Werner Kratz
Markus Wahrheit

Sommersemester 2006
29.06.2006
Blatt 8

Übungen zur Analysis IV

Abgabe und Besprechung: Montag, den 10.07.2006

31. Zeige die folgende komplexe Version der Regel von *de l'Hospital*.
Die Funktionen f und g seien holomorph im Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und sie besitzen in z_0 eine Nullstelle derselben Ordnung $m \in \mathbb{N}$. Dann hat $h := f/g$ eine hebbare Singularität in z_0 und es gilt:
$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(m)}(z_0)}{g^{(m)}(z_0)} .$$
(2)

32. Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität der Funktion f, die nicht hebbar ist. Zeige: $\exp \circ f$ besitzt eine wesentliche Singularität in z_0. (4)

33. (a) Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Zeige, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind.
    (i) f ist *transzendent*, d.h. kein Polynom.
    (ii) $f\left(\frac{1}{z}\right)$ besitzt in Null eine wesentliche Singularität.
    (b) Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze, transzendente Funktion. Zeige: $f\left(\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}\right)$ ist dicht in $\mathbb{C}$ für alle $R > 0$. (4)

34. Entwickle die gegebenen Funktionen jeweils in eine Laurentreihe um z_0, die im angegebenen Bereich konvergiert.
    (a) $z^{-3} \sin\left(\dfrac{1}{z}\right)$ $\quad (z_0 = 0)$ für $|z| > 0$.
    (b) $\dfrac{1}{1+z^2}$ $\quad (z_0 = 0)$ für $|z| > 1$.
    (c) $\dfrac{z}{(1+z)^3}$ $\quad (z_0 = -1)$ für $|1+z| > 0$. (4)

35. Klassifiziere alle isolierten Singularitäten der folgenden Funktionen und berechne jeweils die Residuen.

(a) $z^{-3} \sin\left(\frac{1}{z}\right)$.

(b) $\frac{e^{iz}}{z^2+9}$.

(c) $\frac{\cos(2z)}{(z-1)^3}$.

(d) $\frac{\tan z}{z}$.

(e) $\frac{1+\tan^2 z}{\tan z}$.

(f) $\frac{1}{e^{\frac{1}{z}}-1}$. (6)