Universität Ulm
Abteilung Angewandte Analysis

Prof. Dr. W. Balser
Markus Duelli
WS 03/04

Übungen zu Lineare Algebra

Übungsblatt 6

Abgabetermin: Donnerstag, 27.11.2003, vor den Übungen

(1) Es sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine schiefsymmetrische Matrix, das heißt $A = -A^T$. Zeige: Das lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ hat eine nichttriviale Lösung. (2 Punkte)

(2) Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe, $\emptyset \neq U \subset G$, und es gelte $x \circ y \in U$ für alle $x, y \in U$. Zeige:
(a) Im allgemeinen ist U keine Gruppe.
(b) Ist U allerdings endlich, so ist U eine Gruppe.

(2+3 Punkte)

(3) Es seien $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in S_4$. Berechne $\pi \circ \sigma$, das Vorzeichen von π, σ und $\pi \circ \sigma$, und stelle $\pi \circ \sigma$ als Produkt von Zyklen dar. (3 Punkte)

(4) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Berechne das Vorzeichen der Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3 Punkte)

(5) Berechne die folgenden Determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ -2 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -3 & 0 \end{vmatrix}.$$

(5 Punkte)

(6) Es sei $x \in \mathbb{R}$ und $n \geq 2$. Es sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, wobei $a_{ij} = 1$ für $i \neq j$, $a_{ii} = x$. Definiere $f_n(x) = \det A$. Berechne $f_n(0)$ und die Nullstellen von f_n. (3 Punkte)

*(7) Es sei $\mathbb{K}$ ein endlicher Körper mit $q \in \mathbb{N}$ Elementen. Berechne die Anzahl der regulären Matrizen in $\mathbb{K}^{n\times n}$, $n \in \mathbb{N}$. (Bemerkung: Die in der Vorlesung bewiesenen Sätze gelten im allgemeinen unverändert auch für endliche Körper.) (3 ZusatzPunkte)

Die Übungsaufgaben findet Ihr auch im Internet unter:
`http://www.mathematik.uni-ulm.de/m5/mmd/linalg`