UNIVERSITÄT ULM
Abteilung Angewandte Analysis

Prof. Dr. W. Balser
Markus Duelli
WS 03/04

Übungen zu Lineare Algebra

Übungsblatt 3

Abgabetermin: Donnerstag, 06.11.2003, vor den Übungen

(1) Es seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gegeben durch:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ergänze $\{A, B, C\}$ zu einer Basis des Vektorraumes $\mathbb{R}^{2\times 2}$. (3 Punkte)

(2) Es bezeichne V den Vektorraum aller reellwertigen Funktionen mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$. Weiterhin bezeichnen G und U die Teilmengen aller geraden resp. ungeraden Funktionen in V, wobei $f \in V$ gerade genannt wird, falls $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und ungerade, falls $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Zeige: U und G sind Unterräume von V, und es gilt $V = U \oplus G$. (6 Punkte)

(3) Bestimme die Dimension der folgenden Vektorräume:
   (a) des Raumes G aus der vorigen Aufgabe,
   (b) des Raumes $W = \mathbb{R}_n[t] \cap U = \{p \in \mathbb{R}_n[t] : p \text{ ungerade}\}$, $n \in \mathbb{N}$.
(3+3 Punkte)

(4) Es seien $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ definiert durch

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ -3 & 5+2i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2+i & 3-2i \end{pmatrix}.$$

Berechne AB und $(A+B)^2$. (3 Punkte)

(5) Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ habe Diagonalgestalt, das heißt es sei $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$ für $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Es gelte $a_1 \neq a_2$, und $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ kommutiere mit A, das heißt $AB = BA$.
Zeige: B hat Diagonalgestalt. (3 Punkte)

Die Übungsaufgaben findet Ihr auch im Internet unter:
`http://www.mathematik.uni-ulm.de/m5/mmd/linalg`