UNIVERSITÄT ULM
Abteilung Angewandte Analysis

Prof. Dr. W. Balser
Markus Duelli
WS 03/04

Übungen zu Lineare Algebra

Übungsblatt 8

Abgabetermin: Donnerstag, 11.12.2003, vor den Übungen

(1) Es seien V, W Vektorräume und $T : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeige oder widerlege durch ein Gegenbeispiel:
 (a) T ist injektiv genau dann, wenn $\ker T = \{0\}$.
 (b) Ist U ein Unterraum von $V = W$, so gilt $T(U) \subset U$.

(2+2 Punkte)

(2) Sind die folgenden Abbildungen linear ?
 (a) $f : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$, $f(x, y) = (x + y, x)$,
 (b) $g : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^3$, $g(x, y) = (x + 1, 2y, x + y)$,
 (c) $D : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, $Dp = p'$.

Bestimme im letzten Beispiel Kern und Bild des Operators. (4 Punkte)

(3) Es sei V ein Vektorraum und U ein Unterraum von V. Dann definiert $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in U$ eine Äquivalenzrelation auf V. Für $x \in V$ bezeichne $[x] = x + U$ die zu x gehörige Äquivalenzklasse. Definiere $V/U = \{[x] : x \in V\}$. Zeige:
 (a) Die Zuordnungen $[x] + [y] := [x + y]$ und $\lambda[x] := [\lambda x]$ $(x, y \in V, \lambda \in \mathbb{K})$ sind wohldefiniert und machen V/U zu einem Vektorraum. Man bezeichnet diesen als *Quotientenraum*.
 (b) Die Abbildung $q : V \mapsto V/U$, $x \to [x]$ ist linear und $\ker q = U$.

(4+2 Punkte)

(4) Es seien V, W Vektorräume und $T : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeige:
 (a) Es gibt genau eine lineare Abbildung $\tilde{T} : V/\ker T \to W$, so daß $T = \tilde{T} \circ q$, mit q aus Aufgabe 3. Die Abbildung $\tilde{T}$ ist injektiv. Ist T surjektiv, so ist $\tilde{T}$ ein Isomorphismus.
 *(b) Es sei $\ker T$ endlich-dimensional. Berechne die Dimension von $V/\ker T$.

(3+2 Punkte)

(5) Es sei V ein Vektorraum, der mit einem Skalarprodukt versehen ist, U ein Unterraum von V und es gelte $V = U \oplus U^\perp$. Zeige:
 (a) Die orthogonale Projektion P auf U ist eine lineare Abbildung mit Kern $U^\perp$.
 (b) U isomorph zu $V/U^\perp$.

(2+2 Punkte)

Die Hörsaal-Einteilung für die Klausur am 13.12.03 (Beginn 9:00 Uhr):
H1: A-Hei, H3: Her-L, H4/5: M-Z.

Die Übungsaufgaben findet Ihr auch im Internet unter:
`http://www.mathematik.uni-ulm.de/m5/mmd/linalg`