2. Klausur zur Linearen Algebra

15.07.2005, 16:00 - 18:00 Uhr

Zum Erwerb des Scheines sind zusammen mit den Punkten aus der ersten Klausur insgesamt 100 Punkte zu erreichen.

Hilfsmittel: Zwei DIN A4 Blätter mit Aufzeichnungen. Kein Taschenrechner!
Zeit: Zwei Stunden

1. Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Berechne die Determinanten der obigen Matrizen A, B und C.

   (b) Untersuche die Matrizen A und B auf Definitheit. (14)

2. (a) Entscheide, ob die folgenden Matrizen diagonalisierbar sind. Bestimme gegebenenfalls eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ so, dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

   (i)
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

   (ii)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (b) Löse die Rekursion $a_{n+1} = 5a_n - 4a_{n-1},\ n \in \mathbb{N}$, mit $a_0 = 5, a_1 = 2$ explizit nach a_n auf. (14)

3. Es seien $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ regulär und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor x. Zeige: λ^{-1} ist ein Eigenwert von A^{-1} zum selben Eigenvektor x. (10)

4. Gegeben seien folgende Vektoren des $\mathbb{R}^4$.

$$a_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \; a_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \; a_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

   Orthonormalisiere a_1, a_2, a_3 mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens in der angegebenen Reihenfolge bezüglich des kanonischen Skalarproduktes. (11)

5. Es sei V ein Euklidischer oder unitärer Raum mit Orthonormalbasis $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Zeige, dass für jedes $x \in V$ gilt:

   (a) $x = \sum\limits_{\nu=1}^{n} < a_\nu, x > a_\nu$.

   (b) $\|x\|^2 = \sum\limits_{\nu=1}^{n} | < a_\nu, x > |^2$ *(Pythagoras).* (12)

6. Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Zeige: Das orthogonale Komplement des Bildes von A^{T} ist gleich dem Kern von A, d.h. $(\mathrm{Im}\ A^{\mathrm{T}})^{\perp} = \mathrm{Kern}\ A$. (15)

7. Führe, falls möglich, die Hauptachsentransformation für folgende Matrizen durch, d.h.: Bestimme alle Eigenwerte und eine unitäre Matrix U so, dass $U^{-1}AU = \mathrm{diag}(\lambda_\nu)$ ist.

$$(a)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad (b)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

(14)

8. Entscheide, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind. Kreuze auf dem Beiblatt zur Aufgabe 8 entsprechend an.
   Die Punkte für diese Aufgabe werden wie folgt vergeben:

richtig angekreuzt	1 Punkt
nicht angekreuzt	0 Punkte
falsch angekreuzt	-1 Punkt.

   Bei negativem Punktesaldo werden für diese Aufgabe 0 Punkte vergeben.

   1. Die Determinante der Summe zweier Matrizen ist stets gleich der Summe der Determinanten dieser beiden Matrizen.
   2. Eine Orthonormalbasis ist stets linear unabhängig.
   3. Jede reelle quadratische Matrix besitzt nur reelle Eigenwerte.
   4. Zwei Eigenvektoren zum selben Eigenwert einer Matrix sind stets linear abhängig.
   5. Eine $n \times n$-Matrix ist genau dann diagonalisierbar, wenn sie n linear unabhängige Eigenvektoren besitzt.
   6. Jede diagonalisierbare Matrix ist regulär.
   7. Jede komplexe quadratische Matrix ist ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix.
   8. Jede normale Matrix ist diagonalisierbar.
   9. Es gibt Matrizen, die diagonalisierbar, aber nicht unitär diagonalisierbar sind.
   10. Jede reelle symmetrische Matrix besitzt eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren.

(10)