Werner Kratz
Markus Wahrheit

Sommersemester 2005
19.05.2005
Blatt 5

# Übungen zur Linearen Algebra

Abgabe und Besprechung: Donnerstag, den 02.06.2005

19. (a) Berechne jeweils den Rang und die Dimension des Kerns folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & -7 & 1 \\ 2 & -2 & 44 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

(b) Entscheide, ob folgende Matrizen regulär sind und berechne gegebenenfalls ihre Inverse.

(i) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & 3 \\ 2 & -7 & 44 & 2 \\ -2 & 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(7)

20. Berechne jeweils alle Lösungen folgender linearer Gleichungssysteme:

(i)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 &= 7. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 2 \\ -x_1 - 2x_2 - 7x_3 + x_4 &= -2 \\ 2x_1 - 2x_2 + 44x_3 + 4x_4 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 2. \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1. \end{aligned}$$

(4)

21. Es seien $K$ ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}$. Zeige:
Für $A, B \in K^{m \times n}$ gilt stets $\text{Rang}(A + B) \leq \text{Rang } A + \text{Rang } B$. (3)

22. Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, m, n \in \mathbb{N}$. Zeige:

(a) Für $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:
  (i) $x^{\mathrm{T}} x = 0$ genau dann, wenn $x = 0$, und
  (ii) $A^{\mathrm{T}} A x = 0$ genau dann, wenn $Ax = 0$.

(b) $\text{Rang } A^{\mathrm{T}} A = \text{Rang } A$.

(c) $\mathbb{R}^m = \text{Im } A \oplus \text{Kern } A^{\mathrm{T}}$. (6)

(*) 23. (*Interpolation*)
Die folgende Aussage setzen wir als bekannt voraus:
Es sei $P$ ein Polynom vom Grade $\leq n$ mit reellen Koeffizienten, d.h. $P(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu, n \in \mathbb{N}_0, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Wenn $P$ mehr als $n$ Nullstellen besitzt, so ist $P$ das Nullpolynom.
Es seien $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden, sowie $y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ gegeben. Zeige:

(a) Es gibt genau ein Polynom vom Grade $\leq n$ mit reellen Koeffizienten, so dass gilt

$$P(x_\nu) = y_\nu \text{ für alle } \nu = 0, \ldots, n. \qquad (\dagger)$$

(b) Die so genannte *von der Mondesche Matrix*

$$A := (x_\mu^\nu) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)},$$

ist regulär.
Hinweis: Interpretiere (†) als ein geeignetes lineares Gleichungssystem. (6)

**Bitte beachten: Die erste Klausur zur Linearen Algebra findet am 27.05.2005 pünktlich um 16.00 Uhr statt. Verteilt Euch bitte auf die Hörsäle gemäß folgender Tabelle:**

| **Anfangsbuchstabe(n) des Nachnamens** | **Hörsaal** |
|---|---|
| **A-K** | **H22** |
| **L-Sch** | **H1** |
| **Se - Z** | **H3.** |