UNIVERSITÄT ULM
Abteilung Angewandte Analysis

Prof. Dr. W. Balser
Markus Duelli
WS 03/04

# Übungen zu Lineare Algebra

## Übungsblatt 15

**Abgabetermin:** Donnerstag, 12.02.2004, vor den Übungen **im H 15**

*(1) Die hermitesche Form $h$ auf $\mathbb{R}^2$ habe bezüglich der Basis $((1,2)^T, (1,-1)^T)$ die Strukturmatrix $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Bestimme $h((4,2)^T, (1,-4)^T)$. (5 Punkte)

*(2) Die hermitesche Form $h : \mathbb{R}_3[t] \times \mathbb{R}_3[t] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $h(p,q) = \int_0^1 p(t)q(t)\,dt$.
  (a) Bestimme die Strukturmatrix von $h$ bezüglich der kanonischen Basis.
  (b) Zeige, daß $h$ positiv definit ist.
  (c) Zeige, daß aus dem Sylvesterschen Trägheitssatz die Existenz einer Basis von $\mathbb{R}_3[t]$ folgt, bezüglich der die Darstellungsmatrix die Einheitsmatrix ist.

(6 Punkte)

*(3) Es sei $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Diagonalmatrix mit Diagonalelementen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Es sei $\lambda_i > 0$ für $1 \le i \le s$, $\lambda_i < 0$ für $s+1 \le i \le r$ und $\lambda_i = 0$ sonst. Zeige: $D$ ist kongruent zur Diagonalmatrix $S = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$, wo $\mu_i = \operatorname{sign} \lambda_i$. Hier ist das Signum einer reellen Zahl $x$ definiert durch $\operatorname{sign} x = 1$, falls $x > 0$, $\operatorname{sign} x = -1$, falls $x < 0$ und $\operatorname{sign} 0 = 0$. (6 Punkte)

*(4) Zeige: Sind $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ kongruent, so haben $A$ und $B$ denselben Rang.

(4 Punkte)

*(5) Die Form $h$ sei auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ definiert durch $h(A,B) = \operatorname{tr}(A^T B)$. Zeige: $h$ ist eine positiv definite hermitesche Form. (5 Punkte)

Die Übungsaufgaben findet Ihr auch im Internet unter:
`http://www.mathematik.uni-ulm.de/m5/mmd/linalg`