UNIVERSITÄT ULM
Abteilung Angewandte Analysis

Prof. Dr. W. Balser
Markus Duelli
WS 03/04

Übungen zu Lineare Algebra

Übungsblatt 10

Abgabetermin: Donnerstag, 08.01.2004, vor den Übungen
Wir wünschen Euch allen ein frohes Weihnachtsfest und ein gutes neues Jahr 2004 !

(1) Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit Skalarprodukt, $T \in L(V)$. Zeige:
  (a) Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so ist T selbstadjungiert genau dann, wenn $\langle x, Tx \rangle \in \mathbb{R}$ für alle $x \in V$.
  (b) Es gelte $\langle x, Tx \rangle = 0$ für alle $x \in V$.
    (i) Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Zeige: $T = 0$.
    (ii) Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Zeige, daß nicht $T = 0$ folgt.

(3+3 Punkte)

(2) Es sei $T \in \mathcal{L}(V)$ eine lineare Abbildung. Für ein Polynom $p = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \in \mathbb{K}[t]$ definiere $p(T) = \sum_{k=0}^{n} a_k T^k$, wo $T^0 = Id$ und $T^k = T \circ T^{k-1}$ für $k \in \mathbb{N}$. Zeige:
  (a) Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von T, so ist $p(\lambda)$ ein Eigenwert von $p(T)$.
  (b) Ist T nilpotent, das heißt es gibt $k \in \mathbb{N}$ mit $T^k = 0$, so hat T genau den Eigenwert 0.
  *(c) Folgere daraus: Ist $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ nilpotent und $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, so ist $\lambda I - A$ invertierbar.

(2+3+3 Punkte)

(3) Ist $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, so besitzt A mindestens einen reellen Eigenwert.
(Hinweis: Zeige: $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \det(tI - A)$ ist ein Polynom dritten Grades und somit insbesondere stetig. Benutze dann den Zwischenwertsatz[1].) (3 Punkte)

(4) Zeige oder widerlege durch ein Gegenbeispiel folgende Aussagen:
  (a) Sind $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so ist $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.
  (b) Sind $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar, so ist $A + B$ invertierbar.
  (c) Es gibt genau eine lineare Abbildung $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\phi(1+i) = 2$ und $\phi(2+2i) = 3$.
  (d) Jede surjektive lineare Abbildung ist injektiv.
  (e) Jede injektive lineare Abbildung ist surjektiv.
  (f) Ist U ein Unterraum eines Vektorraumes V mit $\dim U = \dim V$, so ist $U = V$.
  (g) Ist E eine Teilmenge eines Vektorraumes V, so kann man E stets zu einem Erzeugendensystem für V ergänzen.
  (h) Sind U_i, $i = 1, 2, 3$, Unterräume mit $U_1 \oplus U_2 = U_1 \oplus U_3$, so gilt $U_2 = U_3$.
  (i) Für eine Permutation σ gilt $\operatorname{sign} \sigma = \operatorname{sign} \sigma^{-1}$.
  (j) Es gibt eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ und einen Vektor $b \in \mathbb{C}^4$ so, daß das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ genau 2 Lösungen hat.

(5 Punkte)

Die Übungsaufgaben findet Ihr auch im Internet unter:
`http://www.mathematik.uni-ulm.de/m5/mmd/linalg`

[1] Der Zwischenwertsatz besagt folgendes: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig ($a < b$) und liegt η zwischen $f(a)$ und $f(b)$, so gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = \eta$.