Werner Kratz
Markus Wahrheit

Sommersemester 2006
10.07.2006
Blatt 9

Übungen zur Analysis IV

Abgabe und Besprechung: Montag, den 17.07.2006

36. Es sei z_0 eine isolierte Singularität von f. Zeige:

$$\operatorname{Res}(f'; z_0) = 0.$$

(2)

37. Berechne mit Hilfe des Residuensatzes die folgenden komplexen Kurvenintegrale.

(a) $\oint_{|z|=2} z^{-3} \sin\left(\frac{1}{z}\right) \mathrm{d}z.$

(b) $\oint_{|z|=4} \frac{e^{iz}}{z^2+9} \mathrm{d}z.$

(c) $\oint_{|z|=2} \frac{1}{(z-3)(z^{13}-1)} \mathrm{d}z.$

(d) $\oint_{|z|=10} \frac{z^3}{z^4-1} \mathrm{d}z.$

(e) $\oint_{|z+n|=1/2} \Gamma(z)\, \mathrm{d}z$ mit $n \in \mathbb{N}_0$.

(f) $\oint_{|z|=1} z^n \exp(\frac{2}{z})\, \mathrm{d}z$ mit $n \in \mathbb{N}_0$. (9)

38. Berechne die folgenden uneigentlichen Integrale.

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+5x^2+6} \mathrm{d}x.$

(b) $\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ mit $a, b > 0$.

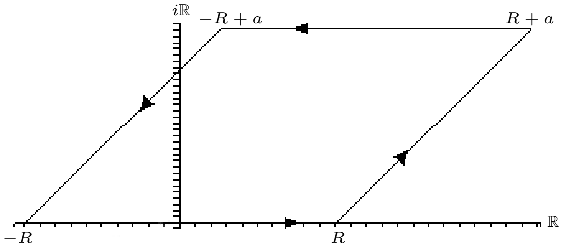
(c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^n} \mathrm{d}x$ mit $n \in \mathbb{N}$.

(d) $\int_0^{\infty} \frac{x\sin(ax)}{x^2+b^2} \mathrm{d}x$ mit $a > 0, b \geq 0$. (5)

39. Zeige:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}.$$

Hinweis: Integriere die Funktion $f(z) := \frac{\exp(-z^2)}{1+\exp(-2az)}$ mit $a := \sqrt{\pi}\exp(\pi\frac{i}{4})$ längs des Parallelograms gemäß der nachstehenden Skizze. Führe den Grenzübergang für $R \to \infty$ durch. Benutze die Identität $f(z) - f(z+a) = \exp(-z^2)$.



(4)

40. (*) Zeige:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{n}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right)^{-1} \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

(4)