Sobolevräume

von Markus Haase

Vorläufige Version
9. März 2004

Adresse des Autors: Abt. Angewandte Analysis
Helmholtzstraße 18
89069 Ulm

e-mail: haase@mathematik.uni-ulm.de

Vorwort

Während das Machwerk [Haa] noch aus der Arbeit mit Studenten erwuchs und dann gleichermassen ein Eigenleben entwickelte, ist das vorliegende Elaborat nichts als eine "Selbstvergewisserung" des Autors. Um mir selbst klarzuwerden über die grundlegenden Theoreme und Beweise in der Theorie der Sobolevräume habe ich angefangen die Resultate zu ordnen und — mit Beweisen versehen — aufzuschreiben. Veranschaulichende Beispiele ebenso wie hilfreiche Zwischentexte fehlen daher. Nie habe ich den Aufschrieb unter didaktischen Gesichtspunkten betrachtet ausser in Bezug auf meinen eigenen Wissensstand. Etwaige Leser mögen dies bedenken, bevor sie ihren Zorn oder ihre Verzweiflung über mich ausschütten.
Der Titel "Sobolevräume" ist nicht falsch, suggeriert aber eine Vollständigkeit, die zwar wünschenswert aber nicht realisierbar ist. Momentan will ich mir die schwierige Frage der Fortsetzungseigenschaft und die Mengen mit Lipschitzrändern nicht zumuten, darum bricht die Darstellung an dieser Stelle ab. Ich gedenke, den Text dann zu ergänzen, wenn mein Wissenshunger mich einmal wieder in diese Ecke der Analysis verschlägt.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort **2**

Inhaltsverzeichnis **2**

1 Buckelfunktionen und Partitionen der Eins **4**

2 Die Faltung **6**

3 Regularisierung **9**

4 Partielle Integration und Distributionen **11**

5 Faltung von Distributionen **14**

6 Sobolevräume **16**

7 Differenzenquotienten **18**

8 Lipschitzabbildungen und $W^{1,\infty}$ **19**

9 Kettenregel und Verbandseigenschaften **20**

10 Die Räume $W_0^{1,p}$ **23**

11 Riesz-Potentiale **23**

12 Der Sobolev'sche Einbettungssatz **26**

13 Sobolev-Einbettung für $p \geq d$ **28**

14 Der Kompaktheitssatz von Rellich-Kondrachev **29**

15 Hölderstetige Funktionen **29**

16 Die Fortsetzungseigenschaft **32**

Literatur **32**

§1 Buckelfunktionen und Partitionen der Eins

Buckelfunktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Der Raum der **Testfunktionen**

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega) := \mathbf{C}_{\boldsymbol{c}}^{\infty}(\Omega) = \mathbf{C}_{\mathbf{c}}(\Omega) \cap \mathbf{C}^{\infty}(\Omega)$$

ist von zentraler Bedeutung. Wir stellen zuerst sicher, dass dieser Raum sehr reichhaltig ist.

Lemma 1.1. *Die Funktion $\eta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch*

$$\eta(x) := \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

ist unendlich oft differenzierbar.

Beweis. Wegen $\lim_{t \to -\infty} e^t = 0$ ist η stetig. Klar ist auch $\eta \in \mathbf{C}^{\infty}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Nach dem MWS der Differentialrechnung genügt es zu zeigen, dass $\lim_{t \nearrow 0} \eta^{(k)}(t) = 0$ ist für alle k. Induktiv zeigt man $\eta^{(k)}(t) = p_k(\frac{1}{t})e^{\frac{1}{t}}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $t < 0$, wobei $p_k \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom ist. Daraus folgt die Behauptung. ◻

Satz 1.1. *a) Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein endliches Intervall. Dann gibt es eine Funktion $\theta_{a,b} \in \mathbf{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ mit $0 \leq \theta_{a,b} \leq 1$, $\{\theta_{a,b} = 0\} = (-\infty, a]$ und $\{\theta_{a,b} = 1\} = [b, \infty)$.*

b) Es gibt eine Funktion $0 \leq \rho \in \mathbf{C}^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ mit $\{\rho \neq 0\} = B(0, 1)$ und $\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)\, dx = 1$.

c) Sei $K \subset \Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit K kompakt und Ω offen. Dann gibt es eine Funktion $\varphi \in \mathbf{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ mit $K \prec \varphi \prec \Omega$.

Hier benutzen wir die Schreibweise $K \prec \varphi \prec \Omega$ als Abkürzung für $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi|_K \equiv 1$, $\operatorname{supp}(\varphi) \subset \Omega$.

Beweis. Zu a). Betrachte die Funktion $\eta_{a,b}(x) := \eta((a - x)(b - x))$. Dann ist $\eta_{a,b} \in \mathbf{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ und $\eta_{a,b}(x) = 0$ genau dann, wenn $(a - x)(b - x) \geq 0$, d.h $x \in \mathbb{R} \setminus (a, b)$ ist. Für passendes $c > 0$ kann man dann die Funktion $\theta_{a,b}(x) := c \int_{-\infty}^{x} \eta_{a,b}(t)\, dt$ wählen.
Zu b). Wir setzen einfach $\rho(x) := c\eta(|x|^2 - 1)$ mit einer passenden Konstante $c > 0$.
Zu c). Wir verschaffen uns zunächst eine Funktion $0 \leq \psi \in \mathbf{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{supp}(\psi) \subset \Omega$ und $\inf_{x \in K} \psi(x) > 0$. Zu $y \in K$ gibt es $\varepsilon_y > 0$, so dass $\overline{B(y, \varepsilon_y)} \subset \Omega$ ist. Die Funktion $\psi_y(x) := \eta(\varepsilon_y^2 - |x - y|^2)$ ist in $\mathbf{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{supp}(\psi_y) \subset \Omega$ und $B(y, \varepsilon_y) = \{\psi_y > 0\}$. Da K kompakt ist, gilt $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(y_i, \varepsilon_{y_i})$ für gewisse y_i. Dann ist $\psi := \sum_{i=1}^{n} \psi_{y_i} \in \mathbf{C}_{\mathbf{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ mit $\psi \geq 0$, $\operatorname{supp}(\psi) \subset \Omega$ und $\psi > 0$ auf K. Wiederum weil K kompakt ist, gilt dann $\delta := \inf_{x \in K} \psi(x) > 0$. Damit hat $\varphi := \theta_{0,\delta} \circ \psi$ die gewünschten Eigenschaften. ◻

Partitionen der Eins

Wir werden sehen, dass man eine abgeschlossene Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ auf analytische Weise gewissermaßen in handliche Teile zerstückeln kann. Wir beginnen mit einem Lemma.

Lemma 1.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Dann gibt es eine Folge kompakter Mengen $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$ und $\bigcup_n K_n = \Omega$.*

Beweis. Durch Betrachten von (abgeschlossenen) Kugeln mit rationalen Mittelpunkten und rationalen Radii findet man Kompakta L_n mit $\bigcup_n L_n = \Omega$. Jetzt definiert man induktiv $K_0 := L_0$ und $K_{n+1} := \overline{B_\varepsilon(K_n)} \cup L_n$, wobei $0 < \varepsilon$ so gewählt wird, dass $\overline{B_\varepsilon(K_n)} \subset \Omega$ ist. □

Satz 1.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und sei $(U_\alpha)_\alpha$ eine offene Überdeckung von Ω. Dann gibt es eine dieser Überdeckung untergeordnete* **Partition der Eins**, *d.h., es gibt eine offene Überdeckung $(V_n)_n$ von Ω und $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{C}^\infty_\mathbf{c}(\mathbb{R}^d)$ mit den folgenden Eigenschaften:*

1) *Das System $(V_n)_n$ ist lokal-endlich, d.h. für jedes $x \in \Omega$ gibt es $\varepsilon > 0$, so dass die Menge $\{n \mid V_n \cap B(x,\varepsilon) \neq \emptyset\}$ endlich ist;*
2) *Zu jedem n gibt es α mit $V_n \subset U_\alpha$;*
3) $0 \leq \tau_n \leq 1$;
4) $\operatorname{supp} \tau_n \subset V_n$;
5) $\sum_n \tau_n = 1$ *auf* Ω.

Man beachte, dass aufgrund von 3) die Summe in 4) lokal nur eine endliche Summe ist.

Beweis. Nach Lemma 1.2 gibt es kompakte Mengen $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ derart, dass $K_m \subset \mathring{K}_{m+1}$ und $\bigcup_m K_m = \Omega$. Man setzt nun

$$B_n := K_n \setminus \mathring{K}_{n-1} \quad \text{und} \quad Q_n := \mathring{K}_{n+1} \setminus K_{n-2}.$$

Dann ist B_n kompakt, Q_n offen, $B_n \subset Q_n$, $\bigcup_n B_n = \Omega$ und $Q_n \cap Q_m = \emptyset$ für $|n-m| \geq 3$.
Für jedes n gibt es endlich viele offene *Kugeln* $W_{n,i}$ mit

$$B_n \subset \bigcup_i W_{n,i} \subset \bigcup_i \widetilde{W}_{n,i} \subset Q_n$$

(wobei $\widetilde{W}_{n,i}$ die Kugel ist mit doppeltem Radius und gleichem Mittelpunkt wie die Kugel $W_{n,i}$). Dabei kann man zugleich erreichen, dass es zu jedem i ein α gibt mit $\widetilde{W}_{n,i} \subset U_\alpha$. Man beachte, dass das System aller $\widetilde{W}_{n,i}$ jedenfalls lokal-endlich ist.
Ist $W_{n,i} = B(x_0, \varepsilon)$ für $x_0 \in \mathbb{R}^d$ und $\varepsilon > 0$, so setzen wir $\psi_{n,i} := \eta(\varepsilon^2 - |x - x_0|^2)$. Dann gilt $\psi_{n,i} \in \mathbf{C}^\infty_\mathbf{c}(\mathbb{R}^d)$, $0 \leq \psi_{n,i} \leq 1$, $W_{n,i} = \{\psi > 0\}$ und $\operatorname{supp}(\psi_{n,i}) \subset \overline{W_{n,i}} \subset \widetilde{W}_{n,i}$.
Nun definieren wir $\psi := \sum_n \sum_i \psi_{n,i}$. Dies ist lokal eine endliche Summe, also ist $\psi \in \mathbf{C}^\infty(\Omega)$. Da jeder Punkt von Ω in mindestens einem B_n und daher auch in einem $W_{n,i}$ liegt, ist $\psi(x) > 0$ für alle $x \in \Omega$. Wir setzen abschließend

$$\tau_{n,i} := \psi_{n,i}/\psi \in \mathbf{C}^\infty_\mathbf{c}(\Omega).$$

Dann leisten die Familien $(\widetilde{W}_{n,i})_{n,i}$ und $(\tau_{n,i})_{n,i}$ das Gewünschte. (Man muß sie nur noch aufzählen, um der Aussage des Satzes genau zu entsprechen.) □

Folgerung 1.1. *Sei $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und $K \subset \bigcup_{j=1}^n \Omega_j$ eine offene Überdeckung. Dann gibt es $\tau_j \in \mathbf{C}^\infty_\mathbf{c}(\mathbb{R}^d)$ mit $0 \leq \tau_j \leq 1$, $\operatorname{supp}(\tau_j) \subset \Omega_j$ und $\sum_{j=1}^n \tau_j = 1$ auf K.*

Beweis. Man findet $(\tau_k)_k$ wie in Satz 1.2. Ein Kompaktheitsargument zeigt, dass $\operatorname{supp}(\tau_k) \cap K \neq \emptyset$ für höchstens endlich viele k gelten kann. Also ist $\tau_k = 0$ auf K für fast alle k. Die übrigen fasst man in Gruppen $\{k \mid \operatorname{supp}(\tau_k) \subset \Omega_j\}$ zusammen (wobei man doppeltes Vorkommen vermeidet) und addiert die Funktionen der einzelnen Gruppen. □

§ 2 Die Faltung

Seien Funktionen $f, g \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ gegeben. Wir nennen das Paar (f, g) **faltbar**, falls

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x+y) f(x) g(y)| \; dx \, dy < \infty \tag{1}$$

für alle $\varphi \in \mathbf{C_c}(\mathbb{R}^d)$ ist. Offensichtlich (Tonelli zusammen mit der Kommutativität der Addition) ist (f, g) genau dann faltbar, wenn (g, f) es ist. Wir sagen daher auch einfach, dass die Funktionen f, g faltbar sind.

Lemma 2.1. *Seien $f, g \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Die Funktionen f, g sind genau dann faltbar, wenn*

$$\int_K \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) g(y)| \; dy \, dx < \infty$$

gilt für alle $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt. In diesem Fall ist $f(x - .)g(.) \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^d)$ für fast alle x und mit

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y) \, dy \tag{2}$$

(für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$ definiert) ist $f * g \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

Beweis. Seien f, g faltbar. Zu kompaktem $K \subset \mathbb{R}^d$ findet man $K \prec \varphi$. Dann gilt

$$\int_K \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)| \; dx \, dy \leq \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)| \; dx \, dy$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x) f(x-y) g(y)| \; dx \, dy = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x+y) f(x) g(y)| \; dx \, dy < \infty$$

aufgrund der Translationsinvarianz des Lebesguemaßes. (Analog beweist man die umgekehrte Implikation.) Nach dem Satz von Fubini ist dann $\mathbf{1}_K(x) \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)| \; dy < \infty$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$. Lässt man K immer größer werden, so sieht man, dass

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)| \; dy < \infty,$$

also $f(x - .)g(.) \in \mathbf{L}^1$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$ ist. Der Rest ergibt sich ebenfalls leicht aus dem Satz von Fubini. □

Sind f, g faltbar, so nennt man die durch $f * g$ gegebene Äquivalenzklasse f.ü.-messbarer Funktionen die **Faltung** von f und g. Der folgende Satz faßt elementare Eigenschaften dieses Begriffs zusammen.

Satz 2.1. *Seien $f, g, h \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

a) Sind f, g faltbar, so gilt das **Kommutativgesetz** *$f * g = g * f$.*

b) Die Menge $V_f := \{g \mid f, g \text{ faltbar}\}$ ist ein Vektorraum, und die Abbildung $(g \longmapsto f * g) : V_f \longrightarrow \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ ist linear.

c) Genau dann sind f, g faltbar, wenn $|f|, |g|$ es sind, und in diesem Fall gilt die Ungleichung

$$|f * g| \leq |f| * |g| \, .$$

d) Sind f, g faltbar und $|f_1| \leq |f|$, sowie $|g_1| \leq |g|$, dann sind auch f_1, g_1 faltbar.

e) Seien $f, g, h \geq 0$. Dann gilt das **Assoziativgesetz**

$$f * (g * h) = (f * g) * h, \tag{3}$$

falls alle auftretenden Faltungen definiert sind.

f) Sind f, g faltbar und $a \in \mathbb{R}^d$, so sind auch $\tau_a f, g$ faltbar mit $(\tau_a f) * g = \tau_a(f * g)$.

Beweis. Die Aussagen a) - d) folgen fast unmittelbar aus der Definition. Seien die Voraussetzungen von e) erfüllt. Anwendung des Satzes von Tonelli und ein Variablenwechsel führt auf

$$\int\int\int \varphi(x+y+z)h(x)f(y)g(z)\,dx\,dy\,dz < \infty$$

für alle $0 \leq \varphi \in \mathbf{C_c}(\mathbb{R}^d)$, und zwar egal, von welcher Seite der Gleichung (3) man startet. Der Beweis von f) ist einfach. □

Offensichtlich ist das Paar $(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ *nicht* faltbar. Wir benötigen also hinreichende Kriterien.

Satz 2.2. *Die Faltung hat die folgenden Eigenschaften.*

a) Seien $f, g \in \mathbf{L^1_{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Hat f (oder g) kompakten Träger, so sind f, g faltbar. Ist darüberhinaus $f \in \mathbf{C}(\mathbb{R}^d)$, so gilt $f * g \in \mathbf{C}(\mathbb{R}^d)$.

b) **(Satz von Young)**
Seien $1 \leq p \leq \infty$, $f \in \mathbf{L^1}$, $g \in \mathbf{L^p}$. Dann sind f, g faltbar mit $f * g \in \mathbf{L^p}$ und

$$\|f * g\|_{\mathbf{L^p}} \leq \|f\|_{\mathbf{L^1}} \|g\|_{\mathbf{L^p}} .$$

c) Seien $1 \leq p \leq \infty$, $f \in \mathbf{L^p}$ und $g \in \mathbf{L^{p'}}$, wobei p' definiert ist durch $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Dann sind f, g faltbar mit

$$f * g \in \begin{cases} \mathbf{C_0}(\mathbb{R}^d) & 1 < p < \infty \\ \mathbf{BUC}(\mathbb{R}^d) & p = 1 \text{ oder } p = \infty \end{cases}$$

d) Sei $1 \leq p \leq \infty$ und p' der duale Exponent. Wenn $f \in \mathbf{L^p_{loc}}(\mathbb{R}^d)$ und $g \in \mathbf{L^{p'}_c}(\mathbb{R}^d)$, dann sind f, g faltbar (siehe a)) und $f * g \in \mathbf{C}(\mathbb{R}^d)$.

Beweis. Zu a). Sei $f \equiv 0$ außerhalb der kompakten Menge K und sei $\varphi \in \mathbf{C_c}(\mathbb{R}^d)$. Dann gibt es eine kompakte Menge L, so dass $\varphi(x+y)f(x) = 0$ ist für $x \notin K \times L$. Somit

$$\begin{aligned} \int\int |\varphi(x+y)f(x)g(y)|\,dx\,dy &= \int_L \int_K |\varphi(x+y)f(x)g(y)|\,dx\,dy \\ &\leq \|\varphi\|_\infty \int_K |f(x)|\,dx \int_L |g(y)|\,dy < \infty \end{aligned}$$

Sei $f \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^d)$ und sei $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Wir nehmen zunächst an dass $K := \operatorname{supp}(f)$ kompakt ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} |f * g(x) - f * g(x_0)| &\leq \int |f(x-y) - f(x_0-y)|\,|g(y)|\,dy \\ &\leq \int_{B(x_0,1)-K} |f(x-y) - f(x_0-y)|\,|g(y)|\,dy \\ &\leq \sup_{y \in \mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x_0-y)| \int_{B(x_0,1)-K} |g(y)|\,dy \end{aligned}$$

für $|x - x_0| < 1$. Da f gleichmässig stetig ist, folgt die Behauptung. Den Fall, dass g kompakten Träger hat behandelt man analog.
Zu b). Sei zunächst $p = 1$ und $F(x,y) := f(x-y)g(y)$. Dann ist F f.ü.-messbar und

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |F| \, d\lambda = \int \int |F(x,y)| \, dx \, dy = \int \int |f(x-y)| \, dx \, |g(y)| \, dy$$
$$= \int \int |f(x)| \, dx \, |g(y)| \, dy = \|f\|_{\mathbf{L^1}} \, \|g\|_{\mathbf{L^1}} < \infty.$$

Der Satz von Fubini impliziert, dass $\int |F(x,y)| \, dy < \infty$ für fast alle x und $(x \longmapsto \int F(x,y)) \in \mathbf{L^1}$ ist. Nach dem obigen Lemma sind f, g faltbar. Desweiteren gilt offensichtlich $\|f * g\|_{\mathbf{L^1}} \le \|f\|_{\mathbf{L^1}} \, \|g\|_{\mathbf{L^1}}$. Sei nun $1 < p < \infty$. Aus dem gerade Bewiesenen folgt sofort, dass $|f(x - .)| \, |g(.)|^p \in \mathbf{L^1}$, also $|f(x-.)|^{\frac{1}{p}} \, |g(.)| \in \mathbf{L^p}$ ist für fast alle x. Außerdem ist $|f(x-.)|^{\frac{1}{p'}} \in \mathbf{L^{p'}}$ für alle x. Hölder liefert daher

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)| \, dy &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^{\frac{1}{p'}} \, |f(x-y)|^{\frac{1}{p}} \, |g(y)| \, dy \\
&\le \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| \, dy \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| \, |g(y)|^{\frac{1}{p}} \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|f\|_{\mathbf{L^1}}^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| \, |g(y)|^{\frac{1}{p}} \, dy \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Eine erneute Anwendung von Hölder ergibt daraus

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)| \, dy \right)^p dx &\le \|f\|_{\mathbf{L^1}}^{\frac{p}{p'}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| \, |g(y)|^{\frac{1}{p}} \, dy \, dx \\
&\le \|f\|_{\mathbf{L^1}}^{p-1} \, \|f\|_{\mathbf{L^1}} \, \|g\|_{\mathbf{L^p}}^p = \|f\|_{\mathbf{L^1}}^p \, \|g\|_{\mathbf{L^p}}^p .
\end{aligned}$$

Aus dem obigen Lemma folgt nun, dass f, g faltbar sind und $f * g \in \mathbf{L^p}$ ist mit $\|f * g\|_{\mathbf{L^p}} \le \|f\|_{\mathbf{L^1}} \, \|g\|_{\mathbf{L^p}}$. Die Gültigkeit der Aussage im Fall $p = \infty$ folgt aus dem Lemma und

$$\int |f(x-y)g(y)| \, dy \le \|g\|_{\mathbf{L^\infty}} \int |f(x-y)| \, dy = \|g\|_{\mathbf{L^\infty}} \, \|f\|_{\mathbf{L^1}} .$$

Zu c). Sei $f \in \mathbf{L^p}, g \in \mathbf{L^q}$. Dann gilt mit Hölder

$$\int |f(x-y)g(y)| \, dy \le \left(\int |f(x-y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g(y)|^{p'} \, dy \right)^{\frac{1}{p'}} = \|f\|_{\mathbf{L^p}} \, \|g\|_{\mathbf{L^{p'}}} .$$

Also sind f und g faltbar und $f * g \in \mathbf{L^\infty}$ mit $\|f * g\|_{\mathbf{L^\infty}} \le \|f\|_{\mathbf{L^p}} \, \|g\|_{\mathbf{L^{p'}}}$. Sind $\varphi, \psi \in \mathbf{C_c}(\mathbb{R}^d)$, so liegt offensichtlich $\varphi * \psi$ wieder in $\mathbf{C_c}(\mathbb{R}^d)$. Da $\mathbf{C_c}$ dicht in $\mathbf{L^p}$ ist, wenn $1 \le p < \infty$, folgt also $f * g \in \mathbf{C_0}(\mathbb{R}^d)$ im Fall $1 < p < \infty$. Es bleibt zu zeigen, dass $\varphi * g \in \mathbf{BUC}$ ist für $\varphi \in \mathbf{C_c}$ und $g \in \mathbf{L^\infty}$. Dies ist eine einfache Konsequenz der Tatsache, dass φ gleichmäßig stetig ist und kompakten Träger hat.
Zu d). Sei $g \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^d \setminus K$ und $M \subset \mathbb{R}^d$ kompakt. Dann gilt

$$\begin{aligned}
|f * g(x)| &\le \int |f(x-y)g(y)| \, dy = \int_K |f(x-y)g(y)| \, dy \le \|f(x-.)\|_{\mathbf{L^p}(K)} \, \|g\|_{\mathbf{L^{p'}}} \\
&= \|f\|_{\mathbf{L^p}(x-K)} \, \|g\|_{\mathbf{L^{p'}}} \le \|f\|_{\mathbf{L^p}(M-K)} \, \|g\|_{\mathbf{L^{p'}}}
\end{aligned}$$

für alle $x \in M$. Damit hat man $\|f * g\|_{\mathbf{L^\infty}(M)} \le \|f\|_{\mathbf{L^p}(M-K)} \, \|g\|_{\mathbf{L^{p'}}}$. Im Fall $1 < p \le \infty$ kann man g durch Funktionen aus $\mathbf{C_c}\mathbb{R}^d$ approximieren. Falls $p = 1$ ist, approximiert man f. □

Man kann noch eine "lokale" Version der Faltung definieren. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt. Setze $\Omega_K := \{x \in \mathbb{R}^d \mid x - K \subset \Omega\}$. Dann ist auch Ω_K offen. Sei $f \in \mathbf{L^1_{loc}}(\Omega)$ und $g \in \mathbf{L^1}(K)$. Dann existiert

$$f * g(x) := \int f(x-y)g(y) \, dy = \int_\Omega g(x-y)f(y) \, dy$$

für fast alle $x \in \Omega_K$ und $f * g \in \mathbf{L^1_{loc}}(\Omega_K)$.

Beweis. Sei $L \subset \Omega_K$ kompakt. Dann

$$\int_L \int |f(x-y)g(y)|\,dy\,dx = \int_K |g(y)| \int_{L-y} |f(x)|\,dx\,dy \leq \int_K |g(y)|\,dy \int_{L-K} |f(x)|\,dx < \infty$$

da $L - K \subset \Omega$ kompakt ist. □

Somit hat man $\|f * g\|_{1,L} \leq \|g\|_{1,K} \|f\|_{1,L-K}$. In vielen Fällen ist $g := \mathbf{1}_A$ eine Indikatorfunktion.

Satz 2.3. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt, und seien $f \in \mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{loc}}(\Omega), g \in \mathbf{L}^{\boldsymbol{p'}}(K)$ mit $1 \leq p \leq \infty$. Dann ist $f * g \in \mathbf{C}(\Omega_K)$ mit $\|f * g\|_{\infty,L} \leq \|f\|_{p,L-K} \|g\|_{p',K}$.*

Beweis. Wir wenden Hölder an: $|f * g(x)| \leq \int_K |f(x-y)g(y)|\,dy \leq \|f(x-\cdot)\|_{p,K} \|g\|_{p',K} = \|f\|_{p,x-K} \|g\|_{p',K} \leq \|f\|_{p,L-K} \|g\|_{p',K}$. □

§ 3 Regularisierung

Die Idee der Regularisierung stützt sich auf das folgende Ergebnis.

Satz 3.1. *Sei $f \in \mathbf{C}(\mathbb{R}^d)$ nach x_i stetig differenzierbar, und sei $g \in \mathbf{L}^{\mathbf{1}}_{\mathbf{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Hat f oder g kompakten Träger, so ist $f * g$ nach x_i stetig differenzierbar mit*

$$D_i(f * g) = (D_i f) * g$$

Beweis. Seien $x, y \in \mathbb{R}^d$ und $t \in \mathbb{R}$ mit $|t| \leq 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&|f(x + te_i - y) - f(x-y) - tD_i f(x-y)| = \left| \int_0^1 \frac{d}{ds} f(x + ste_i - y)\,ds - tD_i f(x-y) \right| \\
&\leq |t| \int_0^1 |D_i f(x + ste_i - y) - D_i f(x-y)|\,ds
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
&|(f * g(x + te_i) - f * g(x)) - t(D_i f) * g(x)| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} |(f(x + te_i - y) - f(x-y)) - tD_i f(x-y)|\,|g(y)|\,dy \\
&\leq |t| \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^1 |D_i f(x + ste_i - y) - D_i f(x-y)|\,ds\,|g(y)|\,dy \\
&\leq |t| \int_K |g(y)|\,dy \sup_{y \in K, s \in [0,1]} |D_i f(x + ste_i - y) - D_i f(x-y)|
\end{aligned}$$

wobei $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt ist mit $g \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^d \setminus K$ (im einen Fall) bzw. $K := \overline{B(x,1)} - L$ und $f \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^d \setminus L$ (im andern). Da $D_i f$ lokal gleichmäßig stetig ist, folgt die Behauptung. □

Wir wählen (nach Satz 1.1) eine Funktion $0 \leq \rho \in \mathbf{C}^{\boldsymbol{\infty}}(\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{supp}(\rho) = \overline{B(0, \frac{1}{2})}$ und $\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)\,dx = 1$, und setzen

$$\rho_\delta(x) := \frac{1}{\delta^d}\, \rho\left(\frac{x}{\delta}\right).$$

Dann ist $0 \leq \rho_\delta \in \mathbf{C}^{\boldsymbol{\infty}}_{\boldsymbol{c}}(\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{supp}(\rho_\delta) = \overline{B(0, \frac{\delta}{2})}$ und $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\delta(x)\,dx = 1$ für alle $\delta > 0$. Wir nennen die Familie $(\rho_\delta)_{\delta > 0}$ einen **Standardregularisierer** (engl. **standard mollifier**) auf $\mathbb{R}^d$.

Satz 3.2. *Für einen Standardregularisierer $(\rho_\delta)_{\delta>0}$ gelten die folgenden Aussagen.*

a) Für $f \in \mathbf{C}(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\delta(x) f(x)\, dx \to f(0) \qquad \text{für} \quad \delta \searrow 0.$$

b) Für $f \in \mathbf{L^1_{loc}}(\mathbb{R}^d)$ ist $\rho_\delta * f \in \mathbf{C^\infty}(\mathbb{R}^d)$ mit

$$D^\alpha(\rho_\delta * f) = (D^\alpha \rho_\delta) * f = \frac{1}{\delta^{|\alpha|}} (D^\alpha \rho)_\delta * f$$

für alle $\delta > 0$. Ist $f \equiv 0$ außerhalb K, so ist $\operatorname{supp}(\rho_\delta * f) \subset \overline{B(0,\delta/2)} + K$. Insbesondere gilt dann $\rho_\delta * f \in \mathbf{C_c^\infty}(\mathbb{R}^d)$.

c) Ist $f \in \mathbf{C}(\mathbb{R}^d)$, so gilt $\rho_\delta * f \to f$ gleichmäßig auf kompakten Mengen. Ist dabei $f \in \mathbf{C^b}(\mathbb{R}^d)$, so gilt $\|\rho_\delta * f\|_\infty \le \|f\|_\infty$.

d) Ist $f \in \mathbf{BUC}(\mathbb{R}^d)$, so gilt $\|\rho_\delta * f - f\|_\infty \to 0$.

e) Ist $f \in \mathbf{L^p}(\mathbb{R}^d)$ mit $1 \le p < \infty$, so gilt $\rho_\delta * f \in \mathbf{L^p}(\mathbb{R}^d)$ mit $\|\rho_\delta * f\|_{\mathbf{L^p}} \le \|f\|_{\mathbf{L^p}}$ und $\|\rho_\delta * f - f\|_{\mathbf{L^p}} \to 0$.

Beweis. Ad a). Man hat

$$\left| \int \rho_\delta(x) f(x)\, dx - f(0) \right| \le \int \rho_\delta(x)\, |f(x) - f(0)|\; dx \le \sup_{x \in \overline{B(0,\delta/2)}} |f(x) - f(0)| \to 0$$

Ad b). Dies folgt aus Satz 3.1. Die Behauptung über die Träger ist einfach zu sehen.
Ad c) und d). Man hat

$$|\rho_\delta * f(x) - f(x)| \le \int \rho_\delta(y)\, |f(x-y) - f(x)|\; dy \le \sup_{y \in \overline{B(0,\delta/2)}} |f(x-y) - f(x)| \to 0$$

gleichmässig in x (falls $f \in \mathbf{BUC}$) bzw. gleichmässig in $x \in K$ für alle Kompakta K.
Ad e). Die Normabschätzung folgt aus Satz 2.2. Um die Konvergenzaussage zu zeigen, kann man also ohne Einschränkung $f \in \mathbf{C_c}(\mathbb{R}^d)$ annehmen. (Dieser Raum ist dicht in $\mathbf{L^p}(\mathbb{R}^d)$!) Für $f \in \mathbf{C_c}(\mathbb{R}^d)$ ist aber $\rho_\delta * f \to f$ gleichmässig und trägerbeschränkt (nach b) und d)), somit auch in $\mathbf{L^p}$. ☐

Sei im folgenden $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Wir benutzen die Abkürzung

$$\omega \subset\subset \Omega$$

für den folgenden Sachverhalt: ω ist offen und relativ-kompakt mit $\overline{\omega} \subset \Omega$.
Für $\delta > 0$ setzen wir

$$\Omega_\delta := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \overline{B(x,\delta)} \subset \Omega\} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^d \setminus \Omega) > \delta\}$$

Dann ist Ω_δ offen, $\overline{\Omega_\delta} \subset \Omega$ und $\Omega_\delta \nearrow \Omega$ für $\delta \searrow 0$. Für $f \in \mathbf{L^1_{loc}}(\Omega)$ und $x \in \Omega_\delta$ betrachtet man

$$\rho_\delta * f(x) = f * \rho_\delta(x) = \int_\Omega \rho_\delta(x-y) f(y)\, dy$$

(siehe Abschnitt 2). Die folgende Beobachtung ist sehr nützlich:

Lemma 3.1. *Seien $f, g \in \mathbf{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$, $K \subset \Omega$ kompakt und $f = g$ auf einer Umgebung von K in Ω. Dann*

$$\rho_\delta * f = \rho_\delta * g \quad \text{auf } K$$

für kleine δ.

Man wählt nun eine Folge $\omega_n \subset\subset \Omega$ mit $\overline{\omega_n} \subset \omega_{n+1}$ und $\bigcup_n \omega_n = \Omega$. Dann konstruiert man sukzessive Funktionen $\eta_n \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega)$ mit

1) $0 \leq \eta_n \leq 1$
2) $\overline{\omega_n} \cup \operatorname{supp} \eta_{n-1} \prec \eta_n \prec \Omega$

(Insbesondere ist $\eta_n \leq \eta_{n+1}$.) Dazu passend findet sich schließlich eine Folge $\delta_n \searrow 0$ mit $\operatorname{supp} \eta_n \subset \Omega_{\delta_n}$. Nun setzen wir

$$A_n f := \rho_{\delta_n} * (f \eta_n)$$

für $f \in \mathbf{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

Lemma 3.2. *Es gilt $A_n f \in \mathbf{C}^\infty_c(\Omega)$ mit $\operatorname{supp}(A_n f) \subset \Omega_{\delta_n/2}$ für alle n. Außerdem gilt*

$$A_n f = \rho_{\delta_n} * (f\eta) \quad \text{auf } \omega \qquad \text{(fast alle } n\text{)}$$

wobei $\omega \subset\subset \Omega$ und $\eta \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega)$ ist mit $\eta = 1$ auf einer Umgebung von $\overline{\omega}$.

Beweis. Nach Satz 3.2 ist $A_n f \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$. Weiter gilt $\operatorname{supp}(A_n f) \subset \overline{B(0, \delta_n/2)} + \operatorname{supp} \eta_n \subset \overline{B(0, \delta_n/2)} + \Omega_{\delta_n} \subset \Omega_{\delta_n/2}$. Der Rest folgt aus Lemma 3.1. □

Satz 3.3. *Es gelten die folgenden Aussagen:*

a) *Wenn $f \in \mathbf{C}(\Omega)$, so $A_n f \to f$ gleichmäßig auf kompakten Mengen in Ω.*
b) *Wenn $f \in \mathbf{C}^k(\Omega)$, so $D^\alpha(A_n f) \to D^\alpha f$ gleichmäßig auf kompakten Mengen in Ω, für alle $|\alpha| \leq k$.*
c) *Ist $f \in \mathbf{L}^1_c(\Omega)$, so ist die Folge $(A_n f)_n$ trägerbeschränkt.*
d) *Wenn $1 \leq p < \infty$ und $f \in \mathbf{L}^p(\Omega)$, so $\|A_n f - f\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} \to 0$.*
e) *Wenn $1 \leq p < \infty$ und $f \in \mathbf{L}^p_{\text{loc}}(\Omega)$, so $\|A_n f - f\|_{\mathbf{L}^p(\omega)} \to 0$, für jedes $\omega \subset\subset \Omega$.*

Beweis. Man kombiniere das vorstehende Lemma mit Satz 2.2. □

Folgerung 3.1. *Der Raum $\mathbf{C}^\infty_c(\Omega)$ ist dicht in den Räumen $\mathbf{C}^k(\Omega)$ $(0 \leq k \leq \infty)$, $\mathbf{C}_c(\Omega)$, $\mathbf{C}_0(\Omega)$, $\mathbf{L}^p(\Omega)$ und $\mathbf{L}^p_{\text{loc}}(\Omega)$ $(1 \leq p < \infty)$.*

§4 Partielle Integration und Distributionen

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir den Begriff der Ableitung von Funktionen auf abstraktere Objekte, den sog. Distributionen. Ausgangspunkt ist der folgende Satz.

Satz 4.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und seien $f \in \mathbf{C}^1_c(\Omega)$ und $g \in \mathbf{C}^1(\Omega)$. Dann gilt*

$$\int_\Omega f(x) D_i g(x)\, dx = -\int_\Omega D_i f(x) g(x)\, dx$$

für $i = 1, \ldots, d$.

Beweis. Betrachte $h := fg \in \mathbf{C_c}(\Omega)$. Indem man durch 0 fortsetzt, kann man h als Funktion auf $\mathbb{R}^d$ auffassen. Die Produktregel liefert $D_i h = (D_i f)g + f(D_i g)$. Somit

$$\int_\Omega (D_i f)g + \int_\Omega f(D_i g) = \int_\Omega D_i h = \int_{\mathbb{R}^d} D_i h(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x_i} h(x)\,dx_i\,d\hat{x} = 0.$$

□

Distributionen
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Wie in Abschnitt 1 bezeichen wir mit

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega) := \mathbf{C}_{\boldsymbol{c}}^{\boldsymbol{\infty}}(\Omega)$$

den Raum der **Testfunktionen**. Eine Folge $(\varphi_n)_n \subset \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega)$ von Testfunktionen heißt gegen φ **konvergent in** $\boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega)$, falls

1) $\varphi \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega)$,
2) $\varphi_n \to \varphi$ gleichmäßig in allen Ableitungen, und
3) $(\varphi_n)_n$ trägerbeschränkt ist, d.h. $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subset \omega \subset\subset \Omega$ für ein ω unabhängig von n.

Eine lineare Abbildung $T : \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt **Distribution**, falls sie stetig bezüglich der Konvergenz in $\boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega)$ ist, d.h. wenn $T[\varphi_n] \to 0$ gilt, wann immer $\varphi_n \to 0$ in $\boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega)$ ist. Der Raum der Distributionen wird mit $\mathbf{D}(\Omega)$ bezeichnet.

Konvergenz von Distributionen
Auf $\mathbf{D}(\Omega)$ betrachtet man meist die Topologie der **schwachen Konvergenz**. Dabei sagt man, dass die Folge $(T_n)_n$ schwach gegen T konvergiert, wenn $T_n[\varphi] \to T[\varphi]$ für alle Testfunktionen $\varphi \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega)$ gilt. Oft schreibt man auch $\langle T, \varphi\rangle$ statt $T[\varphi]$. Das folgende Resutlat ist eine Version des Satzes von Banach-Steinhaus.

Satz 4.2. *Seien $T_n \in \mathbf{D}(\Omega)$ so, dass $T[\varphi] := \lim_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi\rangle$ für jedes $\varphi \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega)$ existiert. Dann ist $T \in \mathbf{D}(\Omega)$.*

Beweis. Siehe [Rud, Thm. 6.17]. □

Reguläre Distributionen
Jeder Funktion $f \in \mathbf{L}^{\mathbf{1}}_{\mathbf{loc}}(\Omega)$ ist in kanonischer Weise die sog. **reguläre Distribution**

$$T_f := \left(\varphi \longmapsto T_f[\varphi] = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx\right)$$

zugeordnet. Die Zuordnung $(f \longmapsto T_f) : \mathbf{L}^{\mathbf{1}}_{\mathbf{loc}}(\Omega) \longrightarrow \mathbf{D}(\Omega)$ ist injektiv, wie das folgende Lemma zeigt. Sie ist offensichtlich stetig.

Lemma 4.1. *Sei $f \in \mathbf{L}^{\mathbf{1}}_{\mathbf{loc}}(\Omega)$ und*

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx = 0 \quad \textit{für alle } \varphi \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega).$$

Dann ist $f = 0$ (f.ü.).

Beweis. Sei $\omega \subset\subset \Omega$ und $A \subset \omega$ eine Borelmenge. Setze $\varphi_n := \rho_{1/n} * \mathbf{1}_A \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega f(x)\varphi_n(x)\,dx = \int f(x) \int \rho_{1/n}(y)\mathbf{1}_A(x-y)\,dy\,dx \\
&= \int \rho_{1/n}(y) \int f(x)\mathbf{1}_{-A}(y-x)\,dx\,dy = \int \rho_{1/n}(y)(f * \mathbf{1}_{(-A)})(y)\,dy \\
&\to (f * \mathbf{1}_{(-A)})(0) = \int_A f(y)\,dy
\end{aligned}$$

nach Satz 2.3 und Satz 3.2, Teil a). Weil A beliebig war, folgt also $f|_\omega = 0$ (f.ü.), danach $f = 0$ (f.ü.). ☐

Ableitung von Distributionen

Sei $T \in \mathbf{D}(\Omega)$ eine Distribution. Dann definiert man die α-te Ableitung $D^\alpha T$ durch

$$(D^\alpha T)[\varphi] := (-1)^{|\alpha|} T[D^\alpha \varphi]$$

für $\varphi \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega)$. Offensichtlich ist $D^\alpha T \in \mathbf{D}(\Omega)$. Wegen Satz 4.1 ist $D^\alpha T_f = T_{D^\alpha f}$ für alle $f \in \mathbf{C}^\mathbf{k}(\Omega)$ und $1 \leq k \leq \infty$. Die Definition der Ableitung stimmt also mit der gewöhnlichen überein, wenn es sich um genügend glatte Funktionen handelt. Die Abbildung

$$(T \longmapsto D^\alpha T) : \mathbf{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbf{D}(\Omega)$$

ist stetig bzgl. schwacher Konvergenz.

Satz 4.3. *Sei $(a,b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $T \in \mathbf{D}(a,b)$ mit $T' = 0$. Dann ist $T = c\mathbf{1}$ für ein $c \in \mathbb{C}$.*

Beweis. Betrachte die reguläre Distribution $S := \mathbf{1}$. Wenn $\varphi \in \ker S$, so ist $\psi(x) := \int_a^x \varphi(s)\,ds$ wieder eine Testfunktion und es gilt sogar $\varphi = \psi'$. Das bedeutet aber $\varphi \in \ker T$ nach Voraussetzung. Damit hat man $\ker S \subset \ker T$, weswegen S, T linear abhängig sein müssen. ☐

Multiplikation mit Funktionen

Auf dem Raum $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\Omega) := \mathbf{C}^\infty(\Omega)$ betrachten wir die durch die Halbnormenfamilie

$$\|f\|_{(\alpha),\overline{\omega}} := \sup_{x \in \overline{\omega}} |D^\alpha f(x)| \qquad (\alpha \in \mathbb{N}^d,\ \omega \subset\subset \Omega)$$

definierte lokalkonvexe Topologie. (Dann ist $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\Omega)$ ein Frechet-Raum, denn zur Beschreibung der Topolgie reichen abzählbar viele Halbnormen.) Die Multiplikation

$$((f,g) \longmapsto fg) : \boldsymbol{\mathcal{E}}(\Omega) \times \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega) \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega)$$

ist simultan folgenstetig. Dabei gilt die **Leibnizformel**

$$D^\alpha(fg) = \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} c_{\alpha,\beta} D^{\alpha-\beta} f\, D^\beta g \tag{4}$$

für gewisse universelle Konstanten $c_{\alpha,\beta} = \prod_{i=1}^d \frac{\alpha_i!}{\beta_i!(\alpha_i-\beta_i)!}$.

Man erklärt nun eine Multiplikation von $f \in \boldsymbol{\mathcal{E}}(\Omega)$ mit $T \in \mathbf{D}(\Omega)$ durch

$$\langle fT, \varphi \rangle = (fT)[\varphi] = T[f\varphi] = \langle T, f\varphi \rangle$$

Dies ergibt eine Multiplikation $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\Omega)\times\mathbf{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbf{D}(\Omega)$, die separat folgenstetig ist. (Sie ist sogar *simultan* folgenstetig, siehe [Rud, Th. 6.18].) Ferner gilt die Leibnizformel

$$D^\alpha(fT) = \sum_{0\le\beta\le\alpha} c_{\alpha,\beta}(D^{\alpha-\beta}f)\,(D^\beta T). \tag{5}$$

Träger einer Distribution

Sei $T \in \mathbf{D}(\Omega)$ und $O \subset \Omega$ offen. Man sagt, T **verschwindet auf** O, wenn $\langle T,\varphi\rangle = 0$ für alle $\varphi \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(O)$ ist. Man setzt $W_T := \bigcup\{O \subset \Omega \mid O$ offen und T verschwindet auf $O\}$. Der **Träger** von T ist definiert als $\operatorname{supp} T := \Omega \setminus W$.

Satz 4.4. *Sei $T \in \mathbf{D}(\Omega)$.*

a) *T verschwindet auf W_T, d.h.*

$$\varphi \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega),\ \operatorname{supp} T\cap\operatorname{supp}\varphi = \emptyset \quad\Longrightarrow\quad \langle T,\varphi\rangle = 0.$$

b) $T = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \operatorname{supp} T = \emptyset.$

c) $\operatorname{supp} D^\alpha T \subset \operatorname{supp} T$.

d) *Ist $f \in \boldsymbol{\mathcal{E}}(\Omega)$, $f = 1$ in einer Umgebung von $\operatorname{supp} T$, dann $fT = T$.*

e) *Ist $\operatorname{supp} T$ kompakt, so hat T eine eindeutige Fortsetzung zu einem stetigen Funktional auf $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\Omega)$ via*

$$\langle T,f\rangle := \langle T,f\psi\rangle$$

wobei $\psi \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega)$ mit $\psi = 1$ auf einer Umgebung von $\operatorname{supp} T$.

Beweis. a) Dies ist eine Standardanwendung für eine Partition der Eins. b) und c) sind unmittelbar klar. d) Sei $\varphi \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega)$. Dann ist $\operatorname{supp}(f\varphi-\varphi) \subset W_T$, also $T[f\varphi] = T[\varphi]$. e) ist einfach. ☐

§ 5 Faltung von Distributionen

Für Funktionen f definiert man **Translation** und **Spiegelung** durch

$$(\tau_a f)(x) := f(x-a) \quad (a \in \mathbb{R}^d) \quad \text{und} \quad \tilde{f}(x) = f(-x) \tag{6}$$

Dann gelten die Formeln

$$D^\alpha\tau_a f = \tau_a D^\alpha f, \qquad D^\alpha\tilde{f} = (-1)^{|\alpha|}(D^\alpha f)^\sim, \qquad \tau_a\tilde{f} = (\tau_{-a}f)^\sim. \tag{7}$$

Das nächste Lemma ist fast banal, aber sehr nützlich.

Lemma 5.1. *Sei $\varphi \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^d)$. Dann ist die Abbildung $(a \longmapsto \tau_a\varphi) : \mathbb{R}^d \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^d)$ stetig.*

Wir wenden uns dem Differenzieren zu.

Satz 5.1. *Sei $f \in \mathbf{C}(\Omega)$. Genau dann ist $f \in \mathbf{C}^1(\Omega)$, wenn $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\tau_{te_i}f - f) =: g_i$ gleichmässig auf Kompakta für alle $i = 1,\dots,d$. In diesem Fall ist $g_i = -D_i f$.*

Aufgrund dieses Sazes und (6) gilt für $\varphi \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega)$

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(\tau_{ta}\varphi - \varphi\right) = -a \cdot \nabla\varphi \tag{8}$$

in $\boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega)$. (Beachte, dass $\tau_a\varphi \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega)$ ist für $|a|$ hinreichend klein.)

Für *Distributionen* $T \in \mathbf{D}(\Omega)$ definiert man **Translation** und **Spiegelung** von T durch

$$\langle \tau_a T, \varphi\rangle = \langle T, \tau_{-a}\varphi\rangle \quad \text{und} \quad \left\langle \tilde{T}, \varphi \right\rangle = \langle T, \tilde{\varphi}\rangle\,.$$

Dies ist verträglich mit der Einbettung $\mathbf{L}^{\mathbf{1}}_{\mathbf{loc}}(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{D}(\Omega)$. Analog zu (8) hat man

$$\frac{1}{t}(\tau_{ta}T - T) \to -a \cdot \nabla T \quad \text{as } t \to 0. \tag{9}$$

Faltung von Distributionen mit Funktionen

Sei $T \in \mathbf{D}(\mathbb{R}^d)$ und $f \in \mathbf{L}^{\mathbf{1}}_{\boldsymbol{c}}(\mathbb{R}^d)$. Man setzt $\langle T * f, \varphi\rangle := \left\langle T, \tilde{f} * \varphi\right\rangle$. Dies ist verträglich mit der Einbettung $\mathbf{L}^{\mathbf{1}}_{\mathbf{loc}} \hookrightarrow \mathbf{D}$. (Natürlich muss man sich überzeugen, dass $T * f$ tatsächlich eine Distribution ist!)

Satz 5.2. *Seien $T \in \mathbf{D}(\mathbb{R}^d), f, g \in \mathbf{L}^{\mathbf{1}}_{\boldsymbol{c}}(\mathbb{R}^d)$.*

a) $\tau_a(T * f) = (\tau_a T) * f = T * (\tau_a f)$ *für alle $a \in \mathbb{R}^d$ und* $(T * f)^{\sim} = \tilde{T} * \tilde{f}$.

b) $D^\alpha(T * f) = (D^\alpha T) * f$.

c) $T * (f * g) = (T * f) * g$.

d) $T * \rho_\delta \to T$.

e) Ist $\operatorname{supp} T$ *kompakt, so auch* $\operatorname{supp}(T * f)$ *mit* $\operatorname{supp}(T * f) \subset \operatorname{supp} T + \operatorname{supp} f$.

f) Ist f sogar eine Testfunktion, d.h. $f = \varphi \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^d)$, so ist $T * f$ eine reguläre Distribution, die gegeben ist als

$$T * \varphi = \langle T, \tau_x\tilde{\varphi}\rangle\ dx.$$

Dabei ist $(x \longmapsto \langle T, \tau_x\tilde{\varphi}\rangle) \in \mathbf{C}^\infty$ und man hat $D^\alpha(T * \varphi) = T * (D^\alpha\varphi)$.

Beweis. a) und b) Dies folgt aus einer einfachen Rechnung bei der man das Resultat schon für eine reguläre Distribution kennen muss. (Das ist allerdings auch einfach.) c) ist genauso einfach.
d) Man bemerke, dass $\rho_\delta * \varphi \to \varphi$ in $\boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^d)$ gilt.
e) Sei $\operatorname{supp}\varphi \cap (\operatorname{supp} T + \operatorname{supp} f) = \emptyset$. Dann $\operatorname{supp}(\tilde{f} * \varphi) \cap \operatorname{supp} T \subset [\operatorname{supp}\varphi - \operatorname{supp} f] \cap \operatorname{supp} T = \emptyset$, also $(T * f)[\varphi] = T[\tilde{f} * \varphi] = 0$.
f) Setze $T \star \varphi(x) := T[\tau_x\tilde{\varphi}]$. Wir zeigen zunächst, dass $T \star \varphi \in \mathbf{C}^\infty$ ist. Beachte, dass aufgrund des obigen Lemmas jedenfalls $T \star \varphi$ stetig ist. Man rechnet $\frac{1}{t}[\tau_{te_i}(T \star \varphi) - (T \star \varphi)] = \frac{1}{t}[\tau_{te_i}T - T] \star \varphi \to -D_i T \star \varphi$ punktweise. Somit ergibt sich die Behauptung durch Induktion.
Der Rest ist richtig schwierig. Man braucht entweder einen Satz von Fubini für Distributionen (was auf ein "Tensorprodukt" von Distributionen herausläuft, oder man fasst die Funktion $x \longmapsto \psi(x)\tau_x\tilde{\varphi}$ als stetige $\boldsymbol{\mathcal{D}}$-wertige Funktion auf, die als $\boldsymbol{\mathcal{D}}$-wertiges Integral $\int \psi(x)\tau_x\tilde{\varphi}\, dx = \psi * \varphi$ hat. Das macht [Rud, p. 172]. ☐

Faltung zweier Distributionen
Seien nun $T, S \in \mathbf{D}(\mathbb{R}^d)$ zwei Distributionen, wobei eine von beiden kompakten Träger habe. Dann definiert man

$$\langle T * S, \varphi \rangle := \left\langle T, \tilde{S} * \varphi \right\rangle$$

Das macht Sinn, da, wie oben gesehen, $\tilde{S} * \varphi$ eine $\mathbf{C}^\infty$-Funktion ist. Falls beide Distributionen T und S kompakten Träger haben, ist auch $\operatorname{supp}(T * S)$ kompakt. Es gelten die üblichen Formeln:

$$\begin{aligned}
\operatorname{supp}(T * S) &\subset \operatorname{supp} T + \operatorname{supp} S \\
D^\alpha(T * S) &= (D^\alpha T) * S = T * (D^\alpha S), \\
\tau_a(T * S) &= (\tau_a T) * S = T * (\tau_a S), \\
(T * S)^\sim &= \tilde{T} * \tilde{S}, \\
T * S &= S * T \\
(R * S) * T &= R * (S * T) \\
T * \delta_a &= \tau_{-a} T
\end{aligned}$$

wobei man in der vorletzten Formel voraussetzen muss, dass zwei der drei Distributionen R, S, T kompakten Träger besitzen.

Beweis. Wir zeigen nur die Kommutativität. $(T * S)[\varphi] = T[\tilde{S} * \varphi] = \lim_\delta (T * \rho_\delta)[\tilde{S} * \varphi] = \lim_\delta \int (T * \rho_\delta)(x)(\tilde{S} * \varphi)(x)\,dx = \lim_\delta (\tilde{S} * \varphi)[T * \rho_\delta] = \lim_\delta \tilde{S}[\tilde{\varphi} * (T * \rho_\delta)] = \lim_\delta \tilde{S}[(T * \rho_\delta) * \tilde{\varphi}] = \lim_\delta \tilde{S}[(T * (\rho_\delta * \tilde{\varphi})] = \lim_\delta (\tilde{S} * \tilde{T})[\rho_\delta * \tilde{\varphi}] = (S * \mathbb{T})^\sim[\tilde{\varphi}] = (S * T)[\varphi]$.
Im Beweis der Assoziativität kann man sich wegen der Kommutativität auf den Fall zurückziehen, dass R, S kompakten Träger haben. Da ist die Rechnung aber "straightforward". ☐

§ 6 Soboleväume

Schwache Ableitungen
Sei $f \in \mathbf{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Wenn die Distribution $D_i f$ wieder regulär ist, d.h., $g_i := D_i f \in \mathbf{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$, so heißt g_i **schwache Ableitung** von f. Man setzt

$$\mathbf{W}^{\boldsymbol{k}}(\Omega) := \{f \in \mathbf{L}^1_{\text{loc}}(\Omega) \mid D^\alpha f \in \mathbf{L}^1_{\text{loc}}(\Omega),\ |\alpha| \le k\}$$

mit der durch die Halbnormenfamilie

$$\|D^\alpha f\|_{1,\omega} = \int_\omega |D^\alpha f| \qquad (|\alpha| \le k,\ \omega \subset\subset \Omega)$$

definierten (Frechét-) Topologie.
Allgemeiner setzt man für $1 \le p \infty$

$$\mathbf{W}^{\boldsymbol{k,p}}_{\text{loc}} := \{f \in \mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}_{\text{loc}}(\Omega) \mid D^\alpha f \in \mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}_{\text{loc}}(\Omega),\ |\alpha| \le k\}$$

mit der durch die Halbnormenfamilie

$$\|D^\alpha f\|_{\mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}(\omega)} \qquad (|\alpha| \le k,\ \omega \subset\subset \Omega)$$

gegebenen (Frechét-)Topologie.

Satz 6.1. *Seien Sei $1 \le p < \infty$, $f, g \in \mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(i) $D^\alpha f = g$.

(ii) *Es gibt eine Folge $(f_n)_n \subset \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega)$ mit $f_n \to f$ und $D^\alpha f_n \to g$ in $\mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.*

Beweis. $(ii) \Rightarrow (i)$ ist klar, da Konvergenz in $\mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{loc}}$ die schwache Konvergenz (in $\mathbf{D}$) nach sich zieht.
$(i) \Rightarrow (ii)$. Man setzt $f_n := A_n f$ (vgl. Abschnitt 3). Dann gilt $f_n \to f$ in $\mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{loc}}$ nach Satz 3.3. Sei $\omega \subset\subset \Omega$ und $\eta \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega)$ derart, dass $\eta = 1$ auf einer Umgebung U von $\overline{\omega}$. Dann $D^\alpha(f\eta) = g\eta$ auf U. Somit $D^\alpha A_n f = D^\alpha(\rho_n * (f\eta)) = \rho_n * D^\alpha(f\eta) = \rho_n * (g\eta) = A_n g$ auf ω für grosse n. Wieder mit Satz 3.3 folgt $A_n g \to g$ in $\mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{loc}}$. ☐

Offensichtlich lässt sich der letzte Satz (mit Beweis) sofort auf jede endliche Menge $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ von Multiindizes verallgemeinern. Insbesondere liegt also der Raum $\boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega)$ dicht im Raum $\mathbf{W}^{\boldsymbol{k}}(\Omega)$.

Folgerung 6.1. *Der Raum $\boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega)$ ist dicht in allen Räumen $\mathbf{W}^{\boldsymbol{k,p}}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit $1 \le p < \infty, k \in \mathbb{N}$.*

Der Satz von Meyers-Serrin

Wir beginnen mit einem Lemma.

Lemma 6.1. *Sei $1 \le p < \infty$ und $f, D^\alpha f \in \mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}(\Omega)$ mit $\operatorname{supp} f$ kompakt. Dann existiert $f_n \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega)$ mit $f_n \to f$ und $D^\alpha f_n \to D^\alpha f$ in $\mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}(\Omega)$.*

Beweis. Inspiziere den Beweis von Satz 6.1. ☐

Satz 6.2. (Meyers-Serrin)
Seien $1 \le p < \infty$ und $A \subset \mathbb{N}_0^d$ eine endliche Menge von Multiindizes. Sei $f \in \mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}(\Omega)$ mit $D^\alpha f \in \mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}(\Omega)$ für alle $\alpha \in A$. Dann existiert $(f_n)_n \subset \mathbf{C}^\infty(\Omega) \cap \mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}(\Omega)$ mit $D^\alpha f_n \in \mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}(\Omega)$ für alle $\alpha \in A, n \in \mathbb{N}$ und $D^\alpha f_n \to D^\alpha f$ in $\mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}(\Omega)$ für alle $\alpha \in A$.

Beweis. Man findet eine lokal-endliche offene Überdeckung $(V_n)_n$ von Ω und eine dazu untergerdnete Partition der Eins $(\tau_n)_n$. Setze $f_i := \tau_i f$. Dann ist $\sum_{i=1}^\infty f_i = f$ in $\mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}$. Nach Folgerung 6.1 gibt es $\varphi_{i,n} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega)$ mit

$$\|D^\alpha \varphi_{i,n} - f_i\|_{\mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}} < \frac{1}{n2^i} \quad (\alpha \in A, N \in \mathbb{N}) \qquad \text{und} \qquad \operatorname{supp} \varphi_{n,i} \subset V_i. \tag{10}$$

Wir setzen $\varphi_n := \sum_{i=1}^\infty \varphi_{i,n}$. Dies ist eine lokal endliche Summe, also ist $\varphi_n \in \mathbf{C}^\infty(\Omega)$. Ausserdem ist

$$\left\| \sum_{i \in F} \varphi_{i,n} \right\|_{\mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}} \le \sum_{i \in F} \|\varphi_{i,n} - f_i\|_{\mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}} + \left\| \sum_{i \in F} f_i \right\|_{\mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}}$$

für alle $F \subset \mathbb{N}$ endlich. Dies zeigt, dass $\varphi_n \in \mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}$ ist und die Reihe in $\mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}$ konvergiert. Wegen (10) konvergiert die Reihe $\sum_i (D^\alpha \varphi_{i,n} - D^\alpha f_i)$ in $\mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}$ (gleichmässig in n) und natürlich schwach gegen $D^\alpha \varphi_n - D^\alpha f_i$. Wegen $D^\alpha f_i \in \mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}$ isr somit auch $D^\alpha \varphi_n \in \mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}$. Die Gleichmäßigkeit in n der Konvergenz der obigen Reihen impliziert dann noch $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha f$. ☐

Die Sobolevräume $\mathbf{W}^{\boldsymbol{k,p}}(\Omega)$

Für $k \in \mathbb{N}$ und $1 \le p, \le \infty$ definieren wir den **Sobolevraum**

$$\mathbf{W}^{\boldsymbol{k,p}}(\Omega) := \{ f \in \mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}(\Omega) \mid D^\alpha f \in \mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}(\Omega) \ \forall \ |\alpha| \le k \}$$

versehen mit der Norm

$$\|f\|_{\mathbf{W}^{k,p}} := \left(\sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha f\|_{\mathbf{L}^p} \right)^{\frac{1}{p}}$$

(= "Konvergenz in $\mathbf{L}^p$ aller Ableitungen"). Wir erhalten das folgende Ergebnis.

Satz 6.3. (Fundamentalsatz für Sobolevräume)
Die Räume $\mathbf{W}^{k,p}(\Omega)$ $(1 \le p \le \infty, k \in \mathbb{N})$ sind Banachräume. Die Räume $\mathbf{H}^k(\Omega) := \mathbf{W}^{k,2}(\Omega)$ sind Hilberträume bzgl. des Skalarproduktes

$$(f \mid g)_{\mathbf{H}^2} := \sum_{|\alpha| \le k} (D^\alpha f \mid D^\alpha g)_{\mathbf{L}^2} .$$

Für $1 \le p < \infty$ ist $\mathbf{C}^\infty(\Omega) \cap \mathbf{W}^{k,p}(\Omega)$ dicht in $\mathbf{W}^{k,p}(\Omega)$, und $\mathbf{W}^{k,p}(\Omega)$ ist separabel. Der Raum $\mathbf{W}^{k,p}(\Omega)$ ist reflexiv, falls $1 < p < \infty$.

Beweis. Betrachte die Abbildung $T := (f \longmapsto (D^\alpha f)_{|\alpha| \le k}) : \mathbf{W}^{k,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega)^r$. T ist isometrisch mit abgeschlossenem Bild. Der Rest folgt. □

Satz 6.4. (Produktregel)
Sei $1 \le p \le \infty$ und p' der konjugierte Exponent. Seien weiter $f \in \mathbf{W}^{k,p}_{(\mathrm{loc})}(\Omega), g \in \mathbf{W}^{k,p'}_{(\mathrm{loc})}(\Omega)$. Dann $fg \in \mathbf{W}^{k,1}_{(\mathrm{loc})}(\Omega)$ mit

$$D^\alpha(fg) = \sum_{0 \le \beta \le \alpha} c_{\alpha,\beta} D^{\alpha - \beta} f \, D^\beta g \qquad (|\alpha| \le k).$$

Beweis. Für $\mathbf{C}^\infty$-Funktionen ist die Behauptung klar. Der Rest folgt mit Satz 6.2 (Meyers-Serrin). □

§ 7 Differenzenquotienten

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Man definiert den Differenzenquotienten von u in i-Richtung durch

$$\Delta_i^h u(x) := \frac{1}{h} \, (u(x + he_i) - u(x))$$

für $i = 1, \ldots, d$, $0 \ne h \in \mathbb{R}$ und $x \in \Omega \cap (\Omega - he_i)$.

Satz 7.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\varepsilon > 0$, $1 \le i \le d$ und $\Omega' \subset \Omega$ derart dass $\Omega' + [-\varepsilon, \varepsilon] e_i \subset \Omega$. Sei $1 \le p < \infty$ und $u \in \mathbf{L}^p(\Omega)$ mit $D_i u \in \mathbf{L}^p(\Omega)$. Dann ist $\Delta_i^h u \in \mathbf{L}^p(\Omega')$ für $|h| \le \varepsilon$ mit*

a) $\left\| \Delta_i^h u - D_i u \right\|_{\mathbf{L}^p(\Omega')}^p \le \dfrac{1}{h} \displaystyle\int_0^h \|\tau_{-se_i} D_i u - D_i u\|_{\mathbf{L}^p(\Omega')}^p \, ds.$

b) $\left\| \Delta_i^h u \right\|_{\mathbf{L}^p(\Omega')}^p \le \|D_i u\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}^p.$

c) $\lim_{h\to 0}\Delta_i^h u = D_i u$ *in* $\mathbf{L^p}(\Omega')$.

Beweis. Aufgrund des Satzes 6.2 von Meyers-Serrin kann man ohne Einschränkung $u \in \mathbf{C}^\infty(\Omega)$ annehmen. Nun ist

$$\Delta_i^h u(x) - D_i u(x) = \frac{1}{h}(u(x+he_i) - u(x)) - D_i u(x) = \frac{1}{h}\int_0^h D_i u(x+se_i) - D_i u(x)\,ds.$$

Damit folgt a) aus der Minkowski-Ungleichung für Integrale. Analog schließt man in b). Die Behauptung c) folgt aus a). □

Der nächste Satz gibt ein hilfreiches Kriterium für die Existenz von schwachen Ableitungen.

Satz 7.2. *Sei* $1 < p < \infty$, $u \in \mathbf{L^p}(\Omega)$ *und* $1 \le i \le d$. *Angenommen*

$$\sup \left\|\Delta_i^h u\right\|_{\mathbf{L^p}(\omega)} = K < \infty$$

wobei das Supremum über alle $h > 0$ *und* $\omega \subset\subset \Omega$ *mit* $\omega + [0,h]e_i \subset \Omega$ *genommen werde. Dann ist* $D_i u \in \mathbf{L^p}(\Omega)$ *mit* $\|D_i u\|_{\mathbf{L^p}(\Omega)} \le K$.

Beweis. Sei $\omega \subset\subset \Omega$. Dann ist $\omega + [0,h]e_i \subset \Omega$ für kleine $h > 0$. Da $\mathbf{L^p}(\omega)$ reflexiv ist, ist also die Menge $\{\Delta_i^h u \mid 0 < h \le \varepsilon\}$ schwach-relativkompakt. Also existiert $h_n \searrow 0$ und $v \in \mathbf{L^p}(\omega)$ mit $\Delta_i^{h_n} u \to v$. Man kann Ω mit solchen ω ausschöpfen. Dann liefert ein Teilfolgenargument sogar ein $v \in \mathbf{L^p}(\Omega)$ und $h_n \searrow 0$ mit $\Delta_i^{h_n} u \to v$ in *allen* $\mathbf{L^p}(\omega)$. Eine kurze überlegung zeigt:
$\int_\Omega \varphi(\Delta_i^h u) = -\int_\Omega (\Delta_i^{-h}\varphi)\, u$ für alle $\varphi \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\Omega)$ und kleine $h > 0$.
Daraus folgt $v = D_i u$. Der Rest ist klar. □

Man beachte, dass für Differenzenquotienten die folgende **Produktregel** gilt:

$$\Delta_i^h(uv) = u(\cdot + he_i)\Delta_i^h v + (\Delta_i^h u)v.$$

Differenzenquotienten werden im nächsten Abschnitt Verwendung finden. Sie sind außerdem ein wichtiges technische Hilfsmittel für die Regularitätsuntersuchungen bei elliptischen partiellen Differentialgleichungen.

§ 8 Lipschitzabbildungen und $\mathrm{W}^{1,\infty}$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Eine Funktion $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt **lipschitzstetig** falls

$$[f]_{1;\Omega} := \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \mid x, y \in \Omega,\ x \neq y\right\} < \infty \tag{11}$$

gilt. Der Raum dieser Funktionen wird mit $\mathbf{Lip}(\Omega)$ bezeichnet. Er ist ein Banachraum bezüglich der Norm

$$\|f\|_{\mathbf{Lip}(\Omega)} := [f]_{1;\Omega} + |f(x_0)|,$$

wobei x_0 ein (beliebiger) fest gewählter Punkt in Ω ist. Für den Fall, dass Ω offen ist, enthält $\mathbf{Lip}(\Omega)$ den Raum

$$\{f \in \mathbf{C^1}(\Omega) \mid \|Df\|_{\mathbf{L^\infty}(\Omega)} < \infty\}$$

als abgeschlossenen Unterraum. Wenn $\Omega = \mathbb{R}^d$ ist, schreibt man $[f]_1$ statt $[f]_{1;\Omega}$ und man wählt $x_0 = 0$.
Jede lipschitzstetige Funktion ist gleichmäßig stetig und hat somit eine eindeutige Fortsetzung auf $\overline{\Omega}$. Es gilt daher $\mathbf{Lip}(\Omega) = \mathbf{Lip}(\overline{\Omega})$.

Satz 8.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f \in \mathbf{Lip}(\Omega)$. Dann ist $\nabla f \in \mathbf{L}^\infty(\Omega)$ mit $\|\nabla f\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} \leq \sqrt{d}[f]_{1;\Omega}$.*

Beweis. Es reicht, die Aussage lokal zu zeigen, allerdings mit der globalen Abschätzung. Sei $\Omega' \subset \Omega$ mit $|\Omega'| < \infty$. Für $\omega \subset\subset \Omega$ und $1 < p < \infty$ ist

$$\left\|\Delta_i^h f\right\|_{\mathbf{L}^p(\omega)}^p = \int_\omega \left|\Delta_i^h f\right|^p \leq [f]_{1;\Omega}^p\,|\omega| \leq [f]_{1;\Omega}^p\,|\Omega'|$$

für kleine $h > 0$. Satz 7.2 zeigt, dass $D_i f \in \mathbf{L}^p(\Omega')$ ist mit $\|D_i f\|_{\mathbf{L}^p(\Omega')} \leq [f]_{1;\Omega}\,|\Omega'|^{\frac{1}{p}}$. Lässt man $p \to \infty$ gehen, ergibt sich $\|D_i f\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega')} \leq [f]_{1;\Omega}$. Nun folgt die Behauptung. □

Indem man im Beweis des letzten Satzes Differenzenquotienten in alle Raumrichtungen betrachtet, kann man sogar $\|\nabla f\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} \leq [f]_{1;\Omega}$ zeigen. Der nächste Satz bietet eine gewisse Umkehrung des vorherigen.

Satz 8.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und konvex. Sei $f \in \mathbf{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$ mit $\nabla f \in \mathbf{L}^\infty(\Omega)$. Dann ist $f \in \mathbf{Lip}(\Omega)$ mit $[f]_{1;\Omega} \leq \|\nabla f\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)}$.*

Beweis. Sei $\delta > 0$. Dann ist auch Ω_δ konvex. Für $0 < \varepsilon < \delta$ betrachte $f_\varepsilon := \rho_\varepsilon * f$, wobei $(\rho_\varepsilon)_\varepsilon$ ein Standardregularisierer ist. Dann ist $f_\varepsilon \in \mathbf{C}(\Omega_\delta)$ und $f_\varepsilon \to f$ in $\mathbf{L}^1_{\text{loc}}(\Omega_\delta)$. Desweiteren gilt für $x, y \in \Omega_\delta$

$$\begin{aligned}|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)| &\leq \int_0^s |\nabla f_\varepsilon(x + s(y-x))|\, ds\,|y-x| \leq \|\nabla f_\varepsilon\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega_\delta)}\,|x-y| \\ &\leq \|\nabla f\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)}\,|x-y|\end{aligned}$$

wegen $D_i(\rho_\varepsilon * f) = \rho_\varepsilon * D_i f$ auf Ω_δ. Also ist die Familie $(f_\varepsilon)_{\varepsilon \leq \delta}$ gleichstetig auf Ω_δ. Aufgrund des Satzes von Arzela-Ascoli und der Konvergenz $f_\varepsilon \to f$ in $\mathbf{L}^1_{\text{loc}}(\Omega_\delta)$ gibt es eine Folge $\varepsilon_n \searrow 0$, sodass $(f_{\varepsilon_n})_n$ gleichmässig auf Kompakta in Ω_δ gegen eine Funktion $g \in \mathbf{C}(\Omega_\delta)$ konvergiert und $g = f$ fast überall ist. Ausserdem muss $g \in \mathbf{Lip}(\Omega_\delta)$ sein mit $[g]_{1;\Omega_\delta} \leq \|\nabla f\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)}$. Lässt man nun $\delta \searrow 0$ gehen, so $\Omega_\delta \nearrow \Omega$, und die Behauptung folgt. □

Der Beweis des letzten Satzes zeigt, auf welche Weise man Lipschitzfunktionen durch differenzierbare Funktionen approximieren kann.

Satz 8.3. *Sei $f \in \mathbf{Lip}(\mathbb{R}^d)$. Dann gibt es eine Folge $(f_n)_n \subset \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit*

a) *$f_n \to f$ gleichmässig auf kompakten Mengen.*

b) $\|\nabla f_n\|_\infty \leq \|\nabla f\|_\infty$

c) *$\nabla f_n \to \nabla f$ punktweise fast überall.*

Man kann $f_n = \rho_\varepsilon * f$ wählen für einen Standardregularisierer $(\rho_\varepsilon)_\varepsilon$ und eine Folge $\varepsilon_n \searrow 0$.

§ 9 Kettenregel und Verbandseigenschaften

In diesem Abschnitt studieren wir Verkettunngen $\psi \circ f$ für Lipschitzabbildungen ψ.

Verkettung mit Lipschitzabbildungen

Sei $\psi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Lipschitzabbildung und $f \in \mathbf{L}^1_{\text{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Dann ist jedenfalls $\psi \circ f$ als Äquivalenzklasse von Funktionen wohldefiniert. Wegen

$$\int_\omega |(\psi \circ f(x)) - (\psi \circ g(x))|^p\, dx \leq [\psi]_1\,\|f - g\|_{\mathbf{L}^p(\omega)}^p \qquad (\omega \subset\subset \Omega) \tag{12}$$

bzw.

$$\|(\psi \circ f) - (\psi \circ g)\|_{\infty,\omega} \leq [\psi]_1 \, \|f - g\|_{\infty,\omega} \qquad (\omega \subset\subset \Omega) \tag{13}$$

wird eine Lipschitz-Abbildung $(f \longmapsto \psi \circ f) : \mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{loc}}(\Omega)$ induziert für jedes $1 \leq p \leq \infty$. Falls $\psi(0) = 0$ ist, hat man sogar eine Lipschitzabbildung $(f \longmapsto \psi \circ f) : \mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}(\Omega; \mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}(\Omega)$.

Lemma 9.1. *Sei $(\psi_n)_n \subset \mathbf{Lip}(\mathbb{R}^m)$ mit $\psi_n \to \psi$ punktweise und $\sup_n [\psi_n]_{1;\Omega} < \infty$. Dann ist jedenfalls auch $\psi \in \mathbf{Lip}(\mathbb{R}^m)$. Sei nun $1 \leq p < \infty$ und $f \in \mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Dann gilt*

$$\psi_n \circ f \to \psi \circ f \quad \textit{in} \quad \mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{loc}}(\Omega).$$

Falls $|\Omega| < \infty$ und $f \in \mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}(\Omega : \mathbb{R}^m)$ ist, hat man sogar Konvergenz in $\mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}(\Omega)$.

Beweis. Die Aussage $\psi \in \mathbf{Lip}(\mathbb{R}^m)$ ist offensichtlich wahr. Wähle $\Omega' \subset \Omega$ mit $|\Omega'| < \infty$. Dann gilt $\psi_n \circ f \to \psi \circ f$ punktweise f.ü. auf Ω'. Ausserdem ist $|\psi_n \circ f(x)| \leq |\psi_n(f(x)) - \psi_n(0)| + |\psi_n(0)| \leq [\psi_n]_{1;\Omega} \, |f(x)| + |\psi_n(0)| \leq (\sup_n [\psi_n]_{1;\Omega}) \, |f(x)| + \sup_n |\psi_n(0)|$. Mit LDC folgt $\psi_n \circ f \to \psi \circ f$ in $\mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}(\Omega')$. □

Satz 9.1. (Kettenregel)
Sei $1 \leq p < \infty$, $\psi \in \mathbf{Lip}(\mathbb{R}^m)$. Für $f \in \mathbf{W}^{\mathbf{1},\boldsymbol{p}}_{\mathbf{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ ist auch $\psi \circ f \in \mathbf{W}^{\mathbf{1},\boldsymbol{p}}_{\mathbf{loc}}(\Omega; \mathbb{R})$ mit

$$\nabla(\psi \circ f) = (\nabla\psi \circ f) \cdot Df. \tag{14}$$

Beweis. Sei zunächst $\psi \in \mathbf{C}^\infty$ mit $\nabla\psi \in \mathbf{L}^{\boldsymbol{\infty}}$. Formel (14) gilt natürlich, falls $f \in \mathbf{C}^\infty(\Omega)$ ist. Sei $f_n \in \mathbf{C}^\infty(\Omega : \mathbb{R}^m)$ mit $f_n \to f$ und $Df_n \to Df$ in $\mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{loc}}$. Durch Übergang zu einer Teilfolge kann man annehmen, dass $f_n(x) \to f(x)$ und $Df_n(x) \to Df(x)$ für fast alle x gilt. Damit ist $\nabla\psi \circ f_n(x) \to \nabla\psi \circ f(x)$ fast überall und gleichmässig beschränkt, also $(\nabla\psi \circ f_n) \cdot Df_n \to (\nabla\psi \circ f) \cdot Df$ in $\mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{loc}}$.

$$\begin{aligned}\langle\varphi, D_i(\psi \circ f)\rangle &= -\langle D_i\varphi, \psi \circ f\rangle \leftarrow -\langle D_i\varphi, \psi \circ f_n\rangle = \langle\varphi, D_i(\psi \circ f_n)\rangle = \langle\varphi, (\nabla\psi \circ f_n) \cdot D_i f_n\rangle \\ &\to \langle\varphi, (\nabla\psi \circ f) \cdot D_i f\rangle .\end{aligned}$$

Nun zum Beweis der Behauptung für allgemeine ψ. nach Satz 8.3 gibt es $\psi_n \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ mit $\psi_n \to \psi$ gleichmässig auf Kompakta, $\sup_n \|\nabla\psi_n\|_\infty < \infty$ und $\nabla\psi_n \to \nabla\psi$ punktweise fast überall. Damit hat man $\nabla\psi_n \circ f \to \nabla\psi \circ f$ punktweise f.ü., und wegen LDC dann $(\nabla\psi_n \circ f) \cdot Df \to (\nabla\psi \circ f) \cdot Df$ in $\mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{loc}}$. Nach dem oben bewiesenen ist aber $(\nabla\psi_n \circ f) \cdot Df = \nabla(\psi_n \circ f)$. Aufgrund vom Lemma 9.1 hat man aber $\psi_n \circ f \to \psi \circ f$ in $\mathbf{L}^{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{loc}}(\Omega)$. Somit folgt auch hier $\nabla(\psi \circ f) = (\nabla\psi \circ f) \cdot Df$. □

Insbesondere ist die Abbildung

$$(f \longmapsto \psi \circ f) : \mathbf{W}^{\mathbf{1},\boldsymbol{p}}_{\mathbf{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbf{W}^{\mathbf{1},\boldsymbol{p}}_{\mathbf{loc}}(\Omega)$$

bzw. — falls $\psi(0) = 0$ ist — die Abbildung

$$(f \longmapsto \psi \circ f) : \mathbf{W}^{\mathbf{1},\boldsymbol{p}}(\Omega; \mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbf{W}^{\mathbf{1},\boldsymbol{p}}(\Omega)$$

stetig (aber nicht lipschitzstetig!).

Verbandseigenschaften
Wir werden sehen, dass die Räume $\mathbf{W}^{\mathbf{1},\boldsymbol{p}}_{\mathbf{loc}}(\Omega; \mathbb{R})$ und $\mathbf{W}^{\mathbf{1},\boldsymbol{p}}(\Omega; \mathbb{R})$ Vektorverbände sind. Zum Anfang beweisen wir das folgende Resultat.

Satz 9.2. *Sei $f \in \mathbf{W^1}(\Omega;\mathbb{R}^m)$. Dann ist $|f| \in \mathbf{W^1}(\Omega)$ mit*

$$\nabla |f| = \mathbf{1}_{\{f\neq 0\}} \frac{f}{|f|} \cdot Df = \operatorname{sgn} f \cdot Df = (Df)^t(\operatorname{sgn} f).$$

*Dabei ist $|x| := (x_1^2 + \cdots + x_d^2)^{\frac{1}{2}}$ die euklidische Norm und $\operatorname{sgn} f = f\,|f|^{-1}\,\mathbf{1}_{\{f\neq 0\}}$ das **Signum** von f.*

Beweis. Man betrachtet $\psi_\varepsilon(x) := \sqrt{|x|^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon$ Dann ist $\psi_\varepsilon : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$D_i\psi_\varepsilon(x) = \frac{x_i}{\sqrt{|x|^2 + \varepsilon^2}}.$$

Dann gilt $\psi_\varepsilon \circ f \to |f|$ punktweise und $|\psi_\varepsilon \circ f| \leq |f|$, mit LDC also $\psi_\varepsilon \circ f \to |f|$ in $\mathbf{L^1_{loc}}$. Ausserdem $\nabla\psi_\varepsilon \circ f \to \frac{f}{|f|}\mathbf{1}_{\{f\neq 0\}}$ punktweise mit $|\nabla\psi_\varepsilon \circ f| \leq 1$. Damit gilt $D_i(\psi_\varepsilon \circ f) = (\nabla\psi_\varepsilon \circ f)\cdot(D_i f) \to \frac{f}{|f|}\mathbf{1}_{\{f\neq 0\}} \cdot D_i f = (\operatorname{sgn} f)\cdot(D_i f)$ in $\mathbf{L^1_{loc}}$. □

Folgerung 9.1. *Sei $f \in \mathbf{W^1}(\Omega;\mathbb{R})$. Dann $|f|, f^+, f^- \in \mathbf{W^k}(\Omega)$ mit*

$$\begin{aligned} D\,|f| &= (Df)\mathbf{1}_{\{f>0\}} - (Df)\mathbf{1}_{\{f<0\}} \\ Df^+ &= (Df)\mathbf{1}_{\{f>0\}} \\ Df^- &= -(Df)\mathbf{1}_{\{f<0\}} \end{aligned}$$

Beweis. Es ist $f^+ = \frac{1}{2}(f + |f|)$ und $f^- = (-f)^+$. Nach Satz 9.2 ist aber $\nabla|f| = (\operatorname{sgn} f)(\nabla f)$. □

Folgerung 9.2. *Sei $f \in \mathbf{W^1}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ konstant auf $A \subset \Omega$. Dann ist $Df \equiv 0$ auf A.*

Beweis. Ohne Einschränkung $f \in \mathbf{W^1}(\Omega,\mathbb{R})$ und $f \equiv 0$ auf A, i.e. $A \subset \{f = 0\}$. Dann $Df\mathbf{1}_A = (Df^+ - Df^-)\mathbf{1}_A = Df\mathbf{1}_{\{f\neq 0\}}\mathbf{1}_A = 0$. □

Stetigkeit der Verbandsoperationen
Wir beschränken uns auf einen Spezialfall.

Satz 9.3. *Sei $1 \leq p < \infty$. Dann ist die Abbildung*

$$(f \longmapsto |f|) : \mathbf{W^{1,p}}(\Omega;\mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbf{W^{1,p}}(\Omega)$$

stetig.

Beweis. Sei $f_n \to f$ in $\mathbf{W^{1,p}}$. Es reicht zu zeigen: Jede Teilfolge von $|f_n|$ hat eine Teilfolge, die gegen $|f|$ konvergiert. Nach Auswahl von Teilfolgen kann man annehmen, dass $f_n \to f$ f.ü., $Df_n \to Df$ f.ü. und $|Df_n| \leq g$ für ein $g \in \mathbf{L^p}$. Dann $D|f| = (\operatorname{sgn} f)^t Df$, also $|D|f|| \leq |Df|\,|\operatorname{sgn} f| = |Df|\,\mathbf{1}_{\{f\neq 0\}} \leq g$. Außerdem gilt $D|f_n| \to D|f|$ f.ü., denn $\operatorname{sgn} f_n = f_n|f_n|^{-1}\mathbf{1}_{\{f_n\neq 0\}} \to \operatorname{sgn} f$ f.ü. auf $\{f \neq 0\}$ und $Df_n \to Df = 0$ f.ü. auf $\{f = 0\}$ (siehe Folgerung 9.2). Nun wendet man noch LDC an. □

Also sind die Räume $\mathbf{W^{1,p}}(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$ Vektorverbände.

§ 10 Die Räume $\mathbf{W}_0^{1,p}$

Sei weiterhin $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und sei $1 \leq p < \infty$. Wir definieren den Raum $\mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega)$ als den Abschluß von $\mathcal{D}(\Omega)$ in $\mathbf{W}^{1,p}$. Wir sammeln die wesentlichen Eigenschaften im nächsten Satz.

Satz 10.1. *a) Sei $u \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ mit $\operatorname{supp} u$ kompakt. Dann ist $u \in \mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega)$.*

b) Sei $0 \leq u \in \mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Dann gibt es $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $0 \leq \varphi_n$ und $\varphi_n \to u$ in $\mathbf{W}^{1,p}$.

c) Wenn $u \in \mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega)$, so auch $|u| \in \mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega)$.

d) Der Raum $\mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega)$ ist ein **Ideal** *in $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$, d.h., aus $u \in \mathbf{W}^{1,p}, v \in \mathbf{W}_0^{1,p}$ und $|u| \leq |v|$ folgt $u \in \mathbf{W}_0^{1,p}$.*

e) $\mathbf{1}_\Omega \notin \mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega)$.

f) **(Produktregel)** *Sei $1 \leq p < \infty$ und p' der konjugierte Exponent, und seien $u \in \mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega), v \in \mathbf{W}^{1,p'}(\Omega)$. Dann ist $uv \in \mathbf{W}_0^{1,1}(\Omega)$.*

Beweis. Ad a). Dies ist das Lemma 6.1 zum Satz von Meyers-Serrin. Ad b). Sei $0 \leq u \in \mathbf{W}_0^{1,p}$ und sei $u_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $u_n \to u$ in $\mathbf{W}^{1,p}$. Dann $|u_n| \to u$ nach Satz 9.3. Aber $|u_n|$ hat kompakten Träger, also $\rho_m * |u_n| \to |u_n|$ in $\mathbf{W}^{1,p}$. Ad c). Die Aussage stimmt nach a) für $u \in \mathcal{D}$, also allgemein nach Satz 9.3. Ad d). Mit c) kann man $v \geq 0$ und Wegen $|\operatorname{Re} u| \leq |u|$ sogar $0 \leq u \leq v$ annehmen. Sei $0 \leq v_n \to v$ mit $v \in \mathcal{D}$. (Das gibt es nach b).) Setze $u_n := (v_n \wedge u)$. Dann ist $\operatorname{supp} u_n$ kompakt, also $u_n \in \mathbf{W}_0^{1,p}$ nach a). Ausserdem $u_n \to v \wedge u = u$ nach Satz 9.3. e). Ohne Einschränkung kann $|\Omega| < \infty$ angenommen werden. Also ist $\mathbf{W}_0^{1,p} \subset \mathbf{W}_0^{1,1}$. Nach Satz 12.1 unten ist $\|f\|_{\frac{d}{d-1}} \leq \frac{1}{d}\|Df\|_1$ für $f \in \mathbf{W}_0^{1,1}(\Omega)$. ☐

Satz 10.2. *Es gilt $\mathbf{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^d) = \mathbf{W}^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ für alle d und $1 \leq p < \infty$.*

Beweis. Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ mit $0 \leq \varphi \leq 1$ und $\varphi \equiv 1$ lokal um 0. Setze $\varphi_n(x) = \varphi(x/n)$. Dann $D_i\varphi_n = (D_i\varphi)_n$. Für $f \in \mathbf{W}^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ gilt offensichtlich $\varphi_n f \to f$ und $\varphi_n D_i f \to D_i f$ in $\mathbf{L}^p$ und $(D_i\varphi_n)f = \frac{1}{n}(D_i\varphi)_n f \to 0$ in $\mathbf{L}^p$. Also $\varphi_n f \to f$ in $\mathbf{W}^{1,p}$. Daraus folgt $f \in \mathbf{W}_0^{1,p}$ nach a) von Satz 10.1. ☐

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Für $\varphi \in \mathbf{C}_c^1(\Omega)$ werde mit $E\varphi \in \mathbf{C}_c^1(\mathbb{R}^d)$ die Fortsetzung durch 0

$$E\varphi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \notin \Omega \end{cases}$$

bezeichnet. Dann setzt E zu einer isometrischen Einbettung $E : \mathbf{W}_0^{1,p} \hookrightarrow \mathbf{W}_c^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ fort. Leicht sieht man, dass Ef auch für allgemeines $f \in \mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega)$ die Fortsetzung von f durch 0 ist. Es gilt dann jedenfalls $(Eu)\restriction_\Omega = u$ für alle $u \in \mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega)$. In Abschnitt 16 werden wir mehr zu Fortsetzungsoperatoren sagen.

§ 11 Riesz-Potentiale

Wir betrachten für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$h_\alpha(x) := |x|^\alpha \qquad (x \in \mathbb{R}^d).$$

Für welche α ist $h_\alpha \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$? Offensichtlich ist nur 0 ein kritischer Punkt, und

$$\begin{aligned}\int_{B(0,r)} h_\alpha(x)\,dx &= \int_0^r d\omega_d s^{d-1} \int_{S^{d-1}} h_\alpha(sy)\,d\sigma(y)\,ds = d\omega_d \int_0^r s^{d-1} s^\alpha\,ds \\ &= d\omega_d \int_0^r s^{\alpha+d-1}\,ds = \frac{d\,\omega_d\,r^{\alpha+d}}{\alpha+d} < \infty\end{aligned}$$

für $\alpha + d > 0$, d.h. $\alpha > -d$. Somit hat man also

$$\alpha > -d \quad \Longleftrightarrow \quad h_\alpha \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d).$$

Wir interessieren uns nun für die Abbildungseigenschaften des Operators

$$H_\alpha := (f \longmapsto h_\alpha * f)$$

definiert für $-d < \alpha \leq 0$ und zunächst nur für $f \in \mathbf{L}^1_c(\mathbb{R}^d)$. Man setzt oft $\mu := \frac{\alpha+d}{d} \in (0,1]$ und $V_\mu := H_\alpha$.

Lemma 11.1. *Sei $-d < \alpha \leq 0$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit $|\Omega| < \infty$. Dann ist $h_\alpha \in \mathbf{L}^1(\Omega)$ und mit $\mathbf{1}_\Omega$ faltbar. Die Abbildung $V_\mu = (f \longmapsto h_\alpha * f) : \mathbf{L}^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$ ist positiv und stetig mit*

$$\|V_\mu f\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \mu^{-1}\omega_d^{1-\mu}\,|\Omega|^\mu\,\|f\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)}\,.$$

Beweis. Es reicht, die Behauptung und die Abschätzung für $f = \mathbf{1}_\Omega$ zu zeigen. Sei $x \in \mathbb{R}^d$. Man wählt $r > 0$ so, dass $\omega_d r^d = |B(x,r)| = |\Omega|$ ist. Dann gilt $|\Omega \setminus B(x,r)| = |B(x,r) \setminus \Omega|$ und

$$|x-y| \leq r \leq |x-z| \qquad (y \in B(x,r) \setminus \Omega,\, z \in \Omega \setminus B(x,r)).$$

Damit hat man

$$\begin{aligned}h_\alpha * \mathbf{1}_\Omega(x) &= \int_\Omega |x-z|^\alpha\,dz \\ &= \int_{\Omega\setminus B(x,r)} |x-z|^\alpha\,dz + \int_{\Omega\cap B(x,r)} |x-z|^\alpha\,dz \\ &\leq \int_{\Omega\setminus B(x,r)} r^\alpha\,dz + \int_{\Omega\cap B(x,r)} |x-z|^\alpha\,dz \\ &= \int_{B(x,r)\setminus\Omega} r^\alpha\,dz + \int_{\Omega\cap B(x,r)} |x-y|^\alpha\,dy \\ &\leq \int_{B(x,r)\setminus\Omega} |x-y|^\alpha\,dy + \int_{\Omega\cap B(x,r)} |x-y|^\alpha\,dy \\ &= \int_{B(x,r)} |x-y|^\alpha\,dy = \int_{B(0,r)} |y|^\alpha\,dy = \frac{d\,\omega_d\,r^{\alpha+d}}{d+\alpha} \\ &= \frac{d}{d+\alpha}\omega_d^{\frac{-\alpha}{d}}\,|\Omega|^{\frac{d+\alpha}{d}} = \frac{\omega_d^{1-\mu}}{\mu}\,|\Omega|^\mu\,.\end{aligned}$$

Setzt man $x = 0$, so sieht man $\|h_\alpha\|_{\mathbf{L}^1(\Omega)} \leq \mu^{-1}\omega_d^{1-\mu}\,|\Omega|^\mu$. ☐

Als Folgerung ergibt sich, dass für $-d < r\alpha \leq 0$ und $r \geq 1$ jedenfalls $h_\alpha \in \mathbf{L}^r(\Omega)$ ist für jedes Ω mit endlichem Mass.

Lemma 11.2. *Sei $-d < \alpha \leq 0$ und $f \in \mathbf{L^1}(\mathbb{R}^d)$. Dann sind h_α und f faltbar mit $h_\alpha * f \in \mathbf{L^1}(\Omega)$ für jedes $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit $|\Omega| < \infty$. Die Abbildung $V_\mu : \mathbf{L^1}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbf{L^1}(\Omega)$ ist positiv und stetig mit*

$$\|V_\mu f\|_{\mathbf{L^1}(\Omega)} \leq \mu^{-1}\omega_d^{1-\mu}\,|\Omega|^\mu\;\|f\|_{\mathbf{L^1}(\mathbb{R}^d)}\,.$$

Beweis. Man hat

$$\begin{aligned}\int_\Omega\int_{\mathbb{R}^d} h_\alpha(x-y)\,|f(y)|\;dy\,dx &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_\Omega h_\alpha(x-y)\,dx\,|f(y)|\;dy = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\Omega-y} h_\alpha(x)\,dx\,|f(y)|\;dy\\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \mu^{-1}\omega_d^{1-\mu}\,|\Omega-y|^\mu\;|f(y)|\;dy\\ &= \mu^{-1}\omega_d^{1-\mu}\,|\Omega|^\mu\;\|f\|_{\mathbf{L^1}(\mathbb{R}^d)}\end{aligned}$$

□

Wir nähern uns nun dem Hauptresultat.

Satz 11.1. *Sei $0 < \mu \leq 1$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen mit $|\Omega| < \infty$. Seien $1 \leq p \leq q \leq \infty$ mit*

$$0 \leq \delta := \frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \mu$$

Dann ist die Abbildung $V_\mu : \mathbf{L^p}(\Omega) \longrightarrow \mathbf{L^q}(\Omega)$ positiv und stetig mit

$$\|V_\mu f\|_{\mathbf{L^q}(\Omega)} \leq \left(\frac{1-\delta}{\mu-\delta}\right)^{1-\delta}\omega_d^{1-\mu}\,|\Omega|^{\mu-\delta}\,\|f\|_{\mathbf{L^p}(\Omega)}$$

Beweis. Man wählt $r \geq 1$ so, dass $\frac{1}{r} = 1-\delta = 1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$. Dann ist $-d < r\alpha$, denn wegen $\frac{1}{r} = 1-\delta > 1-\mu$ ist $d > d(1-\mu)r = -\alpha r$. Somit ist mit $\tilde{\mu} := \frac{\alpha r + d}{d}$ und der verallgemeinerten Hölder-Ungleichung (es gilt $\frac{1}{q} + (1-\frac{1}{p}) + \delta = 1$)

$$\begin{aligned}|V_\mu f(x)| &\leq \int_\Omega h_\alpha(x-y)\,|f(y)|\;dy\\ &= \int_\Omega h_\alpha(x-y)^{\frac{r}{q}}\,|f(y)|^{\frac{p}{q}}\;h_\alpha(x-y)^{r(1-\frac{1}{p})}\,|f(y)|^{p\delta}\;dy\\ &\leq \left(\int_\Omega h_{\alpha r}(x-y)\,|f(y)|^p\;dy\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_\Omega h_{\alpha r}(x-y)\,dy\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega |f(y)|^p\;dy\right)^{\delta}\\ &\leq \left(\int_\Omega h_{\alpha r}(x-y)\,|f(y)|^p\;dy\right)^{\frac{1}{q}}\left(\tilde{\mu}^{-1}\omega_d^{1-\tilde{\mu}}\,|\Omega|^{\tilde{\mu}}\right)^{1-\frac{1}{p}}\|f\|^{p\delta}_{\mathbf{L^p}(\Omega)}\end{aligned}$$

Daher gilt für jedes $\Omega' \subset \mathbb{R}^d$ mit $|\Omega'| < \infty$

$$\begin{aligned}\left(\int_{\Omega'} |V_\mu f(x)|^q\;dx\right)^{\frac{1}{q}} &\leq \left(\int_{\Omega'}\int_\Omega h_{\alpha r}(x-y)\,|f(y)|^p\;dy\,dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\tilde{\mu}^{-1}\omega_d^{1-\tilde{\mu}}\,|\Omega|^{\tilde{\mu}}\right)^{1-\frac{1}{p}}\|f\|^{p\delta}_{\mathbf{L^p}(\Omega)}\\ &\leq \|f\|^{\frac{p}{q}}_{\mathbf{L^p}(\Omega)}\left(\tilde{\mu}^{-1}\omega_d^{1-\tilde{\mu}}\,|\Omega'|^{\tilde{\mu}}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\tilde{\mu}^{-1}\omega_d^{1-\tilde{\mu}}\,|\Omega|^{\tilde{\mu}}\right)^{1-\frac{1}{p}}\|f\|^{p\delta}_{\mathbf{L^p}(\Omega)}\\ &= \|f\|_{\mathbf{L^p}(\Omega)}\,\tilde{\mu}^{-(1-\delta)}\omega_d^{(1-\tilde{\mu})(1-\delta)}\,|\Omega|^{\tilde{\mu}(1-\frac{1}{p})}\,|\Omega'|^{\frac{\tilde{\mu}}{q}}\end{aligned}$$

Man berechnet nun $\tilde{\mu} = \frac{\mu-\delta}{1-\delta}$ und $(1-\tilde{\mu})(1-\delta) = 1-\mu$. Somit gilt

$$\|V_\mu f\|_{\mathbf{L^q}(\Omega')} \leq \left(\frac{1-\delta}{\mu-\delta}\right)^{1-\delta}\omega_d^{1-\mu}\,|\Omega|^{\tilde{\mu}(1-\frac{1}{p})}\,|\Omega'|^{\tilde{\mu}\frac{1}{q}}\;\|f\|_{\mathbf{L^p}(\Omega)}\,.$$

Dies erledigt den Fall $q < \infty$. Im Fall $q = \infty$, d.h. $\delta = \frac{1}{p} < \mu$, gilt mit der einfachen Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned} |V_\mu f(x)| &= \int_\Omega h_\alpha(x-y)\,|f(y)|\;dy \le \left(\int_\Omega h_{\alpha r}(x-y)\,dy\right)^{1-\delta} \|f\|_{\mathbf{L^p}(\Omega)} \\ &\le \left(\tilde{\mu}^{-1}\omega_d^{1-\tilde{\mu}}\,|\Omega|^{\tilde{\mu}}\right)^{1-\delta} \|f\|_{\mathbf{L^p}(\Omega)} = \left(\frac{1-\delta}{\mu-\delta}\right)^{1-\delta} \omega_d^{1-\mu}\,|\Omega|^{\mu-\delta}\;\|f\|_{\mathbf{L^p}(\Omega)}\,. \end{aligned}$$

Dies zeigt

$$\|V_\mu f\|_{\mathbf{L^\infty}(\mathbb{R}^d)} \le \left(\frac{1-\delta}{\mu-\delta}\right)^{1-\delta} \omega_d^{1-\mu}\,|\Omega|^{\mu-\delta}\;\|f\|_{\mathbf{L^p}(\Omega)}\,.$$

□

§ 12 Der Sobolev'sche Einbettungssatz

Im Fall $d = 1$ folgt aus dem Hauptsatz und der Tatsache, dass $f \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R})$ sowohl in $+\infty$ als auch in $-\infty$ verschwindet die Ungleichung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\;dx \le \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|f'(x)\right|\;dx. \qquad (f \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}))$$

In diesem Abschnitt wollen wir allgemein untersuchen, unter welchen Bedingungen man eine Ungleichung der Form

$$\|f\|_{\mathbf{L^q}(\mathbb{R}^d)} \le C\,\|\nabla f\|_{\mathbf{L^p}(\mathbb{R}^d)} \qquad (f \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^d)) \tag{15}$$

erwarten kann. Indem man $f(x)$ durch $f(tx)$ ersetzt, erhält man $t^{-\frac{d}{q}}\,\|f\|_q \le Ct^{1-\frac{d}{p}}\,\|\nabla f\|_p$ für alle $t > 0$. Dies zeigt $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{d}$, bzw. $q = \frac{dp}{d-p}$. Insbesondere ist dann $p \le d$ und $p < q$. Beispiele [Sal, Example 1.1] zeigen, dass auch $p = d, q = \infty$ nicht funktioniert. Es gilt allerdings der folgende Satz.

Satz 12.1. (Gagliardo-Nirenberg-Sobolev)
Sei $1 \le p < d$ und $q := pd/(d-p)$. Dann gibt es eine Konstante $C = C(p,d)$ mit

$$\|f\|_{\mathbf{L^q}(\Omega)} \le C\,\|\nabla f\|_{\mathbf{L^p}(\Omega)}$$

für alle $f \in \mathbf{C^1_c}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen.

Man beachte, dass stets $q = \frac{dp}{d-p} > p$, und somit die Aussage des Satzes auch nicht im Fall $|\Omega| < \infty$ trivial ist.

Folgerung 12.1. *Sei $1 \le p < d$ und $q := pd/(d-p)$. Dann $\mathbf{W_0^{1,p}}(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L^q}(\Omega)$.*

Beweis von Satz 12.1. Ohne Einschränkung kann man $\Omega = \mathbb{R}^d$ wählen. Wir zeigen die Behauptung zuerst für $p = 1$. Für $f \in \mathbf{C^1_c}$ ist

$$|f(x)| \le \frac{1}{2}\int_\mathbb{R} |D_i f(x_1,\dots,x_{i-1},t,x_{i+1},\dots x_d)|\;dt =: \frac{1}{2}F_i(x)$$

für alle $1 \le i \le n$. Man definiert

$$F_{i,m}(x) := \begin{cases} \displaystyle\int_\mathbb{R}\dots\int_\mathbb{R} |D_i f(x)|\;dx_1\,\dots\,dx_m & \text{falls} \quad i \le m \\ \displaystyle\int_\mathbb{R}\dots\int_\mathbb{R} F_i(x)\,dx_1\,\dots\,dx_m & \text{falls} \quad i > m \end{cases}$$

(In $F_{i,m}$ sind alle Koordinaten von $D_i f$ bis zur m-ten ausintegriert, auf jeden Fall aber die i-te. Somit ist $F_{i,i-1} = F_{i,i}$ und $\int F_{i,m}\, dx_{m+1} = F_{i,m+1}$ für $m \neq i-1$. Weiter ist $F_1 = F_{1,1}$ und $\int F_i\, dx_1 = F_{i,1}$ für $i \neq 1$.) Wegen $|f| \leq \frac{1}{2}(F_1 \dots F_d)^{\frac{1}{2}}$ gilt

$$|f|^{\frac{d}{d-1}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{d}{d-1}} (F_1 \dots F_d)^{\frac{1}{d-1}}$$

Mittels verallgemeinerter Hölder-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}\int |f(x)|^{\frac{d}{d-1}}\, dx_1 &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{d}{d-1}} \int (F_1 \dots F_d)^{\frac{1}{d-1}}\, dx_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{d}{d-1}} F_1^{\frac{1}{d-1}} \int (F_2 \dots F_d)^{\frac{1}{d-1}}\, dx_1 \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{d}{d-1}} (F_{1,1})^{\frac{1}{d-1}} \left(\int F_2\, dx_1\right)^{\frac{1}{d-1}} \dots \left(\int F_d\, dx_1\right)^{\frac{1}{d-1}} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{d}{d-1}} (F_{1,1})^{\frac{1}{d-1}} (F_{2,1})^{\frac{1}{d-1}} \dots (F_{d,1})^{\frac{1}{d-1}}.\end{aligned}$$

Induktiv ergibt sich

$$\int \dots \int |f(x)|^{\frac{d}{d-1}}\, dx_1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{d}{d-1}} (F_{1,m})^{\frac{1}{d-1}} (F_{2,m})^{\frac{1}{d-1}} \dots (F_{d,m})^{\frac{1}{d-1}}.$$

Das bedeutet für $m = d$ aber gerade $\|f\|_{\mathbf{L}^{d/d-1}} \leq \frac{1}{2}\left(\prod \|D_i f\|_{\mathbf{L}^1}\right)^{\frac{1}{d}}$, woraus mit der AGM-Ungleichung

$$\|f\|_{\mathbf{L}^{d/d-1}} \leq \frac{1}{2d} \sum \|D_i f\|_{\mathbf{L}^1} \leq \frac{1}{2\sqrt{d}} \|\nabla f\|_{\mathbf{L}^1}$$

folgt.
Um den Fall $p > 1$ zu beweisen, wenden wir das bereits gezeigte auf die Funktion $g := |f|^\alpha$ an, wobei $\alpha := \frac{p(d-1)}{d-p} > 1$. Es gilt $|\nabla g| = \alpha |f|^{\alpha-1} |\nabla f|$. Aus Hölder folgt

$$\begin{aligned}\|f\|^\alpha_{\alpha d/d-1} = \|g\|_{d/d-1} &\leq \frac{1}{2\sqrt{d}} \|\nabla g\|_1 = \frac{\alpha}{2\sqrt{d}} \int |f|^{\alpha-1} |\nabla f| \\ &\leq \frac{\alpha}{2\sqrt{d}} \left(\int |f|^{(\alpha-1)p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int |\nabla f|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{\alpha}{2\sqrt{d}} \|f\|^{\alpha-1}_{(\alpha-1)p'} \|\nabla f\|_p.\end{aligned}$$

Wegen $\frac{\alpha d}{d-1} = \frac{dp}{d-p} = (\alpha-1)p'$, ist also $\|f\|_{dp/d-p} \leq \dfrac{\alpha}{2\sqrt{d}} \|\nabla f\|_p$. □

Wir ziehen eine wichtige Folgerung.

Folgerung 12.2. (Poincaré-Ungleichung)
Sei $d \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen mit $|\Omega| < \infty$. Sei $1 \leq p < \infty$. Dann

$$\|f\|_p \leq C(p,d)\ |\Omega|^{\frac{1}{d}}\ \|\nabla f\|_p$$

für alle $f \in \mathbf{W_0^{1,p}}(\Omega)$, wobei

$$C(p,d) := \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{d}} & \textit{falls } 1 \leq p \leq \frac{d}{d-1} \\ \left(\frac{d-1}{d}\right) \frac{p}{2\sqrt{d}} & \textit{falls } p \geq \frac{d}{d-1}. \end{cases}$$

Beweis. Mit Satz 12.1 und seinem Beweis gilt

$$\|f\|_p \leq |\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{d-1}{d}} \|f\|_{\frac{d}{d-1}} \leq \frac{1}{2\sqrt{d}} |\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{d-1}{d}} \|\nabla f\|_1 \leq \frac{1}{2\sqrt{d}} |\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{d-1}{d}} |\Omega|^{1-\frac{1}{p}} \|\nabla f\|_p$$

im Fall $p \leq (d/d-1)$. Sei also nun $p \geq (d/d-1)$ angenommen. Wir setzen $q := \frac{dp}{d+p}$. Dann ist $1 \leq q < d$, $p = \frac{dq}{d-q}$ und $q \leq p$. Eine Anwendung von Satz 12.1 bzw. dessen Beweis liefert

$$\|f\|_p \leq \frac{1}{2\sqrt{d}} \frac{q(d-1)}{d-q} \|\nabla f\|_q \leq \frac{1}{2\sqrt{d}} \left(p - \frac{d}{d}\right) |\Omega|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|\nabla f\|_p = \frac{1}{2\sqrt{d}} \frac{p(d-1)}{d} |\Omega|^{\frac{1}{d}} \|\nabla f\|_p.$$

Dies ergibt die Behauptung. □

§ 13 Sobolev-Einbettung für $\mathbf{p \geq d}$

Wir wenden uns zuerst dem Fall $p > n$ zu. Wie ein Beispiel aus [Sal, p.22] lehrt, kann man in diesem Fall nur eine "lokale" Aussage erwarten. Ausgangspunkt ist die folgende Gleichung

$$f(x) = -\int_0^\infty \frac{d}{dr} f(x+ry)\, dr,$$

gültig für alle $f \in \mathbf{C^1_c}(\mathbb{R}^d)$ und $y \in \mathbb{S}^{d-1}$. Die Kettenrege ergibt $\frac{d}{dr} f(x+ry) = \langle \nabla f(x+ry), y \rangle$ und nach Integration über $\mathbb{S}^{d-1}$ erhält man

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-1}{d\omega_d} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty \frac{\langle \nabla f(x+ry), y\rangle}{r^{d-1}} r^{d-1} dr\, d\sigma(y) \\ &= \frac{-1}{d\omega_d} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty \frac{\langle \nabla f(x+ry), ry\rangle}{|ry|^d} r^{d-1} dr\, d\sigma(y) \\ &= \frac{-1}{d\omega_d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\langle \nabla f(x+z), z\rangle}{|z|^d}\, dz = \frac{1}{d\omega_d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\langle \nabla f(x), x-z\rangle}{|x-z|^d}\, dz \end{aligned}$$

Dies liefert die Abschätzung

$$|f(x)| \leq \frac{1}{d\omega_d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\nabla f(x)|}{|x-z|^{d-1}}\, dz = (d\omega_d)^{-1} \left(h_{1-d} * |\nabla f|\right)(x),$$

also $\|f\|_\infty \leq (d\omega_d)^{-1} \left\| V_{\frac{1}{d}} |\nabla f| \right\|_\infty$.

Satz 13.1. *Sei $1 \leq d < p \leq \infty$ und $|\Omega| < \infty$. Dann existiert $C = C(p,d)$ mit*

$$\|f\|_\infty \leq C\, |\Omega|^{\frac{1}{d} - \frac{1}{p}} \|\nabla f\|_{\mathbf{L^p}(\Omega)}$$

für alle $f \in \mathbf{C^1_c}(\Omega)$.

Beweis. Nach Satz 11.1 mit $\mu = \frac{1}{d}, q = \infty, \delta = \frac{1}{p}$ ist

$$\|f\|_\infty \leq (d\omega_d)^{-1} \|V_\mu |\nabla f|\|_\infty \leq (d\omega_d)^{-1} \left(\frac{1-\delta}{\mu-\delta}\right)^{1-\delta} \omega_d^{1-\mu} |\Omega|^{\mu-\delta} \|\nabla f\|_{\mathbf{L^p}(\Omega)}.$$

□

Folgerung 13.1. *Sei $|\Omega| < \infty$ und $1 \leq d < p < \infty$. Dann $\mathbf{W_0^{1,p}}(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{C_0}(\Omega)$.*

Wir werden die Aussage aus Satz 13.1 in Abschnitt 15 noch verfeinern. Jetzt wollen wir noch den Grenzfall $p = d$ besprechen.

Satz 13.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen mit $|\Omega| < \infty$. Dann $\mathbf{W_0^{1,d}} \hookrightarrow \mathbf{L^q}(\Omega)$ für alle $1 \leq q < \infty$.*

Beweis. Wegen $|\Omega| < \infty$ muss man q nur genügend gross machen. Es ist aber $\mathbf{W_0^{1,d}} \hookrightarrow \mathbf{W_0^{1,r}}(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L^{rd/d-r}}(\Omega)$ für *jedes* $1 \leq r < d$. □

§ 14 Der Kompaktheitssatz von Rellich-Kondrachev

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Nach Satz 12.1 und Satz 13.2 hat man dann

$$\mathbf{W_0^{1,p}}\Omega \hookrightarrow \mathbf{L^q}(\Omega) \quad \text{falls} \quad \begin{cases} 1 \le p < d, & 1 \le q < \frac{pd}{d-p} \\ d \le p \le \infty, & 1 \le q < \infty \end{cases} \tag{16}$$

Satz 14.1. (Rellich-Kondrachev)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Dann ist die Einbettung $\mathbf{W_0^{1,p}}(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L^q}(\Omega)$ mit (p,q) wie in (16) kompakt.

Beweis. Sei $d > 1$ und $p \ge d$. Dann $\mathbf{W_0^{1,p}}(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{W_0^{1,r}}(\Omega)$ für jedes $1 \le r < d$. Also kann man sich auf den Fall $1 \le p < d$ zurückziehen.
Sei also $1 \le p < d$ und (u_m) eine beschränkte Folge in $\mathbf{W_0^{1,p}}(\Omega)$. Sei $1 \le q < p^* := \frac{dp}{d-p}$. Es gilt zu zeigen, dass (u_m) eine in $\mathbf{L^q}(\Omega)$ konvergente Teilfolge hat. Sei $(\rho_\delta)_{\delta>0}$ ein Standardregularisierer. Durch Vergößern von Ω und Fortsetzen der Funktionen u_m durch 0 kann man erreichen, dass $u_m^\delta := \rho_\delta * u_m \in \mathbf{C_c^\infty}(\Omega)$ für alle m und kleine δ ist.

1. Behauptung: $u_m^\delta \to u_m$ in $\mathbf{L^q}$ für $\delta \to 0$ gleichmässig in m. Es ist nämlich

$$\rho_\delta * u_m(x) - u(x) = \int \rho_\delta(y)(u_m(x-y) - u_m(x))\,dy = \int \rho_\delta(y) \int_0^1 \nabla u_m(x-ty)\cdot(-y)\,dt\,dy,$$

also $\|\rho_\delta * u_m - u_m\|_{\mathbf{L^1}(\Omega)} \le \delta \|\nabla u_m\|_{\mathbf{L^1}(\Omega)}$, inbesondere also $u_m^\delta \to u_m$ in $\mathbf{L^1}$ gleichmässig in m. Die Liapunov-Ungleichung $\|f\|_{\mathbf{L^q}} \le \|f\|_{\mathbf{L^1}}^\theta \|f\|_{\mathbf{L^{p^*}}}^{1-\theta}$ zusammen mit Satz 12.1 zeigt dann, dass $u_m^\delta \to u_m$ in $\mathbf{L^q}$ gleichmässig in m.

2. Behauptung: Für festes $\delta > 0$ ist die Folge (u_m^δ) gleichmässig beschränkt und gleichstetig.
In der Tat, $\|u_m^\delta\|_\infty \le \|\rho_\delta\|_{\mathbf{L^\infty}} \|u_m\|_{\mathbf{L^1}}$ und $\|\nabla u_m^\delta\|_{\mathbf{L^\infty}} \le \|\nabla\rho_\delta\|_{\mathbf{L^\infty}} \|u_m\|_{\mathbf{L^1}}$.
Nun wendet man den Satz von Arzela-Ascoli an. Zu jedem $\delta > 0$ gibt es eine Teilfolge von (u_m) derart, dass $(u_{m_k}^\delta)_k$ gleichmässig, also auch in $\mathbf{L^q}$ konvergiert. Wählt man für $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\ldots$ sukzessive Teilfolgen und am Schluss die Diagonalfolge, so erhält man eine Teilfolge (die wieder mit (u_m) bezeichnet sei), sodass $(u_m^{\frac{1}{n}})_m$ für *jedes* n in $\mathbf{L^q}$ konvergiert. Wegen der 1. Behauptung konvergiert dann auch (u_m) selbst. ☐

Folgerung 14.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt und $1 \le p < \infty$. Dann ist $\mathbf{W_0^{1,p}}(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L^p}(\Omega)$ eine kompakte Einbettung.*

§ 15 Hölderstetige Funktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Eine Funktion $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt **hölderstetig** zum Exponenten $\theta \in (0,1)$, falls

$$[f]_{\theta;\Omega} := \sup\left\{ \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\theta} \mid x,y \in \Omega,\ x \ne y \right\} < \infty \tag{17}$$

gilt. Der Raum dieser Funktionen wird mit $\mathbf{C^{0,\theta}}(\Omega)$ bezeichnet. Er ist ein Banachraum bezüglich der Norm

$$\|f\|_{\mathbf{C^\theta}(\Omega)} := [f]_{\theta;\Omega} + |f(x_0)|,$$

wobei x_0 ein (beliebiger) fest gewählter Punkt in Ω ist.

Falls (17) mit $\theta = 1$ gilt, so erhält man den Raum der lipschitzstetigen Funktionen $\mathbf{Lip}(\Omega) = \mathbf{C^{0,1}}(\Omega)$. Wenn $\Omega = \mathbb{R}^d$ ist, schreibt man $[f]_\theta$ statt $[f]_{\theta;\Omega}$ und man wählt $x_0 = 0$.
Jede hölderstetige Funktion ist gleichmäßig stetig und hat somit eine eindeutige Fortsetzung auf $\overline{\Omega}$. Es gilt daher

$$\mathbf{C}^\theta(\Omega) = \mathbf{C}^\theta(\overline{\Omega}) \quad \text{und} \quad \mathbf{Lip}(\Omega) = \mathbf{Lip}(\overline{\Omega}).$$

Satz 15.1. *Es seien $0 < \theta \leq 1$, $f \in \mathbf{C^{0,\theta}}(\mathbb{R}^d)$ und $g \in \mathbf{L^1}(\mathbb{R}^d)$. Genau dann sind f, g faltbar, wenn $\tilde{f}g \in \mathbf{L^1}$ ist. In diesem Fall ist $f * g \in \mathbf{C^{0,\theta}}(\mathbb{R}^d)$ mit*

$$[f * g]_\theta \leq [f]_\theta \, \|g\|_{\mathbf{L^1}} \quad \textit{sowie} \quad |f * g(0)| \leq \left\| \tilde{f} g \right\|_{\mathbf{L^1}}.$$

Beweis. Betrachte auf $\mathbf{L^1_c}(\mathbb{R}^d)$ den Operator $T\varphi := f * \varphi - f * \varphi(0)$. Dann ist $T\varphi(0) = 0$ und

$$|T\varphi(x) - T\varphi(y)| \leq \int |f(x - z) - f(y - z)| \, |\varphi(z)| \, dz \leq [f]_\theta \, |x - y|^\theta \, \|\varphi\|_{\mathbf{L^1}}.$$

Also ist $T : \mathbf{L^1_c}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbf{C^{0,\theta}}(\mathbb{R}^d)$ linear und stetig bzgl. $\|.\|_{\mathbf{L^1}}$ mit $[f * \varphi]_\theta \leq [f]_\theta \, \|\varphi\|_{\mathbf{L^1}}$ Es gibt also eine Fortsetzung zu einem beschränkten Operator $T : \mathbf{L^1}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbf{C}^\theta(\mathbb{R}^d)$.
Nach Satz 2.1 sind f, g genau dann faltbar, wenn $|f|, |g|$ es sind. Also kann man o.B.d.A. annehmen, dass $f, g \geq 0$ ist. Man findet $0 \leq g_n \nearrow g$ mit $g_n \in \mathbf{L^1_c}(\mathbb{R}^d)$. Dann $f * g_n \nearrow f * g$ und $\tilde{f}g_n \nearrow \tilde{f}g$, wobei wir mit $f * g$ hier nur die positive, messbare Funktion $x \longmapsto \int f(x - y)g(y)\, dy$ meinen. Nun gilt

$$\int f(-y)g_n(y)\, dy = f * g_n - Tg_n$$

für alle n und $Tg_n \to Tg$ in C^θ, also immerhin gleichmässig auf Kompakta. Die impliziert die behauptete Äquivalenz. Die Abschätzungen folgen nun unmittelbar. □

Natürlich gibt es noch die lokalisierte Version der oben definierten Räume, nämlich den Raum $\mathbf{C^{0,\theta}_{loc}}(\Omega)$ der **lokal hölderstetigen** und den Raum $\mathbf{C^{0,1}_{loc}}(\Omega) = \mathbf{Lip_{loc}}(\Omega)$ der **lokal lipschitzstetigen** Funktionen. Der folgende Satz zeigt die Relevanz dieser Begriffe.

Satz 15.2. *Seien $-\infty \leq a < c < b \leq +\infty$. Betrachte den* **Integrationsoperator** *$J : \mathbf{L^1_{loc}}(a, b) \longrightarrow \mathbf{C}(a, b)$, definiert durch*

$$Jf(x) := \int_c^x f(t)\, dt.$$

Dann ist für $1 < p \leq \infty$ und $\theta := \frac{1}{p'}$

$$J : \mathbf{L^p_{loc}}(a, b) \longrightarrow \mathbf{C^{0,\theta}_{loc}}(a, b)$$

mit $[Jf]_{\theta;I} \leq \|f\|_{\mathbf{L^p}(I)}$ für jedes kompakte Intervall $I \subset (a, b)$.

Beweis. Der Beweis besteht i.W. aus der Anwendung der Hölderschen Ungleichung. Sei $I \subset (a, b)$ ein kompkates Intervall und $x, y \in I$ mit $x < y$. Dann ist

$$|Jf(x) - Jf(y)| \leq \int_x^y |f(t)| \, dt \leq \left(\int_x^y |f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_x^y \mathbf{1}(t)\, dt \right)^{\frac{1}{p'}} \leq \|f\|_{\mathbf{L^p}(I)} \, |x - y|^\theta$$

Der Beweis für den Fall $p = \infty$ verläuft analog. □

Folgerung 15.1. *Sei $(a,b) \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall und $1 < p \leq \infty$. Dann ist*

$$\mathbf{W^{1,p}}(a,b) \hookrightarrow \mathbf{C^{0,1/p'}}(a,b)$$

Beweis. Sei $u \in \mathbf{W^{1,1}}(a,b)$ und $c \in (a,b)$. Setze $v := Ju'$, d.h. $v(x) := \int_c^x u(s)\,ds$. Es gilt $v' = u'$ wie man leicht nachrechnet. Wegen Satz 4.3 ist also $u - v =: C$ eine Konstante. Also gilt $u = C + Ju'$. Für die Inklusionen wendet man nun Satz 15.2 an. Es bleibt die Gleichheit für den Fall $p = \infty$ zu zeigen. Sei $g \in \mathbf{Lip}(a,b)$ und betrachte das Funktional $T(\varphi) := \int_a^b \varphi\,dg$ auf $\mathbf{C_c}(a,b)$. Es gilt $|T(\varphi)| \leq \|\varphi\|_1 \|g\|_{\mathbf{Lip}}$ Wie man mit Rückgriff auf die Definition des Riemann-Stieltjes Integrals zeigt. Weil $\mathbf{L^\infty}$ der Dual zu $\mathbf{L^1}$ ist, gibt es eine Funktion $f \in \mathbf{L^\infty}$ mit $T(\varphi) = \int \varphi(s) f(s)\,ds$ für alle $\varphi \in \mathbf{C_c}(a,b)$. Partielle Integration lehrt aber

$$T(\varphi) = \int_a^b \varphi\,dg = -\int_a^b g\,d\varphi = -\int_a^b g(s)\varphi'(s)\,ds$$

für $\varphi \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(a,b)$. Somit ist und $g \in \mathbf{W^{1,\infty}}(a,b)$ mit $f = g'$. □

Tatsächlich kann man das obige Ergebnis auf den Fall $d < p$ für beliebige $d \in \mathbb{N}$ erweitern. Dazu benötigt man das folgende Lemma.

Lemma 15.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt, offen und konvex. Dann gilt*

$$|f(x) - f_\Omega| \leq \frac{\operatorname{diam}(\Omega)^d}{d\,|\Omega|} \int_\Omega \frac{|\nabla f(y)|}{|x-y|^{d-1}}\,dy = \frac{\operatorname{diam}(\Omega)^d}{d\,|\Omega|} V_{\frac{1}{d}}(|\nabla f|)(x)$$

für alle $\left(f \in \mathbf{C^1}(\Omega) \cap \mathbf{W^{1,1}}(\Omega)\right)$, wobei $f_\Omega := \dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega |f(y)|\,dy$ der Mittelwert von f über Ω ist.

Beweis. Sei $x \in \Omega$ fest gewählt und schreibe $R := \operatorname{diam}(\Omega)$. Definiere

$$F(x) := \begin{cases} |\nabla f(x)| & \text{falls } x \in \Omega \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt $f(x) - f(y) = -\int_0^{|x-y|} \frac{d}{dr} f(x + r\frac{y-x}{|y-x|})\,dr = -\int_0^{|x-y|} \nabla f(x + r\frac{y-x}{|y-x|})\frac{y-x}{|y-x|}\,dr$, woraus dann

$$\begin{aligned}
|f(x) - f_\Omega| &\leq \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \int_0^\infty F(x + r\frac{y-x}{|y-x|})\,dr\,dy \leq \frac{1}{|\Omega|}\int_{|x-y|\leq R}\int_0^\infty F(x + r\frac{y-x}{|y-x|})\,dr\,dy \\
&= \frac{1}{|\Omega|}\int_0^\infty \int_0^R \int_{\mathbb{S}^{d-1}} F(x + rz)\,d\sigma(z)\,s^{d-1}\,ds\,dr \\
&= \frac{R^d}{d\,|\Omega|}\int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \frac{F(x+rz)}{r^{d-1}}\,d\sigma(z)\,r^{d-1}\,dr = \frac{R^d}{d\,|\Omega|}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{F(x+y)}{|y|^{d-1}}\,dy \\
&= \frac{R^d}{d\,|\Omega|}\int_\Omega \frac{F(y)}{|x-y|^{d-1}}\,dy
\end{aligned}$$

folgt. □

Satz 15.3. (Morrey)
Sei $1 \leq d < p \leq \infty$. Setze $\alpha := 1 - \frac{d}{p}$. Dann gibt es eine Konstante $C = C(p,d)$ mit

$$[f]_{\alpha;\mathbb{R}^d} \leq C\,\|\nabla f\|_{\mathbf{L^p}(\mathbb{R}^d)}$$

für alle $f \in \mathbf{C^1}(\mathbb{R}^d)$ mit $\|\nabla f\|_{\mathbf{L^p}(\mathbb{R}^d)} < \infty$.

Beweis. Seien $x, y \in \mathbb{R}$ fest. Setze $r := |x - y|$. Sei $s > r$ und $B := B_s(z)$, wobei $z + \frac{1}{2}(x + y)$ der Mittelpunkt der Strecke zwischen x und y ist. Dann $x, y \in B$, B ist offen, beschränkt und konvex, und es gilt $\operatorname{diam}(B) = 2s$ sowie $|B| = s^d \omega_d$. Mit Satz 11.1 folgt

$$|f(x) - f_B| \leq \frac{\operatorname{diam}(B)^d}{d\,|B|} V_{\frac{1}{d}}(|\nabla f|)(x) = \frac{2^d}{d\omega_d} V_{\frac{1}{d}}(|\nabla f|)(x).$$

und ebenso für y. Wegen $p > d$ kann man Satz 11.1 mit $q = \infty, \delta := \frac{1}{p}$ anwenden und erhält

$$|f(x) - f(y)| \leq 2\frac{2^d}{d\omega_d} \left(\frac{1 - \frac{1}{p}}{\frac{1}{d} - \frac{1}{p}} \right)^{1-\frac{1}{p}} \omega_d^{1-\frac{1}{d}} \, |B|^{\frac{1}{d} - \frac{1}{p}} \, \|f\|_{\mathbf{L^p}(B)} = C(p,d) s^\alpha \, \|f\|_{\mathbf{L^p}(B)} \, .$$

Lässt man s gegen r gehen, so folgt also

$$|f(x) - f(y)| \leq C(p,d) \, |x - y|^\alpha \, \|f\|_{\mathbf{L^p}(B)} \, .$$

Dies ergibt die Behauptung. □

§ 16 Die Fortsetzungseigenschaft

...

Literatur

[Eva] L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, GSM 19, AMS, Providence, Rhode Island 1998,

[GTr] D. Gilbarg, N. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Reprint of the 1998 ed., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2001.

[Haa] M. Haase, *Kompendium zur Integrationstheorie*, Manuskript, Ulm 2003.

[Jos] J. Jost, *Partielle Differentialgleichungen*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1998.

[Jos] J. Jost, *Postmodern Analysis*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1998.

[Rud] W. Rudin, *Functional Analysis*, 2. Auflage, McGraw Hill, New York 1991.

[Sal] L. Saloff-Coste, *Aspects of Sobolev-Type Inequalities*, LMS Lecture Notes Series, 289, Cambridge 2002.

[Wer] D. Werner, *Funktionalanalysis*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1997.