1. Klausur zur Linearen Algebra

27.05.2005, 16:00 - 18:00 Uhr

Zum Erwerb des Scheines sind zusammen mit den Punkten aus der zweiten Klausur insgesamt 100 Punkte zu erreichen.

Hilfsmittel: Zwei DIN A4 Blätter mit Aufzeichnungen. Kein Taschenrechner!
Zeit: Zwei Stunden

1. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass
$$G := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid AA^{\mathrm{T}} = I\}$$
bezüglich der Matrixmultiplikation eine Gruppe bildet, und dass diese Gruppe nicht abelsch für $n \geq 2$ ist. (15)

2. (a) Berechne den Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen:
$$(2+i)(1-i),\ \frac{i}{1-i},\ (1+i)^8.$$
(b) Zeige, dass für zwei beliebige komplexe Zahlen $w, z \in \mathbb{C}$ gilt:
$$(1-|w|^2)(1-|z|^2) = |1-\overline{w}z|^2 - |w-z|^2.$$
(12)

3. Prüfe, ob es sich bei den gegebenen Mengen um Unterräume des jeweils angegebenen Vektorraumes handelt. Bestimme gegebenenfalls eine Basis und die Dimension des Unterraumes.
(a) $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| = |y| \right\} \subset \mathbb{R}^2.$
(b) $U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+y+z=0,\ y-2z=0 \right\} \subset \mathbb{R}^3.$ (10)

4. Es seien U, W Unterräume eines endlichdimensionalen Vektorraums V mit $\dim V < \dim U + \dim W$. Zeige, dass $U \cap W \neq \{0\}$. (10)

5. Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Zeige:
(a) $\text{Rang } A = \text{Rang } AA^{\mathrm{T}}$.
(b) $\mathbb{R}^n = \text{Kern } A \oplus \text{Im } A^{\mathrm{T}}$. (15)

6. Es seien
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$
   (a) Berechne $AB, B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}, BA$.
   (b) Untersuche die Matrizen A, B auf Invertierbarkeit und berechne gegebenenfalls ihre Inverse.
   (c) Bestimme alle Lösungen folgendes linearen Gleichungssystems:
$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 3. \end{array}$$
(14)

7. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$
   (a) Berechne $\operatorname{Rang} A, \dim \operatorname{Im} A$, sowie $\dim \operatorname{Kern} A$.
   (b) Bestimme eine Basis von $\operatorname{Kern} A$.
   (c) Bestimme die Lösungsgesamtheit von $Ax = b$. (14)

8. Entscheide, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind. Dabei seien K ein beliebiger Körper und $m, n \in \mathbb{N}$. Kreuze auf dem Beiblatt zur Aufgabe 8 entsprechend an.
Die Punkte für diese Aufgabe werden wie folgt vergeben:

richtig angekreuzt	1 Punkt
nicht angekreuzt	0 Punkte
falsch angekreuzt	-1 Punkt.

Bei negativem Punktesaldo werden für diese Aufgabe 0 Punkte vergeben.

   1. Es gibt eine nichtabelsche Gruppe mit zwei Elementen.
   2. Der Durchschnitt zweier Unterräume ist stets nicht die leere Menge.
   3. Die Vereinigung zweier beliebiger Unterräume eines Vektorraums ist stets wiederum ein Unterraum.
   4. Vier Vektoren des $\mathbb{R}^3$ sind stets linear abhängig.
   5. Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.
   6. Die Menge aller $n \times n$-Matrizen mit Elementen in einem Körper K bilden bezüglich der Matrixmultiplikation eine Gruppe.
   7. Das Matrixprodukt zweier regulärer $n \times n$-Matrizen ist wiederum regulär.
   8. Für jede Matrix $A \in K^{m \times n}$ gilt $\operatorname{Kern} A = \operatorname{Kern} A^{\mathrm{T}}$.
   9. Für jede Matrix $A \in K^{m \times n}$ besitzen die Bilder von A und A^{T} dieselbe Dimension.
   10. Für eine quadratische Matrix $A \in K^{n \times n}$ besitzt $Ax = 0$ eine Lösung $x \neq 0$ genau dann, wenn A regulär ist.

(10)