Werner Kratz
Markus Wahrheit

Sommersemester 2006
17.07.2006
Blatt 10

Übungen zur Analysis IV

Abgabe und Besprechung: Donnerstag, den 20.07.2006

41. (*) Gegeben sei eine rationale Funktion $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ mit Polynomen $P(z)$ und $Q(z)$ so, dass $Q(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ mit $a_n \neq 0$ und $P(z) = r(z)Q(z) + \widetilde{P}(z)$ mit einem Polynom $r(z)$ und $\widetilde{P}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{a}_k z^k$ (nach Division mit Rest). Weiter sei $R > 0$ mit $Q(z) \neq 0$ für alle $|z| \geq R$.
Berechne
$$\oint_{|z|=R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{d}z.$$
(6)

42. (*) Bestimme die Anzahl der Nullstellen des Polynoms $p(z) = z^8 - 5z^3 + z - 2$ in der Einheitskreisscheibe $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ (inkl. Vielfachheiten). (4)

43. (*) Es sei f holomorph in einer offenen Menge $D \subset \mathbb{C}$, die die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{\mathbb{E}} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ enthält. Ferner sei $|f(z)| < 1$ für $|z| = 1$. Zeige, dass die Gleichung $f(z) = z^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ genau n Lösungen (inkl. Vielfachheiten) in $\mathbb{E}$ besitzt. Insbesondere hat f also genau einen Fixpunkt in $\mathbb{E}$. (4)

44. (*) Zeige: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \cos x^2\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \sin x^2\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$ (6)

Hinweis: Verwende die Symmetrie des Integranden und integriere die Funktion $f(z) := \exp(iz^2)$ längs der Kurve gemäß der nachstehenden Skizze. Dabei ist $a := \exp(i\pi/4)$ und $R > 0$. Verwende ferner das in Aufgabe 39 erzielte Resultat $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.