Werner Kratz
Markus Wahrheit

Sommersemester 2006
27.04.2006
Blatt 1

Übungen zur Analysis IV

Abgabe und Besprechung: Donnerstag, den 04.05.2006

1. Bestimme den Real- und Imaginärteil sowie den Betrag und das Argument der komplexen Zahlen

$$\text{(a) } (1+2i)(1-3i), \qquad \text{(b) } \frac{1+i}{1-2i}, \qquad \text{(c) } \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^4 .$$

(3)

2. Skizziere die folgenden Punktmengen in der Gaußschen Zahlenebene.

   (a) $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z-i| \leq 3\}$.

   (b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| + |z+1| \leq 4\}$.

   (c) $\{z \in \mathbb{C} \mid z^4 = 1\}$.

   (d) $\{z \in \mathbb{C} \mid z^6 = 1\}$. (4)

3. Beweise oder widerlege folgende Aussagen.

   (a) $|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z|\, e^{|z|}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

   (b) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

   (c) $|\sin z| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

   (d) $|e^z - 1| \leq 2|z|$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq 1$.

   (e) $|e^{ix} - e^{iy}| \leq |x-y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. (5)

4. Es sei $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, definiert durch $f(z) := \dfrac{z+1}{z+i}$.

   (a) Bestimme und skizziere alle $z \in \overline{\mathbb{C}}$ mit $|f(z)| = 1$.

   (b) Bestimme und skizziere $f(\mathcal{C})$ für $\mathcal{C} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$. (4)

5. Bestimme eine Möbiustransformation, welche den Einheitskreis auf die imaginäre Achse und den Nullpunkt auf die Eins abbildet. Untersuche, wohin dabei das Innere des Einheitskreises abgebildet wird. (4)