Werner Kratz
Markus Wahrheit

Sommersemester 2005
16.06.2005
Blatt 8

Übungen zur Linearen Algebra

Abgabe und Besprechung: Donnerstag, den 23.06.2005

34. (a) Wende das Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf folgende Vektoren an:

    (i)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ mit } < x, y >= x^{\mathrm{T}} y \text{ für } x, y \in \mathbb{R}^4.$$

    (ii) $1, x, x^2$ mit dem Skalarprodukt $< f, g >= \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x$ für (stetige) Funktionen f und g.

    (b) Berechne jeweils das dreidimensionale Volumen des von den drei Vektoren aus Teil (a)(i), bzw. (a)(ii), aufgespannten Parallelepipeds. (6)

35. Es sei U ein Unterraum eines Euklidischen oder unitären Raumes V und es sei $W \subset V$. Zeige, dass

$$W \perp U \text{ genau dann, wenn } W \perp T \text{ für eine Basis } T \text{ von } U.$$

(3)

36. (*Satz des Pythagoras*).
Es sei V ein Euklidischer oder unitärer Raum. Zeige:

    (a)

$$\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 \text{ für } a, b \in V \text{ mit } a \perp b.$$

    (b)

$$\| \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \|^2 = \sum_{\nu=1}^{n} \|a_\nu\|^2,$$

falls $T = \{a_1, \ldots, a_n\}$ ein Orthogonalsystem in V ist. (3)

37. Wir betrachten $\mathbb{C}^n$ mit dem kanonischen Skalarprodukt $< x, y >= \overline{x}^{\mathrm{T}} y$ für $x, y \in \mathbb{C}^n$.

(a) Zeige, dass für jeden Unterraum U von $\mathbb{C}^n$ genau eine Matrix $P_U \in \mathbb{C}^{n \times n}$, der so genannte *orthogonale Projektor auf* U , existiert mit $P_U x = u$, wobei $x = u + v, u \in U, v \in U^{\perp}$, die eindeutige Zerlegung von x bezüglich der direkten Summe $\mathbb{C}^n = U \oplus U^{\perp}$ ist.

Hinweis: Fasse P_U als Matrixdarstellung einer geeigneten linearen Abbildung auf.

Zeige ferner, dass $P_U^2 := P_U P_U = P_U$ und $P_U^* := \overline{P}_U^{\mathrm{T}} = P_U$.

Hinweis: Zeige, dass $\overline{x}^{\mathrm{T}} P_U^* y = \overline{x}^{\mathrm{T}} P_U y$ für alle $x, y \in \mathbb{C}^n$ gilt.

(b) Zeige: Falls $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Matrix mit $P^2 = P$ und $P^* = P$ ist, so ist P der orthogonale Projektor auf $U = \mathrm{Im}\ P$.

(c) Es seien P_1, P_2 die orthogonalen Projektoren auf Unterräume U_1 und U_2 von $\mathbb{C}^n$. Zeige, dass $P_1 P_2 = P_1$ genau dann gilt, wenn $U_1 \subset U_2$ ist. (8)