Universität Ulm
Abteilung Angewandte Analysis

Prof. Dr. W. Balser
Markus Duelli
WS 03/04

Übungen zu Lineare Algebra

Übungsblatt 4

Abgabetermin: Donnerstag, 13.11.2003, vor den Übungen

Für eine quadratische Matrix A definieren wir rekursiv $A^0 = I$, $A^{k+1} = A^k A\,(= AA^k)$ für $k \in \mathbb{N}_0$.

(1) Es seien $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Zeige: Es gilt $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ genau dann, wenn A und B kommutieren. (3 Punkte)

(2) Es seien

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 4 & -1 & 2 & -3 \\ -3 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 & -2 \\ 5 & -4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme, sofern definiert, AB, BA, $\mathrm{rg}A$, $\mathrm{rg}AB$ und $\mathrm{rg}BA$. (5 Punkte)

(3) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^{n\times n}$.

(a) Berechne A^m für $m \in \mathbb{N}$.
(b) Zeige, daß $I - A$ invertierbar und $B = I + A + \cdots + A^{n-1}$ die inverse Matrix zu $I - A$ ist, das heißt es gilt: $(I-A)B = B(I-A) = I$.

(3+3 Punkte)

(4) Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt nilpotent, falls $A^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Zeige oder widerlege durch ein Gegenbeispiel:

(a) Sind $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ zwei nilpotente Matrizen, so ist auch deren Summe $A + B$ nilpotent.
(b) Ist $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine nilpotente Matrix, so gibt es $x \in \mathbb{K}^n$, $x \neq 0$, mit $Ax = 0$.

(3+3 Punkte)

Die Übungsaufgaben findet Ihr auch im Internet unter:
`http://www.mathematik.uni-ulm.de/m5/mmd/linalg`