Universität Ulm
Abteilung Angewandte Analysis

Prof. Dr. W. Balser
Markus Duelli
WS 03/04

Übungen zu Lineare Algebra

Übungsblatt 7

Abgabetermin: Donnerstag, 4.12.2003, vor den Übungen

(1) Es sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Definiere $\langle x, y \rangle = \bar{x}^T A y$ für $x, y \in \mathbb{K}^n$. Zeige:
  (a) Es gelten die Eigenschaften (S3) und (S4).
  (b) Die Eigenschaft (S2) gilt genau dann, wenn $A = \bar{A}^T$ ist.
  (c) Matrizen, für welche außer (S2) auch (S1) gilt, nennt man positiv definit.
    (i) Finde eine Matrix A, welche (S2) aber nicht (S1) erfüllt.
    (ii) Es sei $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ eine Diagonalmatrix. Wann ist D positiv definit?

(2+2+2 Punkte)

(2) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ definiert $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \alpha x_1 y_3 + x_2 y_2 + x_3 y_1 + 3 x_3 y_3$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$? (2 Punkte)

(3) Es sei X ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und induzierter Norm $||x||^2 = \langle x, x \rangle$. Zeige: Es gilt die sogenannte Parallelogramm-Gleichung:
Für alle $x, y \in X$ ist $2(||x||^2 + ||y||^2) = ||x - y||^2 + ||x + y||^2$. (3 Punkte)

(4) Es sei $X = C[0, 1]$ der Vektorraum der auf $[0, 1]$ stetigen Funktionen mit den üblichen punktweise definierten Verknüpfungen. Für $f \in X$ definiert $||f|| = \sup\{|f(x)| : x \in [0, 1]\}$ eine Norm auf X.
Zeige: Es gibt kein Skalarprodukt auf X, das diese Norm induziert.
(Hinweis: Benutze die Parallelogramm-Gleichung.) (2 Punkte)

(5) Es sei $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis des Vektorraumes V. Man konstruiere ein Skalarprodukt auf V, bezüglich welchem $\mathcal{B}$ eine Orthogonalbasis ist. (3 Punkte)

(6) Es seien $u_1 = (1, 2, 2, 0)^T, u_2 = (0, -1, 2, 0)^T \in V = \mathbb{R}^4$. Bezeichne U die lineare Hülle dieser Vektoren. V sei mit dem kanonischen Skalarprodukt versehen. Berechne eine Orthogonalbasis von U und $U^\perp$. (3 Punkte)

*(7) Es sei V der Vektorraum aller auf $[-1, 1]$ stetigen reellwertigen Funktionen und U sei der Unterraum aller ungeraden Funktionen in V. Auf V definieren wir das Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t) g(t)\, dt$. Es sei $f = t - \cos t \in V$. Berechne die orthogonale Projektion von f auf U.
(Hinweis: Benutze, daß $\int_{-1}^{1} u(t)\, dt = 0$ für alle $u \in U$.) (2 ZusatzPunkte)

Die Übungsaufgaben findet Ihr auch im Internet unter:
`http://www.mathematik.uni-ulm.de/m5/mmd/linalg`