Werner Kratz
Markus Wahrheit

Sommersemester 2005
28.04.2005
Blatt 3

Übungen zur Linearen Algebra

Abgabe und Besprechung: Donnerstag, den 12.05.2005

9. Es seien $U_1, U_2 \subset V$ Unterräume eines Vektorraums V. Zeige:
$U = U_1 \cup U_2$ ist genau dann ein Unterraum von V, falls $U_1 \subset U_2$ oder $U_2 \subset U_1$ gilt. (4)

10. Untersuche die folgenden Familien T_ν, $\nu = 1, \ldots, 6$, auf lineare Unabhängigkeit im jeweils angegebenen Vektorraum.

(a) $T_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3-i \\ 0 \\ 2+i \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{C}^3$,

(b) $T_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$,

(c) $T_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1-4i \\ 1+2i \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4-i \\ 2-i \\ 1+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{C}^3$,

(d) $T_4 = T_1 \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \\ -i \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{C}^3$,

(e) $T_5 = T_2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$,

(f) $T_6 = \left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$ in Abhängigkeit des Parameters $\lambda \in \mathbb{R}$. (5)

11. Es sei der Vektorraum $V = \{f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}\}$ über $\mathbb{R}$ gegeben. Weiterhin seien $U = \{f \in V | f(n+2) = f(n) + f(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0\}$ und $f_1, f_2 \in V$ mit $f_1(n) := \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ und $f_2(n) := \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben.

(a) Zeige, dass U ein Unterraum von V ist und $f_1, f_2 \in U$ gilt.

(b) Zeige, dass f_1 und f_2 linear unabhängig sind.

(c) Bestimme $f \in U$ mit $f(0) = f(1) = 1$ (*Fibonacci-Folge*).

(d) Zeige, dass es für $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$ genau ein $f \in U$ mit $f(0) = \alpha_0$ und $f(1) = \alpha_1$ gibt, und dieses ist gegeben durch $f = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha_1 - \alpha_0\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) f_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha_0\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \alpha_1\right) f_2$.

(e) Zeige, dass f_1 und f_2 eine Basis von U bilden. (9)

12. Das rechteckige Zahlenschema bestehend aus drei Zeilen und drei Spalten

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

mit $a_{\mu\nu} \in \mathbb{R}, 1 \leq \mu, \nu \leq 3$, heißt *magisches Quadrat*, wenn ihre Zeilensummen, Spaltensummen und Summen der Diagonalen gleich, etwa gleich $s \in \mathbb{R}$, sind, d.h. falls

$$s = \sum_{\rho=1}^{3} a_{\rho\nu} = \sum_{\rho=1}^{3} a_{\mu\rho} = \sum_{\rho=1}^{3} a_{\rho\rho} = \sum_{\rho=1}^{3} a_{\rho,4-\rho} \text{ für alle } \mu, \nu \in \{1, 2, 3\}.$$

(a) Berechne ein magisches Quadrat mit $s = 15$.

(b) Zeige, dass die Menge M aller magischen Quadrate einen Vektorraum über $\mathbb{R}$ bildet.
Hinweis: Verwende die Tatsache, dass $\mathbb{R}^{3\times 3}$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist.

(c) Zeige, dass zu beliebig vorgegebenen $a, b, c \in \mathbb{R}$ genau ein magisches Quadrat der Form

$$\begin{pmatrix} a & \cdot & b \\ \cdot & c & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

existiert.

(d) Bestimme eine Basis von M. (6)

13. Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $T = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset V$ eine Basis von V. Wir definieren $a_{n+1} := -\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$. Zeige: Jeder Vektor $a \in V$ besitzt eine eindeutige Darstellung der Form

$$a = \sum_{\nu=1}^{n+1} \alpha_\nu a_\nu \text{ mit } \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in \mathbb{R} \text{ und } \sum_{\nu=1}^{n+1} \alpha_\nu = 0.$$

(6)