Werner Kratz
Markus Wahrheit

Sommersemester 2006
10.07.2006
Probeklausur 2

Übungen zur Analysis IV

Besprechung: Montag, den 24.07.2006

100% = 100 Punkte

Zum Erwerb des Scheins sind - neben mind. 50% der Übungspunkte - mind. 50 Punkte in der Klausur zu erreichen.

Hilfsmittel: 2 DIN A4 Blätter mit eigenen Aufzeichnungen, *kein* Taschenrechner.

Zeit: 120 Minuten.

1. Schreibe die folgenden Funktionen $f(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $(z = x + iy \in \mathbb{C})$ in der Form $u + iv$ mit expliziten Formeln für die reellwertigen Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$.

$$z^2 + 4z + 2, \quad \sin(\pi z), \quad z \operatorname{Im} z.$$

Überprüfe jeweils mittels der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen die komplexe Differenzierbarkeit und berechne im Falle der Existenz $f'(z)$.
Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist $f(z)$ holomorph? (20)

2. (a) Berechne die folgenden komplexen Kurvenintegrale längs (nicht geschlossener) Kurven α in $\mathbb{C}$.

(i) $\displaystyle\int_\alpha z \exp(z^2)\,\mathrm{d}z,\ \alpha(t) = \exp(i\pi/4)\sin t,\ t \in [0, \pi/2].$

(ii) $\displaystyle\int_\alpha (z + \overline{z})\,\mathrm{d}z,\ \alpha(t) = \exp(it),\ t \in [\pi/2, 3\pi/2].$

(iii) $\displaystyle\int_\alpha (z + i)^2\,\mathrm{d}z,\ \alpha(t) = t - i(1 + \sin t),\ t \in [0, 2\pi].$

(9)

(b) Berechne die folgenden komplexen Kurvenintegrale längs geschlossener Kurven α in $\mathbb{C}$ mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes bzw. mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel.

$$\text{(i)} \oint_{|z|=1} \frac{\sin(2z)}{z}\,\mathrm{d}z. \quad \text{(ii)} \oint_{|z-1|=1} \frac{\exp(-z^2)}{(z-1)^2}\,\mathrm{d}z. \quad \text{(iii)} \oint_{|z-i|=1} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}.$$

(6)

3. Entwickle folgende Funktionen, wenn möglich, in eine Potenzreihe um z_0 und gebe jeweils deren Konvergenzradius an.

(a) $\dfrac{1}{1+z^2},\ z_0 = 0.$ (b) $\arctan z,\ z_0 = 0.$

(c) $z - \overline{z},\ z_0 = 1.$ (d) $1 - 2\sin^2(z/2),\ z_0 = 0.$

(10)

4. Entscheide, ob es jeweils eine in D holomorphe Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ mit den angegebenen Eigenschaften gibt. Gib sie im Falle der Existenz an. Begründe jeweils die Entscheidung.

   (a) $f(1/n) = \dfrac{1}{2n+1}$ $(n \in \mathbb{N}),\ D = U_2(0)$.

   (b) $f(1/n) = \sin(n\pi/2)$ $(n \in \mathbb{N}),\ D = U_1(0)$.

   (c) $f(x) = 1/|x|$ $(x \in \mathbb{R}, x \neq 0),\ D = \mathbb{C}^* = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\}$. (10)

5. (a) Klassifiziere alle isolierten Singularitäten der folgenden Funktionen und berechne jeweils die Residuen.
   Bestimme in *einem* Falle eine Laurentreihe um die isolierte Singularität.

   (i) $z^{-2}\cos(1/z)$.

   (ii) $\dfrac{\exp(2\pi z)}{z^2+1}$.

   (iii) $\dfrac{1}{\cos\left(\frac{1}{1-z}\right)}$.

   (iv) $\dfrac{\sinh z}{z}$. (18)

   (b) Berechne mit Hilfe des Residuensatzes die folgenden komplexen Kurvenintegrale.

   (i) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{z}{z^2+1}\,\mathrm{d}z$.

   (ii) $\displaystyle\oint_{|z|=4} \frac{\exp z}{1+\exp z}\,\mathrm{d}z$. (5)

   (c) Berechne die folgenden uneigentlichen Integrale.

   (i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

   (ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{4+x^2}\,\mathrm{d}x$. (10)

6. Entscheide, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind. Kreuze auf dem zugehörigen Beiblatt entsprechend an.

   Achtung! Die Punkte für diese Aufgabe werden wie folgt vergeben:

richtig angekreuzt	2	Punkte
nicht angekreuzt	0	Punkte
falsch angekreuzt	-2	Punkte

   Bei negativem Punktesaldo werden für diese Aufgabe 0 Punkte vergeben.

   (a) Ist eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in einem Punkte $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, so ist sie in diesem Punkt unendlich oft komplex differenzierbar.

   (b) Die geschlitzte Ebene $\mathbb{C}_- = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ ist ein Elementargebiet.

   (c) Die Funktion $\sqrt{1-z}$ besitzt im Punkte $z_0 = 1$ eine isolierte Singularität.

   (d) Eine ganze und beschränkte Funktion ist konstant.

   (e) Jede in einer offenen Kreisscheibe holomorphe Funktion ist dort der kompakte Grenzwert einer Folge von Polynomen.

   (f) Eine ganze Funktion besitzt in $\mathbb{C}$ höchstens endlich viele Nullstellen. (12)