Lösungsvorschläge zu den Übungen zur Linearen Algebra

(*) 48. **Lösungsvorschlag:**

(a) Gemäß der HAT existiert ein orthogonales $U \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$U^{\mathrm{T}} A U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

wobei λ_1 und λ_2 die Eigenwerte der Matrix A sind. Es seien nun

$$\begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{pmatrix} = U^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ d.h. } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} Q(x,y) &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (a,b) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c \\ &= \begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{pmatrix} + (a,b) U \begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{pmatrix} + c \\ &= \widetilde{Q}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \end{aligned}$$

mit $(\widetilde{a}, \widetilde{b}) = (a,b)U$.

(b) Zunächst bemerken wir, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ nicht möglich ist, da $A \neq 0$. Wir unterscheiden hierbei wie folgt.
1. Fall: $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$. Mittels quadratischer Ergänzung bekommen wir unmittelbar

$$\begin{aligned} \widetilde{Q}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) &= \lambda_1 \underbrace{\left(\widetilde{x} + \frac{\widetilde{a}}{2\lambda_1}\right)^2}_{=:\xi} + \lambda_2 \underbrace{\left(\widetilde{y} + \frac{\widetilde{b}}{2\lambda_2}\right)^2}_{=:\eta} + \underbrace{c - \lambda_1 \left(\frac{\widetilde{a}}{2\lambda_1}\right)^2 - \lambda_2 \left(\frac{\widetilde{b}}{2\lambda_2}\right)^2}_{=:\widetilde{c}} \\ &= \lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + \widetilde{c}. \end{aligned}$$

Es ist also

$$Q(x,y) = 0 \iff \widetilde{Q}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = 0 \iff \lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + \widetilde{c} = 0.$$

Wir unterscheiden abermals den Fall
$\widetilde{c} = 0$: Ist $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, so ist $\xi^2 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\eta^2 \iff \xi = \pm\sqrt{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\eta$. Damit besteht die Menge M_Q also aus zwei sich schneidenen Geraden. Genauer ist

$$M_Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \xi - \frac{\widetilde{a}}{2\lambda_1} \\ \eta - \frac{\widetilde{b}}{2\lambda_2} \end{pmatrix}, \ \xi = \pm\sqrt{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\,\eta \right\}.$$

Ist hingegen $\lambda_1\lambda_2 > 0$, so ist $\xi = \eta = 0$, d.h. wir erhalten einen Punkt. Es ist

$$M_Q = \left\{ U \begin{pmatrix} -\frac{\widetilde{a}}{2\lambda_1} \\ -\frac{\widetilde{b}}{2\lambda_2} \end{pmatrix} \right\}.$$

$\widetilde{c} \neq 0$: Mit $\gamma := -\lambda_1/\widetilde{c},\ \delta := -\lambda_2/\widetilde{c}$ folgt

$$\gamma\xi^2 + \delta\eta^2 - 1 = 0.$$

Damit: sind $\gamma, \delta < 0$, so ist M_Q leer, $\gamma, \delta > 0$, so ist M_Q eine Ellipse, $\gamma\delta < 0$, so ist M_Q eine Hyperbel mit

$$M_Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \xi - \frac{\widetilde{a}}{2\lambda_1} \\ \eta - \frac{\widetilde{b}}{2\lambda_2} \end{pmatrix},\ \gamma\xi^2 + \delta\eta^2 - 1 = 0 \right\}.$$

2. Fall: $\lambda_1\lambda_2 = 0$. Es sei o.B.d.A. $\lambda_1 = 0$. Mittels quadratischer Ergänzung erhalten wir:

$$\begin{aligned} \widetilde{Q}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) &= \lambda_2\widetilde{y}^2 + \widetilde{a}\widetilde{x} + \widetilde{b}\widetilde{y} + c \\ &= \lambda_2 \underbrace{\left(\widetilde{y} + \frac{\widetilde{b}}{2\lambda_2} \right)^2}_{=:\eta} + \widetilde{a}\widetilde{x} + \underbrace{c - \lambda_2 \left(\frac{\widetilde{b}}{2\lambda_2} \right)^2}_{=:\widetilde{c}}. \end{aligned}$$

Wie oben bemerken wir

$$Q(x, y) = 0 \iff \widetilde{Q}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = 0 \iff \lambda_2\eta^2 + \widetilde{a}\widetilde{x} + \widetilde{c} = 0.$$

Ist nun $\widetilde{a} = 0$, so ist $\eta^2 = -\widetilde{c}/\lambda_2$ und damit ist M_Q entweder leer,eine Gerade oder zwei parallele Geraden.
Ist $\widetilde{a} \neq 0$, so ist mit $\xi = \widetilde{x} + \widetilde{c}/\widetilde{a}$, so ist

$$Q(x, y) = 0 \iff \widehat{Q}(\eta, \xi) := \eta^2 \underbrace{+ \frac{\widetilde{a}}{\lambda_2}}_{=:-2p} \xi = 0.$$

M_Q ist folglich eine Parabel. Genauer: es ist

$$M_Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \xi - \frac{\widetilde{c}}{\widetilde{a}} \\ \eta - \frac{\widetilde{b}}{2\lambda_2} \end{pmatrix},\ \eta^2 - 2p\xi = 0 \right\}.$$

(c) Wir berechnen im Folgenden die Kegelschnitte nach dem in (a) und (b) dargestellten Verfahren.

(i)

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (16,\ -8) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2 \\ &= 10\widetilde{x}^2 + 5\widetilde{y}^2 + \tfrac{1}{\sqrt{5}}(-40,\ 0) \begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{pmatrix} - 2, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{pmatrix} \text{ mit } U = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

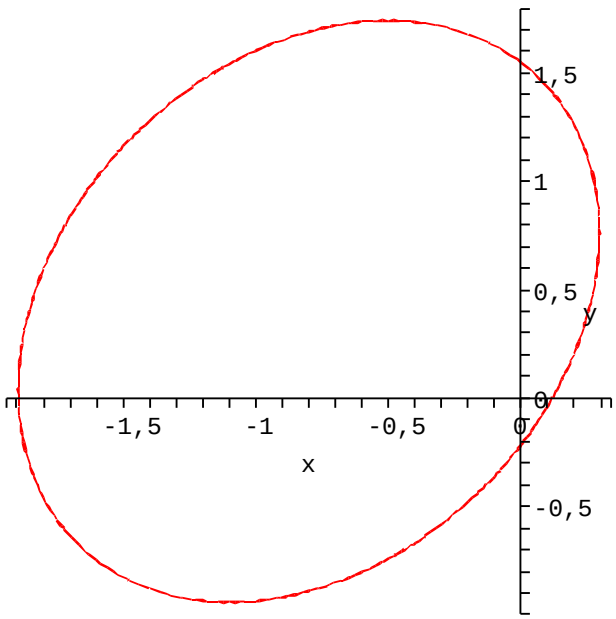
Weiter ist

$$Q(x,y) = 10\left(\widetilde{x} - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + 5\widetilde{y}^2 - 10,$$

und damit

$$M_Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix},\ \xi^2 + \frac{\eta^2}{\sqrt{2}^2} - 1 = 0 \right\}.$$

Skizze:



(ii)

$$\begin{aligned} Q(x,y) &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (-10,\ -6) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 25 \\ &= 2\widetilde{y}^2 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}(-16,\ 4) \begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{pmatrix} + 25, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{pmatrix} \text{ mit } U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

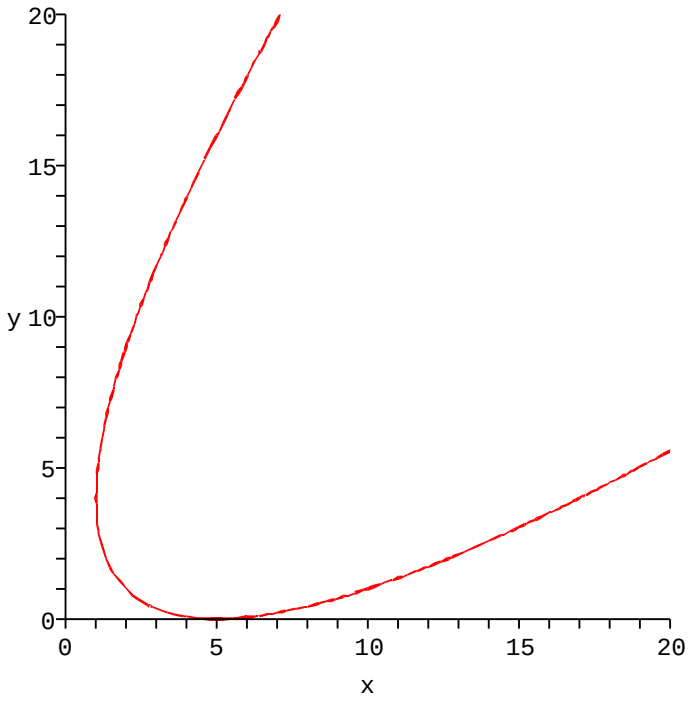
Weiter ist

$$Q(x,y) = 2\left(\widetilde{y} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{16}{\sqrt{2}}\widetilde{x} + 24,$$

und damit

$$M_Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \eta^2 - 4\sqrt{2}\xi = 0 \right\}.$$

Skizze:



(iii)

$$\begin{aligned} Q(x,y) &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (14,\ -8) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 1 \\ &= -3\widetilde{x}^2 + 2\widetilde{y}^2 + \tfrac{1}{\sqrt{5}}(30,\ 20) \begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{pmatrix} + 1, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{pmatrix} \text{ mit } U = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

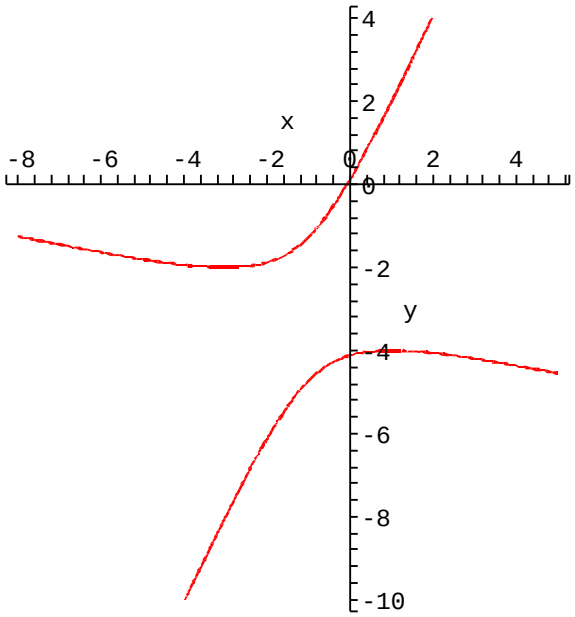
Weiter ist

$$Q(x,y) = -3\left(\widetilde{x} - \sqrt{5}\right)^2 + 2\left(\widetilde{y} + \sqrt{5}\right)^2 + 6,$$

und damit

$$M_Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix},\ \frac{\eta^2}{\sqrt{2}^2} - \frac{\xi^2}{\sqrt{3}^2} - 1 = 0 \right\}.$$

Skizze:



(*) 49. **Lösungsvorschlag:**

(a) (i) Es sei $q = (x, y)^{\mathrm{T}}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
& \|q - f_1\| + \|q - f_2\| &&= 2\alpha \\
\iff & \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &&= 2\alpha \\
\iff & \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &&= 2\alpha - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
\iff & (x+c)^2 + y^2 &&= 4\alpha^2 - 4\alpha\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
& && \quad +(x-c)^2 + y^2 \\
\iff & 4cx - 4\alpha^2 &&= -4\alpha\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
\iff & (cx - \alpha^2)^2 &&= \alpha^2((x-c)^2 + y^2) \\
\iff & (\alpha^2 - c^2)x^2 + \alpha^2 y^2 &&= \alpha^2(\alpha^2 - c^2) \\
\iff & \beta^2 x^2 + \alpha^2 y^2 &&= \alpha^2\beta^2 \\
\iff & \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} &&= 1.
\end{aligned}$$

α und $\beta = \sqrt{\alpha^2 - c^2}$ sind die Längen der Hauptachsen der Ellipse.

(ii) analog.

(iii) Hier liegt leider ein Tippfehler vor. Gemeint war: Zeige die Charakterisierung

$$q = (q_1, q_2)^{\mathrm{T}} \in P \text{ genau dann, wenn } \|q - f\| = \|q + f - (0, q_2)^{\mathrm{T}}\|.$$

Die gestellte Aufgabe würde zwar auch Sinn machen, jedoch auf eine Parabel mit einem anderen Parameter, nämlich $p/2$, führen. Wir stellen die Lösung der eigentlich gemeinten Aufgabe dar. Zur Lösung der gestellten Aufgabe setze $q_1 = x + \frac{p}{4}$ und rechne weiter wie unten.
Es sei $q = (x, y)^{\mathrm{T}}$. Dann ist

$$\begin{aligned} & \|q - f\| &=& \|q + f - (0, y)^{\mathrm{T}}\| \\ \iff & \sqrt{(x - \tfrac{p}{2})^2 + y^2} &=& x + \tfrac{p}{2} \\ \iff & x^2 - px + (\tfrac{p}{2})^2 + y^2 &=& x^2 + px + (\tfrac{p}{2})^2 \\ \iff & y^2 &=& 2px. \end{aligned}$$

(b) (a)(i) liefert die Begründung für die Gültigkeit der Gärtnerkonstruktion. Wie oben sind α und $\beta = \sqrt{\alpha^2 - c^2}$ die Längen der Hauptachsen der Ellipse.

(c) Es sei zunächst $\varepsilon \neq 1$. f und $\mathcal{L}$ lassen sich in einem geeigneten Koordinatensystem darstellen als $(c, 0)^{\mathrm{T}}$ und $\{(x, y)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2 \mid x = \frac{c}{\varepsilon^2}\}$, wobei $c = \varepsilon^2 \mathrm{d}(f, \mathcal{L})/|1 - \varepsilon^2|$. Damit ist mit $q = (x, y)^{\mathrm{T}}$

$$\begin{aligned} & \|q - f\| &=& \varepsilon \mathrm{d}(q, \mathcal{L}) \\ \iff & (x - c)^2 + y^2 &=& \varepsilon^2 (x - \frac{c}{\varepsilon^2})^2 \\ \iff & x^2 - 2cx + c^2 + y^2 &=& \varepsilon^2 x^2 - 2cx + \tfrac{c^2}{\varepsilon^2} \\ \iff & x^2(1 - \varepsilon^2) + y^2 &=& c^2 \left(\tfrac{1 - \varepsilon^2}{\varepsilon^2}\right) \\ \iff & \frac{x^2}{\frac{c^2}{\varepsilon^2}} + \frac{y^2}{\left(\frac{(1-\varepsilon^2)c^2}{\varepsilon^2}\right)} - 1 &=& 0. \end{aligned}$$

Dies ist eine Ellipse oder Hyperbel in Normalform, je nach dem, ob $\varepsilon < 1$ oder $\varepsilon > 1$.
Für die Ellipse ist $\alpha^2 = c^2/\varepsilon^2$, $\beta^2 = (1 - \varepsilon^2)c^2/\varepsilon^2$, $\alpha^2 - \beta^2 = c^2$, also $\varepsilon = c/\alpha$ die Exzentrizität, $p = \beta^2/\alpha = (1 - \varepsilon^2)c/\varepsilon = \varepsilon \mathrm{d}(f, \mathcal{L})$.
Für die Hyperbel ist ε die Exzentrizität, $\mathrm{d}(f, \mathcal{L}) = c(\varepsilon^2 - 1)/\varepsilon^2 = c(c^2 - \alpha^2)/c^2 = \beta^2/c = p/\varepsilon$.
Für $\varepsilon = 1$ seien f und $\mathcal{L}$ dargestellt durch $(c, 0)^{\mathrm{T}}$ und $\{(x, y)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2 \mid x = -c\}$ mit $c = \mathrm{d}(f, \mathcal{L})/2$. Damit ist

$$\begin{aligned} & \|q - f\| &=& \mathrm{d}(q, \mathcal{L}) \\ \iff & (x - c)^2 + y^2 &=& (x + c)^2 \\ \iff & y^2 &=& 4cx. \end{aligned}$$