Werner Kratz
Markus Wahrheit

Sommersemester 2005
02.06.2005
Blatt 6

Übungen zur Linearen Algebra

Abgabe und Besprechung: Donnerstag, den 09.06.2005

24. Es seien V, W Vektorräume über K und $F \in L(V, W)$. Zeige, dass
    (a) F genau dann injektiv ist, wenn Kern $F = \{0\}$ gilt.
    (b) F genau dann surjektiv ist, wenn Rang $F = \dim W$ gilt, sofern $\dim W$ endlich ist.
    (c) $\dim W < \dim V$ impliziert, dass F nicht injektiv, und
    $\dim V < \dim W$ impliziert, dass F nicht surjektiv ist. (4)

25. Es sei $\Pi_n := \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid p(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu, \quad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$, sowie $F(p) = \sum_{\nu=1}^{n} \nu a_\nu x^{\nu-1}$ für $p \in \Pi_n$.
    (a) Zeige, dass F ein linearer Operator auf Π_n ist.
    (b) Berechne die Matrixdarstellung $A = A(F, B)$ von F bezüglich der Basis $B = \{1, x, \ldots, x^n\}$ von Π_n. (4)

26. Berechne für folgende Permutationen σ und $\tau \in S_5$ jeweils $\sigma \circ \tau, \tau \circ \sigma$, die Inversionen von σ und τ, $\operatorname{sign}(\sigma), \operatorname{sign}(\tau), \operatorname{sign}(\sigma \circ \tau)$, und stelle σ und τ als Produkt von Transpositionen dar.
$$\sigma = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \ \tau = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$
(4)

27. Berechne die Determinante folgender Matrizen.
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$
(4)

28. Es seien $A \in \mathbb{C}^{n \times n}, n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{C}$. Zeige:
    (a) $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$.
    (b) $\det A = 0$, falls n ungerade und A schiefsymmetrisch ist, d.h. $A = -A^{\mathrm{T}}$. (4)