Universität Ulm
Abteilung Angewandte Analysis

Prof. Dr. W. Balser
Markus Duelli
WS 03/04

Übungen zu Lineare Algebra

Übungsblatt 12

Abgabetermin: Donnerstag, 22.01.2004, vor den Übungen

(1) (a) Zeige: Der Begriff der Ähnlichkeit von Matrizen definiert eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{K}^{n\times n}$.
(b) Es seien $A, B, S \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $A = S^{-1}BS$. Zeige: $A^n = S^{-1}B^nS$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(2+2 Punkte)

(2) Es sei $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & 4 & 5 \\ 3 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.
(a) Berechne das charakteristische Polynom von A und zeige, daß A diagonalisierbar ist.
(b) Es bezeichne $T \in L(\mathbb{R}^3)$ die durch A induzierte lineare Abbildung. Man wähle sich eine Basis $\mathcal{B}$ von Eigenvektoren von A. Berechne die Darstellungsmatrix D von T bezüglich dieser Basis $\mathcal{B}$ und gib die Übergangsmatrix S an, so daß $D = S^{-1}AS$.
(c) Berechne A^{1000}.

(2+3+2 Punkte)

(3) Zeige oder widerlege folgende Aussagen:
(a) Sind $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ähnlich, so haben A und B dasselbe charakteristische Polynom.
(b) Haben $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ dasselbe charakteristische Polynom, so sind A und B ähnlich.

(2+2 Punkte)

(4) Es sei $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$. Zeige: A ist ähnlich zu einer Matrix der Form $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \delta \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, wobei $\delta \in \{0, 1\}$, und $\delta = 0$ kann erreicht werden, falls $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ist. (3 Punkte)

*(5) Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ und $T \in L(V)$.
Bezeichne $\sigma(T)$ die Menge $\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda Id - T \text{ nicht invertierbar}\}$ und sei $p \in \mathbb{C}[t]$.
Zeige: $\sigma(p(T)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\}$. (4 ZusatzPunkte)

Die Übungsaufgaben findet Ihr auch im Internet unter:
`http://www.mathematik.uni-ulm.de/m5/mmd/linalg`