Universität Ulm
Abteilung Angewandte Analysis

Prof. Dr. W. Balser
Markus Duelli
WS 03/04

Übungen zu Lineare Algebra

Übungsblatt 13

Abgabetermin: Donnerstag, 29.01.2004, vor den Übungen

(1) (a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeige: Ist $x \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$, so ist $\bar{x}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\bar{\lambda}$.
(b) Es sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\mathrm{tr}A = 1$, und A habe den Eigenwert i. Berechne die weiteren Eigenwerte von A.
(2+2 Punkte)

(2) Zeige: Eine komplexe Matrix A ist genau dann nilpotent, wenn sie nur den Eigenwert 0 besitzt. (3 Punkte)

(3) (a) Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $q \in \mathbb{K}[t]$. Zeige: Es gibt $r \in \mathbb{K}_{n-1}[t]$ mit $q(A) = r(A)$.
(b) Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Berechne $q(A)$ für $q = t^{42} - 2t^{39} + t^{36} + t - 2$.
(2+2 Punkte)

(4) Es sei A als Blockmatrix gegeben durch $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, für quadratische Matrizen B, C. Zeige: Das Minimalpolynom von A ist das kleinste gemeinsame Vielfache [1] der Minimalpolynome von B und C. (4 Punkte)

(5) Finde das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3+3 Punkte)

(6) Gegeben sei $A = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -1/2 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Bestimme, falls möglich, eine unitäre Matrix U, so daß $\bar{U}^T AU$ Diagonalgestalt hat. (4 Punkte)

Die Übungsaufgaben findet Ihr auch im Internet unter:
`http://www.mathematik.uni-ulm.de/m5/mmd/linalg`

[1] Im folgenden seien $f, g, h, p \in \mathbb{K}[t]$. Man sagt g teilt f und schreibt dafür $g|f$, falls es ein p gibt mit $gp = f$ und f heißt dann ein Vielfaches von g. Ist f ein Vielfaches von sowohl g als auch h (man sagt, ein *gemeinsames Vielfaches*) so heißt f *k.g.V.* von g, h, falls f jedes weitere gemeinsame Vielfache von g, h teilt.