Werner Kratz
Markus Wahrheit

Sommersemester 2005
23.06.2005
Blatt 9

Übungen zur Linearen Algebra

Abgabe und Besprechung: Donnerstag, den 30.06.2005

38. Es sei U ein Unterraum eines Euklidischen oder unitären Vektorraumes V. Ferner sei $\{a_1, \ldots, a_n\}$ eine Orthonormalbasis von U. Wir definieren die Abbildung $F : V \to U$ durch $F(x) = \sum_{\nu=1}^{n} < a_\nu, x > a_\nu$. Zeige:

    (a) F ist eine lineare Abbildung.

    (b) Ist $x = u + v$ mit $u \in U, v \in U^\perp$, so ist $F(x) = u$. F beschreibt also die orthogonale Projektion von x auf U, d.h. im Fall $V = \mathbb{C}^n$ ist $F(x) = P_U x$ mit P_U gemäß Aufgabe 37.

    (c) Für jedes $x \in V$ gilt: $\min\limits_{u \in U} \|x - u\| = \|x - F(x)\|$. (5)

39. Es seien die folgenden Matrizen gegeben.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

    (a) Bestimme für die angegebenen Matrizen jeweils das charakteristische Polynom, die Eigenwerte einschließlich ihrer geometrischen und algebraischen Vielfachheiten, sowie Basen der zugehörigen Eigenräume.

    (b) Entscheide, ob die angegebenen Matrizen diagonalisierbar sind. Bestimme gegebenenfalls eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ so, dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

    (c) Löse die Rekursion $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}, n \in \mathbb{N}, a_0 = a_1 = 1$ explizit nach a_n auf. (8)

40. Es seien $A \in K^{n \times n}$, K ein Körper, und $\sigma(A) = \{\text{Eigenwerte von } A\}$ bezeichne das *Spektrum* von A. Zeige:

    (a) Ist A *idempotent*, d.h. $A^2 = A$, dann gilt $\sigma(A) \subset \{0, 1\}$.

    (b) A und A^{T} haben dasselbe charakteristische Polynom, also $P_A = P_{A^{\mathrm{T}}}$.

    (c) $\sigma(A) = \sigma(A^{\mathrm{T}})$, d.h. A und A^{T} haben dieselben Eigenwerte. Gilt dies auch für die Eigenvektoren?

    (d) A ist genau dann regulär, wenn $0 \notin \sigma(A)$.

    (e) Wenn A *nilpotent* ist, d.h. $A^m = 0$ für ein gewisses $m \in \mathbb{N}$, dann folgt $\sigma(A) = \{0\}$. (5)

41. Es seien $A, B \in K^{n \times n}$, K ein Körper. Weiterhin sei B regulär. Zeige:

(a) AB und BA sind ähnlich.

(b) AB und BA haben dasselbe charakteristische Polynom, also $P_{AB} = P_{BA}$. (2)

(*) 42. Es seien $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Zeige: $P_{AB} = P_{BA}$.

Im Gegensatz zur vorangegangenen Aufgabe muss B also nicht notwendigerweise regulär sein. (5)