Werner Kratz
Markus Wahrheit

Sommersemester 2006
08.06.2006
Blatt 6

Übungen zur Analysis IV

Abgabe und Besprechung: Donnerstag, den 22.06.2006

22. Beweise die folgende Verallgemeinerung des Satzes von Liouville:
Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion und $n \in \mathbb{N}_0$. Weiterhin gelte

$$\lim_{r\to\infty} \frac{M(r)}{r^{n+1}} = 0 \text{ mit } M(r) := \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Dann ist f ein Polynom vom Grade kleiner oder gleich n. (4)

23. (a) Es sei f eine ganze Funktion mit nach oben beschränktem Realteil, d.h. es gibt ein $M \in \mathbb{R}$ so, dass $\operatorname{Re} f(z) \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Zeige: f ist konstant.
(b) Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze, nicht konstante Funktion. Zeige, dass das Bild von f dicht in $\mathbb{C}$ ist, d.h. $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$. (4)

24. Entscheide, ob folgende Funktionen um z_0 in eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius entwickelbar sind. Bestimme gegebenenfalls den Konvergenzradius und die Potenzreihenentwicklung.

(a) $\frac{1}{z},\ z_0 = 4.$ (b) $\frac{1}{1+z^2},\ z_0 = 0.$ (c) $\frac{1}{1-z-z^2},\ z_0 = 0.$
(d) $\log z,\ z_0 = 4.$ (e) $\overline{z}^2,\ z_0 = 0.$ (f) $\arctan z,\ z_0 = 0.$

(6)

25. Bestimme möglichst große Gebiete $D \subset \mathbb{C}$, auf denen folgende Funktionenreihen kompakt konvergieren:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nz)}{n^2}.$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nz)}{e^n}.$
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^z}.$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{z+n}.$

(6)