Werner Kratz
Markus Wahrheit

Sommersemester 2005
09.06.2005
Blatt 7

# Übungen zur Linearen Algebra

Abgabe und Besprechung: Donnerstag, den 16.06.2005

29. Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 7 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix},\ B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne alle algebraischen Komplemente der Matrix $A$.

(b) Berechne die Inverse der Matrix $A$ mittels der Cramerschen Regel.

(c) Berechne die Determinanten der Matrizen $A, B$ und $C$.

(d) Berechne die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 9 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & & & + & 4x_3 & = & 6. \end{array}$$

mittels der Cramerschen Regel. (8)

30. Es sei $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ regulär. Zeige, dass $A^{-1} \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ genau dann ist, wenn $\det A = \pm 1$ gilt. (4)

31. Es seien

$$f_n := \det \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ i & 1 & i & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & i & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}, n \in \mathbb{N}.$$

Ferner setzen wir $f_0 := 1$. Zeige, dass $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für alle $n \geq 2$ gilt und bestimme $f_n$ explizit für alle $n \in \mathbb{N}_0$. (5)

32. Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass $< \cdot, \cdot >: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $< x, y >:= x^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} A y$ genau dann ein Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$ ist, wenn $A$ regulär ist. (3)

(*) 33. Beweise den folgenden Satz aus der Vorlesung:
Für $A \in K^{m\times n}$ gilt Rang A $= r$, falls $A$ eine $r$-reihige Unterdeterminante ungleich Null besitzt und falls im Falle $r < \min\{m, n\}$ alle $(r+1)$-reihigen Unterdeterminanten von $A$ gleich Null sind. (5)