Werner Kratz
Markus Wahrheit

Sommersemester 2005
12.05.2005
Blatt 4

Übungen zur Linearen Algebra

Abgabe und Besprechung: Donnerstag, den 19.05.2005

14. Gegeben sind folgende Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad G := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne, falls möglich:

$$AB, BA, B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}, BC, CB, DF^{\mathrm{T}}, D^{\mathrm{T}}F, (AB)C, G^2 - 2G + I.$$

(b) Berechne alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \\ -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ -2x_1 & & & + & x_3 & = & 1. \end{array}$$

(c) Berechne jeweils den Rang der Matrix A, B, C, D, F, G. (8)

15. Berechne die Dimensionen folgender Vektorräume V über $\mathbb{R}$:

(a) $V = \mathrm{Lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 44 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$,

(b) $V = \mathrm{Lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$,

(c) $V = \mathrm{Lin}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ 12 \end{pmatrix} \right\}$. (3)

16. Überführe die folgende Matrix mit Hilfe des Gauß-Algorithmus in Zeilenstufenform. Bestimme ferner den Rang der gegebenen Matrix.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(3)

17. (a) Gegeben seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Die *Spur von* $A = (a_{\mu\nu})_{n\times n}$ ist wie folgt definiert:

$$\text{Spur}(A) = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu\nu}.$$

Zeige:

(i) $\text{Spur}(A + B) = \text{Spur}(A) + \text{Spur}(B)$.

(ii) $\text{Spur}(\lambda A) = \lambda\, \text{Spur}(A)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$.

(iii) $\text{Spur}(AB) = \text{Spur}(BA)$.

(b) Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeige, dass es keine Matrix $X \in C^{n\times n}$ mit $AX - XA = I$ gibt. (6)

(*) 18. Es sei

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \middle|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Zeige, dass U ein Unterraum des $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ist. Bestimme die Dimension von U.

(b) Zeige, dass U versehen mit der üblichen Matrixaddition und Matrixmultiplikation ein Körper ist. (5)

Achtung! Studenten des Bachelor-Studiengangs Informatik müssen sich bis spätestens 20.05.2005 beim zentralen Prüfungsamt für die Teilnahme an den Klausuren angemeldet haben!