Werner Kratz
Markus Wahrheit

Sommersemester 2005
14.04.2005
Blatt 1

Übungen zur Linearen Algebra

Abgabe und Besprechung: Donnerstag, den 21.04.2005

1. Überprüfe, ob die gegebenen Mengen zusammen mit den angegebenen Verknüpfungen Gruppen bilden.

   (a) $(\mathbb{R}^2, +)$ mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$ für $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

   (b) $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 \cdot y_1 \\ x_2 \cdot y_2 \end{pmatrix}$ für $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

   (c) $G := \{e, a, b\}$ mit einer Verknüpfung "$\cdot$" gemäß folgender Verknüpfungstafel:

$$\begin{array}{c|ccc} \cdot & e & a & b \\ \hline e & e & a & b \\ a & a & e & a \\ b & b & a & e. \end{array}$$

(6)

2. Es sei M eine nichtleere Menge. Auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ von M, d.h. auf $\mathcal{P}(M) := \{N | N \subset M\}$, wird folgende Verknüfung (die so genannte *symmetrische Differenz*) definiert:

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \text{ für } A, B \in \mathcal{P}(M).$$

   Zeige, dass $\mathcal{P}(M)$ versehen mit der Verknüpfung $\triangle$ eine abelsche Gruppe bildet. (6)

3. Gegeben seien die *Gerade*

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

   und die *Ebene*

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

   Bestimme den Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene E. (4)

4. Zeige vektoriell, dass sich die Seitenhalbierenden eines Dreiecks in einem Punkt und jeweils im Verhältnis 2:1 schneiden. (4)