Werner Kratz
Markus Wahrheit

Sommersemester 2006
10.07.2006
Probeklausur 1

Übungen zur Analysis IV

Besprechung: Montag, den 24.07.2006

100% = 100 Punkte

Zum Erwerb des Scheins sind - neben mind. 50% der Übungspunkte - mind. 50 Punkte in der Klausur zu erreichen.

Hilfsmittel: 2 DIN A4 Blätter mit eigenen Aufzeichnungen, *kein* Taschenrechner.

Zeit: 120 Minuten.

1. Schreibe die folgenden Funktionen $f(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ($z = x + iy \in \mathbb{C}$) in der Form $u + iv$ mit expliziten Formeln für die reellwertigen Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$.
$$z^2 - 2z + 1, \quad \exp(\pi z), \quad z\overline{z}.$$
Überprüfe jeweils mittels der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen die komplexe Differenzierbarkeit und berechne im Falle der Existenz $f'(z)$.
Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist $f(z)$ holomorph? (20)

2. (a) Berechne die folgenden komplexen Kurvenintegrale längs (nicht geschlossener) Kurven α in $\mathbb{C}$.
   (i) $\displaystyle\int_\alpha z \sin z \, \mathrm{d}z,\ \alpha(t) = t + it(t - \pi/2),\ t \in [0, \pi/2].$
   (ii) $\displaystyle\int_\alpha \overline{z}(1 + 2z) \, \mathrm{d}z,\ \alpha(t) = \exp(it),\ t \in [0, \pi].$
   (iii) $\displaystyle\int_\alpha (z - i)^2 \, \mathrm{d}z,\ \alpha(t) = t + i(1 + \sin t),\ t \in [0, 2\pi].$ (9)

   (b) Berechne die folgenden komplexen Kurvenintegrale längs geschlossener Kurven α in $\mathbb{C}$ mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes bzw. mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel.
$$\text{(i)} \oint_{|z|=1} \frac{\cos(2z)}{z} \, \mathrm{d}z. \quad \text{(ii)} \oint_{|z-3|=1} \frac{\log z}{(z-e)^2} \, \mathrm{d}z. \quad \text{(iii)} \oint_{|z|=2} z \cot z \, \mathrm{d}z.$$
(6)

3. Entwickle folgende Funktionen, wenn möglich, in eine Potenzreihe um z_0 und gebe jeweils deren Konvergenzradius an.
$$\text{(a)}\ \frac{1}{1 - z^2},\ z_0 = 0. \qquad \text{(b)}\ \frac{2z}{(1 - z^2)^2},\ z_0 = 0.$$
$$\text{(c)}\ z\overline{z},\ z_0 = 1. \qquad \text{(d)}\ \cos^2 z,\ z_0 = 0.$$
(10)

4. Es sei f eine ganze Funktion mit $f(z) = f(z+1) = f(z+i)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeige: f ist konstant in $\mathbb{C}$. (10)

5. (a) Klassifiziere alle isolierten Singularitäten der folgenden Funktionen und berechne jeweils die Residuen.
   Bestimme in *einem* Falle eine Laurentreihe um die isolierte Singularität.
   (i) $z^2 \exp(1/z)$.
   (ii) $\dfrac{\exp(\pi z)}{z^2+4}$.
   (iii) $(\exp(i/z)-1)^{-1}$.
   (iv) $\dfrac{\exp(z)-1}{z}$. (18)

   (b) Berechne mit Hilfe des Residuensatzes die folgenden komplexen Kurvenintegrale.
   $$\text{(i)} \oint_{|z|=3} \frac{\exp(i\pi z)}{z^2-4}\,\mathrm{d}z. \quad \text{(ii)} \oint_{|z|=10} \frac{10z^9}{1+z^{10}}\,\mathrm{d}z.$$
   (5)

   (c) Berechne die folgenden uneigentlichen Integrale.
   $$\text{(i)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x. \quad \text{(ii)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{9+x^2}\,\mathrm{d}x.$$
   (10)

6. Entscheide, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind. Kreuze auf dem zugehörigen Beiblatt entsprechend an.

   Achtung! Die Punkte für diese Aufgabe werden wie folgt vergeben:

richtig angekreuzt	2	Punkte
nicht angekreuzt	0	Punkte
falsch angekreuzt	-2	Punkte

   Bei negativem Punktesaldo werden für diese Aufgabe 0 Punkte vergeben.

   (a) Eine in einer offenen Menge $D \subset \mathbb{C}$ komplex differenzierbare Funktion ist dort unendlich oft komplex differenzierbar.
   (b) Die punktierte Einheitskreisscheibe ist ein Elementargebiet.
   (c) Die Funktion $\log(1-z)$ besitzt im Punkte $z_0 = 1$ eine isolierte Singularität.
   (d) Für eine in einem Sterngebiet holomorphe Funktion ist das Kurvenintegral über diese Funktion dort wegunabhängig.
   (e) Jede auf einer kompakten Kreisscheibe $\overline{U_r(z_0)}$ $(r > 0)$ stetige Funktion ist dort der gleichmäßige Grenzwert einer Folge von Polynomen.
   (f) Jede in einer Kreisscheibe $U_r(z_0)$ $(r > 0)$ holomorphe Funktion ist um den Mittelpunkt z_0 in eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius entwickelbar.
   (12)