Werner Kratz
Markus Wahrheit

Sommersemester 2005
07.07.2005
Blatt 11

Übungen zur Linearen Algebra

Abgabe und Besprechung: Donnerstag, den 14.07.2005

Kegelschnitte (Ellipse, Hyperbel, Parabel)

(*) 48. Gegeben ist die *Quadrik*

$$M_Q := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; Q(x,y) = 0 \right\}$$

mit $Q(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + ax + by + c$, $A = A^{\mathrm{T}} = (a_{\mu\nu}) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $A \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$.

(a) Zeige, dass es eine orthogonale Matrix $U \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und Zahlen $\widetilde{a}, \widetilde{b}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$Q(x,y) = \widetilde{Q}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \lambda_1 \widetilde{x}^2 + \lambda_2 \widetilde{y}^2 + \widetilde{a}\widetilde{x} + \widetilde{b}\widetilde{y} + c \text{ für } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Hauptachsentransformation.

(b) Zeige, dass es $(x_0, y_0)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$ so gibt, dass

$$M_Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},\ \xi, \eta \in \mathbb{R} \text{ mit } \widehat{Q}(\xi, \eta) = 0 \right\},$$

wobei

- $\widehat{Q}$ entweder eine der folgenden Normalformen ist ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha > 0, \beta > 0$):
  (i) Ellipse:
  $$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} - 1.$$
  (ii) Hyperbel:
  $$\frac{\xi^2}{\alpha^2} - \frac{\eta^2}{\beta^2} - 1.$$
  (iii) Parabel:
  $$\eta^2 - 2\alpha\xi.$$
- oder M_Q ist leer, besteht aus einem Punkt oder zwei Geraden, welche auch zusammenfallen können.

Hinweis: Quadratische Ergänzung.

(c) Bestimme die Normalformen zu folgenden Quadriken M_Q mit:
  (i) $Q(x,y) = 9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2$.
  (ii) $Q(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25$.
  (iii) $Q(x,y) = x^2 + 4xy - 2y^2 + 14x - 8y + 1$.

Skizziere die drei Quadriken. (22)

(*) 49. Es sei eine Ellipse E in Normalform gegeben, d.h.

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0 \right\},\ 0 < \beta \leq \alpha.$$

α und β heißen die *Längen der Hauptachsen* von E. Sei $c := \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$. Die Punkte $f_1 = (-c, 0)^{\mathrm{T}}$ und $f_2 = (c, 0)^{\mathrm{T}}$ heißen *Brennpunkte* von E. $\varepsilon = \frac{c}{\alpha} < 1$ heißt die *Exzentrizität*, $p = \frac{\beta^2}{\alpha}$ der *Parameter* von E.

Eine Hyperbel H in Normalform ist gegeben durch

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0 \right\},\ \alpha > 0, \beta > 0.$$

α und β heißen die *Längen der Hauptachsen* von H. Sei $c := \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Die Punkte $f_1 = (-c, 0)^{\mathrm{T}}$ und $f_2 = (c, 0)^{\mathrm{T}}$ heißen *Brennpunkte* von H. $\varepsilon = \frac{c}{\alpha} > 1$ heißt die Exzentrizität, $p = \frac{\beta^2}{\alpha}$ der Parameter von H.

Eine Parabel in Normalform ist gegeben durch

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y^2 - 2px = 0 \right\},\ p > 0.$$

$f = (\frac{p}{2}, 0)^{\mathrm{T}}$ heißt der Brennpunkt und p der Parameter von P.

(a) Gegeben seien $\alpha > c > 0$. Zeige die folgenden Charakterisierungen. Bestimme ferner im Fall (i) und (ii) jeweils die Längen der Hauptachsen.
   (i) $q \in E$ genau dann, wenn $\|q - f_1\| + \|q - f_2\| = 2\alpha$.
   (ii) $q \in H$ genau dann, wenn $\|q - f_1\| - \|q - f_2\| = 2\alpha$.
   (iii) $q = (q_1, q_2)^{\mathrm{T}} \in P$ genau dann, wenn $\|q - f\| = \|q - (0, q_2)^{\mathrm{T}}\|$.

(b) Begründe, warum die folgende *Gärtnerkonstruktion* auf eine Ellipse führt: Man setze Pflöcke im Abstand $2c > 0$ und befestige an diesen ein Seil der Länge $2\alpha > 2c$. Spannt man nun mit einem Stock das Seil und zieht diesen bei voller Spannung des Seiles um die Pflöcke herum, so beschreibt die Bahn des Stockes eine Ellipse. Bestimme zudem die Längen der Hauptachsen der Ellipse.

(c) Es sei $f \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt, $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^2$ eine Gerade mit $f \notin \mathcal{L}$. Für ein $\varepsilon > 0$ betrachte die Menge

$$\{q \in \mathbb{R}^2 \mid \|q - f\| = \varepsilon\, \mathrm{d}(q, \mathcal{L})\},$$

wobei $\mathrm{d}(q, \mathcal{L}) := \min_{l \in \mathcal{L}} \|q - l\|$. Dann ist dies eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel, je nach dem ob $\varepsilon < 1, \varepsilon = 1$ oder $\varepsilon > 1$. Genauer: Wenn wir für $\varepsilon \neq 1$ die Variable $p := \varepsilon \mathrm{d}(f, \mathcal{L})$ setzen, so ist p der Parameter der durch die obigen Menge definierten Ellipse, bzw. Hyperbel, und ε ist ihre Exzentrizität. Wenn wir für $\varepsilon = 1$ die Variable $p := \mathrm{d}(f, \mathcal{L})/2$ setzen, so ist p der Parameter der durch die obige Menge definierten Parabel.

Hinweis: In einem geeigneten Koordinatensystem lassen sich f und $\mathcal{L}$ darstellen als $(c, 0)^{\mathrm{T}}$ und $\{(x, y)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2 \mid x = c/\varepsilon^2\}$, wobei $c := \varepsilon^2 \mathrm{d}(f, \mathcal{L})/|1 - \varepsilon^2|$. Argumentiere ähnlich bei $\varepsilon = 1$.

(18)