Lösungsvorschläge für die Klausur zur Analysis IV

25.07.2006

1. **Aufgabe:**

   (a) Schreibe die folgenden Funktionen $f(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ($z = x + iy \in \mathbb{C}$) in der Form $u + iv$ mit expliziten Formeln für die reellwertigen Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$.

   $$z^2 - 4\overline{z}^2 + 4, \quad \exp(iz).$$

   Überprüfe jeweils mittels der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen die komplexe Differenzierbarkeit und berechne im Falle der Existenz $f'(z)$.
   Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist $f(z)$ holomorph? (8)

   (b) Es sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph in dem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ mit $\text{Re}\, f(z) = \text{Im}\, f(z)$ für alle $z \in D$. Zeige, dass f konstant ist. (4)

Lösungsvorschlag:

(a)
- Es ist

  $$z^2 - 4\overline{z}^2 + 4 = (x + iy)^2 - 4(x - iy)^2 + 4 = \underbrace{-3x^2 + 3y^2 + 4}_{=:u(x,y)} + i \underbrace{10xy}_{=:v(x,y)}.$$

  Wir überprüfen auf komplexe Differenzierbarkeit in dem Punkt $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mittels der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:

  $$\begin{aligned} u_x(x, y) &= -6x \stackrel{!}{=} 10x = v_y(x, y) \\ u_y(x, y) &= 6y \stackrel{!}{=} -10y = -v_x(x, y). \end{aligned}$$

  Aus den beiden Gleichungen und der Tatsache, dass die partiellen Ableitungen stetig sind, ergibt sich, dass die gegebene Funktion genau im Nullpunkt, d.h. für $x = y = 0$, komplex differenzierbar ist. Insbesondere ist sie also nirgends holomorph. Die Ableitung in der Null berechnet sich zu

  $$(z^2 - 4\overline{z}^2 + 4)'\big|_{z=0} = u_x(0, 0) + iv_x(0, 0) = 0.$$

- Es ist

  $$e^{iz} = e^{-y+ix} = \underbrace{e^{-y}\cos x}_{=:u(x,y)} + i \underbrace{e^{-y}\sin x}_{=:v(x,y)}.$$

  Wir überprüfen auf komplexe Differenzierbarkeit in dem Punkt $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mittels der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:

  $$\begin{aligned} u_x(x, y) &= -e^{-y}\sin x = v_y(x, y) \\ u_y(x, y) &= -e^{-y}\cos x = -v_x(x, y). \end{aligned}$$

  Aufgrund der Stetigkeit der partiellen Ableitungen ist die gegebene Funktion in allen Punkten der komplexen Ebene komplex differenzierbar, d.h. ganz. Ihre Ableitung ergibt sich zu

  $$\left(e^{iz}\right)' = ie^{iz}.$$

(b) Es sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ und $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ mit reellwertigen Funktionen u, v. Dann ist nach Voraussetzung $u(x, y) = v(x, y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Demzufolge ist $u_x(x, y) = v_x(x, y)$ und $u_y(x, y) = v_y(x, y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Mit den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen ergibt sich somit

$$u_x(x, y) = v_y(x, y) = u_y(x, y) = -v_x(x, y) = -u_x(x, y) \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Damit ist $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$, und hieraus ergibt sich die Konstanz der Funktion f.

2. **Aufgabe:**

(a) Berechne die folgenden komplexen Kurvenintegrale längs (nicht geschlossener) Kurven α in $\mathbb{C}$.

(i) $\displaystyle\int_\alpha z\cos z^2\,\mathrm{d}z,\ \alpha(t) = \sqrt{t} + i(t-\pi/2)\sin t,\ t \in [\pi/2, \pi].$

(ii) $\displaystyle\int_\alpha \frac{|z+1|^2}{z}\,\mathrm{d}z,\ \alpha(t) = \exp(it),\ t \in [0, \pi].$

(6)

(b) Berechne die folgenden komplexen Kurvenintegrale längs geschlossener Kurven α in $\mathbb{C}$ mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes bzw. mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel.

$$\text{(i)} \oint_{|z|=1} e^{z^2}\,\mathrm{d}z. \quad \text{(ii)} \oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{i-2z}. \quad \text{(iii)} \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2+z}\,\mathrm{d}z.$$

(6)

Lösungsvorschlag:

(a) (i) Es ist

$$\int_\alpha z\cos z^2\,\mathrm{d}z = \frac{\sin z^2}{2}\bigg|_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi}} = -\frac{1}{2},$$

wobei $\alpha(t) = \sqrt{t} + i(t-\pi/2)\sin t,\ t \in [\pi/2, \pi]$.

(ii) Es ist

$$\begin{aligned}\int_\alpha \frac{|z+1|^2}{z}\,\mathrm{d}z &= i\int_0^\pi \frac{(e^{it}+1)(e^{-it}+1)}{e^{it}}\,e^{it}\,\mathrm{d}t \\ = i\int_0^\pi 2+2\cos t\,\mathrm{d}t &= 2\pi i + 2\sin t|_0^\pi = 2\pi i,\end{aligned}$$

wobei $\alpha(t) = \exp(it),\ t \in [0, \pi]$.

(b) (i) Da e^{z^2} als Komposition holomorpher Funktionen holomorph ist, folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz $\int_{|z|=1} e^{z^2}\mathrm{d}z = 0$.

(ii) Es ist

$$\oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{i-2z} = -\frac{1}{2}\oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z-i/2} = -\frac{1}{2}\cdot 2\pi i \cdot 1 = -\pi i.$$

(iii) Es ist

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2+z}\,\mathrm{d}z = \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z} - \frac{e^z}{z+1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\left(e^0 - e^{-1}\right) = 2\pi i\left(1-e^{-1}\right).$$

3. **Aufgabe:**
Entwickle folgende Funktionen, wenn möglich, in eine Potenzreihe um z_0 und gebe jeweils deren Konvergenzradius an.

$$\text{(a) } \frac{1}{z},\ z_0 = 2. \qquad \text{(b) } \log z,\ z_0 = 1.$$
$$\text{(c) } z + \overline{z},\ z_0 = 1. \qquad \text{(d) } \cosh^2 z,\ z_0 = 0.$$

(14)

Lösungsvorschlag:

(a) Mit der geometrischen Reihe ergibt sich

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2 + z - 2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - (-(\frac{z}{2} - 1))} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} (z-2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} (z-2)^k.$$

Der Konvergenzradius dieser Potenzreihe beträgt 2.

(b) Wiederum ergibt sich mit der geometrischen Reihe

$$(\log z)' = \frac{1}{z} = \frac{1}{1 + z - 1} = \frac{1}{1 - (-(z-1))} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-1)^k.$$

Damit ist

$$\log z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (z-1)^k.$$

Der Konvergenzradius dieser Potenzreihe beträgt 1.

(c) Da $\overline{z}$ in keinem Punkt der komplexen Ebene holomorph ist und somit insbesondere nicht im Punkt $z_0 = 1$ holomorph ist, ist $z + \overline{z}$ nicht in eine Potenzreihe um diesen Punkt mit positivem Konvergenzradius entwickelbar.

(d) Es ist

$$\cosh^2 z = \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2z} + e^{-2z} + 2}{4} = \frac{1}{2}(1 + \cosh 2z).$$

Wegen

$$\cosh z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} z^{2k}$$

ist also

$$\cosh^2 z = \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k}{(2k)!} z^{2k} \right).$$

Da $\cosh^2 z$ eine ganze Funktion ist, ist der Konvergenzradius unendlich.

4. **Aufgabe:**

(a) Es sei f eine ganze Funktion mit $\operatorname{Re} f(z) \geq 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeige: f ist konstant. (8)

(b) Es sei f holomorph im Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und g habe dort einen Pol erster Ordnung. Zeige: $\operatorname{Res}(fg; z_0) = f(z_0)\operatorname{Res}(g; z_0)$. (9)

Lösungsvorschlag:

(a) 1. Möglichkeit: Da das Bild einer ganzen Funktion, die nicht konstant ist, dicht in $\mathbb{C}$ liegt, muss f konstant sein.

2. Möglichkeit: Betrachten wir $g := -f$, so ist $\operatorname{Re} g(z) \leq -1$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Damit ist

$$|e^{g(z)}| = e^{\operatorname{Re} g(z)} \leq \frac{1}{e} \text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Folglich ist die ganze Funktion $\exp \circ g$ beschränkt in $\mathbb{C}$ und somit ist nach dem Satz von Liouville $\exp \circ g$ und damit g konstant. Also ist auch $f = -g$ konstant.

3. Möglichkeit: Mit $\operatorname{Re} f \geq 1$ ist $|f| \geq 1$. Betrachten wir die ganze Funktion $g := 1/f$, so ist $|g| \leq 1$. Nach dem Satz von Liouville ist damit jedoch g und somit auch f konstant.

(b) Es ist

$$\operatorname{Res}(fg; z_0) = \lim_{z \to z_0} (fg)(z)(z - z_0) = f(z_0) \lim_{z \to z_0} g(z)(z - z_0) = f(z_0)\operatorname{Res}(g; z_0).$$

5. **Aufgabe:**

(a) Klassifiziere alle isolierten Singularitäten der folgenden Funktionen und berechne jeweils die Residuen.
Bestimme in *einem* Falle eine Laurentreihe um die isolierte Singularität.

(i) $\dfrac{z^2}{(1+z^2)^2}$.

(ii) $\dfrac{\sin z}{z^7}$.

(iii) $\cot\left(\dfrac{1}{1-z}\right)$.

(iv) $\dfrac{\sinh z}{\sin z}$. (18)

(b) Berechne mit Hilfe des Residuensatzes die folgenden komplexen Kurvenintegrale.

$$\text{(i)} \oint_{|z|=1} \frac{\exp z}{z^4}\,\mathrm{d}z. \quad \text{(ii)} \oint_{|z|=1} \cot z\,\mathrm{d}z.$$

(5)

(c) Berechne die folgenden uneigentlichen Integrale.

$$\text{(i)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x. \quad \text{(ii)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{4+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

(10)

Lösungsvorschlag:

(a) (i) $\frac{z^2}{(1+z^2)^2}$ besitzt in den Punkten $-i$ und i jeweils Pole zweiter Ordnung. Es ist

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^2}{(1+z^2)^2}; i\right) = \left(\frac{z^2}{(z+i)^2}\right)'\Bigg|_{z=i} = \frac{2z(z+i)-2z^2}{(z+i)^3}\Bigg|_{z=i} = -\frac{i}{4}$$

und

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^2}{(1+z^2)^2}; -i\right) = \left(\frac{z^2}{(z-i)^2}\right)'\Bigg|_{z=-i} = \frac{2z(z-i)-2z^2}{(z-i)^3}\Bigg|_{z=-i} = \frac{i}{4}$$

(ii) Es ist

$$\frac{\sin z}{z^7} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k-6} = \sum_{k=-3}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+7)!} z^{2k}$$

und somit besitzt $\frac{\sin z}{z^7}$ in der Null einen Pol sechster Ordnung. Da der Koeffizient der Laurentreihe vor z^{-1} gleich Null ist, ist $\operatorname{Res}\left(\frac{\sin z}{z^7}; 0\right) = 0$.

(iii) Es ist

$$\cot\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{\cos\left(\frac{1}{1-z}\right)}{\sin\left(\frac{1}{1-z}\right)}.$$

Weiter ist

$$\sin\left(\frac{1}{1-z}\right) = 0 \iff \frac{1}{1-z_k} = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}^* \iff z_k = 1 - \frac{1}{\pi k},\ k \in \mathbb{Z}^*.$$

In diesen Punkten besitzt die Funktion Pole erster Ordnung und es gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(\cot\left(\frac{1}{1-z}\right);z_k\right) &= \lim_{z\to z_k}\frac{(z-z_k)\cos\left(\frac{1}{1-z}\right)}{\sin\left(\frac{1}{1-z}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{1}{1-z_k}\right)}{\frac{1}{(1-z_k)^2}\cos\left(\frac{1}{1-z_k}\right)}\\ &= (1-z_k)^2 = \tfrac{1}{(\pi k)^2}.\end{aligned}$$

Beachte, dass die gegebene Funktion in $z=1$ keine isolierte Singularität besitzt, da die Eins ein Häufungspunkt von Polen jener Funktion ist.

(iv) Es ist

$$\sin z = 0 \Longleftrightarrow z = z_k = k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Da $\sinh z_k = 0$ genau für $k=0$ gilt, und alle Nullstellen des Sinus einfach sind, besitzt die Funktion $\frac{\sinh z}{\sin z}$ für $k=0$ eine hebbare Singularität im Nullpunkt. In den Punkten $z_k = k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, besitzt sie jeweils einen Pol erster Ordnung. Folglich gilt

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\sinh z}{\sin z};0\right) = 0$$

und es ist

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\sinh z}{\sin z};z_k\right) = \lim_{z\to z_k}(z-z_k)\frac{\sinh z}{\sin z} = \frac{\sinh z_k}{\cos z_k} = \begin{cases}\sinh k\pi, & k\neq 0, k \text{ gerade}\\ -\sinh k\pi, & k \text{ ungerade}\end{cases}$$

(b) (i) Wegen

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\exp z}{z^4};0\right) = \frac{1}{3!}\,(\exp z)^{(3)}|_{z=0} = \frac{1}{6}$$

ist

$$\oint_{|z|=1}\frac{\exp z}{z^4}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\,\frac{1}{6} = \frac{\pi}{3}\,i.$$

(ii) Die Null ist die einzige Nullstelle des Sinus innerhalb der Einheitskreisscheibe.
1. Möglichkeit: Wir bestimmen zunächst

$$\operatorname{Res}(\cot z;0) = \lim_{z\to 0}\frac{z\cos z}{\sin z} = \frac{\cos 0}{\cos 0} = 1.$$

Damit ist

$$\oint_{|z|=1}\cot z\,\mathrm{d}z = 2\pi i.$$

2. Möglichkeit: Gemäß des Argumentprinzips folgt unmittelbar, dass

$$\oint_{|z|=1}\cot z\,\mathrm{d}z = 2\pi i.$$

(c) (i) 1. Möglichkeit: Nach Aufgabenteil (a) (i) ist

$$\operatorname{Res}\left(\frac{x^2}{(1+x^2)^2};i\right) = -\frac{i}{4}\,.$$

Damit ist

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi i\cdot\left(-\frac{i}{4}\right) = \frac{\pi}{2}\,.$$

2. Möglichkeit: Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} - 2\pi i \left(\frac{1}{(x+i)^2}\right)'\Bigg|_{x=i} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

(ii) Es ist

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{4+x^2}\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Re}\left(2\pi i\ \mathrm{Res}\left(\frac{\exp(iz)}{4+z^2}; 2i\right)\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(2\pi i\,\frac{\exp(-2)}{4i}\right) = \frac{\pi}{2}\,e^{-2}.
\end{aligned}$$

6. **Aufgabe:**
Entscheide, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind. Kreuze auf dem zugehörigen Beiblatt entsprechend an.

Achtung! Die Punkte für diese Aufgabe werden wie folgt vergeben:

richtig angekreuzt	2	Punkte
nicht angekreuzt	0	Punkte
falsch angekreuzt	-2	Punkte

Bei negativem Punktesaldo werden für diese Aufgabe 0 Punkte vergeben.

(a) Ist eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in einem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, so ist sie in diesem Punkt beliebig oft komplex differenzierbar.

(b) Eine in einem Sterngebiet $D \subset \mathbb{C}$ holomorphe Funktion besitzt dort eine Stammfunktion.

(c) Die punktierte komplexe Ebene $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist ein Sterngebiet.

(d) Jede in einer offenen Kreisscheibe holomorphe Funktion ist dort der kompakte Grenzwert einer Potenzreihe.

(e) Die Funktion $\log z$ besitzt im Punkte $z_0 = 0$ eine isolierte Singularität.

(f) Die Menge der Nullstellen einer in einem Gebiet holomorphen Funktion, die nicht die Nullfunktion ist, ist diskret. (12)

Lösungsvorschlag:

Aussage	richtig	falsch
1.	○	⊗
2.	⊗	○
3.	○	⊗
4.	⊗	○
5.	○	⊗
6.	⊗	○