Werner Kratz
Markus Wahrheit

Sommersemester 2006
22.06.2006
Blatt 7

Übungen zur Analysis IV

Abgabe und Besprechung: Donnerstag, den 29.06.2006

26. Es sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant im Gebiet $D \subset \mathbb{C}$.
Dann besitzen die Funktionen $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ keine lokalen Extrema in D. (3)

27. *Gleichheit im Schwarzschen Lemma.*
Es sei $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ holomorph in $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Weiterhin sei $f(0) = 0$ und $|f(z)| = |z|$ für ein $z \in \mathbb{E}$, $z \neq 0$.
Dann gibt es ein $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta| = 1$ so, dass $f(z) = \zeta z$ für alle $z \in \mathbb{E}$ gilt. (3)

28. (a) Es sei $a \in \mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.
Dann ist $\varphi_a(z) := \dfrac{z - a}{\overline{a}z - 1}$ eine bijektive Abbildung von $\mathbb{E}$ auf $\mathbb{E}$ mit $\varphi_a^{-1} = \varphi_a$.
(b) Es sei $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ holomorph in $\mathbb{E}$ und besitze zwei verschiedene Fixpunkte, d.h. es gibt $a, b \in \mathbb{E}$, $a \neq b$, so, dass $f(a) = a$ und $f(b) = b$.
Dann ist $f(z) = z$ für alle $z \in \mathbb{E}$. (5)

29. Bestimme zu den gegebenen Funktionen möglichst große, offene Definitionsbereiche.
Bestimme ferner alle isolierten Singularitäten und klassifiziere sie.
(a) $\dfrac{z+2}{z(z+1)(z-1)^3}$.
(b) $\dfrac{1}{1+z^n}$, $n \in \mathbb{N}$.
(c) $\dfrac{z(\pi - z)}{\sin(2z)}$.
(d) $z^{1/2}$.
(e) $\cos\left(\dfrac{1}{z-1}\right)$. (5)

30. *Analytische Fortsetzung der Gamma-Funktion.*
Zeige: $\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\,\mathrm{d}t$ besitzt eine analytische Fortsetzung auf $D := \mathbb{C} \setminus \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq 0\}$ mittels der zu beweisenden Darstellung
$$\Gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{z+k} + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1}\,\mathrm{d}t \text{ für } z \in D.$$
(4)