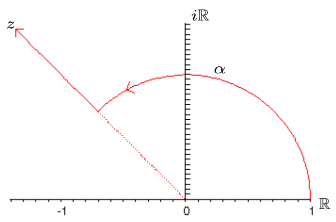
Werner Kratz
Markus Wahrheit

Sommersemester 2006
18.05.2006
Blatt 4

Übungen zur Analysis IV

Abgabe und Besprechung: Donnerstag, den 01.06.2006

15. Für $z \in \mathbb{C}_- := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ sei die Kurve α wie in der Skizze angegeben.



Berechne direkt mittels der Definition des komplexen Kurvenintegrals

$$h(z) := \int_\alpha \frac{1}{\zeta}\,\mathrm{d}\zeta.$$

Berechne dasselbe Integral mit Hilfe einer Stammfunktion von $1/z$ und vergleiche die Resultate. (2)

16. (a) *Partielle Integration.* Es sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f, g : D \to \mathbb{C}$ seien stetig in D und besitzen Stammfunktionen F bzw. G in D. Zeige:

$$\int_\alpha f(\zeta)G(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = F(\alpha(t))G(\alpha(t))\big|_a^b - \int_\alpha F(\zeta)g(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

für jede Kurve $\alpha : [a,b] \to D$.

(b) Berechne die folgenden komplexen Kurvenintegrale.

(i) $\int_\alpha |\zeta|^2\,\mathrm{d}\zeta,\ \alpha(t) = 1 + t(i-1), t \in [0,1]$, sowie $\alpha(t) = \exp(it), t \in [0, \pi/2]$.

(ii) $\int_\alpha \zeta \cos\zeta\,\mathrm{d}\zeta,\ \alpha(t) = 1 + t(i-1), t \in [0,1]$.

(iii) $\int_\alpha \tan z\,\mathrm{d}z,\ \alpha(t) = it, t \in [0,1]$. (6)

17. *Differentiation von Parameterintergalen.* Es sei $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine stückweise glatte Kurve in $\mathbb{C}$ und $f : D \times \alpha([a,b]) \to \mathbb{C}$ sei stetig auf $D \times \alpha([a,b])$, $D \subset \mathbb{C}$ offen. Ferner sei für festes $\zeta \in \alpha([a,b])$ die Funktion $f(\cdot, \zeta)$ holomorph in D und es sei $\frac{\partial f}{\partial z}$ stetig auf $D \times \alpha([a,b])$.
Zeige: Dann ist die durch $F(z) := \int_\alpha f(z,\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$ definierte Funktion $F : D \to \mathbb{C}$ holomorph in D, und es gilt $F'(z) = \int_\alpha \frac{\partial}{\partial z} f(z,\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$. (6)

18. *Umlaufzahl.* Gegeben sei eine geschlossene, stückweise glatte Kurve $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ und es sei $D := \mathbb{C} \setminus \alpha([a, b])$. Ferner sei

$$\chi(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha \frac{1}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta.$$

Zeige:

(a) $\chi(z)$ ist holomorph in D und konstant auf jedem Gebiet $G \subset D$.

(b) $\chi(z)$ ist ganzzahlig für alle $z \in D$.
Hinweis: Betrachte $g(t) := \exp(\int_a^t \alpha'(\tau)/(\alpha(\tau) - z) \, \mathrm{d}\tau)$ und $h(t) := g(t)/(\alpha(t) - z)$ für $t \in [a, b]$. Berechne $h'(t)$ und zeige $g(b) = 1$. (6)