Werner Kratz
Markus Wahrheit

Sommersemester 2005
21.04.2005
Blatt 2

Übungen zur Linearen Algebra

Abgabe und Besprechung: Donnerstag, den 28.04.2005

5. (a) Berechne den Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen:

$$(2+3i)(2-3i), (1-i)^3-(1+i)^3, \frac{2-i}{1+i}, i^{2005}, \frac{1+\lambda i}{1-\lambda i} \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R}.$$

(b) Es seien $w, z \in \mathbb{C}$ zwei komplexe Zahlen. Zeige die *Parallelogrammgleichung*

$$|z+w|^2+|z-w|^2=2|z|^2+2|w|^2.$$

(*) Erläutere den Namen dieser Gleichung in der Gauß'schen Zahlenebene.

(c) Zeige, dass

$$z=\left(\sqrt{|z|}\,\frac{z+|z|}{|z+|z||}\right)^2 \text{ für alle } z \in \mathbb{C}\setminus(-\infty,0].$$

(6+2)

6. Es seien die folgenden Verknüpfungen für $x_1, x_2, y_1, y_2, \lambda \in \mathbb{R}$ definiert:

(a)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2+1 \end{pmatrix}, \\ \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2+\lambda-1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix}, \\ \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Überprüfe jeweils, ob $\mathbb{R}^2$ mit den obigen Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ einen Vektorraum über $\mathbb{R}$ bildet. (5)

7. Es sei V ein Vektorraum über K und für eine nichtleere Teilmenge $U \subset V$ gelte

   (i) $a + b \in U$ für alle $a, b \in U$, sowie

   (ii) $\alpha a \in U$ für alle $a \in U$ und alle $\alpha \in K$.

   Zeige, dass U ein Vektorraum über K ist. (4)

8. Es sei K ein Körper.

   (a) Entscheide jeweils, ob V ein Vektorraum über K ist.

   (i) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x - y = 0 \right\}$.

   (ii) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 - y^2 = 0 \right\}$.

   (b) Für welche $\alpha \in K$ ist V_α ein Vektorraum über K?

$$V_\alpha = \{ f : K \to K \,|\, f(1) = \alpha \} .$$

(5)