Nachklausur zur Linearen Algebra

21.10.2005, 16:00 - 18:00 Uhr

Zum Erwerb des Scheines sind entweder aus dieser Klausur mindestens 50 Punkte oder zusammen mit den Punkten aus der zweiten Klausur insgesamt mindestens 100 Punkte zu erreichen.

Hilfsmittel: Zwei DIN A4 Blätter mit Aufzeichnungen. Kein Taschenrechner!
Zeit: Zwei Stunden

1. Zeige, dass die Menge der unitären $n \times n$-Matrizen ($n \in \mathbb{N}$) bezüglich der Matrixmultiplikation eine Gruppe bildet. (10)

2. Prüfe, ob es sich bei den gegebenen Mengen um Unterräume des jeweils angegebenen Vektorraumes V handelt. Bestimme gegebenenfalls eine Basis und die Dimension des Unterraumes.

   (a) $U_1 = \{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \text{Rang } A = 1\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2} = V$.

   (b) $U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3 = V$. (14)

3. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   (a) Berechne Rang A, dim Im A, sowie dim Kern A.

   (b) Bestimme eine Basis von Kern A.

   (c) Bestimme die Lösungsgesamtheit von $Ax = b$. (12)

4. Gegeben seien folgende Vektoren des $\mathbb{R}^4$.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Orthonormalisiere a_1, a_2, a_3 mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens in der angegebenen Reihenfolge bezüglich des kanonischen Skalarproduktes. (12)

5. (a) Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch. Zeige, dass Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von A jeweils orthogonal zueinander sind (bezüglich des kanonischen Skalarproduktes).

(b) Es seien $A \in \mathbb{C}^{n\times n}, B \in \mathbb{C}^{k\times k}$ und $M \in \mathbb{C}^{n\times k}$ mit Rang $M = k$. Ferner gelte die Beziehung

$$AM = MB.$$

Zeige, dass jeder Eigenwert von B auch ein Eigenwert von A ist. (15)

6. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Führe, falls möglich, eine Hauptachsentransformation für die Matrix A durch, d.h.: Bestimme alle Eigenwerte von A und eine unitäre Matrix U so, dass $U^{-1}AU = \operatorname{diag}(\lambda_\nu)$ gilt.

(b) Untersuche die Matrix A auf Definitheit.

(c) Bestimme A^n für $n \in \mathbb{N}$. (15)

7. Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine reguläre Matrix. Zeige, dass es gewisse Koeffizienten $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ gibt, so dass $A^{-1} = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu A^{\nu-1}$. (12)

8. Entscheide, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind. Kreuze auf dem Beiblatt zur Aufgabe 8 entsprechend an.
Die Punkte für diese Aufgabe werden wie folgt vergeben:

richtig angekreuzt	1 Punkt
nicht angekreuzt	0 Punkte
falsch angekreuzt	-1 Punkt.

Bei negativem Punktesaldo werden für diese Aufgabe 0 Punkte vergeben.

1. Der Durchschnitt zweier Unterräume eines Vektorraumes bildet stets einen Vektorraum über denselben Körper.
2. Eine Basis eines Vektorraumes ist stets linear unabhängig.
3. Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.
4. Falls das Matrixprodukt zweier Matrizen gleich der Nullmatrix ist, so ist stets eine der beiden Matrizen gleich der Nullmatrix.
5. Eine Matrix ist genau dann regulär, wenn ihre Determinante verschwindet.
6. Zwei Matrizen kommutieren genau dann, wenn sie den gleichen Rang besitzen.
7. Besitzt eine quadratische Matrix vollen Rang, so auch jede Matrixpotenz dieser Matrix.
8. Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten einer quadratischen Matrix sind stets linear unabhängig.
9. Eine hermitesche Matrix ist genau dann negativ definit, wenn alle ihre Hauptminoren negativ sind.
10. Jordanblöcke sind stets diagonalisierbar.

(10)