Universität Ulm
Abteilung Angewandte Analysis

Prof. Dr. W. Balser
Markus Duelli
WS 03/04

Übungen zu Lineare Algebra

Übungsblatt 9

Abgabetermin: Donnerstag, 18.12.2003, vor den Übungen

(1) Es sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum und U ein Unterraum von V.
  (a) Zeige: Es gibt $T \in L(V)$ mit $\operatorname{Kern} T = U$.
  (b) Berechne die Dimension von V/U.

(3+2 Punkte)

(2) Es seien V, W Vektorräume, $\dim V < \infty$, U ein Unterraum von V und $T \in L(U, W)$. Zeige: Es gibt $S \in L(V, W)$ mit $S|_U = T$. (3 Punkte)

(3) Es sei V ein Vektorraum und A eine Teilmenge von V, sowie $T \in L(V)$. Definiere den Annihilator von A durch $A^\circ = \{\phi \in V^* : \phi(x) = 0 \quad \forall x \in A\}$.
  (a) Zeige: A° ist ein Unterraum von V^*.
  (b) Ist W ein T-invarianter Unterraum, das heißt $T(W) \subset W$, so ist W° invariant unter T^*.
  (c) Es gilt $\operatorname{Kern} T^* = (\operatorname{Bild} T)^\circ$.

(2+2+2 Punkte)

(4) Es sei $V = \mathbb{R}_n[t]$ und $D \in L(V)$ gegeben durch $Dp = p'$.
  (a) Zeige, daß die Abbildung $\Phi : V^* \to \mathbb{R}^{n+1}$, $f \mapsto (f(t^0), f(t), \ldots, f(t^n))^T$ ein Isomorphismus ist.
  (b) Zeige: Es sei $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & n & 0 \end{pmatrix}$,
  dann gilt $D^* f = \Phi^{-1} A \Phi f$ für alle $f \in \mathbb{R}_n[t]^*$.

(2+3 Punkte)

Die Hörsaal-Einteilung für die Klausur am 13.12.03 (Beginn 9:00 Uhr):
H1: A-Hei, H3: Her-L, H4/5: M-Z.

Die Übungsaufgaben findet Ihr auch im Internet unter:
`http://www.mathematik.uni-ulm.de/m5/mmd/linalg`