Werner Kratz
Markus Wahrheit

Sommersemester 2006
04.05.2006
Blatt 2

# Übungen zur Analysis IV

Abgabe und Besprechung: Montag, den 15.05.2006

6. Es sei $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und es sei $p : \overline{\mathbb{C}} \to \{(\xi, \eta, \zeta)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3 \mid \xi^2 + \eta^2 + (\zeta - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}\}$ die stereographische Projektion, d.h.

$$p(z) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}, \; z = x + iy \in \mathbb{C}, \quad p(\infty) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ferner sei

$$\chi(z, w) := |p(z) - p(w)|, \quad z, w \in \overline{\mathbb{C}},$$

mit dem Euklidischen Abstand auf $\mathbb{R}^3$. Zeige:

(a) $\chi$ bildet eine Metrik auf $\overline{\mathbb{C}}$ (die so genannte *chordale Metrik*), d.h. es gilt für alle $z, w, y \in \overline{\mathbb{C}}$:

(i) $\chi(z, w) \geq 0$ und $= 0$ genau dann, wenn $z = w$.

(ii) $\chi(z, w) = \chi(w, z)$.

(iii) $\chi(z, y) \leq \chi(z, w) + \chi(w, y)$.

(b)

$$\chi(z, w) = \frac{|z - w|}{\sqrt{1 + |z|^2}\sqrt{1 + |w|^2}}, \quad \chi(z, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}}$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

(c) Die Bilder von $z$ und $w \in \mathbb{C}$ unter der stereographischen Projektion stehen diametral gegenüber genau dann, wenn $z\overline{w} = -1$ gilt. (7)

7. (a) Zeige, dass es keine Funktion $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ gibt mit $f(zw) = f(z)f(w)$ und $(f(z))^2 = z$ für alle $z, w \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
Hinweis: Betrachte $f(-1)$ und $f(1)$.

(b) Zeige, dass es keine Funktion $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ gibt die stetig ist und $(f(z))^2 = z$ für alle $z \in \mathbb{C}^*$ erfüllt. Es gibt also keine stetige Wurzel in $\mathbb{C}$.
Hinweis: Betrachte für festes $a \in \mathbb{C}^*$ die Funktion $g(z) := \frac{f(a)f(z)}{f(az)}$ für $z \in \mathbb{C}^*$. Zeige, dass $g(z) \in \{-1, 1\}$ für alle $z \in \mathbb{C}^*$.

(c) Zeige, dass es keine Funktion $\varphi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$ gibt die stetig ist und $z = |z|e^{i\varphi(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}^*$ erfüllt. Es gibt also keine stetige Argumentfunktion in $\mathbb{C}^*$.
Hinweis: Verwende Teil (b). (6)

8. Bestimme mittels des Logarithmus und der Exponentialfunktion eine Funktion $f : \widetilde{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ mit

   (a) $(f(z))^2 = z$ für $z \in \widetilde{\mathbb{C}}$ und $f(z) \in \mathbb{R}$, $f(z) > 0$ für $z \in \mathbb{R}, z > 0$, wobei $\widetilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^*$.

   (b) $\tan f(z) = z$ für $z \in \widetilde{\mathbb{C}}$ und $f(z) \in \mathbb{R}$ für $z \in \mathbb{R}$, wobei $\widetilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$. (4)

9. Finde alle Lösungen $w \in \mathbb{C}$ mit

   (a) $e^w = -1$. (b) $e^w = i$. (c) $e^{(\log w)/i} = i$. (d) $w^3 = i$.

(3)