dicht in βX.

b) Die Abbildung $\iota : X \longrightarrow \beta X$ ist genau dann eine homöomorphe Einbettung, wenn X vollständig regulär ist.

Beweis:

a) Sei $K := \overline{\iota X}$ der Abschluß von ιX in βX. Dann ist auch (K, ι) eine Stone–Čech–Kompaktifizierung von X und mit obigem Lemma also die Einbettung von K in βX ein Homöomorphismus. Das bedeutet aber $K = \beta X$, also ist ιX dicht in βX.

b) Sei zuerst X vollständig regulär. Für den Beweis der Injektivität von ι seien $x, y \in X$, $x \neq y$, gegeben. Nach Voraussetzung existiert eine stetige Funktion $f : X \longrightarrow [0,1]$ mit $f(x) = 0$ und $f(y) = 1$. Dann gilt für die „Fortsetzung“ $\hat{f}$ aber $\hat{f}(\iota x) = f(x) = 0 \neq 1 = f(y) = \hat{f}(\iota y)$, und daraus folgt sofort $\iota x \neq \iota y$.
Es bleibt zu zeigen, daß $\iota : X \longrightarrow \iota X$ abgeschlossen ist. Dazu wähle eine abgeschlossene Teilmenge A von X und ein $x \in X$ mit $\iota x \in \overline{\iota A} \cap \iota X$. Ist x nicht in A, so gibt es nach Voraussetzung eine Funktion $f : X \longrightarrow [0,1]$ mit $f(x) = 0$ und $fA \subset \{1\}$. Geht man wieder zu $\hat{f}$ über, so erhält man $\hat{f}(\iota x) = 0$, $\hat{f}(\iota A) \subset \{1\}$, und daraus folgt schließlich $\iota x \notin \overline{\iota A}$ wegen $\hat{f}(\overline{\iota A}) \subset \overline{\hat{f}(\iota A)} \subset \overline{\{1\}} = \{1\}$. Somit kommt nur $x \in A$ in Frage. Es folgt $\overline{\iota A} \cap \iota X = \iota A$, d.h. ιA ist abgeschlossen in ιX.
Zum Beweis der Umkehrung sei jetzt ι eine homöomorphe Einbettung. Dann ist ιX als Unterraum eines kompakten Raumes jedenfalls vollständig regulär, und damit ist auch X vollständig regulär. □

Wir können also im Hinblick auf die einleitenden Worte dieses Kapitels sagen: eine Stone–Čech–Kompaktifizierung ist genau dann eine Kompaktifizierung im herkömmlichen Sinne, wenn der zugrundeliegende Raum vollständig regulär ist.
Weil wir uns im wesentlichen nur für diskrete Räume und ihre Stone–Čech–Kompaktifizierungen interessieren, gehen wir im nächsten Satz auf diese spezielle Situation genauer ein. Dabei denken wir uns von vornherein den diskreten Raum X in βX eingebettet (diskrete Räume sind vollständig regulär!), wodurch der Bezug auf die Abbildung ι entfällt.

1.4 Satz

Sei βX die Stone–Čech–Kompaktifizierung des diskreten Raumes X. Dann gelten:

a) *Für jede Teilmenge A von X bilden die Mengen $\overline{A}$ und $\overline{X \setminus A}$ eine Partition von βX. Insbesondere ist $\overline{A}$ offen und abgeschlossen in βX, und es gilt $\overline{A} \cap X = A$.*

b) *Für jeden Punkt $p \in \beta X$ bildet das System $\{\overline{A} \mid A \subset X, p \in \overline{A}\}$ eine Umgebungsbasis von p.*

Beweis: Für $A \subset X$ ist zunächst $\overline{A} \cup \overline{X \setminus A} = \overline{A \cup (X \setminus A)} = \overline{X} = \beta X$. Weiter gilt $\widehat{\mathbb{1}_A}(A) \subset \{1\}$, also auch $\widehat{\mathbb{1}_A}(\overline{A}) \subset \{1\}$. Analog dazu gilt $\widehat{\mathbb{1}_A}(\overline{X \setminus A}) \subset \{0\}$. Daraus folgt a) und nebenbei erhalten wir die Gleichheit $\widehat{\mathbb{1}_A} = \mathbb{1}_{\overline{A}}$.
Zum Beweis von b) sei $p \in \beta X$ und V eine abgeschlossene Umgebung von p. (Kompakte Räume sind regulär, also bilden für jeden Punkt die abgeschlossenen Um-

gebungen eine Umgebungsbasis). Setze $A := V \cap X$. Da V abgeschlossen ist, ist jedenfalls $\overline{A}$ eine Teilmenge von V. Nach dem schon bewiesenen Teil a) reicht es dann $p \in \overline{A}$ zu zeigen. Wenn $p \notin \overline{A}$ ist, so gilt $p \in \overline{X \setminus A}$ nach a). Dann muß aber $V \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ sein, und das steht im Widerspruch zur Definition von A. □

1.2 Existenz

Um eine Idee für einen Existenzbeweis zu bekommen, gehen wir zunächst davon aus, daß der Raum X eine Stone–Čech–Kompaktifizierung $(\beta X, \iota)$ besitzt und betrachten die Banachalgebra $C_b(X)$ der stetigen beschränkten komplexwertigen Funktionen auf X. Jedes $f \in C_b(X)$ hat nach (UE) eine eindeutig bestimmte „Fortsetzung" $\hat{f} : \beta X \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $\hat{f} \circ \iota = f$. Für jedes $p \in \beta X$ ist dann die „Punktauswertung" $\Delta_p := (f \longmapsto \hat{f}(p)) : C_b(X) \longrightarrow \mathbb{C}$ ein Homomorphismus von Algebren mit Eins, also ein Element des sogenannten Gelfandraumes $\mathcal{M}_X$. Dieser ist eine beschränkte schwach*–abgeschlossene Teilmenge des Dualraumes $C_b(X)'$ und daher nach dem Satz von Banach–Alaoglu kompakt in der induzierten Topologie. Wie man sich leicht überzeugt, ist zudem die Abbildung $\Delta := (p \longmapsto \Delta_p) : \beta X \longrightarrow \mathcal{M}_X$ stetig und injektiv. Bezeichnet man die gewöhnliche Punktauswertung in $x \in X$ mit δ_x und definiert die Abbildung $\delta := (x \longmapsto \delta_x) : X \longrightarrow \mathcal{M}_X$, so gilt $\Delta \circ \iota = \delta$. Deshalb ist der Abschluß von δX in $\mathcal{M}_X$ ein via Δ^{-1} zu βX homöomorpher Raum und darum ebenso eine Stone–Čech–Kompaktifizierung von X. Wir wissen also, wo wir suchen müssen.

1.5 Satz

Jeder topologische Raum besitzt eine Stone–Čech–Kompaktifizierung

Beweis:

1) Wie in der Vorüberlegung betrachten wir die Abbildung $\delta : X \longrightarrow \mathcal{M}_X$ gegeben durch $\langle f, \delta_x \rangle = f(x)$ für alle $f \in C_b(X)$ und definieren $K := \overline{\delta X}$ als den Abschluß von δX in $\mathcal{M}_X$ sowie $\iota : X \longrightarrow K$ durch $\iota x := \delta_x$. Es gilt, für das Paar (K, ι) die universelle Eigenschaft nachzuweisen. Dazu benötigen wir ein Lemma .
2) Lemma: Ist der Raum Y kompakt, so ist jedes nichttriviale multiplikative lineare Funktional auf $C(Y)$ bereits eine Punktauswertungsabbildung.
   Beweis: Sei $0 \neq \rho \in \mathcal{M}_Y$ ein multiplikatives lineares Funktional auf $C(Y)$. Wir suchen nach einem $y \in Y$ mit $\ker \rho \subset \ker \delta_y$. (Da beide Kerne 1–kodimensional

sind, müssen sie übereinstimmen; dann gilt $\langle f - f(x)\mathbb{1}, \rho\rangle = 0$ für jedes $f \in C(Y)$, und das bedeutet $\rho = \delta_y$.) Wenn es ein solches y nicht gibt, so muß zu jedem Punkt x in Y eine stetige Funktion $f_x \in \ker\rho$ mit $f_x(x) \neq 0$ existieren. Durch Übergang zu f_x^2 kann man ohne Einschränkung $f_x \geq 0$ voraussetzen (beachte, daß $\ker\rho$ ein Ideal in der Algebra $C(Y)$ ist). Weil f_x stetig ist, gibt es zu jedem x eine Umgebung U_x von x, auf der f_x echt positiv ist. Da Y kompakt ist, reichen endlich viele dieser U_x aus, um ganz Y zu überdecken. Addition der entsprechenden f_x ergibt eine Funktion $g \in \ker\rho$, die nirgends verschwindet. Multiplikation mit ihrer Inversen zeigt $\mathbb{1} \in \ker\rho$, was im Widerspruch zur Nichttrivialität von ρ steht. Damit ist das Lemma bewiesen.

3) Sei also jetzt Y ein kompakter Raum und $\varphi : X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Die Eindeutigkeit der „Fortsetzung“ von φ ist klar, da ja δX dicht in K liegt. Um die Existenz einzusehen, setzen wir $T_\varphi := (f \longmapsto f \circ \varphi) : C(Y) \longrightarrow C_b(X)$. Wie man leicht nachrechnet, ist dann T_φ ein beschränkter linearer Operator; seine Adjungierte $T'_\varphi : C_b(X)' \longrightarrow C(Y)'$ ist schwach*–stetig und bildet $\mathcal{M}_X$ in $\mathcal{M}_Y$ ab, d.h. es gilt $T'_\varphi(\mathcal{M}_X) \subset \mathcal{M}_Y$.
Betrachte nun die Abbildung $\Delta : Y \longrightarrow \mathcal{M}_Y$, die jedem Punkt y in Y die entsprechende Punktauswertungsabbildung δ_y zuordnet. In der Vorüberlegung hatten wir schon gesehen, daß Δ stetig und injektiv ist (man beachte, daß Y seine eigene Stone–Čech–Kompaktifizierung ist!). Nach Punkt 2) ist Δ auch surjektiv und darum sogar homöomorph. Setzen wir nun $\hat{\varphi} := \Delta^{-1} \circ T'_\varphi\,|_K$, so ist $\hat{\varphi} : K \longrightarrow Y$ stetig, und es bleibt $\hat{\varphi} \circ \iota = \varphi$ nachzuweisen. Wegen

$$\langle f, T'_\varphi(\delta_x)\rangle = \langle f \circ \varphi, \delta_x\rangle = f(\varphi(x)) = \langle f, \delta_{\varphi(x)}\rangle$$

für alle $x \in X$, $f \in C(Y)$ gilt $T'_\varphi(\delta_x) = \delta_{\varphi(x)}$ und daher $\Delta^{-1} \circ T'_\varphi(\delta_x) = \varphi(x)$. Mit den Definitionen von ι und $\hat{\varphi}$ erhalten wir schließlich $\hat{\varphi} \circ \iota = \varphi$, was zu beweisen war. □

Das nächste Ziel ist es, alternative Beschreibungen für βX zu finden, falls X ein diskreter Raum ist.

1.3 Interpretationen

In diesem Abschnitt werden wir fünf gleichwertigen Interpretationen der Stone–Čech–Kompaktifizierung begegnen. Die nötigen Konzepte werden in der nachstehenden Definition bereitgestellt.

1.6 DEFINITION Sei X eine nichtleere Menge.

Ein *0-1-Inhalt* auf X ist eine endlich–additive, nichttriviale Mengenfunktion auf der Potenzmenge von X, die nur Werte in $\{0, 1\}$ annimmt. Die Menge der 0-1-Inhalte auf X werde mit $\mathcal{P}_X$ bezeichnet.

Ein *Filter* auf X ist ein nichtleeres System $\mathcal{F}$ von Teilmengen von X mit den Eigenschaften

(i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$;

(ii) $A \cap B \in \mathcal{F}$, falls $A, B \in \mathcal{F}$;

(iii) $B \in \mathcal{F}$, falls $A \subset B \subset X$ und $A \in \mathcal{F}$.

Ein *Ultrafilter* auf X ist ein Filter $\mathcal{F}$ auf X mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß $A \in \mathcal{F}$ oder $B \in \mathcal{F}$ ist, falls $A \cup B \in \mathcal{F}$ gilt. Die Menge der Ultrafilter auf X werde mit $\mathcal{U}_X$ bezeichnet.

Eine *uniforme Häufung* auf X ist eine Operation l, die jeder Funktion $f : X \longrightarrow K$ in einen kompakten Raum K einen Punkt $l(f)$ derart zuordnet, daß gilt:

> Wenn $g : K \longrightarrow L$ eine Abbildung von K in einen weiteren kompakten Raum L ist, so gilt $l(g \circ f) = g(l(f))$.

Die Menge der uniformen Häufungen auf X werde mit $\mathcal{L}_X$ bezeichnet.

1.7 BEMERKUNG Der Begriff des Ultrafilters wird im weiteren Verlauf besonders wichtig sein. Darum erinnern wir an dieser Stelle an ein paar wohlbekannte Sachverhalte, deren Beweise in jedem Topologiebuch (etwa [69], S.55 ff.) nachzulesen sind.

1) Ist $\mathcal{B}$ ein nichtleeres System nichtleerer Teilmengen von X, das zudem $\cap$–stabil ist, so ist $\mathcal{B}$ eine Filterbasis, d.h. $\mathcal{F} := \{A \mid \exists B \in \mathcal{B} : B \subset A\}$ ist ein Filter.

2) Ist $\mathcal{S}$ ein nichtleeres System nichtleerer Teilmengen von X, das die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt, so ist das System aller endlichen Durchschnitte von Mengen aus $\mathcal{S}$ eine Filterbasis auf X.

3) Die Filter auf X sind durch Inklusion partiell geordnet. Für einen Filter $\mathcal{F}$ auf X sind äquivalent:

   (i) $\mathcal{F}$ ist ein Ultrafilter

   (ii) $\mathcal{F}$ ist ein maximaler Filter (bzgl. Inklusion)

   (iii) $A \in \mathcal{F}$ oder $A^c \in \mathcal{F}$ für jede Teilmenge A von X.

(iv) Sind $A_1 \ldots A_n$ Teilmengen von X und $A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{F}$ so gibt es einen Index i mit $A_i \in \mathcal{F}$.

(v) Jede Teilmenge von X, die alle Mengen von $\mathcal{F}$ nichttrivial schneidet, gehört selbst schon zu $\mathcal{F}$.

4) Aus 1) - 3) folgt mit Zorns Lemma, daß zu jedem nichtleeren System nichtleerer Teilmengen von X, das die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt, ein Ultrafilter existiert, der es enthält.

5) Ist x in X, so ist $[x] := \{A \,|\, x \in A \subset X\}$ ein Ultrafilter. Jeder Ultrafilter, der eine endliche Menge enthält, ist von dieser Gestalt und heißt fixierter Ultrafilter. Ist X unendlich, so ist das System der ko-endlichen Mengen auf X $\cap$–stabil, also existiert nach 4) ein nichttrivialer (d.h. nicht fixierter) Ultrafilter.

Zu dem Begriff des 0-1-Inhaltes ist kaum etwas anzumerken. Dagegen verlangt der Begriff der uniformen Häufung nach näherer Betrachtung. Sei dazu l eine uniforme Häufung auf X, K ein kompakter Raum und $\varphi : X \longrightarrow K$ eine Abbildung von X in K. Dann ist $l(\varphi) \in \overline{\varphi X}$, d.h. $l(\varphi)$ ist entweder ein Bildpunkt von φ oder ein Häufungspunkt des Bildes von X unter φ.

[*Beweis:* Sei $L := \overline{\varphi X}$ und $\tilde{\varphi} : X \longrightarrow L$; dann ist L kompakt und mit $i := (x \mapsto x) : L \to K$ gilt $\varphi = i \circ \tilde{\varphi}$; aufgrund der Definition von uniformen Häufungen ist somit $l(\varphi) = i(l(\tilde{\varphi})) \in L$.]

Eine uniforme Häufung läßt sich im Sinne der Kategorientheorie als Funktor zwischen gewissen Kategorien verstehen. Die eine Kategorie besteht aus den Paaren (K, φ), wobei K ein kompakter Raum und $\varphi : X \longrightarrow K$ eine Abbildung ist; die zugehörigen Morphismen $\Phi : (K, \varphi) \longrightarrow (L, \psi)$ sind stetige Abbildungen $\Phi : K \longrightarrow L$, so daß $\Phi \circ \varphi = \psi$ ist. Die zweite Kategorie hat als Objekte die Paare (K, p), wobei K ein kompakter Raum und $p \in K$ ist, und als Morphismen $\Phi : (K, p) \longrightarrow (L, q)$ die stetigen Abbildungen $\Phi : K \longrightarrow L$ mit $\Phi(p) = q$. Eine uniforme Häufung l auf X ist dann ein kovarianter Funktor der ersten in die zweite Kategorie, der auf der Objektebene die erste Komponente und auf Morphismenebene die zugrundeliegende Abbildung festläßt. Aber das nur am Rande.

Ein Wort noch zu $\mathcal{M}_X$, der Menge der multiplikativen linearen Funktionale auf $C_b(X)$. Weil X diskret ist, fallen die Begriffe „stetige beschränkte Funktion", „beschränkte meßbare Funktion" und „beschränkte Funktion" zusammen. Insbesondere bilden die charakteristischen Funktionen eine totale Menge in der Banachalgebra $C_b(X)$.

Wir bringen nun die verschiedenen Mengen $\mathcal{M}_X, \mathcal{P}_X, \mathcal{U}_X, \mathcal{L}_X$ mit βX mit Hilfe von Abbildungen in Verbindung, die wir der Einfachheit halber mit F_1, F_2 usw. bezeichnen. In jede der obenstehenden Mengen läßt sich der Raum X auf eine kanonische Weise einbetten:

1) in βX via ι;
2) in $\mathcal{M}_X$ via $(x \mapsto \delta_x)$, wobei $\delta_x := (f \mapsto f(x))$ die Auswertungsabbildung im Punkte x bezeichnet;
3) in $\mathcal{U}_X$ via $(x \mapsto [x])$;
4) in $\mathcal{P}_X$ via $(x \mapsto \varepsilon_x)$, wobei ε_x das Diracmaß im Punkt x bezeichnet;
5) in $\mathcal{L}_X$ wiederum via $(x \mapsto \delta_x)$, wobei auch hier δ_x die Punktauswertung in x bezeichnet.

Als erste definieren wir $F_1 : \beta X \longrightarrow \mathcal{M}_X$ durch $F_1(p) := (f \mapsto \hat{f}(p))$. Wir haben oben schon gesehen, daß F_1 stetig und injektiv ist, und es ist klar, daß sie mit den kanonischen Einbettungen von X verträglich ist.

Die Abbildung $F_2 : \mathcal{M}_X \longrightarrow \mathcal{P}_X$ ist definiert durch $F_2(\rho)(A) := \langle \mathbb{1}_A, \rho \rangle$ für jede Teilmenge A von X und jedes $\rho \in \mathcal{M}_X$. Dabei folgt die Endlich-Additivität von $F_2(\rho)$ aus der Linearität, die $\{0,1\}$–Wertigkeit aus der Multiplikativität von ρ (beachte dabei $\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A$) und die Nichttrivialität aus der Tatsache, daß $\langle \mathbb{1}_X, \rho \rangle = 1$ ist. Die Abbildung F_2 ist injektiv, denn die charakteristischen Funktionen bilden eine totale Menge in $C_b(X)$. Man sieht auch leicht, daß sich F_2 mit den kanonischen Einbettungen von X verträgt.

Die Abbildung $F_3 : P_X \longrightarrow \mathcal{U}_X$ definieren wir durch $F_3(\mu) := \{A : \mu(A) = 1\}$ für jedes $\mu \in P_X$.

> [Es ist zu zeigen, daß $F_3(\mu)$ ein Ultrafilter ist. Klar ist zunächst, daß $X \in F_3(\mu)$ und $\emptyset \notin F_3(\mu)$. Sei $A \in F_3(\mu)$ und $A \subset B \subset X$; dann ist $\mu(A) \leq \mu(B)$ und daher $\mu(B) = 1$, das ist $B \in F_3(\mu)$. Sind $A, B \in F_3(\mu)$, dann gilt $\mu(A \cap B) = 1$ wegen $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$. Sind $A, B \subset X$ und $A \cup B \in F_3(\mu)$ so gilt $1 = \mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$, also $A \in F_3(\mu)$ oder $B \in F_3(\mu)$.]

Auch die Abbildung F_3 ist offensichtlich injektiv und mit den kanonischen Einbettungen von X verträglich.

Die Definition der Abbildung $F_4 : \mathcal{U}_X \longrightarrow \mathcal{L}_X$ ist etwas aufwendiger. Sei $u \in \mathcal{U}_X$, K ein kompakter Raum und $\varphi : X \longrightarrow K$ eine Abbildung. Wegen $\varphi(A \cap B) \subset \varphi A \cap \varphi B$ für $A, B \in u$ besitzt die Menge $\{\overline{\varphi A} : A \in u\}$ die endliche Durchschnittseigenschaft.

Da K kompakt ist, ist also $\bigcap\{\overline{\varphi A} : A \in u\}$ nichtleer. Sie enthält aber auch nur höchstens einen Punkt.

[*Beweis:* Sei $x \in \bigcap\{\varphi A : A \in u\}$ und y ein von x verschiedener Punkt von K. Da K insbesondere Hausdorffsch ist, gibt es eine abgeschlossene Umgebung U von x, die y nicht enthält. Nun ist $\varphi^{\leftarrow}U \cup \varphi^{\leftarrow}U^c = X \in u$; wegen $\varphi\varphi^{\leftarrow}U^c \subset U^c$ ist $\overline{\varphi\varphi^{\leftarrow}U^c} \subset (U^\circ)^c$, somit $x \notin \overline{\varphi\varphi^{\leftarrow}U^c}$, also $\varphi^{\leftarrow}U^c \notin u$; also muß $\varphi^{\leftarrow}U \in u$ sein. Somit gilt $y \notin \overline{\varphi\varphi^{\leftarrow}U} \subset U$, da U abgeschlossen ist.]

Daher ist

$$F_4(u)(\varphi) := u\text{-}\lim\varphi := \text{dasjenige } x \text{ mit } \{x\} = \bigcap\{\overline{\varphi A} \mid A \in u\}$$

eine zulässige Definition, und es bleibt zu zeigen, daß dadurch eine uniforme Häufung definiert wird.

[Sei dazu L ein weiterer kompakter Raum und $f : K \longrightarrow L$ stetig. Es ist $u\text{-}\lim(f \circ \varphi) = f(u\text{-}\lim(\varphi))$, d.h. $f(u\text{-}\lim(\varphi)) \in \bigcap\{\overline{f(\varphi A)} : A \in u\}$ zu zeigen. Sei also $A \in u$; dann ist nach Definition $u\text{-}\lim(\varphi) \in \overline{\varphi A}$, also $f(u\text{-}\lim\varphi) \in f(\overline{\varphi A}) \subset \overline{f(\varphi A)}$.]

Also ist F_4 wohldefiniert und verträgt sich offensichtlich mit den kanonischen Einbettungen von X. Um die Injektivität einzusehen, seien $u, p \in U_X$ zwei verschiedene Ultrafilter. Dann gibt es eine Teilmenge A von X, die u und p trennt, d.h für die $A \in u$, $A^c \in p$ gilt. Dann ist aber für die charakteristische Funktion $\mathbb{1}_A$ von A $u\text{-}\lim(\mathbb{1}_A) = 1$ und $p\text{-}\lim(\mathbb{1}_A) = 0$ und somit $u\text{-}\lim \neq p\text{-}\lim$, was zu beweisen war.

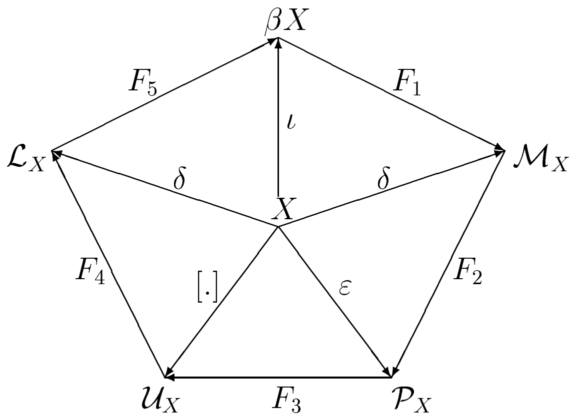
Die letzte im Reigen unserer Abbildungen schließt den Kreis. Wir definieren die Abbildung $F_5 : \mathcal{L}_X \longrightarrow \beta X$ durch $F_5(l) := l(\iota)$ für alle $l \in \mathcal{L}_X$, wobei $\iota : X \longrightarrow \beta X$ wie gehabt die kanonische Inklusion ist. Auch F_5 ist injektiv und verträglich mit den kanonischen Einbettungen von X.

[*Beweis:* Die Verträglichkeit ist trivial, lediglich die Injektivität ist interessant. Seien dazu k, l zwei verschiedene uniforme Häufungen. Dann gibt es also einen kompakten Raum K und eine Abbildung $\varphi : X \longrightarrow K$ mit $k(\varphi) \neq l(\varphi)$. Für die „Fortsetzung" $\hat\varphi$ von φ auf βX gilt dann $\hat\varphi \circ \iota = \varphi$; daraus folgt $\hat\varphi(k(\iota)) = k(\varphi) \neq l(\varphi) = \hat\varphi(l(\iota))$ und daraus wiederum $k(\iota) \neq l(\iota)$.]

Jetzt können wir zeigen, daß die verschiedenen Konzepte — multiplikative Funktionale, 0-1-Inhalte, Ultrafilter und uniforme Häufungen — tatsächlich austauschbare Interpretationen der Stone–Čech–Kompaktifizierung eines diskreten Raumes sind. Dazu müssen nur noch die Abbildungen F_i als bijektiv erkannt werden.

1.8 Satz

Sei X ein diskreter Raum. Dann kommutiert das Diagramm



und alle Abbildungen F_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ sind bijektiv.

Beweis:

1) Wir erinnern an die Gleichheit $\widehat{\mathbb{1}_A} = \mathbb{1}_{\overline{\iota A}}$ für jede Teilmenge A von X, wie sie sich im Beweis von Satz 1.4 ergab.

2) Es gilt $F_5 \circ F_4 \circ F_3 \circ F_2 \circ F_1 = id_{\beta X}$. Denn für $p \in \beta X$ ist zunächst $F_2F_1(p)(A) = \widehat{\mathbb{1}_A}(p) = \mathbb{1}_{\overline{\iota A}}(p)$ und daraus folgt $F_3F_2F_1(p) = \{A \mid \mathbb{1}_{\overline{\iota A}}(p) = 1\} = \{A \mid p \in \overline{\iota A}\}$. Schließlich ergibt sich:

$$\begin{aligned} F_5F_4F_3F_2F_1(p) &= [F_3F_2F_1(p)]\text{-}\lim \iota \\ &= \text{dasjenige } x \text{ mit } x \in \bigcap\{\overline{\iota A} \mid A \in F_3F_2F_1(p)\} \\ &= p \end{aligned}$$

wegen $\bigcap\{\overline{\iota A} \mid A \in F_3F_2F_1(p)\} = \bigcap\{\overline{\iota A} \mid p \in \overline{\iota A}\} = \{p\}$.

3) Aus 2) folgt jetzt die Kommutativität des Diagramms, weil alle F_i injektiv und damit links kürzbar sind. Damit sind dann auch alle F_i surjektiv und die Behauptung ist vollständig bewiesen. □

Ab jetzt erlauben wir uns, zwischen den verschiedenen Interpretationen von βX kommentarlos hin und her zu wechseln. Der Raum X wird immer als in βX eingebettet angesehen, womit der Bezug auf die Einbettung ι wegfällt. Auch werden wir die kanonische „Fortsetzung“ einer Abbildung $f : X \longrightarrow K$ (K kompakt) auf βX

einfach wieder mit f bezeichnen. Somit gilt $p\text{-}\lim f = f(p)$ für $p \in \beta X$ und jede Abbildung $f : X \longrightarrow K$ von X in einen kompakten Raum K.
Der nächste Satz formuliert ein bekanntes Ergebnis des ersten Abschnittes neu; er ist von Interesse, da er die Topologie von βX direkt mit der Interpretation der Punkte von βX als Ultrafilter in Verbindung bringt.

1.9 SATZ
Für jedes $p \in \beta X$ und $A \subset X$ gilt genau dann $A \in p$, wenn $p \in \overline{A}$ ist. Somit bilden die Mengen

$$\overline{A} = \{q \mid q \in \beta X,\, A \in q\}, \quad A \in p,$$

eine Umgebungsbasis von p aus gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Mengen.

Beweis: Unter Beachtung der Tatsache, daß p mit seinem korrespondierenden Ultrafilter $F_3F_2F_1(p)$ identifiziert wird, kann man die erste Behauptung direkt aus dem Beweis von Satz 1.8 ersehen. Die zweite Behauptung folgt dann aus Satz 1.4. □

Zum Schluß dieses Abschnittes führen wir noch eine Redeweise ein, die sich aus der Identifikation von βX mit $\mathcal{P}_X$ ergibt. Jedes $p \in \beta X$ ist ein 0-1-Inhalt; ist nun $\mathcal{E}$ eine Eigenschaft von Elementen in X und $p \in \beta X$, so sagen wir

$$\mathcal{E}(x) \text{ für } p\text{-fast alle } x$$

wenn $p(\{x \mid \mathcal{E}(x)\}) = 1$ (in der 0-1-Inhalt-Interpretation), d.h. wenn $\{x \mid \mathcal{E}(x)\} \in p$ (in der Ultrafilterinterpretation). Damit wird „für p–fast alle" zu einer Art Quantor, der mit allen aussagenlogischen Junktoren vertauscht. (Das sieht man am einfachsten, wenn man sich der Ultrafilterinterpretation bedient.) Umgekehrt entspricht auch jeder solche „Quantor" einem Ultrafilter, womit wir eine weitere Charakterisierung von βX erhalten.

1.10 SATZ
Sei K ein kompakter Raum, $f : X \longrightarrow K$ eine Abbildung, V eine Teilmenge von K und $p \in \beta X$.

a) Wenn $f(p) \in V$ ist, gilt

$$f(x) \in U \text{ für } p\text{-fast alle } x$$

für alle Umgebungen U von V in K.

b) Wenn

$$f(x) \in V \text{ für } p\text{-fast alle } x$$

gilt, dann ist $f(p) \in \overline{V}$.

Beweis: Durch Kontraposition folgt b) aus a), wobei zu beachten ist, daß der Quantor „für p–fast alle“ mit Negationen vertauscht.
Zum Beweis von a) sei U eine Umgebung von V in K. Wegen $f(p) \in U$ ist dann $f^{\leftarrow}U$ eine Umgebung von p in βX. Nach Satz 1.9 gibt es eine Teilmenge A von X mit $p \in \overline{A} \subset f^{\leftarrow}U$. Das bedeutet $A \in p$ und $f(A) \subset U$, also $f(x) \in U$ für p–fast alle x. □

1.11 Korollar
Sei $f : X \longrightarrow X$ eine Abbildung, A eine Teilmenge von X und $p \in \beta X$. Dann gilt

$$A \in f(p) \quad \Leftrightarrow \quad f(p) \in \overline{A} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in A \text{ für } p\text{-fast alle } x.$$

Beweis: Die erste Äquivalenz steht schon in Satz 1.9. Weil $\overline{A}$ offen in βX ist, folgt aus $f(p) \in \overline{A}$ mit Satz 1.10, Teil a) jedenfalls $f(x) \in \overline{A}$ für p-fast alle x. Nun ist aber $f(X) \subset X$ und $X \cap \overline{A} = A$ nach Satz 1.4. Also gilt auch $f(x) \in A$ für p-fast alle x. Die Umkehrung ergibt sich direkt aus Teil b) des Satzes 1.10. □

Bemerkungen

Der Begriff der Stone–Čech–Kompaktifizierung geht auf M.H Stone [75] und E. Čech [21] zurück. Beide bewiesen im Jahre 1937 unabhängig voneinander die Existenz dieser heute nach ihnen benannten Kompaktifizierung eines vollständig regulären Raumes, wobei Čech der Charakterisierung durch die universelle Eigenschaft bereits eine zentrale Stellung gab. Stone hat in einer späteren Arbeit (vgl. [76]) noch einmal einen (vereinfachten) Beweis erbracht und so die Bedeutung des Ergebnisses unterstrichen.
Als Kern beider Beweise kann man den Satz von Tychonoff über das kartesische Produkt kompakter Räume ansehen (bei uns versteckt im Satz von Banach–Alaoglu). Čechs Konstruktion ist im Lehrbuch von Querenburg ([69], S.136 ff.) nachgezeichnet und kommt ohne die funktionalanalytischen Sprechweisen aus, deren wir uns im

Beweis von Satz 1.5 bedient haben. Die Betrachtung von Algebren stetiger Funktionen geht direkt auf die Originalarbeit von Stone [75] zurück; sie wird ausführlich im Buch von L. Gillman und M. Jerison [40] behandelt, das als Standardwerk zu diesem Thema bezeichnet werden kann. Wir haben auf das Buch von J. Conway ([23], S.140 ff.) zurückgegriffen, das auch die funktionalanalytischen Begriffe und Methoden bereitstellt, die im Beweis von Satz 1.5 eingehen.

In Abschnitt 1.1 haben wir den Begriff der Stone–Čech–Kompaktifizierung als ein universelles (genauer: initiales) Objekt einer gewissen Kategorie eingeführt und auch den Begriff der uniformen Häufung kurz aus der Sicht der Kategorientheorie beleuchtet. Für eine übersichtliche Einführung in die Sprache der Kategorientheorie sei auf das Buch von S. Lang [63], S.53 ff. hingewiesen.

Die allgemeine Beziehung zwischen der Stone–Čech–Kompaktifizierung eines Raumes X und gewissen Filtern von Teilmengen von X stellt Querenburg [69], S.178 ff. her und wird im Standardwerk [25] von W.W. Comfort und S. Negrepontis detailliert studiert (siehe auch Walker [85], S. 19 ff.). In der Situation diskreter Räume vereinfacht sich diese Beziehung stark. Die in Abschnitt 1.3 vorgenommene Identifikation von βX mit dem Raum aller Ultrafilter, dem Raum der uniformen Häufungen etc. entstammt dem Artikel von A. Blass [17], der allerdings nur den Spezialfall $X = \mathbb{N}$ betrachtet und sich jeglicher Beweise enthält. Weil er auch keine Bezeichnung für das angibt, was wir in Definition 1.6 „uniforme Häufungen“ genannt haben, entstand diese Bezeichnung als Arbeitstitel. Nicht dem Begriff aber der Sache nach wird das Konzept in [10, 82] vorgestellt, wobei als Ursprung auf eine Arbeit von Z. Frolík [32] aus dem Jahre 1967 verwiesen. Die Interpretation eines Ultrafilters als Quantor ist ebenfalls dem Artikel von A. Blass [17] entnommen.

Eine umfassende Darstellung der Theorie der Stone–Čech–Kompaktifizierung bietet das Standardwerk von R. Walker [85]. Dort wird auch ausführlich auf die geschichtliche Entwicklung dieser Theorie eingegangen.

Kapitel 2

Kompakte linkstopologische Halbgruppen

2.1 Halbgruppen

In diesem Kapitel werden wir zunächst einige Begriffe und Ergebnisse der algebraischen Halbgruppentheorie vorstellen. Dann wird eine kompakte Topologie auf der Halbgruppe hinzutreten.

2.1 Definition Eine nichtleere Menge S versehen mit einer zweistelligen assoziativen Verknüpfung heißt *Halbgruppe*.
Ein *Neutralelement* e der Halbgruppe S hat die Eigenschaft $et = te = t$ für jedes $t \in S$.
Die Halbgruppe heißt *kommutativ* (abelsch), falls $ab = ba$ für alle $a, b \in S$ gilt.
Eine Abbildung $\Phi : S \longrightarrow T$ der Halbgruppen S und T heißt (Halbgruppen-) *Homomorphismus*, falls $\Phi(st) = \Phi(s)\Phi(t)$ für alle $s, t \in S$ gilt.

Wir schreiben in diesem und dem nächsten Kapitel die Halbgruppenoperation multiplikativ, vor allem um nicht den Eindruck zu erwecken, S sei kommutativ. Später werden wir aber auch zur additiven Schreibweise wechseln.
Ist S eine Halbgruppe und $t \in S$, so bezeichnen wir mit $\lambda_t := (s \longmapsto ts) : S \longrightarrow S$ die *Linkstranslation*, sowie mit $\rho_t := (s \longmapsto st) : S \longrightarrow S$ die *Rechtstranslation* um t. Für $A \subset S$, $t \in S$ sei

$$At := \rho_t(A) = \{at \mid a \in A\},$$

$tA := \lambda_t(A) = \{ta \mid a \in A\}$,
$At^- := \rho_t^{\leftarrow}(A) = \{s \mid s \in S,\, st \in A\}$,
$t^-A := \lambda_t^{\leftarrow}(A) = \{s \mid s \in S,\, ts \in A\}$.

Weiter sei $AB := \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ für $A, B \subset S$.

2.2 Definition Eine nichtleere Teilmenge T der Halbgruppe S heißt

a) *Unterhalbgruppe*, falls $TT \subset T$,
b) *Rechtsideal*, falls $TS \subset T$,
c) *Linksideal*, falls $ST \subset T$ und
d) *Ideal*, falls $ST \cup TS \subset T$ ist.

Mit $K(S)$ werde der Durchschnitt aller Ideale von S bezeichnet.
Ein Element $e \in S$, für das $ee = e$ gilt, heißt *Idempotent* von S. Mit $E(S)$ werde die Menge aller Idempotente von S bezeichnet.

2.3 Bemerkungen 1) Alle aus „symmetrischen Voraussetzungen" rein algebraisch gewonnenen Aussagen über Rechtsideale in Halbgruppen gelten in analoger Weise auch für Linksideale.

2) Jedes Rechtsideal ist eine Unterhalbgruppe.
Ist I ein Rechtsideal, $t \in S$, so ist t^-I ein Rechtsideal.
Ist I ein Linksideal, $t \in S$, so ist It^- ein Linksideal.

3) $K(S)$ ist entweder leer oder ein Ideal von S.

4) Ist $(S_i)_{i\in I}$ eine Familie von Halbgruppen (I eine beliebige, nichtleere Indexmenge), so ist das kartesische Produkt $\prod_{i\in I} S_i$ mit komponentenweiser Multiplikation eine Halbgruppe, das *direkte Produkt* der S_i. Trivialerweise gilt $E(\prod_i S_i) = \prod_i E(S_i)$.

Bei der Beschäftigung mit Ramsey Theorie werden wir noch etliche Beispiele für Halbgruppen, Rechtsideale, ... kennenlernen. Darum an dieser Stelle nur eine kurze Beispielliste.
Jede Gruppe ist natürlich auch eine Halbgruppe. Sowohl die Addition, wie auch die Multiplikation definieren Halbgruppenstrukturen auf $\mathbb{N}$, sowie auf den positiven rationalen oder den positiven reellen Zahlen. Für jede nichtleere Menge X ist die Menge aller Selbstabbildungen mit der Komposition als Verknüpfung eine Halbgruppe. Unterhalbgruppen dieser Halbgruppe sind etwa die Menge aller surjektiven bzw. die Menge aller injektiven Abbildungen. Die Menge aller nicht-surjektiven Abbildungen bildet ein Rechts-, die aller nicht-injektiven Abbildungen ein Linksideal

(falls diese Mengen nicht leer sind, d.h. falls X nicht einpunktig ist). Die Menge der konstanten Abbildungen ist ein Ideal, das in jedem anderen Ideal enthalten ist.

Um Aufschluß über die Struktur einer Halbgruppe zu bekommen, hat es sich bewährt, *minimale* Rechts-, Links- und zweiseitige Ideale zu betrachten. Dabei heißt etwa ein Rechtsideal R minimal, wenn kein Rechtsideal in R echt enthalten ist. Analoge Definitionen gelten für Ideale und Linksideale.

2.4 LEMMA

Für eine Halbgruppe S sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $K(S) \neq \emptyset$.

(ii) S besitzt ein minimales Ideal.

(iii) S besitzt genau ein minimales Ideal.

In diesem Fall ist $K(S)$ das eindeutig bestimmte minimale Ideal.

Beweis: Die Implikation $(i) \Rightarrow (ii)$ ist trivial. Für die Implikation $(ii) \Rightarrow (iii)$ seien K, L zwei minimale Ideale. Wegen $KL \subset K \cap L$ ist $K \cap L$ nichtleer, also ein Ideal von S. Aus der Minimalität von K folgt $K = K \cap L$, also $K \subset L$. Analog gilt $L \subset K$ und insgesamt $K = L$. Für die letzte Implikation $(iii) \Rightarrow (i)$ sei K das eindeutig bestimmte minimale Ideal. Ist L irgendein weiteres Ideal, so sieht man wie eben, daß $K \subset L$ gelten muß. Also ist $K = K(S) \neq \emptyset$. □

2.5 SATZ

Sei S eine Halbgruppe.

a) *Ein Rechtsideal R von S ist genau dann minimal, wenn für jedes $s \in R$ die Gleichung $R = sR$ gilt; dies ist genau dann der Fall, wenn $R = sS$ für jedes $s \in R$ ist.*

b) *Verschiedene minimale Rechtsideale von S sind disjunkt.*

c) *Ist R ein minimales Rechtsideal, so ist $\{tR \mid t \in S\}$ die Familie aller minimalen Rechtsideale von S.*

Beweis:

a) Sei R ein minimales Rechtsideal und $s \in R$. Dann ist $sR \subset R$ ein Rechtsideal und aufgrund der Minimalität von R ist also $R = sR$. Wenn $R = sR$ gilt, dann ist $sS \subset R = sR \subset sS$, also $R = sS$. Gelte nun $sS = R$ für alle $s \in R$ und sei $R' \subset R$ ein Rechtsideal. Dann ist nach Definition R' nicht leer, also existiert ein $s \in R'$. Nun gilt $R = sS \subset R'$ und damit $R = R'$. Also ist R minimal.

b) Sind R, R' zwei Rechtsideale mit nichtleerem Durchschnitt, so ist $R \cap R'$ wieder ein Rechtsideal. Sind nun beide minimal, so folgt $R = R \cap R' = R'$.

c) Für jedes $t \in S$ ist tR ein Rechtsideal. Es ist sogar minimal. Ist nämlich ein Rechtsideal $R' \subset tR$ gegeben, so gilt $\emptyset \neq t^- R' \cap R \subset R$, also aufgrund der Minimalität von R auch $R \subset t^- R'$, d.h $tR \subset R'$; insgesamt ist somit $R' = tR$. Ist nun R' irgendein minimales Rechtsideal und $t \in R'$, so gilt $tR \subset R'R \subset R'$, also $R' = tR$. Das war zu zeigen. □

Im nächsten Satz bringen wir minimale Rechtsideale und das minimale Ideal in Verbindung.

2.6 Satz

Besitzt die Halbgruppe S ein minimales Rechtsideal, so enthält jedes Rechtsideal ein minimales und es gilt

$$\emptyset \neq K(S) = \bigcup \{R \mid R \text{ minimales Rechtsideal von } S\}.$$

Beweis: Sei zunächst R ein minimales Rechtsideal und R' ein weiteres Rechtsideal. Für $t \in R'$ gilt dann $tR \subset R'$ und die Behauptung folgt aus Teil c) des obenstehenden Satzes.

Zum Beweis der zweiten Behauptung setzen wir

$$K := \bigcup \{R \mid R \,\text{minimales Rechtsideal}\}.$$

Nach Voraussetzung ist K nicht leer und darum trivialerweise ein Rechtsideal. Es ist aber auch ein Linksideal, denn für $t \in S$ gilt wiederum mit Satz 2.5 $tK = \bigcup \{tR \mid R \,\text{min. Rechtsideal}\} \subset K$. Somit ist K ein Ideal, und es gilt $K(S) \subset K$.

Für ein beliebiges Ideal I und ein minimales Rechtsideal R gilt $\emptyset \neq RI \subset R \cap I$; daher ist $R \cap I$ ein Rechtsideal, und wegen der Minimalität von R folgt $R \subset I$. Somit liegt K in I, und deswegen gilt schließlich $K \subset K(S)$. □

2.2 Minimale Idempotente

Wir kommen nun zu dem für uns zentralen Begriff des minimalen Idempotentes.

2.7 Lemma (und Definition)

a) *Für ein Idempotent $e \in E(S)$ sind die Aussagen*

(i) *e liegt in einem minimalen Linksideal.*

(ii) *Se ist ein minimales Linksideal.*

(iii) *e liegt in einem minimalen Rechtsideal.*
(iv) *eS ist ein minimales Rechtsideal.*
(v) *eSe ist eine Gruppe.*

gleichwertig. In diesem Fall heißt e minimales Idempotent.

b) *Durch*

$$e \leq f \quad :\Longleftrightarrow \quad ef = fe = e$$

ist eine partielle Ordnung auf $E(S)$ gegeben. Jedes minimale Idempotent ist $\leq$-minimal.

Beweis:

a) Wegen $e \in eS$, $e \in Se$ und Satz 2.5 sind die Äquivalenzen $(i) \Leftrightarrow (ii)$ und $(iii) \Leftrightarrow (iv)$ klar. Aufgrund der Symmetrie der Formulierung ist dann nur noch die Äquivalenz $(iv) \Leftrightarrow (v)$ zu zeigen. Für die Implikation $(iv) \Rightarrow (v)$ bemerken wir zuerst, daß $(eSe)(eSe) \subset eSe$ und damit eSe eine Unterhalbgruppe von S mit Neutralelement e ist. Sei nun $ete \in eSe \subset eS$; wir zeigen, daß ete ein Rechtsinverses in eSe besitzt. Da eS ein minimales Rechtsideal ist, gilt mit Satz 2.5 $eteS = eS$, also existiert $s \in S$ mit $etes = e$. Dann ist $(ete)(ese) = ee = e$, also ese rechtsinvers zu ete. Wenn jedes Element ein Rechtsinverses hat, so ist dieses auch ein Linksinverses, wie man leicht bestätigt. Also ist eSe eine Gruppe.
Zum Beweis der Implikation $(v) \Rightarrow (iv)$ sei $es \in eS$. Dann existiert ein $t \in S$ mit $(ese)(ete) = e$, und damit gilt $(es)(eS) \subset eS$, d.h. $eS = (es)(eS)$. Aus Satz 2.5 folgt nun, daß eS ein minimales Rechtsideal ist.

b) Seien e, f, g Idempotente in S. Aus $ee = e$ folgt $e \leq e$, also die Reflexivität. Ist $e \leq f$ und $f \leq e$, so gilt nach Definition $e = ef$ und $f = ef$, also $e = f$; das ist die Antisymmetrie. Für die Transitivität nehmen wir $e \leq f \leq g$ an. Dann gelten $eg = efg = ef = e$ und $ge = gfe = fe = e$, insgesamt also $e \leq g$. Das beweist, daß $\leq$ eine partielle Ordnung auf $E(S)$ ist.
Sei nun e ein minimales Idempotent und $f \in E(S)$ mit $f \leq e$. Nach Definition in a) ist $R := eS$ ein minimales Rechtsideal, und es gilt $f = ef \in R$. Nach Satz 2.5 ist also $fR = R$. Deswegen gibt es ein $r \in R$ mit $fr = e$. Daraus folgt schließlich $f = fe = ffr = fr = e$. $\square$

Im allgemeinen ist nicht jedes $\leq$–minimale Idempotent auch schon ein minimales Idempotent. In den kompakten linkstopologischen Halbgruppen, wie wir sie im nächsten Kapitel einführen werden, ist dies aber der Fall (vgl. Satz 2.13).

2.8 Satz (Ruppert)
In der Halbgruppe S gibt es genau dann ein minimales Idempotent, wenn S sowohl minimale Rechts- als auch minimale Linksideale besitzt. In diesem Falle gelten

a) *Jedes Rechts- bzw. Linksideal enthält ein minimales Idempotent.*
b) $\emptyset \neq K(S) = \bigcup\{R \mid R \text{ min. Rechtsideal}\} = \bigcup\{L \mid L \text{ min. Linksideal}\}$.
c) *Die Menge der minimalen Idempotente ist $E(S) \cap K(S)$.*
d) $\{eS \mid e \in E(S) \cap K(S)\}$ *ist die Menge der minimalen Rechtsideale, und* $\{Se \mid e \in E(S) \cap K(S)\}$ *ist die Menge der minimalen Linksideale.*

Beweis: Hat S ein minimales Idempotent, dann nach Satz 2.7 auch ein minimales Rechts- bzw. Linksideal. Ist umgekehrt R ein minimales Rechts- und L ein minimales Linksideal, dann wähle ein $s \in RL \subset R \cap L$. Nach Satz 2.5 ist $sR = R$, also $sRL = RL$. Somit existiert ein $e \in RL$ mit $se = s$. Nun ist L ein minimales Linksideal, und da Satz 2.5 für Linksideale natürlich ganz analog gilt, folgt $Ls = L$, d.h. $RLs = RL$. Daher gibt es ein $t \in RL$ mit $ts = e$. Dann gilt $ee = tse = ts = e$, d.h. e ist ein Idempotent. Wegen $e \in R$ folgt wieder mit Satz 2.5 $eS = R$ und nach Lemma 2.7 ist also e ein minimales Idempotent.

a) Sei I ein Rechtsideal. Nach Satz 2.6 enthält I ein minimales Rechtsideal R. Da es in S auch ein minimales Linksideal L gibt, findet sich wie eben auch ein minimales Idempotent in R.
b) folgt direkt aus Satz 2.6, wenn man noch das analoge Ergebnis für Linksideale hinzunimmt.
c) Für ein minimales Idempotent e ist eS ein minimales Rechtsideal, also mit b) auch $eS \subset K(S)$; das bedeutet $e \in K(S) \cap E(S)$.
Ist umgekehrt $e \in E(S) \cap K(S)$, so liegt e nach b) in einem minimalen Rechtsideal, ist also selbst minimal.
d) Nach c) ist jedes eS für $e \in E(S) \cap K(S)$ ein minimales Rechtsideal. Sei R ein minimales Rechtsideal. Nach a) enthält R dann ein minimales Idempotent e. Nach c) ist $e \in E(S) \cap K(S)$, und nach Satz 2.5 gilt $R = eS$. $\square$

An dieser Stelle bietet es sich an, ein Ergebnis festzuhalten, daß zwar im weiteren Verlauf unserer Untersuchungen keine Rolle spielt, generell aber von einiger Bedeutung ist.

2.9 SATZ
Falls eine kommutative Halbgruppe ein minimales Ideal besitzt, so ist dieses Ideal eine Gruppe.

Beweis: Sei S eine kommutative Halbgruppe. Dann ist $K(S)$ sowohl das einzige minimale Rechts-, als auch das einzige minimale Linksideal. Nach dem eben bewiesenen Satz enthält S ein minimales Idempotent e. Nach Lemma 2.7 ist eSe eine Gruppe, und es reicht also, $K(S) = eSe$ zu zeigen. Wegen $SeSe = eSSe \subset eSe$ ist eSe ein Ideal in S, woraus $K(S) \subset eSe$ folgt. Nun ist aber wieder mit dem eben bewiesenen Satz auch $e \in K(S)$ und somit $eSe \subset K(S)$. Damit ist alles bewiesen. □

2.3 Topologie

Damit ist der rein algebraische Teil dieses Kapitels beendet. Von nun ab wird zusätzlich zur Halbgruppenstruktur noch eine Topologie gegeben sein, die natürlich mit der Halbgruppenmultiplikation zusammenhängt.

2.10 DEFINITION Eine Halbgruppe S versehen mit einer Topologie heißt *linkstopologisch*, falls alle Linkstranslationen λ_t, $t \in S$ stetig sind.

2.11 BEMERKUNGEN 1) Sind alle Rechtstranslationen stetig, so heißt die Halbgruppe *rechtstopologisch*. Ist S sowohl links- als auch rechtstopologisch, so heißt S *semitopologische* Halbgruppe. Ist die Halbgruppenmultiplikation als Abbildung von $S \times S$ nach S stetig (d.h. die Multiplikation simultan stetig), so heißt S eine *topologische* Halbgruppe.
Diese Begriffe sind nur der Vollständigkeit halber aufgeführt und betreffen uns nicht weiter.

2) Unterhalbgruppen linkstopologischer Halbgruppen sind in der induzierten Topologie wieder linkstopologisch. Entsprechendes gilt für rechtstopologische und topologische Halbgruppen.

3) Ist $(S_i)_{i \in I}$ eine Familie linkstopologischer Halbgruppen, so ist das direkte Produkt dieser Halbgruppen mit der Produkttopologie wieder linkstopologisch. Entsprechendes gilt für rechtstopologische und topologische Halbgruppen.

4) Ist S linkstoplogisch, so setzt man $\Lambda(S) := \{t \,|\, t \in S,\, \rho_t \text{ stetig}\}$. Dann ist $\Lambda(S)$ eine semitopologische Unterhalbgruppe von S.

Wir haben den Begriff der linkstopologischen Halbgruppe in erster Linie zur Behandlung der Stone–Čech–Kompaktifizierung einer diskreten Halbgruppe eingeführt, wie wir sie im nächsten Kapitel kennenlernen werden. Darum geben wir hier keine Beispiele und verweisen diesbezüglich auf [16], S.27 f..

2.12 Lemma
Für eine linkstopologische Halbgruppe S und Mengen $A, B \subset S$, $C \subset \Lambda(S)$ gilt

$$A\overline{B} \subset \overline{AB}, \quad \overline{B}C \subset \overline{BC}, \quad \overline{B}\,\overline{C} \subset \overline{BC}.$$

Weiter gelten:

a) *Ist L ein Linksideal von S, so ist auch $\overline{L}$ ein Linksideal von S.*
b) *Ist R ein Rechtsideal von S und ist $\Lambda(S)$ dicht in S, so ist auch $\overline{R}$ ein Rechtsideal in S.*
c) *Ist T eine Unterhalbgruppe und ist $T \subset \Lambda(S)$, so ist auch $\overline{T}$ eine Unterhalbgruppe.*
d) *Ist $T \subset \Lambda(S)$ eine dichte Unterhalbgruppe und I ein Rechts-, Links-, zweiseitiges Ideal von T, so ist $\overline{I}$ ein Rechts-, Links-, zweiseitiges Ideal von S.*

Beweis: Wie angegeben seien $A, B \subset S$, $C \subset \Lambda(S)$. Dann gilt $A\overline{B} = \bigcup_{a \in A} \lambda_a(\overline{B}) \subset \bigcup_{a \in A} \overline{\lambda_a(B)} \subset \overline{\bigcup_{a \in A} \lambda_a(B)} = \overline{AB}$, weil alle λ_a stetig sind. Ebenso gilt $\overline{B}C = \bigcup_{c \in C} \rho_c(\overline{B}) \subset \ldots \subset \overline{BC}$, weil alle ρ_c $(c \in C)$ stetig sind. Aus diesen beiden Resultaten folgt nun $\overline{B}\,\overline{C} \subset \overline{\overline{B}C} \subset \overline{\overline{BC}} \subset \overline{BC}$. Die übrigen Behauptungen ergeben sich wie folgt:

a) $S\overline{L} \subset \overline{SL} \subset \overline{L}$.
b) $\overline{R}S = \overline{R}\,\overline{\Lambda(S)} \subset \overline{R\Lambda(S)} \subset \overline{R}$.
c) $\overline{T}\,\overline{T} \subset \overline{TT} \subset \overline{T}$.
d) Ist I Rechtsideal von T, so gilt $\overline{I}S = \overline{I}\,\overline{T} \subset \overline{IT} \subset \overline{I}$. Ist I Linksideal von T, so gilt $S\overline{I} = \overline{T}\,\overline{I} \subset \overline{TI} \subset \overline{I}$. □

Der nächste Satz schließt dieses Kapitel ab und bildet zugleich sein Hauptergebnis. Der erste Teil ist als 'Satz von Ellis' bekannt.

2.13 Satz (Ellis)
Jede kompakte linkstopologische Halbgruppe enthält ein minimales Idempotent. Weiter gelten:

a) *Alle minimalen Rechtsideale sind abgeschlossen.*

b) *Ein Idempotent ist genau dann minimal, wenn es $\leq$-minimal ist (vgl. Lemma 2.7).*

c) *Zu jedem Idempotent $f \in E(S)$ gibt es ein minimales Idempotent e mit $e \leq f$.*

Beweis:

1) Für jedes Rechtsideal R von S und $s \in R$ ist $sS \subset R$ und $sS = \lambda_s(S)$ kompakt, also abgeschlossen in S. Es enthält damit jedes Rechtsideal ein abgeschlossenes Rechtsideal; insbesondere sind alle minimalen Rechtsideale abgeschlossen.
Mit Zorns Lemma gibt es minimale Rechtsideale, da die Menge der abgeschlossenen Rechtsideale nicht leer und aufgrund der Kompaktheit von S auch induktiv geordnet ist.

2) Sei also R ein minimales Rechtsideal und $\mathcal{M}$ die Menge der abgeschlossenen Unterhalbgruppen von R. Dann ist $\mathcal{M}$ nicht leer wegen $R \in \mathcal{M}$ und induktiv geordnet wiederum aufgrund der Kompaktheit von S. Mit einer erneuten Anwendung von Zorns Lemma erhält man ein minimales Element $T \in \mathcal{M}$. Sei nun $e \in T$. Dann ist $eT = \lambda_e(T)$ abgeschlossen und wegen $(eT)(eT) \subset eTTT \subset eT$ eine Unterhalbgruppe mit $eT \subset T$. Aufgrund der Minimalität von T gilt daher $eT = T$.
Es gibt also ein $t \in T$ mit $et = e$, d.h. es ist $Q := T \cap \lambda_e^{\leftarrow}\{e\} \neq \emptyset$. Aber $\lambda_e^{\leftarrow}\{e\}$ ist eine abgeschlossene Unterhalbgruppe (!) und somit ist auch Q eine. Wegen $Q \subset T$ und der Minimalität von T ist dann aber $Q = T$, d.h. $T \subset \lambda_e^{\leftarrow}\{e\}$. Wegen $e \in T$ gilt $ee = e$, also ist e ein Idempotent; e ist sogar minimales Idempotent, weil es in dem minimalen Rechtsideal R liegt.

3) Nun ergeben sich die Beweise der restlichen Behauptungen folgendermaßen. Teil a) wurde oben unter 1) schon bewiesen. Die eine Richtung von Teil b) wurde in Lemma 2.7,Teil b) gezeigt. Die Umkehrung ergibt sich aus Teil c). Es bleibt daher nur die Behauptung c) zu zeigen. Sei dazu $f \in E(S)$ ein Idempotent. Dann ist fS ein Rechtsideal, das nach Satz 2.8 ein minimales Idempotent g enthält. Es gilt $fg = g$ ($g = fs$ für ein $s \in S$, also $fg = ffs = fs$). Setzt man nun $e := gf$, so ist e wegen $ee = gfgf = ggf = gf = e$ und $e \in gS$ ein minimales Idempotent. Mit $ef = gff = gf = e$ und $fe = fgf = gf = e$ gilt darüber hinaus $e \leq f$, und das war zu zeigen. $\square$

Bemerkungen

Die in diesem Kapitel zusammengestellte algebraische und topologische Halbgruppentheorie ist fast ausschließlich der umfassenden Monographie [16] *Analysis on Semigroups* von J. Berglund, H. Junghenn und P. Milnes entnommen, wo sich auch viele Beispiele finden. Lediglich Teil c) von Satz 2.13 stammt aus dem Artikel von A. Blass [17]. Obwohl im genannten Buch von Berglund et al. eine ausführliche Bibliographie zum Thema angegeben ist, sollen einige wichtige Referenzen auch hier zur Sprache kommen.
Am Anfang des intensiveren Studiums *semitopologischer* Halbgruppen stand S. Bochners funktionalanalytische Charakterisierung fast-periodischer Funktionen [18, 19]. K. Jacobs verallgemeinerte diesen Begriff auf Darstellungen von Halbgruppen als beschränkte lineare Operatoren auf einem Banachraum [62]. Die 1961 veröffentlichten Arbeiten [26, 27] von K. de Leeuw und I. Glicksberg zu diesem Thema weisen bereits eine abstrakte Behandlung semitopologischer Halbgruppen auf. In den folgenden Jahren wurde die Theorie durch J. Berglund und K.H. Hofmann [14] ausgebaut. Die Monographie von W. Ruppert [73] aus dem Jahre 1984 gibt einen detaillierten Überblick.
Schon bald sah man sich genötigt, die Stetigkeitsanforderungen an die Halbgruppenoperation weiter abzuschwächen und *rechtstopologische* Halbgruppen zu studieren. Die Artikel von R. Ellis [30] und W. Ruppert [72] (in welchem unsere Sätze 2.8 und 2.13 als Satz 2 zu finden sind) sowie die Lecture Notes von J. Berglund, H. Junghenn und P. Milnes [15] zeugen davon.
Belebt wurden diese Bemühungen durch das zentrale Resultat von R. Ellis (Satz 2.13 oben) über die Existenz von Idempotenten. Zwar schreibt N. Hindman in [47] das Theorem dem Japaner K. Numakura [66] zu, doch beweist dieser die Existenz des Idempotents in kompakten *topologischen* Halbgruppen und kann darum nicht die Urheberschaft des Satzes von Ellis beanspruchen. Dies bemerken V. Bergelson und N. Hindman in [8]. Es bleibt also Ellis' Artikel [30] die früheste Referenz. Gut lesbar ist das Resultat in [31], p.12, Corollary 2.10 dargestellt.

Kapitel 3

Die Stone–Čech–Kompaktifizierung einer diskreten Halbgruppe

3.1 Eine Halbgruppenstruktur auf βS

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der beiden vorangehenden miteinander verbunden. Ausgehend von einer Halbgruppe S — aufgefaßt als ein diskreter topologischer Raum — wird auf βS eine Verknüpfung definiert, die mit der Einbettung von S in βS verträglich ist und βS zu einer kompakten linkstopologischen Halbgruppe macht. Anschließend werden die Menge $\beta S \setminus S$, das minimale Ideal $M(\beta S)$ und dessen Abschluß untersucht.

Im folgenden sei $(S, \cdot)$ eine Halbgruppe versehen mit der diskreten Topologie und kanonisch eingebettet in ihre Stone–Čech–Kompaktifizierung. Für Elemente $p, q \in \beta S$ sei

$$pq = p \cdot q := q\text{-}\lim_t (pt) = q\text{-}\lim_t (p\text{-}\lim_s (st)). \qquad (*)$$

Ausführlich heißt das: für festes $t \in S$ wird in die Funktion $\rho_t : S \longrightarrow \beta S$ der Punkt p eingesetzt; dies ergibt eine neue Abbildung von S in βS mit Parameter t, welche dann im Punkt q ausgewertet wird.

Wir geben Beschreibungen dieser Verknüpfung auf βS in den verschiedenen Interpretationen der Punkte der Stone–Čech–Kompaktifizierung.

3.1 Satz

a) *Ist $f : S \longrightarrow K$ eine Abbildung von S in einen kompakten Raum K, so gilt*

$$f(pq) = pq\text{-}\lim f = q\text{-}\lim_t p\text{-}\lim_s f(st) \qquad \forall p, q \in \beta S.$$

b) *Für alle Mengen $A \subset S$ gilt genau dann $A \in pq$, wenn $\{t \mid At^- \in p\} \in q$ ist.*

Beweis: Zum Beweis der ersten Behauptung beachte man, daß uniforme Häufungen mit stetigen Abbildungen vertauschen; also gilt

$$f(pq) = f(q\text{-}\lim_t (p\text{-}\lim_s st)) = q\text{-}\lim_t (f(p\text{-}\lim_s st)) = q\text{-}\lim_t p\text{-}\lim_s f(st).$$

Die Behauptung b) ergibt sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
A \in pq \quad &\Leftrightarrow \quad pq \in \overline{A} \qquad \text{(mit Satz 1.9)}\\
&\Leftrightarrow \quad q\text{-}\lim_t (pt) \in \overline{A}\\
&\Leftrightarrow \quad pt \in \overline{A} \text{ für } q\text{-fast alle } t \qquad \text{(mit den Sätzen 1.9 und 1.10)}\\
&\Leftrightarrow \quad [st \in A \text{ für } p\text{-fast alle } s] \text{ für } q\text{-fast alle } t \qquad \text{(mit Korollar 1.11)}\\
&\Leftrightarrow \quad [s \in At^- \text{ für } p\text{-fast alle } s] \text{ für } q\text{-fast alle } t\\
&\Leftrightarrow \quad At^- \in p \text{ für } q\text{-fast alle } t\\
&\Leftrightarrow \quad \{t \mid At^- \in p\} \in q. \ \square
\end{aligned}$$

3.2 Bemerkung Interpretieren wir die Punkte von βS als multiplikative Funktionale bzw. 0-1-Inhalte, so ergibt sich unmittelbar aus Satz 3.1, Teil a) für $p, q \in \beta S, f \in C_b(S)$:

$$\int f d(pq) = \int f(st)p(ds)q(dt).$$

Es ist also $pq = p * q$ die Faltung der beiden Funktionale p und q.
Ebenso unmittelbar ersieht man aus Satz 3.1, Teil b), daß für jede Eigenschaft $\mathcal{E}$ von Elementen aus S und $p, q \in \beta S$ gilt:

$$\mathcal{E}(x) \text{ für } pq\text{-fast alle } x \quad \Leftrightarrow \quad [\mathcal{E}(st) \text{ für } p\text{-fast alle } s] \text{ für } q\text{-fast alle } t.$$

Der nächste Satz ist von fundamentaler Bedeutung für alles weitere.

3.3 Satz

Mit der durch $(*)$ gegebenen Verknüpfung ist βS eine kompakte linkstopologische Halbgruppe, die S als Unterhalbgruppe besitzt. Desweiteren gelten:

a) *Für jedes $s \in S$ ist $\rho_s : \beta S \longrightarrow \beta S$ stetig, das heißt es ist $S \subset \Lambda(\beta S)$.*
b) *Ist $1 \in S$ ein Neutralelement von S, so auch von βS.*
c) *Ist S kommutativ, so vertauscht jedes $s \in S$ mit jedem $p \in \beta S$.*
d) *Ist T ein kompakte linkstopologische Halbgruppe und $f : S \longrightarrow T$ ein Homomorphismus mit $f(S) \subset \Lambda(T)$, so ist die kanonische Fortsetzung von f auf βS ebenfalls ein Homomorphismus.*

Beweis: Zum Beweis der ersten Behauptung sei zunächst $p \in \beta S$. Die Abbildung $\lambda_p = (q \longmapsto pq)$ ist stetig, denn $pq = q\text{-}\lim_t (pt)$ ist die Auswertung der stetigen Fortsetzung von $(t \longmapsto pt)$ in q. Sind nun $p, q, r \in \beta S$ gegeben, so gilt mit Teil a) von Satz 3.1

$$\begin{aligned} (pq)r &= r\text{-}\lim_t pq\text{-}\lim_s (st) = r\text{-}\lim_t q\text{-}\lim_b p\text{-}\lim_a (ab)t = \\ &= r\text{-}\lim_t q\text{-}\lim_b p\text{-}\lim_a a(bt) = r\text{-}\lim_t q\text{-}\lim_b p(bt) = \\ &= r\text{-}\lim_t q\text{-}\lim_b \lambda_p(bt) = \lambda_p(r\text{-}\lim_t q\text{-}\lim_b (bt)) = \\ &= \lambda_p(qr) = p(qr), \end{aligned}$$

womit die Multiplikation als assoziativ erkannt ist. Damit ist βS eine kompakte linkstopologische Halbgruppe. Darüberhinaus sieht man leicht, daß auf S die durch $(*)$ gegebene Multiplikation mit der ursprünglichen übereinstimmt, wodurch S zu einer Unterhalbgruppe von βS wird.

Wir wenden uns nun den restlichen Behauptungen zu: Die Rechtstranslationen ρ_t sind für $t \in S$ stetig, denn $pt = p\text{-}\lim_s st$ ist die Auswertung der stetigen Fortsetzung der Abbildung $(s \longmapsto st)$ in p. Ist 1 ein Neutralelement von S, so gilt für $p \in \beta S$:

$$p1 = p\text{-}\lim_s s1 = p\text{-}\lim_s s = p = p\text{-}\lim_s s = p\text{-}\lim_s 1s = 1p.$$

Somit ist 1 auch ein Neutralelement in βS.

Setzt man S als kommutativ voraus, so gilt für $p \in \beta S, t \in S$:

$$pt = p\text{-}\lim_s st = p\text{-}\lim_s ts = t(p\text{-}\lim_s s) = tp,$$

d.h. jedes $t \in S$ vertauscht mit jedem $p \in \beta S$.

Sind schließlich T und f wie in d) gegeben, so gilt für $p, q \in \beta S$:

$$\begin{aligned} f(pq) &= q\text{-}\lim_t p\text{-}\lim_s f(st) = q\text{-}\lim_t p\text{-}\lim_s f(s)f(t) = \\ &= q\text{-}\lim_t [p\text{-}\lim_s f(s)] f(t) = q\text{-}\lim_t f(p)f(t) = \\ &= f(p)[q\text{-}\lim_t f(t)] = f(p)f(q). \end{aligned}$$

Dabei muß man Satz 3.1 beachten und die Voraussetzung, daß T linkstopologisch mit $f(S) \subset \Lambda(T)$ ist. □

Die Asymmetrie, nur links- und nicht auch rechtstopologisch zu sein, welche der Multiplikation auf βS anhaftet, ist nicht vermeidbar. Wenn es überhaupt eine linkstopologische Verknüpfung auf βS gibt, die die Multiplikation von S fortsetzt, dann nur die durch $(*)$ definierte. Aus $(*)$ lassen sich aber a priori keine Stetigkeitseigenschaften ableiten, die über die im Satz ausgesprochenen hinausgingen. Tatsächlich ist in der Halbgruppe $(\beta\mathbb{N}, +)$ die Rechtstranslation um $p \in \beta\mathbb{N}$ nicht stetig, wenn p ein nichttrivialer Ultrafilter ist. (Siehe dazu van Douwen [82], Abschnitt 9.)

3.2 Die Menge $\beta S \setminus S$

Wir setzen von nun an voraus, daß die Halbgruppe S unendlich ist, und bezeichnen mit S^* die Menge $\beta S \setminus S$. In diesem Abschnitt werden notwendige und hinreichende Kriterien dafür angegeben, daß S^* ein Rechts- bzw. ein Linksideal in βS ist.

Ein Wort noch zu den Bezeichnungen: ist $A \subset S$ eine Teilmenge der Halbgruppe S, so sei unter A^c stets das Komplement von A in S verstanden, auch wenn wir uns S als in βS eingebettet denken. Ebenso ist für $t \in S$ die Bezeichnung At^- nur auf die Halbgruppe S bezogen, d.h. es gilt $At^- = \{s \mid s \in S, st \in A\}$.

3.4 Satz

Für eine unendliche diskrete Halbgruppe S sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) *S^* ist ein Rechtsideal von βS.*

(ii) *$At^- \in [S]^{<\omega}$ für alle $A \in [S]^{<\omega}$ und alle $t \in S$.*

(iii) *$\{t \mid ty = x\}$ ist endlich für alle $x, y \in S$.*

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (iii): Gibt es $x, y \in S$, für die $\{t \mid ty = x\}$ nicht endlich ist, so ist nach Bemerkung 1.7 $\{t \mid ty = x\} \in p$ für ein $p \in S^*$. Mit Satz 3.1 ergibt sich $\{x\} \in py \in S^*$, was nicht sein kann.

$(iii) \Rightarrow (ii)$: Für $A \in [S]^{<\omega}, t \in S$ ist $At^- = \{s \mid st \in A\} = \bigcup_{a \in A}\{s \mid st = a\}$ endlich nach Voraussetzung.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Sei $p \in S^*, q \in \beta S$ und $A \in pq$. Dann ist nach Satz 3.1 $\{t \mid At^- \in p\} \in q$. Somit gibt es ein $t \in S$ mit $At^- \in p$. Wegen $p \in S^*$ ist At^- unendlich, also nach Voraussetzung auch A. Es folgt $pq \in S^*$. □

3.5 Satz

Für eine unendliche diskrete Halbgruppe S sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) S^* *ist ein Linksideal in* βS.

(ii) *Ist* $A \in [S]^{<\omega}$ *eine endliche und* $B \in [S]^{\geq\omega}$ *eine unendliche Teilmenge von* S*, dann existiert* $F \in [B]^{<\omega}$ *mit* $\bigcap_{x \in F} Ax^- = \emptyset$.

(iii) $\{x \mid Ax^- \in p\}$ *ist endlich für alle* $p \in \beta S$, $A \in [S]^{<\omega}$.

Beweis: $(i) \Rightarrow (iii)$: Ist $p \in \beta S, A \in [S]^{<\omega}$, so daß $\{x \mid Ax^- \in p\}$ unendlich ist, dann gibt es nach Bemerkung 1.7 ein $q \in S^*$ mit $\{x \mid Ax^- \in p\} \in q$. Damit ist $A \in pq$ nach Satz 3.1. Aufgrund der Voraussetzung (i) gilt nun $pq \in S^*$, was zur Folge hat, daß A unendlich ist. Dies steht aber im Widerspruch zu $A \in [S]^{<\omega}$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$: Wir nehmen an, die Behauptung sei falsch. Dann gibt es $A \in [S]^{<\omega}$ und $B \in [S]^{\geq\omega}$, so daß $\bigcap_{x \in F} Ax^- \neq \emptyset$ für alle $F \in [B]^{<\omega}$. Dies bedeutet, daß das System $\{Ax^- \mid x \in B\}$ die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt. Es findet sich also ein $p \in \beta S$ mit $Ax^- \in p$ für alle $x \in B$. Damit ist dann $B \subset \{x \mid Ax^- \in p\}$ unendlich, im Widerspruch zu (iii).

$(ii) \Rightarrow (i)$: Es seien $p \in \beta S, q \in S^*$ gegeben, und zu zeigen ist $pq \in S^*$. Angenommen, es gäbe eine endliche Menge $A \in pq$. Dann ist $B := \{x \mid Ax^- \in p\} \in q$, also wegen $q \in S^*$ eine unendliche Menge. Nach (ii) existiert nun eine endliche Menge $F \subset B$, so daß $\bigcap_{x \in F} Ax^- = \emptyset$ ist. Wegen $Ax^- \in p$ für alle $x \in F$ ist das aber unmöglich. □

In einer Halbgruppe S heißt ein Element $a \in S$ *rechts kürzbar*, falls die Rechtstranslation um a injektiv ist. Mit anderen Worten ist a rechts kürzbar, wenn für beliebige Elemente $x, y \in S$ aus $xa = ya$ immer $x = y$ folgt. Entsprechend heißt $a \in S$ *links kürzbar*, falls die Linkstranslation um a injektiv ist. Eine Halbgruppe, in der jedes Element rechts (links) kürzbar ist, heißt selbst rechts (links) kürzbar. Jede Unterhalbgruppe einer Gruppe ist sowohl links, als auch rechts kürzbar. Insbesondere sind die Halbgruppen $(\mathbb{N}, +)$ und $(\mathbb{N}, \cdot)$ rechts und links kürzbar.

3.6 Satz
Ist die unendliche diskrete Halbgruppe S rechts (links) kürzbar, so ist S^* ein Rechtsideal (Linksideal) in βS.

Beweis: Der Fall, daß S rechts kürzbar ist, ist schnell behandelt. Sind nämlich $x, y \in S$ beliebig, so ist nach Voraussetzung y rechts kürzbar, also $\{t \mid ty = x\}$ einelementig. Mit Satz 3.4(iii) folgt sofort, daß S^* ein Rechtsideal von βS ist.
Wir nehmen nun an, die Halbgruppe S sei links kürzbar. Mit Blick auf Satz 3.5(iii) seien $p \in \beta S$ und eine endliche Teilmenge $A \subset S$ gegeben. Ohne Einschränkung kann A als nichtleer vorausgesetzt werden. Für jedes $x \in S$ ist genau dann $Ax^- \in p$, wenn es ein $a \in A$ gibt mit $\{t \mid tx = a\} \in p$, denn es gilt $Ax^- = \bigcup_{a \in A}\{t \mid tx = a\}$.
Wenn nun $\{x \mid Ax^- \in p\}$ unendlich ist, so gibt es nach dem Schubfachprinzip ein $a \in A$ sowie zwei *verschiedene* Elemente $x, y \in S$ mit $\{t \mid tx = a\}, \{t \mid ty = a\} \in p$. Der Durchschnitt dieser beiden Mengen kann nicht leer sein, d.h. es gibt ein $t \in S$ mit $tx = a$ und $ty = a$. Weil aber nach Voraussetzung t links kürzbar ist, folgt $x = y$. Also war die Annahme falsch, d.h. die Menge $\{x \mid Ax^- \in p\}$ ist endlich. □

3.7 Korollar
Die Menge $\mathbb{N}^*$ ist ein Ideal in $(\beta\mathbb{N}, +)$ und in $(\beta\mathbb{N}, \cdot)$.

Man kann auf ähnliche Weise wie in Satz 3.4 und Satz 3.5 eine Charakterisierung dafür angeben, daß S^* eine Unterhalbgruppe von βS ist (siehe dazu van Douwen [82], Theorem 3.5 und Hindman [53], Theorem 2.5). Dies ist aber für uns von untergeordnetem Interesse.

3.3 Das minimale Ideal von βS

Wie wir aus Kapitel 2 wissen, ist das minimale Ideal einer kompakten linkstopologischen Halbgruppe die Vereinigung der minimalen Rechtsideale. In einem sehr technischen Satz werden wir eine Charakterisierung derjenigen Punkte p von βS geben, die minimale Rechtsideale erzeugen (d.i. so daß $p\beta S$ ein minimales Rechtsideal ist). Dazu benötigen wir eine hilfreiche Abkürzung.

Für $p \in \beta S$ setze

$$(p) := p\beta S \quad \text{und} \quad C(p) := \{A \mid A \subset S \,\text{und}\, Ax^- \in p \,\text{für alle}\, x \in S\}.$$

Wie man leicht nachprüft ist $C(p)$ ein Filter. Wenn S kein Neutralelement besitzt, muß p nicht unbedingt in (p) liegen. Dieser Umstand ist der Grund dafür, daß die nachfolgenden Überlegungen technisch etwas aufwendig sind.

3.8 LEMMA

Für $p, q \in \beta S, A \subset S$ gelten folgende Aussagen:

a) $(p) \subset \overline{A} \quad \Leftrightarrow \quad A \in C(p)$.

b) $(p) \cap \overline{A} \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad Ax^- \in p$ *für ein* $x \in S$.

c) $q \in (p) \quad \Leftrightarrow \quad C(p) \subset q$.

d) $(q) \subset (p) \quad \Leftrightarrow \quad C(p) \subset C(q)$.

Beweis: Die Aussage in (a) ergibt sich folgendermaßen: $A \in C(p)$ ist nach Definition äquivalent zu $As^- \in p$, d.h. $A \in ps$ für jedes $s \in S$. Dies wiederum bedeutet $pS \subset \overline{A}$, und das ist gleichwertig zu $\overline{pS} \subset \overline{A}$. Wegen $(p) = p\overline{S} = \overline{pS}$ ist die Behauptung gezeigt.

Der Beweis von (b) ergibt sich direkt aus (a), wenn man beachtet, daß $\beta S \setminus \overline{A} = \overline{A^c}$ und $A^c x^- = (Ax^-)^c$ ist.

Für den Beweis von (c) geben wir uns zunächst ein $q \in (p)$ und ein $A \in C(p)$ vor. Nach (a) gilt dann $(p) \subset \overline{A}$, also insbesondere $q \in \overline{A}$, d.h. $A \in q$.

Sei nun umgekehrt $C(p) \subset q$ vorausgesetzt. Wenn q nicht in (p) liegt, so gibt es nach Satz 1.9 ein $A \in q$ mit $(p) \subset \beta S \setminus \overline{A}$. Wegen Satz 1.4 ist $\beta S \setminus \overline{A} = \overline{A^c}$, also folgt aus (a), daß $A^c \in C(p)$ ist. Die Voraussetzung liefert nun $A^c \in q$, was im Widerspruch zu $A \in q$ steht.

Es bleibt, die Behauptung (d) zu beweisen. Wenn $(q) \subset (p)$ und $A \in C(p)$ ist, so folgt $(p) \subset \overline{A}$ aus (a) und daraus sofort $(q) \subset \overline{A}$. Eine weitere Anwendung von (a) ergibt $A \in C(q)$. Ist umgekehrt $C(p) \subset C(q)$ und $r \in (q)$, so folgt mit (c), daß $C(q) \subset r$ ist. Wir erhalten $C(p) \subset r$ und schließlich $r \in (p)$ wieder mit (c). □

3.9 SATZ

Für $p \in \beta S$ ist (p) genau dann ein minimales Rechtsideal, wenn gilt:

> *Gibt es zu $A \subset S$ ein $x \in S$ mit $Ax^- \in p$, dann gibt es auch eine endliche Menge $F \in [S]^{<\omega}$ mit $\bigcup_{y \in F} Ay^- \in C(p)$.*

Beweis: Sei (p) ein minimales Rechtsideal, und $A \subset S, x \in S, Ax^- \in p$. Ist dann $q \in (p)$ beliebig, so ergibt sich aus der Minimalität $(q) = (p)$. Wegen $px \in (q) \cap \overline{A}$ ist insbesondere $(q) \cap \overline{A} \neq \emptyset$, so daß sich nach Teil b) von Lemma 3.8 ein $x_q \in S$

findet mit $q \in \overline{Ax_q^-}$. Somit gilt $(p) \subset \bigcup_{s\in S} \overline{As^-}$ und da (p) kompakt ist, gibt es eine endliche Menge $F \in [S]^{<\omega}$ mit $(p) \subset \bigcup_{s\in F} \overline{As^-} = \overline{\bigcup_{s\in F} As^-}$. Mit Teil c) von Lemma 3.8 ist dann $\bigcup_{s\in F} As^- \in C(p)$.

Zum Beweis der Umkehrung sei $q \in (p)$ beliebig. Dann ist $(q) \subset (p)$, also $C(p) \subset C(q) \cap q$ nach Lemma 3.8. Ist $A \subset S$ nicht in $C(p)$, so existiert ein $x \in S$ mit $Ax^- \notin p$. Das bedeutet $A^c x^- \in p$ und nach Voraussetzung gibt es eine endliche Menge $F \in [S]^{<\omega}$ mit $\bigcup_{y\in F} A^c y^- \in C(p)$. Aus $C(p) \subset q$ folgt, daß es ein $y \in F$ gibt mit $A^c y^- \in q$. Das ergibt $Ay^- \notin q$, also ist A auch nicht in $C(q)$. Aus diesen Überlegungen folgt $C(q) = C(p)$, was $(q) = (p)$ wegen Lemma 3.8, Teil d) nach sich zieht. Da $q \in (p)$ beliebig war, ist also (p) ein minimales Rechtsideal. □

3.10 Satz

Der Ultrafilter $p \in \beta S$ liegt genau dann im minimalen Ideal $K(\beta S)$, wenn zu jeder Menge $A \in p$ eine endliche Menge $F \in [S]^{<\omega}$ mit $\bigcup_{y\in F} Ay^- \in C(p)$ existiert.

Beweis: Wenn $p \in K(\beta S)$ ist, so ist nach Satz 2.6 das Rechtsideal (p) minimal und es gilt $p \in (p)$. Für $A \in p$ gilt dann also $(p) \cap \overline{A} \neq \emptyset$ und wegen Teil b) von Lemma 3.8 gibt es ein $x \in S$ mit $Ax^- \in p$. Aus Satz 3.9 folgt nun, daß es eine endliche Menge $F \in [S]^{<\omega}$ gibt mit $\bigcup_{y\in F} Ay^- \in C(p)$.

Die Umkehrung ergibt sich so: aus der Voraussetzung folgt mit Satz 3.9, daß (p) ein minimales Rechtsideal, also insbesondere in $K(\beta S)$ enthalten ist. Wir zeigen $p \in (p)$ indirekt:

Wenn $p \notin (p)$ ist, so findet sich mit Lemma 3.8, Teil c) ein $A \in p$ mit $A^c \in C(p)$. Nach Voraussetzung gibt es eine endliche Menge $F \in [S]^{<\omega}$, so daß $\bigcup_{y\in F} Ay^-$ in $C(p)$ liegt. Wir wählen ein $s \in S$. Dann ist $(\bigcup_{y\in F} Ay^-)s^- \in p$. Somit gibt es ein $y \in F$ mit $A(sy)^- \in p$. Nun folgt aber aus $A^c \in C(p)$, daß auch $A^c(sy)^- \in p$ ist. Der Ultrafilter p enthält also zwei komplementäre Mengen, was unmöglich ist. □

Als nächstes wollen wir zeigen, daß der Abschluß $\overline{K(\beta S)}$ wieder ein Ideal in βS ist. Die Punkte dieser Menge werden dazu über eine kombinatorische Eigenschaft der Elemente dieser Punkte (aufgefaßt als Ultrafilter) charakterisiert.

3.11 Definition Sei A eine Teilmenge der unendlichen Halbgruppe S. Dann heißt A *dick*, falls zu jeder endlichen Teilmenge F von S ein $x \in A$ existiert mit $xF \subset A$.
Die Menge A heißt *syndetisch*, falls es eine endliche Teilmenge F von S gibt, so daß $xF \cap A$ nicht leer ist für jedes $x \in S$.

Man nennt A *stückweise syndetisch*, falls es eine endliche Teilmenge G von S gibt, so daß die Menge $\bigcup_{x\in G} Ax^-$ dick ist.

3.12 BEMERKUNGEN 1) Für die Halbgruppe $(\mathbb{N},+)$ bedeuten diese Begriffe folgendes: die Menge $A \subset \mathbb{N}$ ist genau dann dick, falls A beliebig lange Intervalle von $\mathbb{N}$ enthält. Syndetisch ist A genau dann, wenn es eine Intervallänge $l \in \mathbb{N}$ gibt, so daß A mit jedem Intervall der Länge l einen Punkt gemeinsam hat. Und A ist genau dann stückweise syndetisch, wenn es die sogenannte „bounded gaps property“ besitzt, d.h. falls es eine Schranke $N \in \mathbb{N}$ gibt und A beliebig lange aufsteigende Sequenzen $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ enthält, deren „Sprungweite“ $\max\{x_{i+1} - x_i \,|\, 1 \leq i \leq n-1\}$ höchstens N beträgt.

2) Ist A dick (syndetisch, stückweise syndetisch), so ist auch jede Obermenge von A dick (syndetisch, stückweise syndetisch).

3) Wenn $A \subset S$ dick und $B \subset S$ syndetisch ist, so ist die Menge $A \cap B$ stückweise syndetisch.

[Weil B syndetisch ist, gibt es $F \in [S]^{<\omega}$ mit $xF \cap B \neq \emptyset$ für jedes $x \in S$. Man setze $C := A \cap B$ und $D := \bigcup_{y\in F} Cy^-$. Zu $G \in [S]^{<\omega}$ existiert ein $x \in A$ mit $x(GF \cup F) \subset A$, denn A ist dick. Nach Wahl von F gibt es zu jedem $g \in G$ ein $y_g \in F$ mit $xgy_g \in B$. Auf die gleiche Weise gibt es ein $f \in F$ mit $xf \in B$. Dann ist $xf \in C$, also $x \in D$; analog gilt $xG \subset D$. Da G beliebig war, ist D dick, also C stückweise syndetisch.]

3.13 SATZ

a) *Eine Teilmenge A von S ist genau dann dick, wenn $\overline{A}$ ein minimales Rechtsideal von βS enthält.*

b) *Eine Teilmenge A von S ist genau dann stückweise syndetisch, wenn $\overline{A}$ ein Element des minimalen Ideals $K(\beta S)$ enthält.*

Beweis:

a) Wenn $\overline{A}$ ein minimales Rechtsideal enthält, so gibt es $p \in \beta S$ mit $p \in (p) \subset \overline{A}$. Das bedeutet $A \in C(p) \subset p$. Ist nun $F \in [S]^{<\omega}$, so gilt darum $\bigcap_{y\in F} Ay^- \cap A \in p$. Für $x \in \bigcap_{y\in F} Ay^- \cap A$ gilt dann $x \in A, xF \subset A$. Die Menge A ist also dick. Sei nun für den Beweis der Umkehrung die Menge A als dick vorausgesetzt. Es genügt, ein p mit $A \in C(p)$ zu finden, denn dann gilt $(p) \subset \overline{A}$, und (p) enthält ein minimales Rechtsideal nach dem Satz von Ellis 2.13.
Angenommen, es gelte $A \notin C(p)$ für alle $p \in \beta S$. Dann ist $\bigcap_{s\in S} \overline{As^-} = \emptyset$ und da βS kompakt ist, gilt schon $\bigcap_{y\in F} \overline{Ay^-} = \emptyset$ für eine endliche Menge

$F \in [S]^{<\omega}$. Da A dick ist, gibt es ein $x \in A$ mit $xF \subset A$. Das heißt $x \in \bigcap_{y\in F} Ay^- \subset \bigcap_{y\in F} \overline{Ay^-} = \emptyset$, und die Behauptung folgt.

b) Ist A stückweise syndetisch, dann ist $B := \bigcup_{y\in F} Ay^-$ dick für eine endliche Menge $F \in [S]^{<\omega}$. Wegen a) enthält $\overline{B}$ ein minimales Rechtsideal R. Wir wählen ein $q \in R$. Dann ist $\bigcup_{y\in F} Ay^- \in q$, d.h $A \in qy$ für ein $y \in F$. Wegen $qy \in R \subset K(\beta S)$ gilt also $\overline{A} \cap K(\beta S) \neq \emptyset$.
Gilt umgekehrt $A \in p \subset K(\beta S)$ so folgt aus Satz 3.10, daß es ein $F \in [S]^{<\omega}$ mit $\bigcup_{y\in F} Ay^- \in C(p)$ gibt. Da p im minimalen Ideal liegt, ist (p) ein minimales Rechtsideal. Wegen Lemma 3.8 und a) ist dann $\bigcup_{y\in F} Ay^-$ dick, also A stückweise syndetisch. □

Wir kommen nun zum Hauptergebnis dieses Abschnittes.

3.14 Satz

Für jede unendliche Halbgruppe S ist

$$\overline{K(\beta S)} = \Delta_1(S) := \{p \mid p \in \beta S,\ A \text{ stückweise syndetisch für jedes } A \in p\}$$

ein (zweiseitiges) Ideal von βS.

Beweis:

1) Wir schreiben Δ_1 für $\Delta_1(S)$ und K für $K(\beta S)$. Ist $p \in \overline{K}$ und $A \in p$, so gilt $\overline{A} \cap K \neq \emptyset$, denn $\overline{A}$ ist eine fundamentale Umgebung von p. Nach Teil b) von Satz 3.13 ist dann A stückweise syndetisch. Diese Überlegung zeigt $\overline{K} \subset \Delta_1$. Ist umgekehrt $p \in \Delta_1$, so gilt nach Definition und Satz 3.13 $\overline{A} \cap K \neq \emptyset$ für alle $A \in p$. Dann liegt p aber in $\overline{K}$, denn das System $\{\overline{A} \mid A \in p\}$ ist eine Umgebungsbasis von p.

2) Es bleibt noch übrig zu zeigen, daß Δ_1 ein Ideal ist. Da K ein Ideal ist, ist nach Teil a) von Lemma 2.12 jedenfalls $\Delta_1 = \overline{K}$ ein Linksideal. Sind weiter $p \in \Delta_1, x \in S, A \in px$ gegeben, so gilt $Ax^- \in p$. Wegen $p \in \Delta_1$ ist dann Ax^- stückweise syndetisch, also existiert ein $F \in [S]^{<\omega}$, so daß $\bigcup_{y\in F} Ax^-y^-$ dick ist. Setzt man nun $G := Fx$, so ist $\bigcup_{z\in G} Az^- \supset \bigcup_{y\in F} A(xy)^-$ dick. Somit ist A stückweise syndetisch.
Weil $A \in p$ beliebig war, folgt $ps \in \Delta_1$ für jedes $s \in S$. Dann gilt aber $(p) = p\overline{S} = \overline{pS} \subset \Delta_1$ und schließlich $\Delta_1(\beta S) \subset \Delta_1$, d.h. $\overline{K} = \Delta_1$ ist ein Ideal. □

Die beiden letzten Sätze sind in vielerlei Hinsicht von Bedeutung. Einmal ist es keineswegs selbstverständlich, daß der Abschluß des minimalen Ideals einer kompakten linkstopologischen Halbgruppe wieder ein Ideal ist. (Siehe etwa Berglund et

al. [15], Example V.1.1. oder Hindman [52] für ein Beispiel im Kontext von $\beta\mathbb{N}$.)
Zum zweiten erhalten wir eine doppelte Charakterisierung:

1) Ein Ultrafilter liegt genau dann im Abschluß des minimalen Ideals, wenn alle seine Elemente stückweise syndetisch sind.
2) Eine Menge A ist genau dann stückweise syndetisch, wenn es einen Ultrafilter im minimalen Ideal gibt, der sie enthält.

In beiden Fällen werden algebraisch-topologische Eigenschaften von βS den kombinatorischen Eigenschaften von S gegenübergestellt.

Bemerkungen

Bereits Anfang der sechziger Jahre wurden P. Civin und B. Yood durch ihre Beschäftigung mit den Doppeldualräumen von Banachalgebren in [22] auf die Halbgruppenstruktur der Stone–Čech–Kompaktifizierung einer diskreten Halbgruppe geführt. Ihre Definition der Halbgruppenoperation nutzte Vorarbeiten von R. Arens [1] aus dem Jahre 1951 aus. Bei Ellis [31], S.59 ff. findet sich dann die Einführung der Multiplikation, wie wir sie in Abschnitt 3.1 vorgenommen haben. N. Hindman schreibt in [47], S.147 die in Teil b) von Satz 3.1 angegebene Charakterisierung S. Glazer zu, eine Referenz dazu gibt er aber nicht an. In Ellis [31] wird die Aussage von Satz 3.1, Teil b) als (weitere!) Definition genommen und anschließend die Aussagen unseres Satzes 3.3 bewiesen. Ein Eindeutigkeitsresultat zeigt dann die Übereinstimmung der zwei definierten Operationen.
Die Reihenfolge in der Definition ist zwar, wie schon angemerkt, entscheidend für eine fundamentale Asymmetrie, sie ist jedoch willkürlich. Ebensogut hätten wir βS zu einer kompakten *rechts*topologischen Halbgruppe machen können (was auch in aktuellen Arbeiten häufig getan wird, vgl. Blass [17]).
Die Ergebnisse (und Beweise) des Abschnittes 3.2 sind im wesentlichen den Artikeln [53] von N. Hindman und [82] von E.K. van Douwen entnommen. Letzterer kann als lesenswerte Einführung in die Halbgruppe βS bezeichnet werden. Hindmans Artikel dagegen ist spezieller; um unsere Sätze 3.4,3.5 und 3.6 dort wiederzufinden, muß an jeder Stelle die Kardinalzahl κ durch ω, die kleinste unendliche Kardinalzahl, ersetzt werden.
Die Charakterisierung der minimalen Rechtsideale bzw. des minimalen Ideals von βS in den Sätzen 3.9 und 3.10 stammt ebenfalls aus Hindman [53] (Corollaries 3.3

und 3.6). Dort findet sich Teil a) von Satz 3.13 in den Lemmata 4.2 und 4.4, sowie Satz 3.14 als Theorem 4.5 (man hat $\kappa = 1$ zu setzen!), allerdings ohne Verwendung der Begriffe „syndetisch" und „stückweise syndetisch". Für den Spezialfall $S = \mathbb{N}$ sind diese Ergebnisse schon in Hindman [49] und [50] enthalten. Eine präzise Gegenüberstellung kombinatorischer und algebraisch-topologischer Eigenschaften, wie sie Satz 3.13 gibt, ist mir in der Literatur jedoch nicht bekannt.

Die Begriffe aus Definition 3.11 (für den Fall $S = \mathbb{N}$ in Furstenberg [34], S. 28 und S. 34) stammen aus einer mathematischen Disziplin, die sich *Topologische Dynamik* nennt. Eine kurze Einführung bietet das Kapitel „Flows" in Berglund et al. [16], gründlicher sind Veech [84] und der Klassiker von Ellis [31].
Ein diskreter *Fluß* besteht aus einer stetigen Wirkung einer diskreten Halbgruppe S auf einem kompakten Raum X. Die Wirkung von S auf βS, die durch

$$((p, s) \longmapsto ps) : \beta S \times S \longrightarrow \beta S$$

gegeben ist, definiert einen in gewissem Sinne „universellen" Fluß (vgl. Ellis [31], Chapter 7). Wie Blass [17] im Fall $S = \mathbb{N}$ sehr schön zeigt, lassen sich Eigenschaften eines beliebigen Flusses mit der Transformationshalbgruppe S aus Eigenschaften des Flusses $(\beta S, S)$ und diese wiederum aus algebraischen Eigenschaften der Halbgruppe βS gewinnen.
Weil nun die minimalen Rechtsideale der Halbgruppe βS gerade die sogenannten minimalen Mengen des Flusses $(\beta S, S)$ sind (für die Definition siehe Ellis [31], S. 9), ist Satz 3.9 nur eine Umformulierung von Lemma 1.14 aus Furstenberg [34] oder von Proposition 2.5 aus Ellis [31].

Unsere Überlegungen in den nächsten Kapiteln werden sich in erster Linie mit Sätzen der Ramseytheorie befassen und zeigen, wie fruchtbar sich die Theorie der Stone–Čech–Kompaktifizierung als kompakter, linkstopologischer Halbgrupe in diesem Gebiet einsetzen läßt. Ergebnisse, die die Stone–Čech–Kompaktifizierung einer diskreten Halbgruppe um ihrer selbst willen betreffen, sind nicht unser Ziel. Der interessierte Leser sei diesbezüglich auf Baker, Hindman und Pym [2], Hindman und Lisan [56], Hindman und Pym [57], Hindman und Strauss [58, 59], Maleki und Strauss [65] sowie Strauss [77, 78, 79] hingewiesen.

Kapitel 4

Ramseytheorie

4.1 Der Satz von Ramsey

Wir werden in diesem Kapitel anhand zentraler Theoreme einen Einblick in die Ramseytheorie gewinnen. Dazu wird in den Beweisen die im letzten Kapitel bereitgestellte Theorie der Stone–Čech–Kompaktifizierung diskreter Halbgruppen zur Anwendung gebracht.
In einem ersten Abschnitt wenden wir uns dem Satz von Ramsey zu und beleuchten einen strukturellen Aspekt der Ramseytheorie (das sogenannte Kompaktheitsprinzip). Der Satz von Hindman steht im Zentrum des zweiten Abschnittes: hier können wir zum ersten Mal von der bisher geleisteten Arbeit profitieren. Der dritte Abschnitt präsentiert einen eleganten Beweis des Satzes von van der Waerden und führt in den Gedankenkreis des Hales-Jewett-Theorems ein.

Ähnlich wie die Standardmonographie zum Thema, das Buch von R. Graham, B. Rothschild und J. Spencer [42], werden auch wir keine genaue Antwort auf die Frage geben, was Ramseytheorie denn eigentlich sei. Sie läßt sich nur unter Schwierigkeiten der kombinatorischen Zahlentheorie zuordnen, denn schon der Satz von Ramsey selbst handelt nicht von Zahlen. Der im englischen Sprachraum geläufige Ausdruck „partition theory“ kommt der Sache sehr nahe, denn in den meisten „Ramseyartigen“ Sätzen (vgl. [42], S. 9) geht es um Zerlegungen oder sogenannte „Färbungen“ von Mengen. Im Grunde werden die Sätze der Ramseytheorie durch eine Ähnlichkeit der Fragestellung zusammengehalten, die aber von Fall zu Fall verschieden sein kann: so haben etwa „Dichteversionen“ der klassischen Ramseytheoreme (wie z.B. der Satz

von Szemerédi in [80]) mit Partitionen nichts zu tun.
Um den Leser nicht völlig zu verwirren, möchte ich aber darauf hinweisen, daß alle Ramseysätze, denen wir in dieser Arbeit begegnen, guten Gewissens zur „partition theory“ zu rechnen sind. Im übrigen hege ich die Hoffnung, daß der Leser nach Lektüre dieses Kapitels eine Vorstellung davon hat, was Ramseytheorie ist, auch ohne vorab eine genaue Erklärung dieses Terminus erhalten zu haben.

Der Satz von Ramsey (1930) ist gewissermaßen die Initialzündung der Ramseytheorie, auch wenn manche Resultate, die heute zur Ramseytheorie gerechnet werden, schon früher bekannt waren (etwa die Sätze von Schur (1916) und van der Waerden (1927)).
Um diesen Satz formulieren zu können, benötigen wir einige Begriffe, die wir in der nächsten Definition bereitstellen.

4.1 Definition Für eine Menge X und eine natürliche Zahl k werde mit $[X]^k$ die Menge der k–elementigen Teilmengen von X bezeichnet. Wir schreiben $[n]$ für $\{1,\ldots,n\}$ und einfach $[n]^k$ statt $[[n]]^k$, wenn $k \leq n$ natürliche Zahlen sind.
Jede Funktion $\chi : [X]^k \longrightarrow [r]$ für eine Menge X und natürliche Zahlen k, r heißt *k–Färbung der Vielfalt r* von X. Eine endliche k–Färbung ist eine k–Färbung der Vielfalt r für eine natürliche Zahl $r \in \mathbb{N}$. Eine 1–Färbung heißt auch einfach nur Färbung.
Ist χ eine endliche k–Färbung von X, so heißt die Teilmenge A von X *monochrom* in χ, falls das Bild von $[A]^k$ unter χ einelementig ist.

4.2 Bemerkung Die k–Färbungen von X der Vielfalt r entsprechen den Partitionen der Menge $[X]^k$ in r disjunkte Teilmengen. In diesem Kontext wird dann von *homogenen*, statt von monochromen Teilmengen gesprochen.
Wenn es aus dem Zusammenhang hervorgeht, welche Färbung/Partition gemeint ist, unterlassen wir den expliziten Verweis und sprechen nur von monochromen (bzw. homogenen) Teilmengen.

4.3 Satz

Sei X eine unendliche Menge und k eine natürliche Zahl.

(Ramsey I) *Zu je zwei natürlichen Zahlen $r, l \in \mathbb{N}$ mit $l \geq k$ gibt es eine Schranke $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für jede Zahl n, die größer als n_0 ist, folgende Aussage gilt: In jeder k–Färbung der Vielfalt r einer n-elementigen Teilmenge A von X gibt es eine monochrome Menge der Mächtigkeit l.*

(RAMSEY II) *In jeder endlichen k–Färbung von X gibt es beliebig große endliche monochrome Teilmengen von X.*

(RAMSEY III) *In jeder endlichen k–Färbung von X gibt es eine unendliche monochrome Teilmenge von X.*

4.4 BEMERKUNGEN 1) Man sieht unmittelbar, daß die mittlere Version des Satzes sowohl von der ersten als auch von der dritten Version impliziert wird. Die Implikation (RAMSEY II) ⇒ (RAMSEY I) ist eine Konsequenz des Kompaktheitsprinzips (siehe unten Satz 4.6).

2) Die erste Form des Satzes ist strikt finitär. Sie besagt, daß die Funktion

$$R(r,k,l) := min\{n \mid \forall \chi : [n]^k \longrightarrow [r] \; \exists B \subset [n], |B| = l, \; B \text{ monochrom in } \chi\}$$

für $r, k, l \in \mathbb{N}$ mit $l \geq k$ wohldefiniert ist. Seit langem kennt man die Abschätzung $R(r, 2, l) \leq r^{(r-1)l+1} - 1$ (vgl. Graham et al. [42], S. 5). Versuche, diese Ungleichung zu verschärfen, bilden einen Hauptschwerpunkt der aktuellen Forschung in der Ramseytheorie.

3) Der Satz von Ramsey ist in gewisser Hinsicht der Prototyp eines Theorems der Ramseytheorie. Ausgangspunkt ist ein „unendliches Objekt“ — hier die k-Teilmengen einer unendlichen Menge X — mit endlichen und unendlichen „Unterobjekten“ (die k-Teilmengen von Teilmengen von X).

Ein finitärer Ramseysatz hat dann etwa folgendes zum Inhalt: sind Parameter r, l fest vorgegeben, so hat jedes hinreichend „große“ endliche Unterobjekt die Eigenschaft, daß jede Färbung der Vielfalt r dieses Unterobjekts ein monochromes Unterobjekt der Größe mindestens l enthält.

Die halbfinitäre Version dieses Sachverhaltes sieht dann zunächst so aus: sind Parameter r, l fest vorgegeben, so gibt es in jeder Färbung der Vielfalt r des Ausgangsobjektes ein monochromes Unterobjekt der Größe mindestens l.

Offensichtlich läßt sich diese Aussage so umformulieren, daß der explizite Bezug auf den Parameter r verschwindet: ist l vorgegeben, so gibt es in jeder endlichen Färbung des Ausgangsobjektes ein monochromes Unterobjekt der Größe mindestens l.

Nun ergibt eine Anwendung des Schubfachprinzips die endgültige Fassung der halbfinitären Version: in jeder endlichen Färbung des Ausgangsobjektes finden sich beliebig große monochrome Unterobjekte.

Die *infinitäre* Version des Ramseysatzes schließlich behauptet, daß es in jeder endlichen Färbung des Ausgangsobjektes ein *unendliches* monochromes Unterobjekt gibt.
In vielen Fällen läßt sich die Äquivalenz der finitären zu der halbfinitären Version des Theorems mit Hilfe des Kompaktheitsprinzips beweisen, dem wir uns jetzt zuwenden.

4.5 DEFINITION Ein *Hypergraph* ist ein Paar $H = (V, \mathcal{E})$, wobei V eine nichtleere Menge und $\mathcal{E} \subset \mathfrak{P}(V)$ eine Menge von Teilmengen von V ist. Sei $k \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Eine endliche k–Färbung von V heißt *zulässig*, falls keine Menge $A \in \mathcal{E}$ monochrom ist. Die Zahl

$$c_k(H) := min\{r \in \mathbb{N} \mid \exists \text{ zulässige } k\text{–Färbung der Vielfalt } r\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

heißt *k–Farbzahl* von H.
Ist $H = (V, \mathcal{E})$ ein Hypergraph und $W \subset V$, so sei $\mathcal{E}_W := \{A \mid A \in \mathcal{E}, A \subset W\}$. Dann heißt $H_W := (W, \mathcal{E}_W)$ der auf W *induzierte* Hypergraph.

4.6 SATZ (KOMPAKTHEITSPRINZIP)
Sei $H = (V, \mathcal{E})$ ein Hypergraph derart, daß jedes $E \in \mathcal{E}$ endlich ist. Ist dann $k, r \in \mathbb{N}$ und gilt $c_k(H_W) \leq r$ für jede endliche Teilmenge W von V, so ist $c_k(H) \leq r$.

Beweis: Wir setzen $X := [r]^{[V]^k} = \{f \mid f : [V]^k \longrightarrow [r]\}$ die Menge aller k-Färbungen von V der Vielfalt r. Versehen wir $[r]$ mit der diskreten Topologie, so ist X nach dem Satz von Tychonoff ein kompakter Raum.
Für jede endliche Menge $W \subset V$ sei jetzt

$$\begin{aligned} F_W &:= \{f \in X \mid \text{kein } A \in \mathcal{E}_W \text{ ist monochrom in } f\} \\ &= \{f \in X \mid f|_{[W]^k} \text{ ist zulässige } k\text{-Färbung von } H_W\}. \end{aligned}$$

Dann ist nach Voraussetzung kein F_W leer. Gilt $f \notin F_W$ für $f \in X, W \in [V]^{<\omega}$, so gibt es ein $A \in \mathcal{E}_W$, das monochrom in f ist. Die Menge der Färbungen $g \in X$, die auf $[W]^k$ mit f übereinstimmen, ist eine offene Umgebung von f in X. Also ist F_W abgeschlossen. Schließlich hat das System $\{F_W \mid W \in [V]^{<\omega}\}$ die endliche Durchschnittseigenschaft, denn es gilt $F_{W_1 \cup \ldots \cup W_n} \subset F_{W_1} \cap \ldots \cap F_{W_n}$ für alle $W_1, \ldots, W_n \in [V]^{<\omega}$.

Nun ist X kompakt und somit $F := \bigcap_{W \in [V]^{<\omega}} F_W$ nicht leer. Für $f \in F$ und $A \in \mathcal{E}$ ist dann $f \in F_A$, also insbesondere A nicht monochrom in f. Das bedeutet, daß f eine zulässige k–Färbung der Vielfalt r von V ist, was $c_k(H) \leq r$ nach sich zieht. $\square$

Wir können nun die Implikation (Ramsey II) $\Rightarrow$ (Ramsey I) beweisen:
Dazu seien $r, k, l \in \mathbb{N}$ mit $k \geq l$ fest gewählt. Wir setzen $V := X$ und $\mathcal{E} := [X]^l$. Nach Voraussetzung gilt dann $c_k(V, \mathcal{E}) > r$.
Nach dem Kompaktheitsprinzip gibt es eine endliche Menge $A_0 \subset X$ mit $c_k(A_0, \mathcal{E}_{A_0}) > r$. Sei n_0 die Mächtigkeit von A. Wegen $\mathcal{E}_A = [A]^l$ gilt dann $c_k(A, [A]^l) > r$ für *jede* n_0–elementige Teilmenge A von X.
Sind nun $B \subset X$ mit $|B| \geq n_0$ sowie eine k–Färbung χ der Vielfalt r von B gegeben, so wählen wir zunächst eine n_0–elementige Teilmenge A von B. Die Einschränkung von χ auf $[A]^k$ ist eine k–Färbung von A der Vielfalt r, die wegen $c_k(A, [A]^l) > r$ nicht zulässig sein kann. Somit gibt es eine l–elementige Teilmenge C von A, welche monochrom in χ ist. $\square$

Zum Schluß dieses Abschnittes geben wir einen Beweis für (Ramsey III) durch Induktion über $k \in \mathbb{N}$:

1) Der Fall $k = 1$ ist einfach eine Anwendung des Schubfachprinzips.
   Sei also für den Induktionsschritt $k > 1$ und $\chi : [X]^k \longrightarrow [r]$ eine endliche k-Färbung von X, und in jeder endlichen $(k-1)$-Färbung einer unendlichen Menge Y gebe es eine unendliche monochrome Menge.
2) Sei $p \in \beta X \setminus X$ ein nichttrivialer Ultrafilter. Für jede $(k-1)$-elementige Teilmenge A von X liegt genau eine der Mengen
   $$Y_{A,j} := \{y \in X \setminus A \,|\, \chi(A \cup \{y\}) = j\} \quad (j \in [r])$$
   im Ultrafilter p, denn, da p nichttrivial ist, liegt $X \setminus A$ in p. Dasjenige $j \in [r]$, für das $Y_{A,j} \in p$ ist, werde mit $\rho(A)$ bezeichnet. Damit ist ρ eine endliche $(k-1)$-Färbung von X.
3) Wir konstruieren rekursiv eine injektive Folge $(x_n)_{n\in\omega}$. Dazu seien $x_0, \ldots, x_{k-2}$ beliebige paarweise verschiedene Elemente von X.
   Sind für $n \geq k-1$ die Elemente $x_0, \ldots, x_{n-1}$ bereits gefunden, so sei mit $X_n := \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ die Menge Y_n definiert durch
   $$Y_n := \bigcap \{Y_{A,\rho(A)} \,|\, A \in [X_n]^{k-1}\}.$$
   Dann ist $Y_n \setminus X_n \in p$, also insbesondere nicht leer. Das Element x_n kann nun aus $Y_n \setminus X_n$ beliebig gewählt werden.

4) Wir setzen $Y := \{x_n \,|\, n \in \omega\}$. Die Färbung ρ induziert eine $(k-1)$-Färbung auf Y, die wieder mit ρ bezeichnet werde. Die Induktionsvoraussetzung liefert nun eine unendliche Teilmenge $B \subset Y$, die monochrom in ρ ist. Wir zeigen, daß B auch monochrom in χ ist:
Ist nämlich $A \in [B]^k$ und $m := max\{n \in \mathbb{N} \,|\, x_n \in A\}$ so gilt
$$x_m \in Y_m \subset Y_{A',\rho(A')}$$
mit $A' := A \setminus \{x_m\}$. Das heißt aber $\chi(A) = \chi(A' \cup \{x_m\}) = \rho(A')$. Wegen $|\rho([B]^{k-1})| = 1$ ist die Behauptung bewiesen. □

4.2 Der Satz von Hindman

Während es sich im vorangegangenen Abschnitt um rein mengentheoretische Kombinatorik handelte, werden ab jetzt Ramseysätze betrachtet, die sich auf die Halbgruppe $(\beta\mathbb{N}, +)$ beziehen.
Den Anfang macht ein Satz, den Issai Schur im Jahre 1916 bei seinen Studien zum großen Fermatschen Satz bewies. Er gilt heute als das zeitlich früheste Ramseytheorem. Wir formulieren ihn in einer finitären und einer infinitären Version:

4.7 Satz (Schur)

a) *Zu jeder natürlichen Zahl $r \in \mathbb{N}$ gibt es eine Schranke $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ folgende Aussage gilt: in jeder Färbung der Vielfalt r von $[n]$ gibt es monochrome Elemente $1 \leq x, y, z \leq n$ mit $x + y = z$.*

b) *In jeder endlichen Färbung von $\mathbb{N}$ gibt es monochrome Elemente $x, y, z \in \mathbb{N}$ mit $x + y = z$.*

Beweis: Die Implikation a)$\Rightarrow$b) ergibt sich aus dem Kompaktheitsprinzip, indem man $V := \mathbb{N}$, $\mathcal{E} := \{\, \{x, y, z\} \mid x, y, z \in \mathbb{N},\ x + y = z\}$ und $k = 1$ setzt.
Zum Beweis von b) sei χ eine endliche Färbung von $\mathbb{N}$. Dann ist durch $\rho(\{x, y\}) := \chi(|x-y|)$ eine endliche 2-Färbung auf $\mathbb{N}$ erklärt. Nach dem Satz von Ramsey gibt es eine in ρ monochrome dreielementige Menge $\{a, b, c\}_<$. Setzt man $x := (b-a), y := (c-b)$ und $z := (c-a)$, so gilt $x + y = z$, und $\{x, y, z\}$ ist monochrom in χ. □

Setzt man für eine Menge $A \subset \mathbb{N}$
$$Fs(A) := \{\sum_{a \in F} a \,|\, \emptyset \neq F \in [A]^{<\omega}\},$$

so besagt Schurs Theorem gerade, daß es zu jeder endlichen Färbung von $\mathbb{N}$ eine Menge $A \in [\mathbb{N}]^2$ derart gibt, daß $Fs(A)$ monochrom ist. Eine naheliegende Verallgemeinerung gehört zu den zentralen Sätzen der Ramseytheorie. Das Theorem zeigt dieselbe Trichotomie wie der Satz von Ramsey.

4.8 Satz

(Folkman I) *Zu je zwei natürlichen Zahlen $r, l \in \mathbb{N}$ gibt es eine Schranke $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ folgende Aussage gilt: zu jeder Färbung der Vielfalt r von $[n]$ gibt es eine l-elementige Teilmenge B von $[n]$, für die $Fs(B)$ monochrom ist.*

(Folkman II) *Zu jeder endlichen Färbung von $\mathbb{N}$ gibt es beliebig große endliche Teilmengen B von $\mathbb{N}$, für die $Fs(B)$ monochrom ist.*

(Hindman) *Zu jeder endlichen Färbung von $\mathbb{N}$ gibt eine unendliche Teilmenge B von $\mathbb{N}$, für die $Fs(B)$ monochrom ist.*

Mit Hilfe des Kompaktheitsprinzips erkennt man leicht, daß die beiden Versionen des Satzes von Folkman äquivalent sind. Offensichtlich folgt (Folkman II) aus (Hindman), weshalb nur der Satz von Hindman zu zeigen übrig bleibt. Dieser war bis Anfang der siebziger Jahre eine offene Vermutung, genannt *Graham-Rothschild-Vermutung*.

Wie N. Hindman in [55] berichtet, geht der Beweis, den wir hier geben wollen, auf F. Galvin zurück. Seine Idee war, einen Ultrafilter p zu finden, der als Filterbasis Mengen der Form $Fs(B)$ für gewisse $B \in [\mathbb{N}]^{\geq\omega}$ hat. In einer gegebenen Zerlegung von $\mathbb{N}$ muß dann eine Partitionsmenge in p liegen und damit ein $Fs(B)$ enthalten.

Galvin konnte nun zeigen, daß jeder Ultrafilter, der „almost translation invariant“ ist, die gewünschte Eigenschaft hat. Dabei nannte Galvin einen Ultrafilter $p \in \beta\mathbb{N}$ „almost translation invariant“, wenn für jede Menge $A \in p$ auch die Menge $\{t \mid A-t \in p\}$ in p liegt. S. Glazer sah, daß dies einfach $p+p=p$ bedeutet und sich die Existenz eines solchen Ultrafilters aus dem Theorem von Ellis 2.13 ergibt.

Wir entwickeln das Resultat in hinreichender Allgemeinheit und schicken dazu einige terminologische Vereinbarungen voraus, die nötig sind, will man sich nicht von vornherein auf kommutative Halbgruppen beschränken

Sei $(S, +)$ eine unendliche Halbgruppe und $x = (x_n)_n$ eine Folge in S.
Für $F = \{n_1, \ldots, n_k\}_< \subset \mathbb{N}$ sei $\sum_{n\in F} x_n := x_{n_k} + \ldots + x_{n_1}$.
Weiter sei $Fs(x) := \{\sum_{n\in F} x_n \mid \emptyset \neq F \in [\mathbb{N}]^{<\omega}\}$

Ist zusätzlich $\prec$ eine binäre Relation auf S, so heißt x eine $\prec$-Folge, falls aus $n < m$ stets $x_n \prec x_m$ folgt für alle $n, m \in \mathbb{N}$. In dieser Terminologie ist also eine Folge genau dann injektiv, wenn sie eine $\neq$-Folge ist.

4.9 LEMMA
Sei $(S, +)$ eine unendliche Halbgruppe und p ein Idempotent von βS. Weiter sei $\prec$ eine binäre Relation auf S mit der Eigenschaft

$$(*) \qquad \forall A \in p \, \forall a \in S \, \exists b \in A : a \prec b.$$

Dann gibt es zu jeder Menge C eine $\prec$-Folge $(x_n)_n$ in S mit $Fs(x) \subset C$.

Beweis:

1) Für $a \in S$ sei $S_a := \{b \mid b \in S \wedge a \prec b\}$. Dann besagt $(*)$ gerade, daß $A \cap S_a \neq \emptyset$ für alle $A \in p$ und alle $a \in S$ ist. Dies hat $S_a \in p$ für alle $a \in S$ zur Folge.
2) Die Folge $(x_n)_n$ wird nun rekursiv konstruiert. Dazu sei $C_1 := C$. Da $p + p = p$ und $C_1 \in p$ ist, liegt die Menge $\{t \mid C_1 - t \in p\}$ wieder in p, ist also nicht leer. Wir wählen ein x_1 mit $C_1 - x_1 \in p$ beliebig.
   Für den Rekursionsschritt nehmen wir an, die Mengen $C_1, \ldots, C_{n-1}$ sowie die Elemente $x_1, \ldots, x_{n-1}$ seien bereits gefunden mit $x_{n-1} \in C_{n-1} \in p$, $C_{n-1} - x_{n-1} \in p$ und so, daß $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ eine $\prec$-Folge ist.
   Setzen wir nun $C_n := C_{n-1} \cap (C_{n-1} - x_{n-1})$ so gilt aufgrund der Idempotenz von p und der Bemerkung zu Anfang des Beweises:
   $$C_n \cap \{t \mid C_n - t \in p\} \cap \bigcap_{k<n} S_{x_k} \in p.$$
   Wir wählen ein x_n aus dieser Menge. Dann ist also $x_n \in C_n \in p$, $C_n - x_n \in p$, $C_n \subset C_{n-1}$ und $(x_1, \ldots, x_n)$ eine $\prec$-Folge.
3) Aus der Konstruktion ersieht man unmittelbar, daß die Folge $x = (x_n)_n$ eine $\prec$-Folge ist. Es bleibt $Fs(x) \subset C$ zu zeigen. Dabei verzichten wir auf die an sich notwendige vollständige Induktion und betrachten stattdessen einen konkreten Fall: um zu sehen, daß $x_6 + x_4 + x_3 + x_1$ in C liegt, beachte man $x_6 \in C_6 \subset C_5 \subset C_4 - x_4$; das hat $x_6 + x_4 \in C_4 \subset C_3 - x_3$ zur Folge; daraus ergibt sich $x_6 + x_4 + x_3 \in C_3 \subset C_2 \subset C_1 - x_1$, mithin $x_6 + x_4 + x_3 + x_1 \in C_1 = C$. □

Nach dieser Vorarbeit fällt der *Beweis des Satzes von Hindman* nicht mehr schwer: aufgrund des Satzes von Ellis besitzt die Halbgruppe $\beta\mathbb{N}$ ein Idempotent p; dieses liegt in $\mathbb{N}^*$, denn $\mathbb{N}$ selbst besitzt keine Idempotente. Darum kann man das Lemma auf die Situation $S := \mathbb{N}$ für ein monochromes $C \in p$ anwenden, wenn man die Relation $\prec$ auf $\mathbb{N}^2$ durch $n \prec m :\Leftrightarrow n \neq m$ definiert. □

Die Formulierung des Lemmas 4.9 legt die Frage nahe, zu welchen Relationen $\prec$ auf der Halbgruppe S es Idempotente $p \in \beta S$ derart gibt, daß die Voraussetzung $(*)$ des Lemmas statthat.
Sei dazu S eine unendliche Halbgruppe und $\prec$ eine binäre Relation auf S. Für jedes $a \in S$ sei S_a durch $S_a := \{b \in S \mid a \prec b\}$ definiert. Wie man leicht sieht, ist für einen Ultrafilter p die Bedingung $(*)$ genau dann erfüllt, wenn $p \in \bigcap_{a\in S} \overline{S_a}$ ist.

4.10 Lemma
Ist für jedes $a \in S$ die Menge S_a eine Unterhalbgruppe von S und gilt zusätzlich, daß zu je endlich vielen $a_1, \ldots, a_n \in S$ ein $b \in S$ mit $a_1, \ldots, a_n \prec b$ existiert, so ist $S^{\prec} := \bigcap_{a\in S} \overline{S_a}$ eine kompakte Unterhalbgruppe von βS.

Beweis: Nach Lemma 2.12 ist jedes $\overline{S_a}$ eine kompakte Unterhalbgruppe von βS. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß $S^{\prec}$ nicht leer ist. Das ergibt sich aber sofort aus der Tatsache, daß das System $\{S_a \mid a \in S\}$ die endliche Durchschnittseigenschaft hat: nach Voraussetzung gibt es ja zu je endlich vielen $a_1, \ldots, a_n \in S$ ein $b \in S$ mit $a_1, \ldots, a_n \prec b$, das heißt also mit $b \in S_{a_1} \cap \ldots \cap S_{a_n}$. □

Wenn man noch bedenkt, daß $S^{\prec}$ als kompakte Unterhalbgruppe von βS nach dem Satz von Ellis 2.13 ein Idempotent enthält, ergibt sich das folgende Theorem unmittelbar aus den beiden Lemmata. Dazu ist $S := \{A \mid \emptyset \neq A \in [X]^{<\omega}\}$ mit der gewöhnlichen Vereinigung als Halbgruppenoperation zu setzen und die Relation $\prec$ auf S^2 durch $A \prec B :\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$ zu definieren.

4.11 Satz
Sei X eine unendliche Menge. Zu jeder endlichen Färbung von $[X]^{<\omega}$ gibt es eine unendliche Familie $\mathcal{D}$ nichtleerer, endlicher, paarweise disjunkter Teilmengen von X, so daß alle endlichen Vereinigungen von Mengen in $\mathcal{D}$ monochrom sind.

Zum Abschluß dieses Abschnittes geben wir eine algebraisch-topologische Charakterisierung der sogenannten IP-Mengen, die wie folgt definiert sind:

4.12 Definition Eine Teilmenge $A \subset S$ der unendlichen Halbgruppe S heißt eine *(starke) IP–Menge*, falls es eine (injektive) Folge $x = (x_n)_n$ in S mit $Fs(x) \subset A$ gibt.

Mit dieser Definition besagt der Satz von Hindman, daß es in jeder endlichen Färbung von $\mathbb{N}$ eine monochrome starke IP–Menge gibt.

4.13 SATZ

Sei S eine unendliche Halbgruppe und A eine Teilmenge von S.

a) *Genau dann ist A eine IP-Menge, wenn $\overline{A}$ ein Idempotent von βS enthält.*

b) *Enthält $\overline{A}$ ein nichttriviales Idempotent von βS, so ist A eine starke IP-Menge. Die Umkehrung gilt, falls S^* eine Unterhalbgruppe von S ist oder S keine Idempotente besitzt.*

Beweis:

1) Ist $A \in p$ und p ein Idempotent von βS, so sieht man mit Hilfe von Lemma 4.9, daß A eine IP-Menge ist, wenn dabei $\prec$ für die Allrelation auf S steht. Ist darüberhinaus p nichttrivial, so interpretiere man $\prec$ als $\neq$. Dann folgt (ebenfalls aus Lemma 4.9), daß A eine starke IP-Menge ist.

2) Es sei nun $x = (x_n)_n$ eine Folge in S mit $Fs(x) \subset A$. Für jede endliche Menge $F \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$ sei
$$Fs(x; F) := \{\textstyle\sum_{n\in G} x_n \,|\, \emptyset \neq G \in [\mathbb{N}]^{<\omega},\ F < G\}$$
und
$$T := \{p \in \beta S \,|\, \forall F \in [\mathbb{N}]^{<\omega} : Fs(x; F) \in p\}.$$
Wir zeigen, daß T eine abgeschlossene Unterhalbgruppe von βS ist. Nach dem Satz von Ellis 2.13 gibt es dann ein Idempotent p in T, welches nach Konstruktion in $\overline{A}$ liegt.

3) Wegen $Fs(x; F_1\cup\ldots\cup F_n) \subset Fs(x; F_1)\cap\ldots\cap Fs(x; F_n)$ für alle $F_1, \ldots, F_n \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$ hat das System $\{Fs(x; F) \,|\, F \in [\mathbb{N}]^{<\omega}\}$ die endliche Durchschnittseigenschaft. Darum ist T nicht leer.
Die Abgeschlossenheit von T ergibt sich unmittelbar aus der Definition: Ist $p \notin T$, so existiert $F \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$ mit $Fs(x; F) \notin p$; dann ist aber $\overline{Fs(x; F)^c}$ eine Umgebung von p, die T trivial schneidet.
Um T als Unterhalbgruppe von βS zu erkennen, seien $p, r \in T$ und $F \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$. Es ist $Fs(x; F) \in p+r$, also $\{t \,|\, Fs(x; F)-t \in p\} \in r$ zu zeigen. Weil r in T liegt, genügt es dazu, die Inklusion $Fs(x; F) \subset \{t \,|\, Fs(x; F) - t \in p\}$ nachzuweisen.
Wird nun $t \in Fs(x; F)$ beliebig gewählt, dann ist jedenfalls $t = \sum_{n\in G} x_n$ für ein nichtleeres $F < G \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$. Für jedes $\emptyset \neq H \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$ mit $G < H$ gilt dann $\sum_{n\in H} x_n + t \in Fs(x; F)$, also insgesamt $Fs(x; G) \subset Fs(x; F) - t$. Das bedeutet $Fs(x; F) - t \in p$ (denn p liegt in T) und ebendies war zu zeigen.

Damit ist die Aussage a) vollständig bewiesen.

4) Die eine Implikation der Aussage b) wurde schon in Teil 1) behandelt. Für die umgekehrte Richtung sei jetzt A eine starke IP-Menge, also $Fs(x) \subset A$ für eine *injektive* Folge $x = (x_n)_n$. Besitzt S selbst keine Idempotente, so muß das in den Teilen 2) und 3) gefundene Idempotent $p \in T$ schon in S^* sein.
   Darum setzen wir ab jetzt voraus, daß S^* eine Unterhalbgruppe von βS ist. Wir definieren die Menge T wie in 2) und $T' := T \cap S^*$. Die Menge T' ist nicht leer, denn da die Folge x injektiv ist, ist jede der Mengen $Fs(x; F)$ unendlich. Die Abgeschlossenheit von T' folgt sofort aus der Abgeschlossenheit von T und S^*. Schließlich gilt auch $T'T' \subset T'$, denn sowohl T als auch S^* sind Halbgruppen.
   Damit ist auch T' als abgeschlossene Unterhalbgruppe von βS nachgewiesen. Der Satz von Ellis 2.13 liefert wieder ein Idempotent in T', das demnach in $\overline{A}$ liegt und nichttrivial ist. □

4.14 Bemerkung Der Satz gibt uns für IP–Mengen eine ähnliche Charakterisierung wie Satz 3.13 im Falle stückweise syndetischer Mengen:

1) Ein Ultrafilter liegt genau dann im Abschluß der Menge aller Idempotente, wenn alle seine Elemente IP–Mengen sind.
2) Eine Menge ist genau dann eine IP–Menge, wenn es ein Idempotent gibt, das sie enthält.

Dabei ist 2) nur die Umformulierung von Satz 4.13, Teil a) und 1) eine direkte Konsequenz von 2).

Ist S^* eine Unterhalbgruppe von βS oder besitzt S keine Idempotente, so gilt analog:

1) Ein Ultrafilter liegt genau dann im Abschluß der Menge der nichttrivialen Idempotente, wenn alle seine Elemente starke IP–Mengen sind.
2) Eine Menge ist genau dann eine starke IP–Menge, wenn es ein nichttriviales Idempotent gibt, das sie enthält.

Wenn schließlich S selbst keine Idempotente besitzt, dann ist jede IP-Menge schon eine starke IP-Menge.

4.3 Der Satz von van der Waerden

Bezeichnet man ein System $\mathcal{G}$ von Teilmengen einer Menge X als *partitionsregulär*, wenn es in jeder endlichen Färbung von X eine monochrome Menge gibt, die in $\mathcal{G}$

liegt, so besagt der Satz von Hindman gerade, daß das System der starken IP-Mengen in $\mathbb{N}$ partitionsregulär ist. Betrachtet man stattdessen das System der arithmetischen Folgen fester Länge, so wird man auf den Satz von van der Waerden geführt, dem wir uns jetzt zuwenden.

4.15 DEFINITION Eine *arithmetische Progression* der Länge $l \in \mathbb{N}$ ist eine Menge der Form $\{a, a+d, a+2d, \ldots, a+(l-1)d\}$ für gewisse natürliche Zahlen $a, d \in \mathbb{N}$. Dabei heißt a der *Startwert* und d das *Inkrement* der Folge.

4.16 SATZ (VAN DER WAERDEN)
In jeder endlichen Färbung von $\mathbb{N}$ gibt es monochrome arithmetische Progressionen beliebiger Länge.

4.17 BEMERKUNG Wie bei den Sätzen von Ramsey und Hindman können wir der Formulierung des Satzes noch zwei weitere Versionen, eine strikt finitäre nach dem Muster von (RAMSEY I) und (FOLKMAN I) sowie eine wesentlich infinitäre nach dem Vorbild von (RAMSEY III) und (HINDMAN) zur Seite stellen. Die strikt finitäre Variante erweist sich via Kompaktheitsprinzip wie erwartet als zu unserer Formulierung äquivalent. Die strikt infinitäre Version, die die Existenz einer *unendlichen* monochromen arithmetischen Folge in der gegebenen endlichen Färbung von $\mathbb{N}$ behauptet, ist dagegen falsch.

[Die Partition (A_1, A_2) von $\mathbb{N}$ sei definiert durch $A_1 := \{n \in \mathbb{N} |\ \cos n \geq 0\}$ und $A_2 := \mathbb{N} \setminus A_1$. Für $a \in A_1$ und $d \in \mathbb{N}$ gilt: $e^{i(a+nd)} = e^{ia}(e^{id})^n = e^{ia}c^n$. Da d ein irrationales Vielfaches von 2π ist, existiert eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, so daß $e^{i(a+nd)}$ nahe bei -1 liegt. Dann ist aber $\cos(a+nd) < 0$ und somit $a + nd \in A_2$. Analog argumentiert man für $a \in A_2$.]

Beweis des Satzes: Da nur endliche Färbungen in Betracht kommen, reicht es nach dem Schubfachprinzip aus, zu gegebener Folgenlänge l eine monochrome arithmetische Progression der Länge l zu finden. Wir halten darum $l \in \mathbb{N}$ fest.
Weiter setzen wir

$$\begin{aligned}
G &:= \{(a, a+d, \ldots, a+(l-1)d) \mid a \in \mathbb{N},\ d \in \omega\}, \\
I &:= \{(a, a+d, \ldots, a+(l-1)d) \mid a \in \mathbb{N},\ d \in \mathbb{N}\}, \\
\Delta(\mathbb{N}^l) &:= \{(a, \ldots, a) \mid a \in \mathbb{N}\}.
\end{aligned}$$

Dann ist G eine Unterhalbgruppe von $\mathbb{N}^l$, die die Diagonale $\Delta(\mathbb{N}^l)$ umfaßt. Die Menge I ist ein zweiseitiges Ideal von G.

Mit dem nachstehenden Satz ergibt sich das Theorem von van der Waerden nun folgendermaßen: man wähle ein $p \in K(\beta\mathbb{N})$ und eine monochrome Menge $A \in p$. Für diese gibt es nach Satz 4.18 ein Tupel $(a_1, \ldots, a_l) \in I \cap A^l$, d.h. $\{a_1, \ldots, a_l\}$ ist eine arithmetische Folge der Länge l, die ganz in A enthalten, also monochrom ist. □

4.18 Satz

Sei S eine unendliche Halbgruppe und $l \in \mathbb{N}$. Weiter sei G eine Unterhalbgruppe des direkten Produktes S^l, welche die Diagonale $\Delta(S^l)$ umfaßt, und I ein zweiseitiges Ideal von G. Ist dann $p \in K(\beta S)$ ein Element des minimalen Ideals von βS und $A \in p$, so gilt $A^l \cap I \neq \emptyset$.

Beweis:

1) Die Halbgruppe $H := (\beta S)^l$ ist linkstopologisch und kompakt nach dem Satz von Tychonoff. Außerdem gilt $S^l \subset \Lambda(H)$, wie man leicht nachprüft. Mit Lemma 2.12 folgt also aus den Voraussetzungen des Satzes, daß $\overline{G}$ eine Unterhalbgruppe von H und $\overline{I}$ ein Ideal von $\overline{G}$ ist. Darüberhinaus gilt $\Delta(H) \subset \overline{G}$, denn da S dicht in βS liegt, ist auch $\Delta(S^l)$ eine dichte Teilmenge von $\Delta((\beta S)^l) = \Delta(H)$.
2) Für $p \in \beta S$ sei $\vec{p} := (p, \ldots, p) \in H$. Wir behaupten, daß für jedes $p \in K(\beta S)$ das Tupel $\vec{p}$ in $\overline{I}$ liegt.

   Dazu sei $p \in K(\beta S)$ beliebig. Weil das minimale Ideal die Vereinigung der minimalen Rechtsideale ist, gibt es ein minimales Rechtsideal R, das p enthält. Dieses minimale Rechtsideal enthält nach dem Satz von Ellis 2.13 ein minimales Idempotent q.

   Wegen $\Delta(H) \subset \overline{G}$ ist $\vec{q} \in \overline{G}$, und da $\overline{G}$ eine kompakte Unterhalbgruppe von H ist, kann man erneut den Satz von Ellis anwenden. Es findet sich also ein minimales Idempotent $e = (e_1, \ldots, e_l)$ in $\overline{G}$ mit $e \leq \vec{q}$. Da alle minimalen Idempotente im minimalen Ideal und dieses wiederum in jedem Ideal enthalten ist, gilt zudem $e \in \overline{I}$.

   In H wird komponentenweise verknüpft, darum ist jede Komponente e_i von e ein Idempotent von βS. Da auch die Ordnung $\leq$ rein algebraisch definiert ist, haben wir ferner die Beziehung $e_i \leq q$ für jedes $1 \leq i \leq l$. Das Idempotent q war aber minimal gewählt, also muß $e_i = q$ für alle i und deshalb $e = \vec{q}$ gelten. Nach Wahl von R ist $p \in qR$, also $p = qr$ für ein $r \in R$. Folglich gilt $\vec{p} = \vec{q}\vec{r} \in \vec{q}\overline{G}$. Nun ist aber $\vec{q} = e$ ein minimales Idempotent von $\overline{G}$ und daher $\vec{q}\overline{G}$ ein minimales Rechtsideal von $\overline{G}$. Mithin gilt $\vec{p} \in \vec{q}\overline{G} \subset K(\overline{G}) \subset \overline{I}$.

3) Zum Abschluß des Beweises sei $A \in p \in K(\beta S)$. Dann ist $\overline{A}$ eine fundamentale Umgebung von p in βS, somit $\overline{A}^l$ eine Umgebung von $\vec{p}$ in H. Nach 2) liegt aber $\vec{p}$ in $\overline{I}$, also gilt $\overline{A}^l \cap I \neq \emptyset$. Wegen $I \subset S^l$ und $\overline{A} \cap S = A$ folgt daraus schließlich $A^l \cap I \neq \emptyset$. $\square$

Im Jahre 1963 machte eine Arbeit von A.W. Hales und R.I. Jewett [43] Furore, weil sie den Satz von van der Waerden, für den bis dahin nur sehr umständliche und zum Teil auch recht kryptische Beweise bekannt waren, zum bloßen Korollar degradierte. Nach Meinung der Autoren R. Graham, B. Rothschild und J. Spencer liegt das Theorem von Hales–Jewett „at the heart of Ramsey theory“, die ohne diesen Satz eher „Ramseyan theory“ heißen sollte (vgl. [42], S. 32).
Um einen Einblick in die Thematik des Hales–Jewett–Theorems zu bekommen, betrachten wir zunächst eine nichtleere Menge Σ, das sogenannte *Alphabet*. Die Menge Σ^+ aller nichtleeren, endlichen Folgen von Elementen aus Σ ist bezüglich Verkettung (Konkatenation) eine Halbgruppe und wird *kombinatorischer Raum* über dem Alphabet Σ genannt. Ist nun v ein nicht in Σ enthaltenes Symbol (eine *Variable*), so definiert jedes Element a aus Σ den *Einsetzungshomorphismus*

$$\eta_a = (w \longmapsto w(a)) : (\Sigma \cup \{v\})^+ \longrightarrow \Sigma^+,$$

wobei $w(a)$ aus w dadurch entsteht, daß jedes Vorkommen der Variable v in w durch a ersetzt wird.
Jede Menge der Form $\{w(a) \mid a \in \Sigma\}$ für ein w, das die Variable v enthält, heißt ein *eindimensionaler (kombinatorischer) Unterraum* von Σ^+.

4.19 Satz (Hales-Jewett)
In jeder endlichen Färbung des kombinatorischen Raumes über einem endlichen Alphabet gibt es einen monochromen, eindimensionalen kombinatorischen Unterraum.

Nimmt man nicht nur eine, sondern k Variablen zum Alphabet hinzu, so wird man entsprechend auf k-dimensionale Unterräume für alle $k \in \mathbb{N}$ geführt. Es gilt dann sogar: In jeder endlichen Färbung des kombinatorischen Raumes über einem endlichen Alphabet gibt es monochrome Unterräume beliebiger Dimension.
In Kapitel 6 werden wir eine noch allgemeinere Version herleiten. Darum lassen wir an dieser Stelle den Beweis aus und wenden uns lieber zwei bedeutenden Folgerungen zu.
Die erste bringt eine Verschärfung des van der Waerdenschen Satzes.

4.20 Satz
Sei eine Folge $x = (x_n)_n$ in $\mathbb{N}$ vorgegeben. Zu jeder endlichen Färbung von $\mathbb{N}$ gibt es beliebig lange, monochrome, arithmetische Folgen derart, daß die Inkremente sämtlich in $Fs(x)$ liegen.

Beweis: Sei $l \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Die endliche Färbung von $\mathbb{N}$ werde mit χ, die Menge $\{0, \ldots, l-1\}$ mit Σ bezeichnet. Für $w = a_1 a_2 \ldots a_k \in \Sigma^+$ sei $\varphi(w) := 1 + \sum_{i=1}^{k} a_i x_i$. Dann ist φ eine Abbildung von Σ^+ in $\mathbb{N}$ und daher $\chi \circ \varphi$ eine endliche Färbung von Σ^+.
Jetzt ist Satz 4.19 anwendbar. Es gibt also ein Wort w über $\Sigma \cup \{v\}$, in dem die Variable v derart vorkommt, daß die Menge $\{w(j) \mid 0 \leq j \leq l-1\}$ monochrom in $\chi \circ \varphi$ ist.
Es ist $w = a_1 a_2 \ldots a_k$ für gewisse $0 \leq a_i \leq (l-1)$. Setzt man nun $F := \{i \mid a_i = v\}$, $G := \{1, \ldots, k\} \setminus F$, $d := \sum_{i \in F} x_i$ und $c := 1 + \sum_{i \in G} a_i x_i$, so gilt:

$$\begin{array}{rcllcl} c & = & 1 + \sum_{i \in G} a_i x_i & & = & \varphi(w(0)), \\ c + d & = & 1 + \sum_{i \in G} a_i x_i + \sum_{i \in F} x_i & & = & \varphi(w(1)), \\ & \vdots & & & \vdots & \\ c + (l-1)d & = & 1 + \sum_{i \in G} a_i x_i + \sum_{i \in F} (l-1) x_i & & = & \varphi(w(l-1)). \end{array}$$

Also ist die arithmetische Folge $\{c, c+d, \ldots, c+(l-1)d\}$ monochrom in χ. $\square$

Den Schluß dieses Kapitels bildet eine weitere Folgerung aus dem Hales-Jewett-Theorem. Um unsere Einführung in die Ramseytheorie nicht übermäßig auszudehnen, verweisen wir hinsichtlich des Beweises auf die Literatur (siehe etwa Bergelson und Hindman [11]).

4.21 Satz (Graham-Leeb-Rothschild)
Sei k ein endlicher Körper und V ein unendlichdimensionaler k–Vektorraum. Dann gibt es in jeder Färbung von V monochrome affine Unterräume beliebiger endlicher Dimension.

Bemerkungen

Das Buch von R. Graham, B. Rothschild und J. Spencer [42] ist bis heute das einzige Lehrbuch zur Ramseytheorie. Es gibt einen guten Ein- und Überblick, vor allem

über Methoden und Ergebnisse der *endlichen* Ramseytheorie. Immerhin ist Ramseys ursprüngliches Resultat aus [71] (Ramsey III aus Satz 4.3) mit Beweis zitert (S. 9), und in Abschnitt 6.1 ein Ultrafilterbeweis für den Fall $k = 2$ angegeben (S. 147), dem unser Beweis auf Seite 45 nachempfunden ist. Für Beweise von „multidimensional Ramsey theorems", die mit Hilfe von Ultrafiltern geführt werden, siehe Bergelson und Hindman [9]. (Vgl. auch Baumgartner und Taylor [4].)
Das Kompaktheitsprinzip (Satz 4.6) ist in [42] in einer etwas einfacheren Version formuliert und bewiesen (vgl. [42], S. 13), die sich aber nicht wesentlich von der unseren unterscheidet (außer, daß sie den Nachteil hat, nicht die Konsequenzen zu haben, die die Autoren ihr zuschreiben).
Bei der Lektüre des Buches von Graham et al. (und vielleicht sogar generell) sollte beachtet werden, daß unser Begriff einer k-Färbung (siehe Definition 4.1) sich nicht mit dem einer *k-coloration* ([42], S. 1) deckt: während im letzteren Falle sich das k auf die Anzahl der verwendeten Farben bezieht (bei uns die Vielfalt der Färbung), haben wir mit k die Mächtigkeit der Teilmengen bezeichnet, die eingefärbt werden. Der Grund für diese Abweichung liegt in einer Vereinfachung der Formulierung. Meistens spielt die Vielfalt der Färbung keine oder nur eine untergeordnete Rolle.

Der Beweis des Satzes von Schur 4.7 (vgl. Schur [74]) stammt aus Graham et al. [42], S. 54. Dort wird auch ein kombinatorischer Beweis des Satzes von Hindman gegeben, der von J. Baumgartner [3] übernommen ist und eine Vereinfachung der ursprünglichen Argumentation Hindmans in [45] darstellt.
Bereits 1972 hatte N. Hindman in [44] die Galvinsche Idee (die den Kern von Teil 2 unseres Beweises von Lemma 4.9 bildet) benutzt, um die Äquivalenz des Finite Sum Theorems zur Existenz der „almost translation invariant ultrafilters" (vgl. S. 47) zu zeigen (auf der Basis von ZFC + CH). Erst später erfuhr er, daß sich diese Existenz aus dem Satz von Ellis 2.13 ergibt. Der so entstandene Beweis des Finite Sum Theorems findet sich in Hindman [47].
Die Idee, eine zweistellige Relation $\prec$ auf der Halbgruppe zu betrachten, entspringt einer Beziehung zwischen Finite Sum Theorem und dem „Finite Union Theorem" aus Satz 4.11. Die nichtleeren endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ lassen sich via $\varphi := (A \longmapsto \sum_{a\in A} 2^a)$ mit den natürlichen Zahlen identifizieren. Disjunktheit von A und B zieht $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$ nach sich, in den Binärdarstellungen der entsprechenden Zahlen a, b entsteht bei Addition kein Übertrag. Nun hat schon Hindman in [45] viel Mühe darauf verwandt, das Finite Sum Theorem so zu beweisen, daß das Finite

Union Theorem als Korollar abfällt. Dazu ist es erforderlich, die gesuchte Folge $x = (x_n)_n$ so zu konstruieren, daß bei der Addition von x_n und x_m (für $n \neq m$) in Binärdarstellung kein Übertrag entsteht. Man kann dies erreichen, wenn etwa $f(x_n)|x_m$ gilt, wobei $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ durch

$$f(a) := \text{die kleinste 2-Potenz größer als } a$$

definiert ist. (Siehe dazu auch Kapitel 5, Satz 5.4.)
Der Begriff der IP–Menge stammt im wesentlichen aus Furstenberg [34], S. 52, wo er für den Spezialfall $S = \mathbb{N}$ definiert ist. Die Charakterisierung von IP–Mengen in Satz 4.13 findet sich implizit in Hindman [55], Lemma 2.3.

Wie N. Hindman in [55] beschreibt, galt es ihm lange Zeit als Prüfstein für die Anwendung der topologisch-algebraischen Methoden in der Ramseytheorie, ob auch ein Beweis des Satzes von van der Waerden (siehe van der Waerden [81]) auf diese Weise gegeben werden könne. Ende der 80er Jahre wurden schließlich solche Beweise erbracht, und zwar zuerst von H. Furstenberg und Y. Katznelson in [36], sodann von V. Bergelson und N. Hindman in [10]. Letzterer Beweis findet sich vereinfacht in Hindmans Übersichtsartikel [55] und bildet die Vorlage für unsere Argumentation auf Seite 52.
Die erweiterte Version Satz 4.20 des van der Waerdenschen Satzes steht schon in Furstenberg [34], Theorem 2.18 und ist in Furstenberg und Weiss [39], Theorem 0.4 vorgebildet. Unsere Formulierung und der Beweis stammen aus Bergelson und Hindman [11], Theorem 1.1.
Eine umfassende Diskussion des Satzes von Hales-Jewett (vgl. Hales und Jewett [43]) findet man in Graham et al. [42].

Die Sätze von van der Waerden und Schur wurden von R. Rado in [70] zu einem Satz über partitionsreguläre, lineare, homogene Gleichungssysteme verallgemeinert (siehe Graham et al. [42], S. 54 ff.). Dabei heißt ein System linearer Gleichungen mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ *partitionsregulär*, falls in jeder endlichen Färbung von $\mathbb{N}$ ein monochromes Lösungstupel existiert. W. Deuber führt in [28] Rados Überlegungen fort. Einen Beweis von Rados Theorem, der auf der Stone–Čech–Kompaktifizierung diskreter Halbgruppen basiert, geben N. Hindman und W. Woan in [61]. Eine Arbeit von W. Deuber und N. Hindman [29] beleuchtet den Zusammenhang von Deubers Ergebnissen in [28] mit algebraisch-topologischen Eigenschaften von $\beta\mathbb{N}$.

Da wir gegen Ende des vorangegangenen Kapitels die Beziehung von Stone–Čech–Kompaktifizierung und Topologischer Dynamik angedeutet haben, soll hier noch kurz der Zusammenhang von Topologischer Dynamik und Ramseytheorie zur Sprache kommen. Sie nimmt ihren Ausgang in dem schon zitierten Artikel von H. Furstenberg und B. Weiss [39], wo topologisch-dynamische Beweise für die Sätze von Rado, Hindman und Grünwald (eine mehrdimensionale Version des van der Waerdenschen Satzes, vgl. Graham et al. [42], S. 38) gegeben werden. Systematisch wird dieser Zugang in Furstenberg [34] entwickelt. Auch hier wird Hindmans Satz über die Existenz eines Idempotents in einer kompakten linkstopologischen Halbgruppe bewiesen, der sogenannten einhüllenden oder *Ellis–Halbgruppe* eines Flusses (siehe dazu Ellis [31], Chapter 3 oder Furstenberg [34], S. 158). Einen Einblick in diese Zusammenhänge gibt Graham et al. [42], S. 134 ff..

Kapitel 5

Kombinatorisch reichhaltige Ultrafilter

5.1 Eigenschaften zentraler Mengen

Während im vorangehenden Kapitel Ramseysätze im Vordergrund standen, die bei gegebener endlicher Färbung die Existenz einer monochromen Menge mit *einer* bestimmten kombinatorischen Eigenschaft behaupteten, werden wir in diesem Kapitel versuchen, möglichst viele kombinatorische Eigenschaften in einer monochromen Menge zu lokalisieren.
In einem ersten Abschnitt führen wir den Begriff der Zentralität ein und untersuchen Eigenschaften zentraler Mengen. Der zweite Abschnitt ist dem Studium der Interaktion von multiplikativer und additiver Halbgruppenstruktur auf $\mathbb{N}$ gewidmet. Im dritten Abschnitt schließlich beweisen wir die Existenz eines Ultrafilters, dessen Elemente sowohl multiplikativ als auch additiv zentral sind und positive obere Dichte haben (siehe Definition 5.7). Eine Liste der kombinatorischen Eigenschaften solcher Mengen beschließt das Kapitel.

Für den Beweis des Satzes von Hindman war es wesentlich gewesen, ein Idempotent von βS zu finden, während im Beweis des Satzes von van der Waerden ein Element des minimalen Ideals $K(\beta S)$ diesen Platz einnahm. Es liegt daher nahe, minimale Idempotente (also Ultrafilter, die sowohl idempotent sind, als auch im minimalen Ideal liegen) genauer zu untersuchen.

5.1 Definition Eine Teilmenge A der unendlichen Halbgruppe S heißt *zentral*, falls $\overline{A}$ ein minimales Idempotent der Halbgruppe βS enthält.

5.2 Bemerkungen 1) Da nach dem Satz von Ellis 2.13 minimale Idempotente immer existieren, gibt es also Ultrafilter, deren sämtliche Elemente zentral sind.

2) Dicke Mengen (vgl. Definition 3.11) und Obermengen zentraler Mengen sind zentral.

3) Zentrale Mengen sind stückweise syndetisch (vgl. Definition 3.11) und IP-Mengen (vgl. Definition 4.12). Ist S^* ein Ideal oder besitzt S selbst keine Idempotente, so ist jede zentrale Menge bereits eine starke IP-Menge.

4) Während die Begriffe „dick", „stückweise syndetisch" und „IP-Menge" rein kombinatorisch eingeführt wurden und später eine algebraisch-topologische Charakterisierung erfuhren, ist der Begriff der Zentralität von vornherein algebraisch-topologisch definiert. Obwohl viele Autoren zentrale Mengen zum Beweis von Ramseysätzen verwenden und etliche kombinatorische Eigenschaften zentraler Mengen bekannt sind, gibt es meines Wissens bislang keine rein kombinatorische Charakterisierung des Begriffes der Zentralität[1].

Wir wollen nun einige Eigenschaften zentraler Mengen zusammentragen. Dazu erinnern wir an den Begriff des partitionsregulären Systems von Teilmengen, den wir zu Beginn des Abschnittes 4.3 eingeführt haben. Eine solche partitionsreguläre Familie $\mathcal{G}$ heißt *translationsinvariant*, wenn $sGt \in \mathcal{G}$ für alle $s, t \in S$ und $G \in \mathcal{G}$ ist.

Zur Formulierung des Lemmas benötigen wir außerdem den Begriff der Quotientenmenge, der für eine Teilmenge A von S durch $Q(A) := \{x \mid Ax^- \cap A \neq \emptyset\}$ definiert ist.

5.3 Lemma

Es sei S eine unendliche diskrete Halbgruppe und $A \subset S$.

a) Ist A stückweise syndetisch, so enthält jede partitionsreguläre, translationsinvariante Familie nichtleerer, endlicher Teilmengen von S ein Element, das ganz in A enthalten ist.

b) Ist A zentral, so gibt es eine syndetische zentrale Menge B mit $Q(B) \subset Q(A)$.

[1] Eine solche geben N. Hindman, A. Maleki und D. Strauss in *Central sets and their combinatorial characterization*, J. Comb. Theory (A) **74** (1996), 188 - 208. Dies war mir allerdings beim Verfassen dieser Diplomarbeit nicht bekannt.

Beweis: Sei zunächst A stückweise syndetisch und $\mathcal{G}$ ein partitionsreguläres, translationsinvariantes System endlicher Teilmengen von S. Nach Satz 3.13 gibt es ein Element $p \in K(\beta S)$ mit $A \in p$. Dann findet sich mit Satz 3.10 eine endliche Menge $F \in [S]^{<\omega}$, so daß $(\bigcup_{y \in F} Ay^-)s^- \in p$ für alle $s \in S$ ist. Zu jedem $s \in S$ gibt es demnach ein $y_s \in F$ mit $Ay_s^- \in ps$.

Nun ist die Abbildung $(s \longmapsto y_s) : S \longrightarrow F$ eine endliche Partition von S. Da $\mathcal{G}$ nach Voraussetzung partitionsregulär ist, existieren ein $G \in \mathcal{G}$ und ein $y \in F$, so daß $y_g = y$ für alle $g \in G$ ist. Damit gilt $Ay^- \in pg$ für alle $g \in G$. Das bedeutet, daß die Menge $\{t \mid tGy \subset A\}$ in p liegt, also insbesondere nicht leer ist.

Es gibt demnach ein $t \in S$ mit $tGy \subset A$. Da $\mathcal{G}$ translationsinvariant ist, gilt $tGy \in \mathcal{G}$, womit a) bewiesen ist.

Für den Beweis von b) sei p ein minimales Idempotent von βS, das A enthält. Mit $B := \{t \mid At^- \in p\}$ gilt wegen $p^2 = p$ jedenfalls $B \in p$. Somit ist B zentral.

Wir zeigen, daß B auch syndetisch ist. Da $A \in p \in K(\beta S)$ ist, gibt es nach Satz 3.10 eine endliche Menge $F \in [S]^{<\omega}$, so daß $(\bigcup_{y \in F} Ay^-)t^- \in p$ für alle $t \in S$ ist. Zu jedem $t \in S$ existiert also ein $y \in F$ mit $A(ty)^- = Ay^-t^- \in p$. Das bedeutet $ty \in B$, also insgesamt $tF \cap B \neq \emptyset$.

Es bleibt $Q(B) \subset Q(A)$ zu zeigen. Dazu sei $x \in Q(B)$ beliebig. Nach Definition der Quotientenmenge existiert dann ein $b \in B$ mit $bx \in B$. Dies bedeutet $Ab^- \in p$ und $A(bx)^- \in p$, also $A, Ax^- \in pb$. Daher ist der Schnitt $A \cap Ax^-$ nicht leer, woraus sofort $x \in Q(A)$ folgt. □

Der nächste Satz gibt weitere Eigenschaften von stückweise syndetischen und von IP-Mengen der Halbgruppe $(\mathbb{N}, +)$ an.

5.4 Satz

a) *Jede IP-Menge A der Halbgruppe $(\mathbb{N}, +)$ ist eine Näherungsmenge in folgendem Sinne. Zu jeder endlichen Teilmenge $F \subset \mathbb{R}$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in A$ mit $\mathrm{dist}(nF, \mathbb{Z}) < \varepsilon$.*

b) *Ist A eine IP-Menge der Halbgruppe $(\mathbb{N}, +)$ und $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ eine beliebige Abbildung, dann existiert eine Folge $x = (x_n)_n \subset \mathbb{N}$ mit $Fs(x) \subset A$ derart, daß $f(x_n) \mid x_m$ für alle $n < m$ gilt.*

c) *Jede stückweise syndetische Teilmenge der Halbgruppe $(\mathbb{N}, +)$ enthält arithmetische Progressionen beliebiger Länge.*

Beweis: Wir geben uns $F = \{x_1, \ldots, x_k\} \in [\mathbb{R}]^{<\omega}$ sowie $\varepsilon > 0$ vor und betrachten den Halbgruppenhomomorphismus $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, der durch $\varphi(n) := (nx_1+\mathbb{Z}, \ldots, nx_k+\mathbb{Z})$ definiert ist. Da φ in eine kompakte Gruppe abbildet, läßt sich φ nach Satz 3.3 zu einem stetigen Halbgruppenhomomorphismus auf βS fortsetzen. Zur IP-Menge A gibt es nach Satz 4.13 ein Idempotent $p \in \beta S$, das A enthält. Offensichtlich gilt dann $\varphi(p) = (0, \ldots, 0)$. Nun findet sich aufgrund der Stetigkeit von φ mit Satz 1.9 eine in p liegende Menge B, für die

$$\varphi(\overline{B}) \subset \{(y_1 + \mathbb{Z}, \ldots, y_k + \mathbb{Z}) \mid -\varepsilon < y_i < \varepsilon \ (1 \leq i \leq k)\}$$

gilt.
Für $n \in B \cap A$ gibt es also $y_1, \ldots, y_k$ mit $|y_i| < \varepsilon$ und $nx_i + \mathbb{Z} = y_i + \mathbb{Z}$ für alle $i = 1, \ldots, k$. Daraus folgt unmitelbar $\operatorname{dist}(nF, \mathbb{Z}) < \varepsilon$, was zu zeigen war.
Zum Beweis von b) wählen wir nach Satz 4.13 ein Idempotent p, das A enthält und definieren die zweistellige Relation $\prec$ auf $\mathbb{N}$ durch $a \prec b :\Leftrightarrow f(a) \mid b$. Nach Lemma 4.10 ist die Menge $\mathbb{N}^{\prec}$ eine kompakte Unterhalbgruppe von $(\beta\mathbb{N}, +)$. Wegen Lemma 4.9 reicht es daher, die Aussage $p \in \mathbb{N}^{\prec}$ zu beweisen (denn dann ist ersichtlich die Bedingung $(*)$ aus Lemma 4.9 erfüllt).
Angenommen, p liegt nicht in $\mathbb{N}^{\prec}$. Dann gibt es nach Definition von $\mathbb{N}^{\prec}$ ein $a \in \mathbb{N}$ mit $\mathbb{N}_a \notin p$, d.h. mit $\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_a \in p$. Weil demnach $\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_a$ eine IP-Menge ist, existiert eine injektive Folge $y = (y_n)_n$ mit $Fs(y) \subset \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_a$. Nach dem Schubfachprinzip gibt es dann $x \in \{0, \ldots, f(a) - 1\}$ und $\{n_1, \ldots, n_{f(a)}\}_< \subset \mathbb{N}$ derart, daß

$$y_{n_j} \equiv x \pmod{f(a)}$$

für alle $1 \leq j \leq f(a)$ gilt. Somit teilt $f(a)$ die Summe der y_{n_j}, denn diese Summe besteht aus $f(a)$ Summanden, die alle modulo $f(a)$ gleich sind. Daher gilt $y_{n_1} + \ldots + y_{n_{f(a)}} \in Fs(y) \cap \mathbb{N}_a$, was im Widerspruch zu $Fs(y) \subset \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_a$ steht.
Um die Behauptung c) einzusehen, bieten sich uns zwei Möglichkeiten. Die eine besteht darin, den Beweis des Satzes von van der Waerden zu rekapitulieren. Es wurde dort eigentlich gezeigt, daß eine Menge A beliebig lange arithmetische Progressionen enthält, wenn es ein $p \in \beta\mathbb{N}$ mit $A \in p \in K(\beta\mathbb{N})$ gibt. Dies ist aber nach Satz 3.13 gleichbedeutend dazu, daß A stückweise syndetisch ist.
Die zweite Möglichkeit nutzt Satz 5.3 aus. Für jede natürliche Zahl l ist ja das System aller arithmetischen Progressionen der Länge l translationsinvariant und nach dem Satz von van der Waerden 4.16 auch partitionsregulär. Mit Satz 5.3 muß dann jede stückweise syndetische Menge eine Progression der Länge l enthalten. □

5.2 Doppelhalbgruppen

Auf der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sind durch Addition und Multiplikation zwei Halbgruppenstrukturen gegeben, die durch ein Distributivgesetz miteinander verknüpft sind. Zu dieser algebraischen tritt die kombinatorische Beziehung, daß jede Vielfachenmenge $\mathbb{N}k$ eine bezüglich Addition syndetische (kurz: +-syndetische) Menge ist. (Von k aufeinanderfolgenden Zahlen ist genau eine durch k teilbar.) Dieses Beispiel ist unsere Motivation für folgende Definition.

5.5 Definition Eine *Doppelhalbgruppe* ist ein Tripel $(S, +, \cdot)$ bestehend aus einer nichtleeren Menge S und zwei assoziativen Verknüpfungen $+, \cdot$ auf S mit den Eigenschaften:

a) $(a+b)c = ac + bc$ für alle $a, b, c \in S$.
b) Die Vielfachenmenge Sx ist +-syndetisch für jedes $x \in S$.

5.6 Satz

Es sei $(S, +, \cdot)$ eine Doppelhalbgruppe, K das minimale Ideal und J die Menge der minimalen Idempotente der Halbgruppe $(\beta S, +)$. Dann sind die Mengen $\overline{K}$ und $\overline{J}$ Rechtsideale von $(\beta S, \cdot)$.

Beweis: Alle Bezeichnungen werden im Hinblick auf die additive Struktur von βS verstanden, wenn nicht eine explizite Kennzeichnung erfolgt.

1) Um zu zeigen, daß $\overline{K}$ ein multiplikatives Rechtsideal ist, reicht es nach Lemma 2.12 aus, $\overline{K}S \subset \overline{K}$ nachzuweisen. Sei dazu $p \in \overline{K}, x \in S, A \in ps$. Wir müssen wegen Satz 3.14 zeigen, daß A stückweise syndetisch ist.
Zunächst ist $Ax^- \in p$, also Ax^- stückweise syndetisch, d.h. es gibt eine endliche Menge $G \in [S]^{<\omega}$, so daß $\bigcup_{t\in G}(Ax^- - t)$ dick ist.
Aufgrund der Voraussetzung ist Sx syndetisch. Also gibt es ein $H \in [S]^{<\omega}$ mit $(y + H) \cap Sx \neq \emptyset$ für jedes $y \in S$. Wir setzen $G' := (H + Gx) \cup Gx \in [S]^{<\omega}$ und behaupten, daß $C := \bigcup_{t\in G'} A - t$ dick ist (dann ist nach Definition 3.11 die Menge A als stückweise syndetisch erkannt).
Sei $F \in [S]^{<\omega}$ und für jedes $y \in F$ wählen wir ein $t_y \in S$ mit $t_y x \in y + H$. Das ist nach Wahl von H möglich. Wir setzen $B := \{t_y \,|\, y \in F\} \in [S]^{<\omega}$. Da $\bigcup_{t\in G}(Ax^- - t)$ dick ist, existiert ein $z \in \bigcup_{t\in G}(Ax^- - t)$ mit $z + B \subset \bigcup_{t\in G}(Ax^- - t)$. Sei $g \in G$, so daß $(z + g)x \in A$ ist. Wegen $(z + g)x = zx + gx$ ist $zx \in C$.

Es bleibt nur noch $zx + F \subset C$ zu zeigen. Sei dazu $y \in F$. Nach Wahl von z gibt es dann ein $g_y \in G$ mit $(z + t_y + g_y)x \in A$. Ausmultiplizieren ergibt $zx + t_y x + g_y x \in A$. Nun ist aber $t_y x = y + h$ für ein $h \in H$ nach Wahl von t_y, somit folgt $zx + y + h + g_y x \in A$. Aus $h + g_y x \in G'$ ergibt sich schließlich $zx + y \in C$.

2) Für alle $p, q, \in \beta S, x \in S$ gilt

$$\begin{aligned} (p+q)x &= (q\text{-}\lim_t p\text{-}\lim_s (s+t))x = q\text{-}\lim_t p\text{-}\lim_s (s+t)x = \\ &= q\text{-}\lim_t p\text{-}\lim_s (sx+tx) = q\text{-}\lim_t ((p\text{-}\lim_s sx) + tx) = \\ &= (p\text{-}\lim_s sx) + (q\text{-}\lim_t tx) = (p\text{-}\lim_s s)x + (q\text{-}\lim_t t)x = \\ &= px + qx. \end{aligned}$$

3) Nach Lemma 2.12 ist $\overline{J}$ ein Rechtsideal von $(\beta S, \cdot)$, wenn $JS \subset J$ gilt. Seien nun $p \in J, x \in S$. Dann ist p ein Idempotent, und aus 2) folgt, daß px ebenfalls ein Idempotent ist. Daher reicht es zu zeigen, daß $px \in K$ ist (denn dann ist px ein Idempotent, das in einem minimalen Rechtsideal liegt, also ein minimales Idempotent).

Wir wollen Satz 3.10 anwenden und wählen dazu $A \in px$. Dann ist Ax^- in p, und wegen $p \in K$ existiert nach Satz 3.10 eine endliche Menge $G \in [S]^{<\omega}$, so daß $(\bigcup_{g\in G} Ax^- - g) - y \in p$ ist für jedes $y \in S$.

Nach Voraussetzung ist Sx syndetisch. Daher gibt es ein $H \in [S]^{<\omega}$ mit $(y + H) \cap Sx \neq \emptyset$ für jedes $y \in S$. Wir setzen $F := H + Gx$ und zeigen jetzt, daß $B := \bigcup_{t\in F} A - t$ in $C(px)$ ist.

Sei dazu $y \in S$. Nach Wahl von H gibt es $y' \in S, h \in H$ mit $y + h = y'x$. Ist nun $z \in (\bigcup_{g\in G} Ax^- - g) - y'$, d.h. gilt $(z + y' + g)x \in A$ für ein $g \in G$, dann ist also $zx + y + h + gx = zx + y'x + gx = (z + y' + g)x \in A$. Daraus folgt $zx \in (\bigcup_{t\in F} A - t) - y$, und insgesamt $(\bigcup_{s\in G} Ax^- - s) - y' \subset (B - y)x^-$. Weil die kleinere dieser beiden Mengen im Ultrafilter p liegt, gehört auch die größere zu p. Es gilt also $B - y \in px$, und da $y \in S$ beliebig war, folgt schließlich $B \in C(px)$, was zu beweisen war. □

Wählt man mit dem Satz von Ellis 2.13 ein minimales Idempotent p der Halbgruppe $(\beta S, \cdot)$ im Rechtsideal $\overline{J}$, so ist jede Menge $A \in p$ trivialerweise multiplikativ zentral. Weil aber $\overline{A} \cap J \neq \emptyset$ gilt und darum A in einem minimalen Idempotent der Halbgruppe $(\beta S, +)$ liegt, ist A auch additiv zentral. Der Ultrafilter p enthält also nur sowohl additiv wie multiplikativ zentrale Mengen.

5.3 Kombinatorisch reichhaltige Ultrafilter

In diesem Abschnitt wollen wir die Existenz von Ultrafiltern auf $\mathbb{N}$ beweisen, deren Elemente viele kombinatorische Eigenschaften haben. Man könnte sich durchaus mit einem Ultrafilter begnügen, dessen Elemente alle zugleich multiplikativ und additiv zentral sind (wobei zu beachten ist, daß zentrale Mengen sowohl IP-Mengen wie stückweise syndetisch sind).
Wir können aber durch eine leichte Variation des Argumentes noch eine weitere kombinatorische Eigenschaft hinzufügen, die nicht schon aus der Zentralität (bezüglich $+$ oder $\cdot$) folgt. Diese hängt mit dem Begriff der oberen Dichte zusammen.

5.7 Definition Für eine Menge $A \subset \mathbb{N}$ heißt

$$\overline{d}(A) := \limsup_n \frac{1}{n}|A \cap \{1, \dots, n\}|$$

die *obere Dichte* von A.

5.8 Bemerkungen 1) Eine Menge hat also genau dann eine positive obere Dichte, wenn es einen festen positiven Prozentsatz ε so gibt, daß für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mindestens $\varepsilon\%$ der Zahlen $\{1, \dots, n\}$ in A liegen. Darum nennen wir eine solche Menge auch *voll*.

2) Nach einem gefeierten Resultat von Szemerédi in [80] enthält jede Menge positiver oberer Dichte arithmetische Progressionen beliebiger Länge.

3) Für uns ohne Belang, in der Literatur allerdings von einiger Bedeutung ist die sogenannte *Banach-Dichte*. Sie ist für $A \subset \mathbb{N}$ definiert durch

$$d^*(A) := \sup\{\alpha \mid \exists (a_n)_n, (t_n)_n \subset \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} : |A \cap \{a_n, a_n+1, \dots, a_n+t_n\}| \geq \alpha t_n\}.$$

(Vgl. Hindman [50], Definition 3.3 und Bergelson [6], Introduction.) Eine Menge ist genau dann dick (siehe Definition 3.11), wenn ihre Banach-Dichte gleich Eins ist.

Dem zentralen Resultat über Mengen positiver oberer Dichte schicken wir ein technisches Lemma voraus.

5.9 Lemma
Für Teilmengen A, B von $\mathbb{N}$ sind folgende Aussagen richtig:
a) $A \subset B \quad \Rightarrow \quad \overline{d}(A) \leq \overline{d}(B)$.

b) $\overline{d}(A \cup B) \leq \overline{d}(A) + \overline{d}(B)$.

c) $\overline{d}(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{d}(A - t) = 0 \quad$ *und* $\quad \overline{d}(At^-) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{N}$.

Beweis: Wir schreiben $[n, m]$ für $\{n, n+1, \ldots, m\}$.

a) Ist $A \subset B$, so gilt $|A \cap [1, n]|/n \leq |B \cup [1, n]|/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt sofort $\overline{d}(A) \leq \overline{d}(B)$.

b) Es gilt $|(A \cup B) \cap [1, n]| \leq |A \cap [1, n]| + |B \cap [1, n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Behauptung folgt unmittelbar.

c) Sei $t \in \mathbb{N}$. Dann ist $|A - t \cap [1, n]| = |A \cap [t+1, t+n]| \leq |A \cap [1, n+t]|$ für alle n. Daraus folgt $|A - t \cap [1, n]|/n \leq (n+t)/n \cdot |A \cap [1, n+t]|/(n+t)$, und der letzte Term konvergiert nach Voraussetzung gegen 0.
In ähnlicher Weise gilt $|At^- \cap [1, n]| \leq |A \cap [t, nt]| \leq |A \cap [1, nt]|$, und daraus folgt $|At^- \cap [1, n]|/n \leq t \cdot |A \cap [1, nt]|/(nt)$. Wieder drückt der größere den kleineren Term gegen 0. □

Wir können nun die kombinatorische Eigenschaft, positive obere Dichte zu haben, mit einem algebraischen Objekt der Halbgruppen $(\beta\mathbb{N}, +)$ und $(\beta\mathbb{N}, \cdot)$ in Verbindung bringen.

5.10 Satz

Sei $\Delta \subset \beta\mathbb{N}$ definiert durch $\Delta := \{p \in \beta\mathbb{N} \,|\, \forall A \in p : \overline{d}(A) > 0\}$. Dann ist $\Delta \subset \mathbb{N}^*$ ein abgeschlossenes Rechtsideal sowohl von $(\beta\mathbb{N}, +)$ als auch von $(\beta\mathbb{N}, \cdot)$.

Beweis: Offensichtlich ist Δ abgeschlossen und liegt in $\mathbb{N}^*$.
Wir zeigen zunächst $\Delta + \beta\mathbb{N} \subset \Delta$. Mit Lemma 2.12 reicht es dazu, $\Delta + \mathbb{N} \subset \Delta$ nachzuweisen. Es seien also $p \in \Delta, t \in \mathbb{N}$ und $A \in p + t$ gegeben. Dann ist $A - t \in p$, also $\overline{d}(a - t) > 0$. Aufgrund des obenstehenden Lemmas 5.9 gilt $\overline{d}(A) > 0$, woraus schließlich $p + t \in \Delta$ folgt.
Der Beweis für $\Delta \cdot \beta\mathbb{N} \subset \Delta$ verläuft vollständig analog.
Zum Nachweis von $\Delta \neq \emptyset$ betrachten wir das System

$$\mathcal{M} := \{\mathcal{A} \subset \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \,|\, \mathcal{A} \neq \emptyset \text{ und } \forall n \in \mathbb{N}; \forall A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} : \overline{d}(\bigcap_i A_i) > 0\}.$$

Dann ist jedenfalls $\{\mathbb{N}\} \in \mathcal{M}$, also $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Man überzeugt sich leicht, daß $\mathcal{M}$ durch Inklusion induktiv geordnet ist. Demnach hat $\mathcal{M}$ mit Zorns Lemma ein maximales Element $\mathcal{F}$.

Wegen $\overline{d}(\emptyset) = 0$ gilt $\emptyset \notin \mathcal{F} \neq \emptyset$. Aufgrund der Monotonie von $\overline{d}$ (Lemma 5.9) gilt

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{G} := \{B \mid \exists A \in \mathcal{F},\ A \subset B\} \in \mathcal{M}.$$

Nach Wahl von $\mathcal{F}$ ist dann $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. Auf gleiche Weise sieht man auch, daß $\mathcal{F}$ $\cap$-stabil ist. Darum ist $\mathcal{F}$ ein Filter.
Es bleibt zu zeigen, daß $\mathcal{F}$ sogar ein Ultrafilter ist. Sei $A \subset \mathbb{N}$ derart, daß weder A noch A^c in $\mathcal{F}$ liegt. Aufgrund der Maximalität von $\mathcal{F}$ ist dann $\mathcal{F} \cup \{A\}, \mathcal{F} \cup \{A^c\} \notin \mathcal{M}$. Darum gibt es Mengen $B, C \in \mathcal{F}$, so daß $\overline{d}(B \cap A) = \overline{d}(C \cap A^c) = 0$ ist. Nun ist aber $B \cap C \subset (B \cap A) \cup (C \cap A^c)$, also gilt mit Lemma 5.9

$$0 < \overline{d}(B \cap C) \leq \overline{d}((B \cap A) \cup (C \cap A^c)) \leq \overline{d}(B \cap A) + \overline{d}(C \cap A^c) = 0.$$

Die Behauptung folgt. □

Jetzt kommen wir zum Hauptergebnis dieses Kapitels.

5.11 Satz

Es gibt einen Ultrafilter $q \in \beta\mathbb{N}$ mit folgenden Eigenschaften:

a) *q ist ein minimales Idempotent der Halbgruppe $(\beta\mathbb{N}, \cdot)$.*
b) *Jede Menge $A \in q$ ist zentral in der Halbgruppe $(\beta\mathbb{N}, +)$.*
c) *Jede Menge $A \in q$ hat positive obere Dichte.*

Beweis: Es sei J die Menge der minimalen Idempotente und K das minimale Ideal der Halbgruppe $(\beta\mathbb{N}, +)$.
Weil Δ nach Satz 5.10 ein Rechtsideal in $(\beta\mathbb{N}, +)$ ist, gibt es ein minimales additives Rechtsideal $R \subset \Delta$. In R findet sich nach dem Satz von Ellis 2.13 ein minimales Idempotent r der Halbgruppe $(\beta\mathbb{N}, +)$. Weil alle minimalen Idempotente im minimalen Ideal liegen, gilt also $r \in J \cap \Delta \cap K \subset \overline{J} \cap \Delta \cap \overline{K}$.
Aufgrund der Sätze 5.6 und 5.10 sind nun aber die Mengen $\overline{J}, \overline{K}, \Delta$ Rechtsideale der Halbgruppe $(\beta\mathbb{N}, \cdot)$. Wie eben gesehen ist ihr gemeinsamer Schnitt nicht leer, also selbst wieder ein Rechtsideal. Der Satz von Ellis 2.13 liefert somit ein minimales Idempotent $q \in \overline{J} \cap \overline{K} \cap \Delta$ der Halbgruppe $(\beta\mathbb{N}, \cdot)$.
Für jede Menge $A \in q$ gilt dann zunächst $\overline{d}(A) > 0$, denn q liegt in Δ. Außerdem ist $\overline{A} \cap J \neq \emptyset$ wegen $q \in \overline{J}$, d.h. in der Halbgruppe $(\beta\mathbb{N}, +)$ existiert ein minimales Idempotent p mit $A \in p$. Folglich ist A auch additiv zentral. □

Einen Ultrafilter q, der die im letzten Satz genannten Eigenschaften besitzt, kann man guten Gewissens einen *kombinatorisch reichhaltigen Ultrafilter* nennen, denn jede der in ihm enthaltenen Mengen vereinigt eine Fülle kombinatorischer Eigenschaften auf sich. Der Übersicht wegen geben wir im nächsten Satz eine Auflistung dieser Eigenschaften.

Da wir es auf $\mathbb{N}$ mit einer multiplikativen und einer additiven Struktur zu tun haben, müssen wir zusätzlich zu den endlichen Summen einer Folge $x = (x_n)_n$ auch deren endliche Produkte

$$Fp(x) := \{\prod_{n \in F} x_n \,|\, \emptyset \neq F \in [\mathbb{N}]^{<\omega}\}$$

betrachten. Ferner stellen wir den Quotienten $Q(B)$ der Menge B ihre Differenzen $D(B) := \{x \in \mathbb{N} \,|\, (B - x) \cap B \neq \emptyset\}$ zur Seite.

5.12 Satz

Es gibt einen Ultrafilter $q \in \beta\mathbb{N}$ derart, daß für jede Menge $A \in q$ die folgenden Aussagen richtig sind:

a) *Die Menge A ist additiv und multiplikativ stückweise syndetisch.*
b) $\overline{d}(A) > 0$.
c) *Die Menge A enthält arithmetische Progressionen beliebiger Länge.*
d) *Die Menge A ist eine Näherungsmenge.*
e) *Es gibt eine additiv syndetische und zentrale Menge B mit $D(B) \subset D(A)$.*
f) *Es gibt eine multiplikativ syndetische und zentrale Menge C mit $Q(C) \subset Q(A)$.*
g) *Es gibt eine injektive Folge $y = (y_n)_n$ mit $Fp(y) \subset A$.*
h) *Zu jeder Funktion $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ gibt es ein Folge $x = (x_n)_n$ mit $Fs(x) \subset A$ derart, daß $f(x_n) \,|\, x_m$ für $n < m$ gilt.*
i) *Jedes translations- oder streckungsinvariante, partitionsreguläre System endlicher Teilmengen von $\mathbb{N}$ besitzt ein Element, das ganz in A enthalten ist.*

Zum Beweis genügt ein Hinweis auf Lemma 5.3, Korollar 3.7 und die Sätze 5.4, 5.10, sowie 3.13 und 4.13.

Bemerkungen

Der Begriff der zentralen Menge findet sich auf Seite 161 von Furstenberg [34]. Dort ist er für die Halbgruppe $\mathbb{N}$ in einem topologisch-dynamischen Kontext definiert. V. Bergelson und N. Hindman geben in [10] die allgemeine Definition (unsere Definition 5.1) und zeigen anschließend unter Hinweis auf Glasner [41] die Gleichwertigkeit zu

Furstenbergs Zentralitätsbegriff. In einem späteren Artikel [11] beweisen dieselben Autoren aufbauend auf dem Begriff der zentralen Menge starke Ramseysätze für nichtkommutative Halbgruppen, darunter nichtkommutative Versionen des van der Waerdenschen Satzes und Grünwalds Theorem. Seither sind zahlreiche Aufsätze erschienen, in denen zentrale Mengen eine wichtige Rolle spielen (siehe etwa Bergelson und Hindman [12], Bergelson, Hindman und Kra [13] oder Hindman und Woan [61]).

Daß man zu einer gegebenen Färbung von $\mathbb{N}$ Folgen $x = (x_n)_n$ und $y = (y_n)_n$ derart finden kann, daß $Fs(x) \cup Fp(y)$ monochrom ist, ist seit 1979 (Hindman [46]) bekannt. Anfänglich richtete sich das Interesse darauf zu zeigen, daß dabei sogar immer $x = y$ möglich ist. N. Hindman konnte in [48] beweisen, daß dies nicht stimmt. Eine unmittelbare Folgerung war, daß es keine Ultrafilter $p \in \beta\mathbb{N}$ mit $p+p = p \cdot p = p$ geben kann. Dieses und verwandte Ergebnisse sind in Hindman [49] nachzulesen.

In ihrem Artikel „A combinatorially large cell of a partition of $\mathbb{N}$“ [8] aus dem Jahre 1988 prägten V. Bergelson und N. Hindman den Begriff des kombinatorisch reichhaltigen Ultrafilters (*combinatorially large ultrafilter*). Ein solcher Ultrafilter erfüllt viel mehr Bedingungen, als wir in diesem Kapitel vorstellen konnten; darum haben wir eine Auswahl getroffen und mit den Sätzen 5.11 und 5.12 lediglich sehr abgeschwächte Versionen der Sätze 2.16 und 3.16 aus [8] bewiesen.

Während Lemma 5.3 im Spezialfall $S = \mathbb{N}$ ebenfalls aus [8] stammt (Theorem 3.2 und 3.4, allerdings mit einer kleinen Variante in der Definition der Quotientenmenge, die uns die Verallgemeinerung auf nicht notwendig kommutative Halbgruppen erlaubte), geht der Begriff der Näherungsmenge und Teil a) von Satz 5.4 auf Hindman und Strauss [60], Lemma 2.9 zurück. Teil b) desselben Satzes ist in dieser Form neu, lehnt sich aber im Beweis an Lemma 4.6 von [10] an. Teil c) steht auch in [8] (mit der zweiten Beweisvariante).

Ohne einen Begriff dafür zu definieren, studiert A. Lisan in [64] Strukturen, die wir in Definition 5.5 als Doppelhalbgruppen bezeichnet haben. Der Teil unseres Satzes 5.6, der eine Aussage über den Abschluß $\overline{K}$ des minimalen Ideals macht, ist Theorem 1.3 des Lisan-Artikels. Der andere Teil ist neu, orientiert sich aber stark an dem speziellen Ergebnis für $S = \mathbb{N}$, das in Bergelson und Hindman [10] als Theorem 5.4 zu finden ist.

Die Definition der oberen Dichte sowie der Satz 5.10 ist in Hindman [47] nachzulesen; das Ergebnis wird jedoch E.K. van Douwen zugeschrieben. Tatsächlich erscheint es in dem posthum veröffentlichten Artikel [82] von E.K. van Douwen als Theorem 7.4. Dort wird die obere Dichte dazu benutzt, die Menge $\mathbb{N}$ als das (algebraische) Zentrum der Halbgruppen $(\beta\mathbb{N}, +)$ und $(\beta\mathbb{N}, \cdot)$ zu bestimmen (Theorem 7.5 von [82]).

Dichteversionen klassischer Ramseysätze haben in der Ramseytheorie zumindest seit E. Szemerédis Artikel [80] einen festen Platz. Im Jahre 1977 konnte H. Furstenberg in [33] Szemerédis Satz mit ergodentheoretischen Methoden beweisen; Furstenbergs Buch [34] und weitere Artikel, etwa Furstenberg und Katznelson [35] oder Furstenberg, Katznelson und Ornstein [38] bauten diesen Ansatz aus. Einen allgemeinen Überblick über den Zusammenhang von Ergodentheorie und Ramseytheorie gibt Bergelson [6]. Das wohl herausragendste Resultat in dieser Richtung ist ein Beweis einer Dichteversion des Hales-Jewett-Theorems, der H. Furstenberg und Y. Katznelson in [37] gelungen ist.

Kapitel 6

Halbgruppenungetüme

6.1 Definition und Beispiele

Dieses Kapitel rundet unsere Betrachtungen zur Ramseytheorie ab, indem es zeigt, wie sich die klassischen Resultate von Hindman, van der Waerden und Hales-Jewett als Korollare *eines* Theorems über sogenannte „Halbgruppenungetüme“ ergeben.
Der erste Abschnitt stellt zunächst die Definition dieser Ungetüme vor und motiviert sie. Sodann wird eine Liste von Beispielen angeführt, um die Leistungsfähigkeit des neuen Begriffs (und ihre Grenzen) zu demonstrieren. Im zweiten Abschnitt beweisen wir den Hauptsatz über Halbgruppenungetüme, um schließlich im letzten Abschnitt Ramseytheoretische Folgerungen aus dem Hauptsatz zu ziehen. Wir werden dabei einer weitreichenden Verallgemeinerung des Satzes von Hales-Jewett begegnen.

Zur Motivation der nachstehenden Definition sei an die Vorbemerkungen zum Satz von Hales-Jewett 4.19 auf Seite 54 erinnert. Dort war ein endliches „Alphabet“ Σ gegeben und eine nicht in Σ enthaltene „Variable“ v. Die Menge $S := (\Sigma \cup \{v\})^+$ aller „Wörter“ über $\Sigma \cup \{v\}$ ist eine Halbgruppe bezüglich Konkatenation. Dabei ist die Menge $C := \Sigma^+$ aller „konstanten Wörter“ eine Unterhalbgruppe und die Menge $V := S \setminus C$ aller „variablen Wörter“ ein zweiseitiges Ideal in S. Für jeden Einsetzungshomomorphismus η_a gilt $\eta_a(S) \subset C$ und $\eta_a(c) = c$ für alle $c \in C$.
In den Überlegungen zum Beweis des Satzes von Hindman erwies es sich als günstig, zusätzlich zur Halbgruppenstruktur noch eine auf der Halbgruppe definierte zweistellige Relation $\prec$ einzubeziehen.
Die folgende Definition vereinigt diese Strukturelemente.

6.1 DEFINITION Es sei $(S,+)$ eine Halbgruppe, C,V nichtleere Teilmengen von S, $\prec$ eine zweistellige Relation auf S und T eine Menge von Abbildungen von S in sich mit $id_S \in T$. Das Tupel $(S,+,\prec,C,V,T)$ heißt *Halbgruppenungetüm* (kurz: *Ungetüm*), falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) 1) $x \prec a, x \prec b \Rightarrow x \prec (a+b)$ für alle $x,a,b \in S$.
   2) Zu je endlich vielen Elementen $x_1,\dots,x_n$ aus S gibt es ein $a \in V$ mit $x_1,\dots,x_n \prec a$.
   3) Zu je endlich vielen Elementen $x_1,\dots,x_n$ aus S gibt es ein $c \in C$ mit $x_1,\dots,x_n \prec c$.

b) 1) Die Menge C ist eine *partielle Unterhalbgruppe* von S, d.h. es gilt $y \prec x \;\Rightarrow x+y \in C$ für alle $x,y, \in C$.
   2) Die Menge V ist ein *partielles Ideal* von S, d.h. es gilt $y \prec x \;\Rightarrow\; x+y \in V$ für alle $x,y \in S$, so daß $x \in V$ oder $y \in V$ ist.

c) 1) Jedes $\varphi \in T$ ist ein *partieller Homomorphismus* von S, d.h. es gilt $y \prec x \;\Rightarrow\; \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ für alle $x,y \in S$.
   2) Für $id \neq \varphi \in T$ gilt $\varphi(S) \subset C$ und $\varphi(c) = c$ für alle $c \in C$.
   3) Es gilt $a \prec x \;\Rightarrow\; a \prec \varphi(x)$ für alle $\varphi \in T$ und alle $a,x \in S$.

6.2 BEMERKUNG 1) Die Menge V ist (auch im Hinblick auf den Hauptsatz 6.9) von untergeordneter Bedeutung. Erfüllt das Tupel $(S,+,\prec,C,T)$ die relevanten Bedingungen (a.1), (a.2), (b.1), (c.1), (c.2) und (c.3), so ist mit $V := S$ das Tupel $(S,+,\prec,C,V,T)$ ein Ungetüm. Wir haben V als zusätzliches Strukturelement mit in die Definition aufgenommen, weil es in den wichtigen Anwendungen auf die Sätze von van der Waerden und Hales-Jewett eine Rolle spielt.

2) Ist $(S,+,\prec,C,V,T)$ ein Ungetüm, so ist T eine Halbgruppe bezüglich Komposition.

3) Um den Gegensatz zu den in der Definition 6.1 eingeführten *partiellen* Unterhalbgruppen/Idealen/Homomorphismen deutlich zu machen, nennen wir Unterhalbgruppen/Ideale/Homomorphismen im Sinne der Definitionen 2.1 und 2.2 auch *total*.

An Beispielen herrscht kein Mangel.

6.3 BEISPIELE (1)

1) Sei $(S,+)$ eine Halbgruppe. Dann ist $(S,+,S \times S,S,S,\{id\})$ ein Ungetüm. Erfüllen C,V und $\prec$ die Bedingungen a) und b) aus Definition 6.1, so ist

$(S, +, \prec, C, V, \{id\})$ ein Ungetüm.

2) Sei $S := \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ beliebig. Definiert man $n \prec m :\Leftrightarrow f(n)|m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$, so ist $(\mathbb{N}, +, \prec, \mathbb{N}, \mathbb{N}, \{id\})$ ein Ungetüm.
3) Sei X eine unendliche Menge. Dann ist $S := [X]^{<\omega}$ mit der gewöhnlichen Vereinigung eine Halbgruppe. Setzt man $C := \{\emptyset\}, V := S \setminus C$ und definiert man $A \prec B :\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$, so ist $(S, \cup, \prec, C, V, \{id\})$ ein Ungetüm.
4) Sei Σ endliches Alphabet, $v \notin \Sigma$. Die Halbgruppe S sei $(\Sigma \cup \{v\})^+$ und $+$ sei Konkatenation. Weiter sei $C := \Sigma^+$, $V := S \setminus C$ und $\prec := S \times S$ die Allrelation. Setzt man $T := \{\eta_a \mid a \in \Sigma \cup \{v\}\}$, so ist $(S, +, \prec, C, V, T)$ ein Ungetüm.

Für weitere Beispiele benötigen wir eine Definition.

6.4 Definition Sei X eine Menge. Eine X-*Kombination* ist eine partielle Funktion w von $\mathbb{N}$ nach X mit endlichem nichtleeren Definitionsbereich $\emptyset \neq \mathrm{dom}(w) \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$. Es bezeichne $\mathrm{ran}(w)$ den Wertebereich einer X-Kombination w und A_X die Menge aller X-Kombinationen.

6.5 Beispiele (2)

5) Sei $(S, +)$ eine Halbgruppe. Für $w, u \in A_S$ setze

$$(w+u)(n) := \begin{cases} w(n) + u(n) & : \; n \in \mathrm{dom}(w) \cap \mathrm{dom}(u) \\ w(n) & : \; n \in \mathrm{dom}(w) \setminus \mathrm{dom}(u) \\ u(n) & : \; n \in \mathrm{dom}(u) \setminus \mathrm{dom}(w) \\ \perp & : \; \text{sonst} \end{cases}$$

und $w < u :\Leftrightarrow \mathrm{dom}(w) < \mathrm{dom}(u)$. Dann gilt $\mathrm{dom}(u+w) = \mathrm{dom}(u) \cup \mathrm{dom}(w)$, und $(A_S, +, <, A_S, A_S, \{id\})$ ist ein Ungetüm.

6) Sei S eine Menge und T eine endliche Halbgruppe von Abbildungen von S in sich mit $id_S \in T$. Wir setzen

$$C_T := \{w \in A_T \mid id \notin \mathrm{ran}(w)\} \quad \text{und} \quad V_T := A_T \setminus C_T.$$

Es bezeichne $\cdot$ die Hintereinanderausführung von Elementen aus T, also die Halbgruppenoperation auf T. Wie in Beispiel 5 läßt sie sich auf A_T fortsetzen. Für jedes $\varphi \in T$ sei $\hat{\varphi} : A_T \longrightarrow A_T$ definiert durch

$$\hat{\varphi}(w)\,(n) := \begin{cases} \varphi \circ (w(n)) & : \; n \in \mathrm{dom}(w) \\ \perp & : \; n \notin \mathrm{dom}(w). \end{cases}$$

Wir setzen $\tilde{T} := \{\hat{\varphi} \,|\, \varphi \in T\}$. Ist dann noch $T \neq \{id\}$, d.h. $C_T \neq \emptyset$, so ist $(A_T, \cdot, <, C_T, V_T, \tilde{T})$ ein Ungetüm.

7) Sei Σ ein endliches Alphabet, $v \notin \Sigma$ eine Variable. Die Mengen S, C, V seien wie in Beispiel 4 von 6.3 erklärt. Man betrachte nun in A_S die Mengen

$$\tilde{C} := \{w \in A_S \,|\, \mathrm{ran}(w) \subset C\} \quad \text{und} \quad \tilde{V} := \{w \in A_S \,|\, \mathrm{ran}(w) \cap V \neq \emptyset\}.$$

Für jedes $x \in \Sigma \cup \{v\}$ ist η_x eine Abbildung von S in sich. Ist w eine S-Kombination, so ist die S-Kombination $E_x(w) := \eta_x \circ w$ in naheliegender Weise erklärt:

$$(\eta_x \circ w)(n) := \begin{cases} \eta_x(w(n)) & : \; n \in \mathrm{dom}(w) \\ \perp & : \; n \notin \mathrm{dom}(w). \end{cases}$$

Es sei $T := \{E_x \,|\, x \in \Sigma \cup \{v\}\}$. Definiert man wieder

$$w < u :\Leftrightarrow \mathrm{dom}(w) < \mathrm{dom}(u),$$

so ist $(A_S, +, <, \tilde{C}, \tilde{V}, T)$ ein Ungetüm.

In all diesen Fällen erfordert der Nachweis der Gültigkeit der Eigenschaften a), b) und c) aus Definition 6.1 ausschließlich unproblematische elementare Überlegungen.

Es sollte an dieser Stelle aber angemerkt werden, daß mir kein Beispiel bekannt ist, welches den Spielraum von Definition 6.1 voll ausnutzt. Ein Ungetüm ist ein Konglomerat von Strukturelementen, deren Betrachtung durch unterschiedliche Kontexte nahegelegt wird.
Selbst in den (mir bekannten) Fällen, wo alle Komponenten des Ungetüms in einem vernünftigen Sinne als nichttrivial zu bezeichnen sind (wie etwa in Beispiel 7), sind die Mengen C bzw. V schon totale Unterstrukturen und die Elemente von T totale Homomorphismen.

6.2 Der Hauptsatz

Für ein Ungetüm $(S, +, \prec, C, V, T)$ definieren wir in Anlehnung an die Vorgehensweise im Beweis des Satzes von Hindman in Kapitel 4 für jedes $a \in S$ die Menge $S_a := \{b \in S \,|\, a \prec b\}$. Desweiteren seien die Mengen $\delta S, \delta V$ und δC durch

$$\delta S := \bigcap_{a \in S} \overline{S_a}, \qquad \delta C := \overline{C} \cap \delta S, \qquad \delta V := \overline{V} \cap \delta S.$$

erklärt. (Es ist $\delta S = S^{\prec}$ in der Terminologie von Kapitel 4, vgl. Lemma 4.10.) Jedes $\varphi \in T$ hat eine eindeutige Fortsetzung zu einer Abbildung von βS in sich, die wir wie gewöhnlich wieder mit φ bezeichnen.

Das folgende Lemma bildet die Grundlage für alle weiteren Überlegungen.

6.6 LEMMA

a) *Die Menge δS ist eine abgeschlossene Unterhalbgruppe von βS. Die Menge δC ist eine abgeschlossene Unterhalbgruppe von δS. Die Menge δV ist ein abgeschlossenes Ideal von δS.*

b) *Für jedes $\varphi \in T$ ist die Abbildung $\varphi|_{\delta S}$ ein Halbgruppenhomomorphismus von δS in sich. Ist dabei $\varphi \neq id$, so gilt $\varphi(\delta S) \subset \delta C$ und $\varphi(p) = p$ für alle $p \in \delta C$.*

Beweis (vgl. Lemma 4.10): Zu a). Nach Definition 6.1, Teile (a.2) und (a.3) haben die Mengensysteme $\{S_a \,|\, a \in S\}$, $\{S_c \cap C \,|\, c \in C\}$ und $\{S_a \cap V \,|\, a \in S\}$ die endliche Durchschnittseigenschaft. Darum ist keine der drei Mengen $\delta S, \delta V, \delta C$ leer.

Für $p, q \in \beta S, a \in S$ gilt nach Definition 6.1, Teil (a.1) zunächst

$$\begin{aligned}
p \in \overline{S_a}, q \in \overline{S_a} \;&\Rightarrow\; S_a \in p, S_a \in q \\
&\Rightarrow\; a \prec x \text{ für } p\text{-fast alle } x, \quad a \prec y \text{ für } q\text{-fast alle } y \\
&\Rightarrow\; [a \prec x + y \text{ für } p\text{-fast alle } x] \text{ für } q\text{-fast alle } y \\
&\Rightarrow\; [x + y \in S_a \text{ für } p\text{-fast alle } x] \text{ für } q\text{-fast alle } y \\
&\Rightarrow\; p + q \in \overline{S_a}.
\end{aligned}$$

Dies zeigt unmittelbar $\delta S + \delta S \subset \delta S$.

Wenn p und q in δC liegen, gilt $C \in q$ und $C \cap S_y \in p$ für alle $y \in C$. Mit Definition 6.1, Teil (b.1) gilt daher

$$[x + y \in C \text{ für } p\text{-fast alle } x] \text{ für } q\text{-fast alle } y,$$

d.h. $p + q \in \overline{C}$ (siehe Satz 3.1). Zusammengefaßt folgt also $\delta C + \delta C \subset \delta C$.

Ist $p \in \delta V, q \in \delta S$, so gilt $V \cap S_a \in p$ für alle $a \in S$. Das bedeutet nach Definition 6.1, Teil (b.2)

$$[x + y \in V \text{ für } p\text{-fast alle } x] \text{ für } q\text{-fast alle } y.$$

Zu demselben Ergebnis kommt man im Falle $q \in \delta V, p \in \delta S$, denn hier gilt $V \in q$ und $S_a \in p$ für alle $a \in V$. Es gilt also $\delta V + \delta S \subset \delta V$ ebenso wie $\delta S + \delta V \subset \delta V$.

Zu b). Sei $\varphi \in T$. Für $\varphi = id$ ist nichts zu zeigen, also kann $\varphi \neq id$ vorausgesetzt werden. Sei $p \in \delta S$ und $a \in S$. Nach Teil (c.3) der Definition 6.1 und $S_a \in p$ gilt

$$\varphi(x) \in C \cap S_c \text{ für } p\text{-fast alle } x.$$

Dies hat nach Satz 1.10 $\varphi(p) \in \overline{C} \cap \overline{S_a}$ zur Folge. Da $a \in S$ beliebig war, gilt also $\varphi(\delta S) \subset \delta C$.

Aus $\varphi|_C = id|_C$ folgt $\varphi|_{\overline{C}} = id|_{\overline{C}}$. Wegen $\delta C \subset \overline{C}$ gilt daher $\varphi(p) = p$ für alle $p \in \delta C$.

Es bleibt die Homomorphieeigenschaft zu zeigen. Seien dazu $p, q \in \delta S$. Da für alle $y \in S$ die Menge S_y in p liegt, gilt

$$[\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \text{ für } p\text{-fast alle } x] \text{ für } q\text{-fast alle } y.$$

Demnach ist $\varphi(p+y) = \varphi(p)+\varphi(y)$ für q-fast alle y, woraus sich schließlich $\varphi(p+q) = \varphi(p) + \varphi(q)$ ergibt. □

Für das folgende sei an die Definition der Menge A_T in 6.4 und an den Begriff der $\prec$-Folge (vor Lemma 4.9) erinnert.

6.7 Definition Es sei $(S, +)$ eine Halbgruppe, $\prec$ eine zweistellige Relation auf S und T eine Menge von Abbildungen von S in sich mit $id \in T$.

Ist $\vec{s} = (s_i)_i$ eine Folge in S und $w \in A_T$ eine T-Kombination mit $\mathrm{dom}(w) = \{n_1, \ldots, n_k\}_<$ und $\varphi_{n_i} := w(n_i)$, so heißt

$$\vec{s}[w] := \sum_{n \in \mathrm{dom}(w)} \varphi_n(s_n) \quad := \quad \varphi_{n_k}(s_{n_k}) + \ldots + \varphi_{n_1}(s_{n_1})$$

eine *Extraktion* aus $\vec{s}$.

Ist $\vec{s}$ ein Folge in S und $\vec{w}$ eine $<$-Folge in A_T, so heißt $\vec{s}[\vec{w}] := (\vec{s}[w_1], \vec{s}[w_2], \ldots)$ eine aus $\vec{s}$ *extrahierte* Folge.

6.8 Bemerkungen 1) Wie in Beispiel 6 von 6.5 kann man auch in der Situation von Definition 6.7 die Mengen C_T und V_T definieren. Eine Extraktion $\vec{s}[w]$ heißt V_T-Extraktion (C_T-Extraktion), falls w in V_T (C_T) liegt.

2) Sei $\vec{s}$ eine Folge in S, $\vec{w}$ eine $<$-Folge in A_T und $u \in A_T$. Dann ist das Element $(\vec{s}[\vec{w}])[u]$ nicht zwangsläufig wieder eine Extraktion aus $\vec{s}$; allerdings ist dies der Fall, wenn T eine Halbgruppe bezüglich Hintereinanderausführung ist und $\mathrm{ran}(u)$ aus totalen Homomorphismen besteht (vgl. die Rechnung im Beweis zu Lemma 6.20).

Damit sind die Vorbereitungen zum Hauptsatz abgeschlossen.

6.9 SATZ (HAUPTSATZ)
Es sei $(S,+)$ eine unendliche Halbgruppe, $\prec$ eine zweistellige Relation auf S und $id \in T$ eine endliche Menge von Abbildungen von S in sich.

a) *Seien $C, V \subset S$ so, daß $(S,+,\prec,C,V,T)$ ein Ungetüm ist. Weiter seien H und U Unterhalbgruppen von δS mit $U \subset H \cap \delta C$, die Menge H sei abgeschlossen, und es gelte $\varphi(H) \subset U$ für jedes $id \neq \varphi \in T$.*
Dann gibt es zu jedem Idempotent $p \in U$ ein minimales Idempotent q der Halbgruppe H mit $q \leq p$. Ist im Falle $T \neq \{id\}$ das Idempotent p minimal in der Halbgruppe U, so gilt $\varphi(q) = p$ für alle $id \neq \varphi \in T$.

b) *Es seien p und q Idempotente von βS mit $q \in \delta S$, $q \leq p$ und $\varphi(q) = p$ für alle $id \neq \varphi \in T$. Dann gibt es zu je zwei Mengen $C_0 \in p, V_0 \in q$ eine $\prec$-Folge $\vec{s}$ in S mit*
$$\vec{s}[w] \in \begin{cases} V_0, & \text{falls} \quad w \in V_T, \\ C_0, & \text{falls} \quad w \in C_T, \end{cases}$$
für alle $w \in A_T$. Die Folge $\vec{s}$ kann injektiv gewählt werden, wenn q in S^* liegt.

Beweis: Zur Abkürzung schreiben wir $T' := \{\varphi \mid id \neq \varphi \in T\}$.

Die erste Behauptung von a) ist nach dem Satz von Ellis 2.13 klar. Sei nun p ein minimales Idempotent in U und $\varphi \in T'$ gegeben. Dann ist $\varphi(q)$ wieder idempotent mit $\varphi(q) \leq \varphi(p)$, weil $\varphi|_{\delta S}$ nach Lemma 6.6 ein Homomorphismus ist. Nun gilt $\varphi(q) \in U$ aufgrund der Voraussetzung und $\varphi(p) = p$ wegen Lemma 6.6. Da p minimal in U ist, folgt aus Satz 2.7 die Gleichheit $\varphi(q) = p$.

Der Beweis der Behauptung b) erfolgt in mehreren Schritten. Zunächst werden rekursiv die Folge $\vec{s} = (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sowie Folgen von Mengen $V_0, V_1, \ldots$ und $C_0, C_1, \ldots$ so konstruiert, daß für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ nachstehende Aussagen richtig sind:

1) $V_n \in q$, $V_n \subset V_{n-1}$, $C_n \in p$, $C_n \subset C_{n-1}$.
2) $s_n \in V_{n-1}$ und $s_1, \ldots, s_{n-1} \prec s_n$.
3) $\varphi(s_n) \in C_{n-1}$ für alle $\varphi \in T'$.
4) $V_n + s_n \subset V_{n-1}$, $V_n + \varphi(s_n) \subset V_{n-1}$ für alle $\varphi \in T'$.
5) $C_n + s_n \subset V_{n-1}$ $C_n + \varphi(s_n) \subset C_{n-1}$ für alle $\varphi \in T'$.

Der *Rekursionsbeginn* $n = 0$ ist trivial, denn $V_0 \in q, C_0 \in p$ gilt nach Voraussetzung, und alle weiteren Aussagen sind leer.

Für den *Rekursionsschritt* sei nun $n \geq 1$, und die Elemente $s_1, \ldots, s_{n-1}$ sowie die Mengen $V_0, \ldots, V_{n-1}$ und $C_0, \ldots, C_{n-1}$ seien bereits mit den gewünschten Eigenschaften 1) - 5) konstruiert. Dann gelten folgende Aussagen für q-fast alle x (sofern sie nicht ohnehin leer sind):

a) $x \in V_{n-1},\ \varphi(x) \in C_{n-1} \quad$ für alle $\varphi \in T'$.

b) $s_1, \ldots, s_{n-1} \prec x$.

c) $s + x \in V_{n-1}$ für q-fast alle s.

d) $s + \varphi(x) \in V_{n-1}$ für q-fast alle $s \quad$ für alle $\varphi \in T'$.

e) $s + x \in V_{n-1}$ für p-fast alle s.

f) $s + \varphi(x) \in C_{n-1}$ für p-fast alle $s \quad$ für alle $\varphi \in T'$.

Beweis: Es stehe (RA) für „Rekursionsannahme".

Zu (a): $V_{n-1} \in q$ gilt nach (RA). Ist $\varphi \in T'$, so gilt $\varphi(q) = p \in \overline{C_{n-1}}$ mit (RA). Aus Korollar 1.11 folgt $\varphi(x) \in C_{n-1}$ für q-fast alle x.

Zu b): Wegen $q \in \delta S$ gilt $S_{s_1} \cap \ldots \cap S_{s_{n-1}} \in q$.

Zu c): Aufgrund der Idempotenz von q und (RA) gilt $q + q = q \in \overline{V_{n-1}}$, nach Satz 1.10 also $q + x \in \overline{V_{n-1}}$ für q-fast alle x. Aus Korollar 1.11 folgt dann [$s + x \in V_{n-1}$ für q-fast alle s] für q-fast alle x.

Zu d): Sei $\varphi \in T'$. Dann gilt $q + \varphi(q) = q + p = q$ wegen $q \leq p$. Mit (RA) gilt $q \in \overline{V_{n-1}}$, und daraus ergibt sich mit Satz 1.10 sofort $q + \varphi(x) \in \overline{V_{n-1}}$ für q-fast alle x. Ein Anwendung von Korollar 1.11 zeigt die Behauptung.

Zu e): Es gilt $p + q = q \in \overline{V_{n-1}}$ wegen $q \leq p$ und (RA). Nach dem Muster von c) und d) liefert eine Anwendung von Satz 1.10 und Korollar 1.11 die Behauptung.

Zu f): Für $\varphi \in T'$ gilt $p + \varphi(p) = p + p = p \in \overline{C_{n-1}}$ mit (RA). Die Behauptung folgt wie oben. □

Aufgrund der Ultrafiltereigenschaft und der Endlichkeit von T' gilt nun auch die Konjunktion der Aussagen a) bis f) für q-fast alle x. Wir wählen ein x, das die Eigenschaften a) bis f) besitzt und setzen $s_n := x$. Ferner definieren wir

$$\begin{aligned} V_n &:= V_{n-1} \cap \{s \mid s + s_n \in V_{n-1}\} \cap \{s \mid s + \varphi(s_n) \in V_{n-1}\ \forall \varphi \in T'\}, \\ C_n &:= C_{n-1} \cap \{s \mid s + s_n \in V_{n-1}\} \cap \{s \mid s + \varphi(s_n) \in C_{n-1}\ \forall \varphi \in T'\}. \end{aligned}$$

Damit sind die Bedingungen 1) bis 5) erfüllt, und die rekursive Konstruktion ist gelungen.

Es bleibt noch zu zeigen, daß die Extraktionen der konstruierten Folge $\vec{s}$ die im Satz behauptete Eigenschaft besitzen. (Aufgrund von Eigenschaft 2) ist $\vec{s}$ eine $\prec$-Folge!) Dazu sei ein $w \in A_T, \mathrm{dom}(w) = \{n_1, \ldots, n_k\}_<$ gegeben. Wir zeigen

$$\vec{s}[w] \in \begin{cases} V_{n_1-1}, & \text{falls} \quad w \in V_T, \\ C_{n_1-1}, & \text{falls} \quad w \in C_T, \end{cases}$$

durch Induktion über $k = |\mathrm{dom}(w)|$.
Induktionsanfang $|\mathrm{dom}(w)| = 1$: Ist $w \in V_T$, so ist $\varphi_{n_1} = id$, und es gilt $\vec{s}[w] = \varphi_{n_1}(s_{n_1}) = s_{n_1} \in V_{n_1-1}$ mit 2). Für $w \in C_T$ ist hingegen $\varphi_{n_1} \in T'$, also zeigt 3), daß $\vec{s}[w]$ in C_{n_1-1} liegt.
Induktionsschritt $|\mathrm{dom}(w)| = k \geq 2$: Wir setzen $w' := w|_{\{n_2,\ldots,n_k\}}$; dann gilt die Induktionsvoraussetzung für w', also

$$(*) \qquad \vec{s}[w'] \in \begin{cases} V_{n_2-1}, & \text{falls} \quad w' \in V_T, \\ C_{n_2-1}, & \text{falls} \quad w' \in C_T. \end{cases}$$

Es müssen die zwei Fälle $w \in V_T$ und $w \in C_T$ unterschieden werden.
Liegt w in C_T, so auch w', und es gilt $\varphi_{n_1} \in T'$. Die Eigenschaft 1) zusammen mit $(*)$ ergibt $\vec{s}[w'] \in C_{n_1}$. Daraus folgt mit 5) die Beziehung

$$\vec{s}[w] = \vec{s}[w'] + \varphi_{n_1}(s_{n_1}) \in C_{n_2-1} + \varphi_{n_1}(s_{n_1}) \subset C_{n_1} + \varphi_{n_1}(s_{n_1}) \subset C_{n_1-1}.$$

Es sei nun $w \in V_T$. Wenn $\varphi_{n_1} \neq id$ ist, muß w' in V_T liegen, und das hat mit $(*)$ und den Eigenschaften 1) und 4) die Beziehung

$$\vec{s}[w] = \vec{s}[w'] + \varphi_{n_1}(s_{n_1}) \in V_{n_2-1} + \varphi_{n_1}(s_{n_1}) \subset V_{n_1} + \varphi_{n_1}(s_{n_1}) \subset V_{n_1-1}$$

zur Folge.
Im Fall $\varphi_{n_1} = id$ gilt mit $(*)$ und den Eigenschaften 1) und 4) bzw. 5) (je nachdem, ob w' in V_T oder in C_T liegt)

$$\vec{s}[w] = \vec{s}[w'] + \varphi_{n_1}(s_{n_1}) = \vec{s}[w'] + s_{n_1} \in V_{n_1-1}.$$

Dies schließt den Induktionsbeweis ab.
Nehmen wir schließlich noch $q \in S^*$ an. Wir ändern b) ab in

b') $s_1, \ldots, s_{n-1} \prec x, \ s_1, \ldots, s_{n-1} \neq x.$

Weil q in S^* liegt, gilt b') für q-fast alle x. Bei der rekursiven Konstruktion der Folge $(s_n)_n$ und der Mengenfolgen $(V_n)_n$ und $(C_n)_n$ ist nun statt 2) die Eigenschaft

2') $s_n \in V_{n-1}, \ s_1, \ldots, s_{n-1} \prec s_n, \ s_1, \ldots, s_{n-1} \neq s_n$

gewährleistet. Somit ist die Folge $\vec{s}$ injektiv. □

6.10 BEMERKUNGEN 1) Satz 6.9, Teil a) gilt insbesondere für $H = \delta S$ und $U = \delta C$.

2) Wenn die Halbgruppe U abgeschlossen ist, besitzt sie nach dem Satz von Ellis 2.13 ein (minimales) Idempotent p.

3) Ist q ein minimales Idempotent der Halbgruppe H, so liegt q nach dem Satz von Ruppert 2.8 in jedem Ideal von H, insbesondere in $H \cap \delta V$.
4) Ist $q \in \delta V$, so kann die Folge $\vec{s}$ in V gewählt werden. Dazu reicht es, $V \cap V_0$ statt V_0 zu betrachten.
5) Man kann weitere „kanonische Kandidaten“ für H und U angeben, wenn man zusätzliche Bedingungen an $S, \prec, C$ und T stellt. Fordert man etwa
   a) Die Menge S^* ist eine Unterhalbgruppe von βS;
   b) Zu je endlich vielen Elementen $x_1, \ldots, x_n \in S$ gibt es unendlich viele $a \in S$ mit $x_1, \ldots, x_n \prec a$;
   c) Zu je endlich vielen Elementen $x_1, \ldots, x_n \in C$ gibt es unendlich viele $c \in C$ mit $x_1, \ldots, x_n \prec c$;
   d) Für jedes $x \in S$ und jedes $\varphi \in T$ gibt es Elemente $x_1, \ldots, x_n \in S$ derart, daß die Menge $S_{x_1} \cap \ldots \cap S_{x_n} \cap \varphi^{\leftarrow}\{x\}$ endlich ist;

   dann erfüllen $H := S^* \cap \delta S$ und $U := S^* \cap \delta C$ die Voraussetzungen von Teil a) des Hauptsatzes 6.9. Der Beweis sei dem Leser überlassen.

Offensichtlich hat Teil b) des Satzes 6.9 gar nichts mit Ungetümen zu tun. Möglicherweise ist dieses Resultat für sich selbst interessant oder findet Anwendungen, die nicht unmittelbar mit Ungetümen in Zusammenhang stehen. Für denjenigen allerdings, der primär an Ramseytheoretischen Fragestellungen interessiert ist, wird ein Ergebnis wie Teil b) von Satz 6.9 von geringem Nutzen sein, wenn er nicht für S eine kombinatorische Situation kennt, die dazu führt, daß er das betreffende Resultat auch *anwenden* kann. Wir haben in den Ungetümen *eine* Möglichkeit für eine solche Situation ausgemacht.

6.3 Ramseytheoretische Folgerungen

Wir versuchen nun, die Überlegungen des vorangegangenen Abschnittes für die Ramseytheorie nutzbar zu machen. Zunächst geben wir ein allgemeines Resultat an, das eigentlich nur die „Übersetzung“ des Hauptsatzes 6.9 in die Sprache der Ramseytheorie darstellt.

6.11 Definition Es sei $(S, +)$ eine Halbgruppe und $id_S \in T$ eine Menge von Abbildungen von S in sich. Eine Folge $\vec{s}$ heißt *homogen* bezüglich einer Färbung von S, falls die Menge der C_T-Extraktionen und die Menge der V_T-Extraktionen monochrome Mengen sind.

6.12 Folgerung

Sei $(S,+,\prec,C,V,T)$ ein Ungetüm. Dann gibt es zu jeder endlichen Färbung von S eine homogene $\prec$-Folge $\vec{s}$ in V.

Beweis: Es sei p ein minimales Idempotent der abgeschlossenen Halbgruppe δC (ein solches gibt es nach dem Satz von Ellis 2.13). Teil a) des Hauptsatzes 6.9 sichert die Existenz eines minimalen Idempotentes q der Halbgruppe δS mit $q \leq p$ und $\varphi(q) = p$ für alle $id \neq \varphi \in T$. Weil δV ein Ideal von δS ist, liegt $q \in \delta V$.
Nun seien $C_0 \in p$ und $V_0 \in q$ monochrome Mengen mit $C_0 \subset C$ und $V_0 \subset V$. Teil b) des Hauptsatzes 6.9 ist anwendbar und liefert eine $\prec$-Folge $\vec{s}$, deren C_T-Extraktionen in C_0 und deren V_T-Extraktionen in V_0 liegen. Insbesondere liegt die Folge $\vec{s}$ in V. □

Wir wenden uns nun dem Themenkreis des Hindmanschen Satzes 4.8 zu.

6.13 Folgerung (vgl. Lemma 4.9 und Lemma 4.10)

Sei $(S,+)$ eine Halbgruppe und $\prec$ eine zweistellige Relation auf S, die folgenden Bedingungen genügt:

a) $x \prec a, x \prec b \Rightarrow x \prec (a+b)$ für alle $x,a,b \in S$.

b) Zu je endlich vielen Elementen $x_1,\ldots,x_n$ aus S gibt es ein a in S mit $x_1,\ldots,x_n \prec a$.

Dann gibt es zu jeder endlichen Färbung von S eine $\prec$-Folge $x = (x_n)_n$, so daß $Fs(x)$ monochrom ist.

Beweis: Betrachte das Ungetüm $(S,+,\prec,C,V,T)$ mit $C = V = S$ und $T = \{id\}$. Nun wende man Folgerung 6.12 an, wobei zu beachten ist, daß für jede Folge $x = (x_n)_n$ die Menge der endlichen Summen $Fs(x)$ gerade gleich der Menge der V_T-Extraktionen von x ist. □

6.14 Folgerung (vgl. Satz 5.4)

Sei $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ eine Funktion. Dann gibt es in jeder endlichen Färbung von $\mathbb{N}$ eine Folge $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ derart, daß für $n < m$ stets $f(x_n)|x_m$ gilt und $Fs(x)$ monochrom ist.

Beweis: Wende Folgerung 6.13 auf die Halbgruppe $(\mathbb{N},+)$ an, wobei die Relation $\prec$ durch $n \prec m :\Leftrightarrow f(n)|m$ definiert ist. □

6.15 FOLGERUNG (vgl. SATZ 4.11)
Sei X eine unendliche Menge. Zu jeder endlichen Färbung von $[X]^{<\omega}$ gibt es eine unendliche Familie $\mathcal{D}$ von paarweise disjunkten, endlichen Teilmengen von X, so daß alle endlichen Vereinigungen von Mengen in $\mathcal{D}$ monochrom sind.

Beweis: Wende Folgerung 6.13 auf die Halbgruppe $S := [X]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ mit $\cup$ als Verknüpfung an. Die Relation $\prec$ sei dabei definiert als $A \prec B :\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$. Man erhält eine Folge $(D_n)_n$ paarweise disjunkter, endlicher Teilmengen von X, deren endliche Vereinigungen monochrom sind. Mit $\mathcal{D} := \{D_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ folgt die Behauptung. □

Die nächste Folgerung ist die letzte Variation des Themas von Hindman. Es ließen sich selbstverständlich noch viele weitere formulieren.

6.16 FOLGERUNG (vgl. SATZ 4.13)
Ist S eine unendliche Halbgruppe und S^* Unterhalbgruppe von βS, so existiert in jeder endlichen Färbung von S eine injektive Folge $x = (x_n)$ derart, daß $Fs(x)$ monochrom ist.

Beweis: Betrachte das Ungetüm $(S, +, S \times S, S, S, \{id\})$. Mit dem Satz von Ellis 2.13 findet sich ein Idempotent q in S^*. Sei $V_0 \in q$ eine monochrome Menge. Jetzt kann man den Teil b) von Satz 6.9 mit $p := q$ und $C_0 := S$ anwenden. □

Als nächstes wenden wir uns dem Satz von van der Waerden 4.16 zu.

6.17 FOLGERUNG (vgl. SATZ 4.16)
In jeder endlichen Färbung von $\mathbb{N}$ gibt es monochrome arithmetische Progressionen beliebiger Länge.

Beweis: Wir halten ein $l \in \mathbb{N}$ fest. Im Beweis des Satzes von van der Waerden 4.16 wurden die Unterhalbgruppe G, I und $\Delta(\mathbb{N}^l)$ von $\mathbb{N}^l$ betrachtet, die wir jetzt S, V und C nennen. Es ist also

$$\begin{aligned} S &:= \{(a, a+d, \ldots, a+(l-1)d) \,|\, a \in \mathbb{N},\ d \in \omega\}, \\ V &:= \{(a, a+d, \ldots, a+(l-1)d) \,|\, a \in \mathbb{N},\ d \in \mathbb{N}\}, \\ C &:= \{(a, \ldots, a) \,|\, a \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Für jedes $0 \leq i < l$ sei $\pi_i : S \longrightarrow C$ durch

$$\pi_i(a, a+d, \ldots, a+(l-1)d) := (a+id, a+id, \ldots, a+id).$$

definiert. Mit $T := \{\pi_i \mid 0 \leq i < l\} \cup \{id\}$ ist dann $(S, +, S \times S, C, V, T)$ ein Ungetüm. Die Halbgruppen C und $\mathbb{N}$ sind kanonisch isomorph, also wird eine endliche Färbung von C induziert. Wir setzen diese auf beliebige Weise zu einer endlichen Färbung von S fort. Nach Folgerung 6.12 gibt es eine Folge $\vec{s}$ in V, deren C_T-Extraktionen monochrom sind. Dies bedeutet unter anderem, daß die Komponenten des l-Tupels s_1 eine monochrome Teilmenge von $\mathbb{N}$ in der ursprünglichen Färbung bilden. □

Wir kommen nun zu der angekündigten Verallgemeinerung des Satzes von Hales und Jewett (vgl. Satz 4.19). Die folgende Definition weist schon die Richtung.

6.18 Definition Es sei Σ ein endliches Alphabet und $v \notin \Sigma$ eine Variable. Für eine Folge $\vec{w} = (w_n)_n$ in $(\Sigma \cup \{v\})^+ \setminus \Sigma^+$ heißt die Menge

$$\{w_{n_k}(a_k)w_{n_{k-1}}(a_{k-1}) \ldots w_{n_1}(a_1) \mid k \in \mathbb{N}, \{n_1, \ldots, n_k\}_< \subset \mathbb{N}, a_1, \ldots, a_k \in \Sigma\}$$

ein *unendlichdimensionaler, (kombinatorischer) Unterraum* von Σ^+.

Mit anderen Worten: Betrachtet man das Ungetüm $(S, +, \prec, C, V, T)$ aus Beispiel 4 von 6.3, so ist ein unendlichdimensionaler kombinatorischer Unterraum gerade die Menge aller C_T-Extraktionen einer $\prec$-Folge in V.
Das klassische Hales-Jewett-Theorem macht eine Aussage über eindimensionale kombinatorische Unterräume, wie wir sie im Absatz vor Satz 4.19 definiert haben. Offensichtlich enthält jeder unendlichdimensionale Unterraum unendlich viele eindimensionale, weswegen der nachstehende Satz eine Verallgemeinerung des Theorems von Hales und Jewett 4.19 darstellt.

6.19 Folgerung
In jeder endlichen Färbung des kombinatorischen Raumes Σ^+ über einem endlichen Alphabet Σ gibt es einen monochromen, unendlichdimensionalen Unterraum.

Beweis: Wie schon oben geschehen, ziehen wir das Ungetüm $(S, +, \prec, C, V, T)$ aus Beispiel 4 von 6.3 heran:

$$S := (\Sigma \cup \{v\})^+, \quad C := \Sigma^+, \quad V := S \setminus C, \quad T := \{\eta_x \mid x \in \Sigma \cup \{v\}\}.$$

($\prec$ bezeichne die Allrelation und $+$ die Konkatenation).
Man setze die gegebene Färbung auf ganz S fort und bringe Folgerung 6.12 zur Anwendung. Dies liefert eine Folge in V, deren C_T-Extraktionen monochrom sind. □

In Kapitel 4 haben wir gesehen, daß schon die eindimensionale Fassung des Hales-Jewett-Theorems eine stärkere Version des van der Waerdenschen Satzes implizierte (Satz 4.20). Man muß nun nicht den „Umweg“ über Worthalbgruppen nehmen, um dieses Resultat zu erhalten: Auch hier steht ein allgemeines Ergebnis im Hintergrund. Dies zu verdeutlichen ist das letzte Ziel, das wir in diesem Kapitel verfolgen.

6.20 LEMMA

Es sei $(S,+)$ eine unendliche Halbgruppe und $id \in T$ eine Halbgruppe von Abbildungen von S in sich.

a) *Für $w \in A_T$ setze $\hat{w}(n) := \widehat{w(n)}$, falls $n \in \text{dom}(w)$ ist, sonst $\hat{w}(n) := \perp$. Dann ist $\hat{w} \in A_{\tilde{T}}$, und es gelten die Implikationen $w \in C_T \Rightarrow \hat{w} \in C_{\tilde{T}}$ und $w \in V_T \Rightarrow \hat{w} \in V_{\tilde{T}}$.*

b) *Es sei $\vec{s}$ eine Folge in S, $\vec{w}$ eine $<$-Folge in A_T und T bestehe nur aus totalen Homomorphismen von S. Ist dann $e \in A_T$, so gilt $\vec{s}[\vec{w}]\,[e] = \vec{s}[\vec{w}[\hat{e}]]$.*

Beweis: Zum Beweis der Behauptung a) sei $w \in A_T$. Falls $w \in V_T$ ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $w(n) = id_S$. Dann gilt $\hat{w}(n) = \widehat{w(n)} = \widehat{id_S} = id_T$, d.h. $id_T \in \text{ran}(\hat{w})$, somit $\hat{w} \in V_{\tilde{T}}$.

Ist dagegen $w \in C_T$, so gilt $w(n) \neq id_S$ für alle $n \in \text{dom}(w)$. Wäre nun $\hat{w}(n) = id_T$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so wähle man ein $u \in A_T$ und ein $k \in \text{dom}(u)$ mit $u(k) = id_S$. Dann gilt

$$id_S = u(k) = [id_T(u)](k) = [\hat{w}(n)(u)](k) = [\widehat{w(n)}(u)](k) = w(n) \circ u(k) = w(n)$$

mit Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist auch $\hat{w} \in C_{\tilde{T}}$.

Zum Beweis von b) sei $\text{dom}(e) = \text{dom}(\hat{e}) = \{n_1, \ldots, n_k\}_<$ und $\varphi_i := e(n_i)$. Dann ist $\hat{e}(n_i) = \hat{\varphi}_i$ für alle $1 \leq i \leq k$ und mit $D_i := \text{dom}(w_{n_i})$ $(1 \leq i \leq k)$ gilt

$$\begin{aligned}
\vec{s}[\vec{w}][e] &= \sum_{i=k}^{1} \varphi_i(\vec{s}[w_{n_i}]) = \sum_{i=k}^{1} \varphi_i(\sum_{l \in D_i} w_{n_i}(l)(s_l)) = \\
&= \sum_{i=k}^{1} \sum_{l \in D_i} [\varphi_i \circ w_{n_i}(l)](s_l) = \sum_{i=k}^{1} \sum_{l \in D_i} [\hat{\varphi}_i(w_{n_i})(l)](s_l) = \\
&= \sum_{i=k}^{1} \vec{s}[\hat{\varphi}_i(w_{n_i})] = \vec{s}[\prod_{i=k}^{1} \hat{\varphi}_i(w_{n_i})] = \\
&= \vec{s}[\vec{w}[\hat{e}]]. \ \square
\end{aligned}$$

Nach diesen eher technischen Vorbereitungen läßt sich der nächste Satz sehr elegant beweisen.

6.21 SATZ
Es sei $(S,+)$ eine unendliche Halbgruppe, T eine endliche Halbgruppe totaler Homomorphismen auf S mit $id \in T$ und $\vec{s}$ eine Folge in S. Zu jeder endlichen Färbung von S gibt es eine $<$-Folge $\vec{w}$ in V_T derart, daß die extrahierte Folge $\vec{t} := \vec{s}[\vec{w}]$ homogen ist.

Beweis: Wir betrachten zuerst den Fall $T = \{id\}$. Dann erfüllt das Tupel $(A_T, \cdot, <)$ die Voraussetzungen von Folgerung 6.13. Die Abbildung

$$g := (w \longmapsto \vec{s}[w]) : A_T \longrightarrow S$$

induziert eine endliche Färbung von A_T. Nach Folgerung 6.13 gibt es daher eine $<$-Folge $\vec{w}$ in A_T derart, daß $Fp(\vec{w})$ monochrom ist. Man beachte, daß wegen $A_T = V_T$ trivialerweise $\vec{w}$ in V_T liegt.
Weil $T = \{id\}$, d.h. $C_T = \emptyset$ ist, müssen nur V_T-Extraktionen von $\vec{t} := \vec{s}[\vec{w}]$ betrachtet werden. Für $e \in V_T$ liegt $\vec{w}[\hat{e}]$ in $Fp(\vec{w})$. Es folgt die Behauptung, denn mit Lemma 6.20 gilt $\vec{s}[\vec{w}][e] = \vec{s}[\vec{w}[\hat{e}]] = g(\vec{w}[\hat{e}])$.
Im zweiten Fall $T \neq \{id\}$ betrachte man das Ungetüm $(A_T, \cdot, <, C_T, V_T, \tilde{T})$ (vgl. Beispiel 6 von 6.5). Wieder definieren wir die Abbildung $g := (w \longmapsto \vec{s}[w]) : A_T \longrightarrow S$, die die ursprüngliche Färbung von S auf A_T überträgt. Eine Anwendung von Folgerung 6.12 liefert nun eine zulässige Folge $\vec{w}$ in V_T, deren $C_{\tilde{T}}$- bzw. $V_{\tilde{T}}$-Extraktionen jeweils monochrom sind.
Mit Lemma 6.20 gilt für $e \in C_T$ zunächst $\hat{e} \in C_{\tilde{T}}$ und dann $\vec{t}[e] = \vec{s}[\vec{w}][e] = g(\vec{w}[\hat{e}])$. Analog gilt für $e \in V_T$, daß $\hat{e} \in V_{\tilde{T}}$ und $\vec{t}[e] = g(\vec{w}[\hat{e}])$ ist. Die Behauptung folgt. □

Jetzt können wir die schon aus 4.20 bekannte Verallgemeinerung des Satzes von van der Waerden als eine Folgerung des Hauptsatzes über Ungetüme erkennen.

6.22 FOLGERUNG (vgl. SATZ 4.20)
Sei eine Folge $x = (x_n)_n$ in $\mathbb{N}$ vorgegeben. Zu jeder endlichen Färbung von $\mathbb{N}$ gibt es beliebig lange, monochrome, arithmetische Folgen derart, daß die Inkremente sämtlich in $Fs(x)$ liegen.

Beweis: Wir betrachten für $l \in \mathbb{N}$ das Ungetüm $(S, +, S \times S, C, V, T)$ aus dem Beweis zu Folgerung 6.17 und definieren $\vec{s} = (s_n)_n$ durch

$$s_n := (1, 1 + x_n, \ldots, 1 + (l-1)x_n) \in S.$$

Die endliche Färbung von $\mathbb{N}$ induziert eine endliche Färbung von C, die beliebig zu einer endlichen Färbung von S fortgesetzt werde. Offensichtlich sind die Voraussetzungen von Satz 6.21 erfüllt. Es gibt also eine zulässige Folge $\vec{w}$ in V_T so, daß die extrahierte Folge $\vec{s}[\vec{w}]$ homogen ist (siehe Definition 6.11).
Es sei $D := \mathrm{dom}(w_1)$ und $E := \{n_1, \ldots, n_k\}_<$ die Menge der natürlichen Zahlen in $\mathrm{dom}(w_1)$, für die $w(n_i) = id_S$ gilt. Wegen $w_1 \in V_T$ ist E nicht leer. Setzt man noch $d := \sum_{i=1}^k x_{n_i}$, so gilt

$$\begin{aligned}
\vec{s}[w_1] &= \sum_{n\in D} w_1(n)(s_n) = \sum_{n\in D\setminus E} w_1(n)(s_n) + \sum_{i=1}^{k} s_{n_i} \\
&= \sum_{n\in D\setminus E} w_1(n)(1, 1+x_n, \ldots, 1+(l-1)x_n) + \\
&\qquad +(k, k+d, k+2d, \ldots, k+(l-1)d) \\
&= (a+k, a+k+d, \ldots, a+k+(l-1)d)
\end{aligned}$$

für ein $a \in \mathbb{N}$. Die C_T-Extraktionen der Folge $\vec{s}[\vec{w}]$ sind monochrom in der induzierten Färbung, daher bilden die Komponenten des Tupels $\vec{s}[w_1]$ eine monochrome Teilmenge von $\mathbb{N}$. $\square$

Bemerkungen

Grundlage für die Ausführungen dieses Kapitels bildet der Artikel *Partition theorems for spaces of variable words* [7] von V. Bergelson, A. Blass und N. Hindman. Die Autoren betrachten dort die in den Beispielen 4 und 7 von 6.3 bzw. 6.5 vorgestellten Strukturen („words" and „located words" in ihrer Terminologie). Weil man in diesen Fällen die jeweiligen Homomorphismen wieder mit Elementen der schon bekannten Halbgruppen identifizieren kann, wird die Einführung der Mengen T und A_T vermeidbar. Auch wird der Leser dort die explizite Einbeziehung einer zweistelligen Relation $\prec$ auf der Halbgruppe S nicht finden; im genannten Artikel werden nämlich von vornherein nur *partielle* Halbgruppen betrachtet, also Mengen mit einer nur teilweise definierten Verknüpfung $*$. In dieser Situation liegt dann *implizit* eine zweistellige Relation auf der Halbgruppe vor: Es ist genau dann $a \prec b$, wenn $a * b$ definiert ist.

Wie in diesem Kapitel gezeigt wurde, ist die Einführung partieller Halbgruppen überflüssig. Die in [7] untersuchten Strukturen lassen sich unter den Begriff des Ungetüms subsumieren. Das Theorem 4.1 mit seinen Korollaren 4.3, 4.4 und 4.5 (die Hauptergebnisse des ersten Teils von [7]) sind Spezialfälle unseres Hauptsatzes 6.9, seiner Folgerung 6.12 und des Satzes 6.21. Ihre Beweise in [7] haben den unseren Pate gestanden. Im selben Abhängigkeitsverhältnis steht unser Lemma 6.6 zu den Propositionen 2.6 und 2.8 bzw. dem Korollar 2.7 aus [7]. Ein weiteres Ergebnis unserer Vorlage, das Korollar 4.6, das die Autoren als Verallgemeinerung eines Lemmas von Carlson (vgl. [20]) bezeichnen, dürfte sich in analoger Weise ohne Mühe verallgemeinern lassen.

Abschließend soll noch versucht werden darzustellen, welche neuen Aspekte die Untersuchungen dieses Kapitels gegenüber der Vorlage [7] zutage treten lassen.
Da ist zunächst der Umstand, daß die speziellen Ergebnisse aus [7] auf eine allgemeinere Ebene gehoben sind und sich somit größere Anwendungsmöglichkeiten bieten.
Zudem demonstriert die Fülle der Folgerungen im dritten Abschnitt die konzeptuelle Gemeinsamkeit vieler halbgruppentheoretischer Ramseyprobleme. Dies wird am Beispiel der Sätze von van der Waerden und Hales-Jewett besonders deutlich. Während bisher ähnliche, aber weitgehend unabhängige Beweise für beide Sätze vorlagen und allenfalls der eine als Korollar des anderen erkannt war, führen die in den Folgerungen 6.17, 6.19 und 6.22 gegebenen Beweise beide Sätze auf einen gemeinsamen Ursprung zurück.
Daneben mag ein letzter Punkt von Bedeutung sein. Durch die Differenzierung des Hauptsatzes 6.9 in die Teile a) und b) wird nahegelegt, bei der Suche nach den Beweisen für Ramseytheoreme zu unterscheiden zwischen einer kombinatorischen Ausgangssituation, die für eine bestimmte algebraisch-topologische Konstellation in der Stone–Čech–Kompaktifizierung verantwortlich ist, und den Ramseytheoretischen Konsequenzen dieser algebraisch-topologischen Konstellation.

Literaturverzeichnis

[1] R. Arens, *The adjoint of a bilinear operator*, Proc. Amer. Math. Soc. **2** (1951), 839 - 848.

[2] J. Baker, N. Hindman und J. Pym, *Elements of finite order in Stone–Čech compactifications*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **36** (1992), 49 - 54.

[3] J. Baumgartner, *A short proof of Hindman's theorem*, J. Comb. Theory (A) **17** (1974), 384 - 386.

[4] J. Baumgartner und A. Taylor, *Partition theorems and ultrafilters*, Trans. Amer. Math. Soc. **241** (1978), 283 - 309.

[5] V. Bergelson, *A density statement generalizing Schur's theorem*, J. Comb. Theory (A) **43** (1986), 338 - 343.

[6] V. Bergelson, *Ergodic Ramsey theory*, in: *Logic and Combinatorics* (S. Simpson ed.), Contemporary Mathematics **69** (1987), 63 - 87.

[7] V. Bergelson, A. Blass und N. Hindman, *Partition theorems for spaces of variable words*, Proc. London Math. Soc. (3) **68** (1994), 449 - 476.

[8] V. Bergelson und N. Hindman, *A combinatorially large cell of a partition of* $\mathbb{N}$, J. Comb. Theory (A) **48** (1988), 39 - 52.

[9] V. Bergelson und N. Hindman, *Ultrafilters and multidimensional Ramsey theorems*, Combinatorica **9** (1989), 1 - 7.

[10] V. Bergelson, N. Hindman, *Nonmetrizable topological dynamics and Ramsey theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **320** (1990), 293 - 320.

[11] V. Bergelson und N. Hindman, *Ramsey theory in noncommutative semigroups*, Trans. Amer. Math. Soc. **330** (1992), 433 - 446.

[12] V. Bergelson und N. Hindman, *On IP^*-sets and central sets*, Combinatorica **14** (1994), 269 - 277.

[13] V. Bergelson, N. Hindman und B. Kra, *Iterated spectra of numbers — elementary, dynamical, and algebraic approaches*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 893 - 912.

[14] J. Berglund und K.H. Hofmann, *Compact Semitopological Semigroups and Weakly Almost Periodic Functions*, Lecture Notes in Math. **42**, Springer-Verlag, New York 1967.

[15] J. Berglund, H. Junghenn und P. Milnes, *Compact Right Topological Semigroups and Generalizations of Almost Periodicity*, Lecture Notes in Math. **663**, Springer-Verlag, New York 1978.

[16] J. Berglund, H. Junghenn und P. Milnes, *Analysis on Semigroups*, Wiley, New York 1989.

[17] A. Blass, *Ultrafilters: where topological dynamics = algebra = combinatorics*, Topology Proceedings **18** (1993), 33 - 56.

[18] S. Bochner, *Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen*, Math. Ann. **96** (1927), 119 - 147.

[19] S. Bochner *Abstrakte fastperiodische Funktionen*, Acta Math. **61** (1933), 149 - 184.

[20] T. Carlson, *Some unifying principles in Ramsey theory*, Discrete Math. **68** (1988), 117 - 169.

[21] E. Čech, *On bicompact spaces*, Annals of Mathematics **38** (1937), 823 - 844.

[22] P. Civin und B. Yood, *The second conjugate space of a Banach algebra as an algebra*, Pacific J. Math. **11** (1961), 847 - 870.

[23] J. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Graduate Texts in Mathematics **96**, Springer-Verlag, New York 1985.

[24] W. W. Comfort, *Ultrafilters — some old and some new results*, Bull. Amer. Math. Soc. **83** (1977), 417 - 455.

[25] W. W. Comfort und S. Negrepontis, *The Theory of Ultrafilters*, Springer-Verlag, New York 1974.

[26] K. de Leeuw und I. Glicksberg, *Applications of almost periodic compactifications*, Acta Math. **105** (1961), 63 - 97.

[27] K. de Leeuw und I. Glicksberg, *Almost periodic functions on semigroups*, Acta Math. **105** (1961), 99 - 140.

[28] W. Deuber, *Partitionen und lineare Gleichungssysteme*, Math. Z. **133** (1973), 109 - 123.

[29] W. Deuber und N. Hindman, *Partitions and sums of* (m, p, c)*-sets*, J. Comb. Theory (A) **45** (1987), 300 - 302.

[30] R. Ellis, *Distal transformation groups*, Pacific J. Math. **9** (1958), 401 - 405.

[31] R. Ellis, *Lectures on Topological Dynamics*, Benjamin, New York 1969.

[32] Z. Frolík, *Sums of ultrafilters*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 87 - 91.

[33] H. Furstenberg, *Ergodic behaviour of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arihmetic progressions*, J. Analyse Math. **31** (1977), 204 - 256.

[34] H. Furstenberg, *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey 1981.

[35] H. Furstenberg und Y. Katznelson *An ergodic Szemerédi theorem for IP-systems and combinatorial theory*, J. Analyse Math. **45** (1985), 117 - 168.

[36] H. Furstenberg und Y. Katznelson, *Idempotents in compact semigroups and Ramsey theory*, Israel J. Math. **68** (1989), 257 - 270.

[37] H. Furstenberg und Y Katznelson, *A density version of the Hales-Jewett theorem*, J. Analyse Math. **57** (1991), 64 - 119.

[38] H. Furstenberg, Y. Katznelson und D. Ornstein, *The ergodic theoretic proof of Szemerédi's theorem*, Bull. Amer. Math. Soc. **7** (1982), 527 - 552.

[39] H. Furstenberg und B. Weiss, *Topological dynamics and combinatorial number theory*, J. Analyse Math. **34** (1978), 61 - 85.

[40] L. Gillman und M. Jerison, *Rings of Continuous Functions*, Van Nostrand, 1960.

[41] S. Glasner, *Divisibility properties and the Stone–Čech compactification*, Canad. J. Math. **32** (1980), 993 - 1007.

[42] R.L. Graham, B.L. Rothschild und J.H. Spencer, *Ramsey Theory*, Wiley, New York 1980.

[43] A.W. Hales und R.I. Jewett, *Regularity and positional games*, Trans. Amer. Math. Soc. **106** (1963), 222 - 229.

[44] N. Hindman, *The existence of certain ultrafilters on* $\mathbb{N}$ *and a conjecture of Graham and Rothschild*, Proc. Amer. Math. Soc. **36** (1972), 341 - 346.

[45] N. Hindman, *Finite sums from sequences within cells of a partition of* $\mathbb{N}$, J. Comb. Theory (A) **17** (1974), 1 - 11.

[46] N. Hindman, *Partitions and sums and products of integers*, Trans. Amer. Math. Soc. **247** (1979), 227 - 245.

[47] N. Hindman, *Ultrafilters and combinatorial number theory*, in: *Number Theory Carbondale 1979* (M. Nathanson ed.), Lecture Notes in Mathematics **751**, Springer-Verlag, New York 1979, 119 - 184

[48] N. Hindman, *Partitions and Sums and Products — Two Counterexamples*, J. Comb. Theory (A) **29** (1980), 113 - 120.

[49] N. Hindman, *Sums equal to products in* $\beta\mathbb{N}$, Semigroup Forum **21** (1980), 221 - 255.

[50] N. Hindman, *Minimal ideals and cancellation in* $\beta\mathbb{N}$, Semigroup Forum **25** (1982), 291 - 310.

[51] N. Hindman, *Ramsey's theorem for sums, products and arithmetic progressions*, J. Comb. Theory (A) **38** (1985), 82 - 83.

[52] N. Hindman, *The minimal ideals of a multiplicative and additive subsemigroup of $\beta\mathbb{N}$*, Semigroup Forum **32** (1985), 283 - 292.

[53] N. Hindman, *The ideal structure of the space of κ-uniform ultrafilters on a discrete semigroup*, Rocky Mountain J. Math. **16** (1986), 685 - 701.

[54] N. Hindman, *Ultrafilters and Ramsey theory — an update*, in: *Set Theory and its Applications* (J. Stephrāns and S. Watson, eds.), Lecture Notes in Mathematics **1401**, Springer-Verlag, New York 1989, 97 - 118.

[55] N. Hindman, *The semigroup $\beta\mathbb{N}$ and its applications to number theory*, in: *The Analytical and Topological Theory of Semigroups — Trends and Developments* (K.H. Hofmann, J. Lawson, and J. Pym, eds.), de Gruyter Expositions in Math. **1**, New York 1990, 347 - 360.

[56] N. Hindman und A. Lisan, *Points very close to the smallest ideal of βS*, Semigroup Forum **49** (1994), 137 - 141.

[57] N. Hindman und J. Pym, *Closures of singly generated subsemigroups of βS*, Semigroup Forum **42** (1991), 147 - 154.

[58] N. Hindman und D. Strauss, *Cancellation in the Stone–Čech compactification of a discrete semigroup*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **37** (1994), 379 - 397.

[59] N. Hindman und D. Strauss, *Prime properties of the smallest ideal of $\beta\mathbb{N}$*, Semigroup Forum **52** (1996), 357 - 364.

[60] N. Hindman und D. Strauss, *Compact subsemigroups of $(\beta\mathbb{N}, +)$ containing the idempotents*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **39** (1996), 291 - 307.

[61] N. Hindman und W. Woan, *Central sets in commutative semigroups and partition regularity of systems of linear equations*, Mathematika **40** (1993), 169 - 186.

[62] K. Jacobs, *Ergodentheorie und fastperiodische Funktionen auf Halbgruppen*, Math. Zeit. **64** (1956), 298 - 338.

[63] S. Lang, *Algebra*, Addison-Wesley, Reading, Mass. 1993^3.

[64] A. Lisan, *Ultrafilters on a discrete set with two binary operations*, Semigroup Forum **43** (1991), 77 - 81.

[65] A. Maleki und D. Strauss, *Homomorphisms, ideals and commutativity in the Stone–Čech compactification of a discrete semigroup*, Topology and its Appl. **71** (1996), 47 - 61.

[66] K. Numakura, *On bicompact semigroups*, Math J. Okayama Univ. **1** (1952), 99 - 108.

[67] J. Pym, *Semigroup structures on Stone–Čech compactifications*, J. London Math. Soc. (2) **36** (1987), 421 - 428.

[68] J. Pym, *Compact semigroups with one-sided continuity*, in: *The Analytical and Topological Theory of Semigroups — Trends and Developments* (K.H. Hofmann, J. Lawson, and J. Pym, eds.), de Gruyter Expositions in Math. **1**, New York 1990, 197 - 217.

[69] B. von Querenburg, *Mengentheoretische Topologie*, Springer-Verlag, Berlin 1979^2.

[70] R. Rado, *Studien zur Kombinatorik*, Math. Z. **36** (1933), 424 - 480.

[71] F. P. Ramsey, *On a problem of formal logic*, Proc. London Math. Soc. (2) **30** (1930), 264 - 286.

[72] W. Ruppert, *Rechtstopologische Halbgruppen*, J. Reine Angew. Math. **261** (1973), 123 - 133.

[73] W. Ruppert, *Compact Semitopological Semigroups: An Intrinsic Theory*, Lecture Notes in Math. **1079**, Springer-Verlag, Berlin 1984.

[74] I. Schur, *Über die Kongruenz* $x^m + y^m = z^m (mod\ p)$, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **25** (1916), 114 - 117.

[75] M.H. Stone, *Application of the theory of Boolean rings to general topology*, Trans. Amer. Math. Soc. **41** (1937), 375 - 481.

[76] M.H. Stone, *On the compactification of topological spaces*, Ann. Soc. Polon. Math. **21** (1948), 153 - 160.

[77] D. Strauss, *Semigroup structures on $\beta\mathbb{N}$*, Semigroup Forum **44** (1992), 238 - 244.

[78] D. Strauss, $\mathbb{N}^*$ *does not contain an algebraic and topological copy of $\beta\mathbb{N}$*, J. London Math. Soc. **46** (1992), 463 - 470.

[79] D. Strauss, *Ideals and commutativity in $\beta\mathbb{N}$*, Topology and its Appl. **60** (1994), 281 - 293.

[80] E. Szemerédi, *On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression*, Acta Arithmetica **27** (1975), 199 - 245.

[81] B.L. van der Waerden, *Beweis einer Baudetschen Vermutung*, Nieuw Arch. Wiskunde **15** (1927), 212 - 216.

[82] E. K. van Douwen, *The Čech–Stone compactification of a discrete groupoid*, Topology and its Appl. **39** (1991), 43 - 60.

[83] J. van Mill, *An introduction to $\beta\omega$*, in: *Handbook of Set-Theoretic Topology* (K. Kunen and J.E. Vaughan, eds.), North-Holland, Amsterdam 1984, 503 - 567.

[84] W.A. Veech, *Topological dynamics*, Bull. Amer. Math. Soc. **85** (1977), 775 - 830.

[85] R. Walker, *The Stone–Čech compactification*, Springer-Verlag, New York 1974.