Werner Kratz
Markus Wahrheit

Sommersemester 2006
11.05.2006
Blatt 3

Übungen zur Analysis IV

Abgabe und Besprechung: Donnerstag, den 18.05.2006

10. (a) Untersuche in welchen Punkten $z \in \mathbb{C}$ die folgenden Funktionen komplex differenzierbar und in welchen sie holomorph sind.
    (i) $f(z) = |z|^2$.
    (ii) $f(z) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$ für $z = x + iy$.
    (iii) $f(z) = x^2 y^3 + i x^3 y^2$ für $z = x + iy$.

    (b) Zeige, dass $f(z) = z^\alpha$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ holomorph in $\mathbb{C}_-$ ist und bestimme $(z^\alpha)'$ für alle $z \in \mathbb{C}_-$.

    (c) Es sei $D := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid z = iy,\ y \in \mathbb{R},\ |y| > 1\}$ und $\arctan : D \to \mathbb{C}$ definiert durch $\arctan z = \frac{1}{2i} \log \frac{1+iz}{1-iz}$. Zeige, dass arctan holomorph in D ist und bestimme $(\arctan z)'$ für alle $z \in D$. (4)

11. Es sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph in dem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$. Zeige, dass dann jede der Bedingungen

    (a) $\operatorname{Re} f$ ist konstant in D, oder
    (b) $\operatorname{Im} f$ ist konstant in D, oder
    (c) $|f|$ ist konstant in D

    impliziert, dass f konstant in D ist. (4)

12. Schreibe die folgenden Funktionen $f(z)$ auf ihrem natürlichen Definitionsbereich in der Form $u + iv$ mit expliziten Formeln für $u(x, y)$ und $v(x, y)$:

$$\sin z,\ \cosh(\overline{z}),\ \cos z,\ \tan z.$$

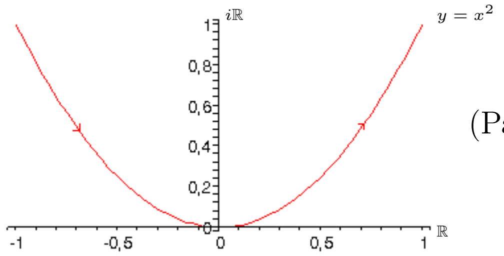
    Überprüfe jeweils mit den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf komplexe Differenzierbarkeit und berechne im Falle der Existenz $f'(z)$. Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist $f(z)$ holomorph? (6)

13. Es sei $f = u + iv$ holomorph in $D \subset \mathbb{C}$, D offen, mit $u, v \in C^2(D)$. Zeige: Dann sind u und v harmonisch in D, d.h. für alle $(x, y) \in D$ gilt:

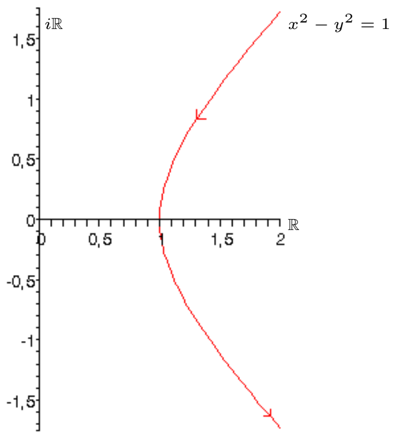
$$\Delta u(x, y) = u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = \Delta v(x, y) = v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y) = 0.$$

(2)

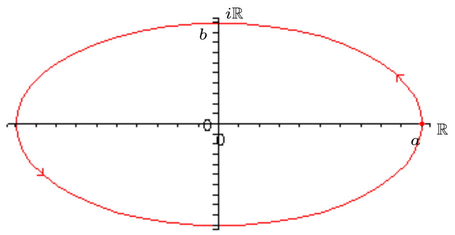
14. Bestimme eine Parameterdarstellung der unten skizzierten Kurven. Berechne ferner (möglichst explizit) die Länge der gegebenen Kurven. (4)

(a) 

(Parabel)

(b) 

(Hyperbel)

(c) 

(Ellipse)