Lösungsvorschlag zur
1. Klausur zur Linearen Algebra

27.05.2005

1. **Aufgabe:**
Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass
$$G := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid AA^{\mathrm{T}} = I\}$$
bezüglich der Matrixmultiplikation eine Gruppe bildet, und dass diese Gruppe nicht abelsch für $n \geq 2$ ist. (15)

Lösungsvorschlag:
G ist abgeschlossen bezüglich der Matrixmultiplikation, denn es ist
$$AB(AB)^{\mathrm{T}} = ABB^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = AA^{\mathrm{T}} = I \text{ für alle } A, B \in G.$$
Das Assoziativgesetz bezüglich der Matrixmultiplikation gilt gemäß der Vorlesung.
Es ist $I \in G$ das neutrale Element der Matrixmultiplikation, denn es gilt $AI = A$ für alle $A \in G$. Insbesondere ist G nichtleer.
Wir stellen fest, dass mit $A \in G$ ebenfalls $A^{\mathrm{T}} \in G$ ist, denn es gilt $A^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}A = I$.
Für jedes $A \in G$ gilt somit $AA^{\mathrm{T}} = I$, d.h. $A^{\mathrm{T}} \in G$ ist das inverse Element zu A.
Die Matrixmultiplikation ist nicht abelsch für $n \geq 2$, denn im Beispiel $n = 2$ gilt mit etwa
$$A := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{dass } A, B \in G, \text{doch } AB \neq BA.$$
In höheren Dimensionen ergänzt man etwa dieses Gegenbeispiel entsprechend zu
$$\hat{A} := \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},\ \hat{B} := \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

2. **Aufgabe:**

(a) Berechne den Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen:

$$(2+i)(1-i), \ \frac{i}{1-i}, \ (1+i)^8.$$

(b) Zeige, dass für zwei beliebige komplexe Zahlen $w, z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$(1-|w|^2)(1-|z|^2) = |1-\overline{w}z|^2 - |w-z|^2.$$

(12)

Lösungsvorschlag:

(a) Es ist

$$\begin{aligned} (2+i)(1-i) &= 2-2i+i+1 = 3-i, \\ \frac{i}{1-i} &= \frac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-1+i}{2} = -\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}, \\ (1+i)^8 &= \left((1+i)^2\right)^4 = (2i)^4 = 16. \end{aligned}$$

(b) Für zwei beliebige komplexe Zahlen $w, z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} |1-\overline{w}z|^2 - |w-z|^2 &= (1-\overline{w}z)(1-w\overline{z}) - (w-z)(\overline{w}-\overline{z}) \\ &= 1-\overline{w}z - w\overline{z} + \overline{w}w\,\overline{z}z - w\overline{w} + w\overline{z} + \overline{w}z - \overline{z}z \\ &= 1 - \overline{w}w - \overline{z}z + \overline{w}w\,\overline{z}z \\ &= 1-|w|^2-|z|^2+|w|^2|z|^2 \\ &= (1-|w|^2)(1-|z|^2). \end{aligned}$$

3. **Aufgabe:**
Prüfe, ob es sich bei den gegebenen Mengen um Unterräume des jeweils angegebenen Vektorraumes handelt. Bestimme gegebenenfalls eine Basis und die Dimension des Unterraumes.

(a) $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| = |y| \right\} \subset \mathbb{R}^2.$

(b) $U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y + z = 0,\ y - 2z = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^3.$ (10)

Lösungsvorschlag:

(a) U_1 ist kein Unterraum des $\mathbb{R}^2$, da die Abgeschlossenheit bezüglich der Vektoraddition verletzt ist. Es sind etwa

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in U_1, \text{ doch } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \notin U_1.$$

(b) Es ist

$$U_2 = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Damit ist U_2 ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$. Es ist $\{(-3, 2, 1)^{\mathrm{T}}\}$ eine Basis von U_2 und folglich ist $\dim U_2 = 1$.

4. **Aufgabe:**
Es seien U, W Unterräume eines endlichdimensionalen Vektorraums V mit $\dim V < \dim U + \dim W$. Zeige, dass $U \cap W \neq \{0\}$. (10)

Lösungsvorschlag:
Gemäß der Dimensionsformel ist $\dim V \geq \dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$, folglich

$$\dim(U \cap W) \geq \dim U + \dim W - \dim V > 0.$$

Daher ist Unterraum $U \cap W$ nicht trivial.

5. **Aufgabe:**
Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Zeige:

(a) Rang $A =$ Rang AA^{T}.

(b) $\mathbb{R}^n = \text{Kern } A \oplus \text{Im } A^{\mathrm{T}}$. (15)

Lösungsvorschlag:

(a) Betrachten wir in Übungsaufgabe .. auf Blatt 5 A^{T} statt A, so erhalten wir die Gültigkeit von Kern $A^{\mathrm{T}} =$ Kern (AA^{T}). Gemäß der Dimensionsformel ist

$$m = \text{Rang } A^{\mathrm{T}} + \dim \text{Kern } A^{\mathrm{T}} = \text{Rang } (AA^{\mathrm{T}}) + \dim \text{Kern } (AA^{\mathrm{T}}),$$

und daher Rang $A^{\mathrm{T}} =$ Rang (AA^{T}). Mit Rang $A =$ Rang A^{T} erhalten wir schließlich die Behauptung.

(b) Wir zeigen zunächst, dass die Summe direkt ist. Sei dazu $x \in \text{Kern } A \cap \text{Im } A^{\mathrm{T}}$, so gibt es ein $y \in \mathbb{R}^m$ so, dass $x = A^{\mathrm{T}}y$, und mit $Ax = 0$ folgt $AA^{\mathrm{T}}y = 0$. Da Kern $(AA^{\mathrm{T}}) =$ Kern A^{T}, ist damit $A^{\mathrm{T}}y = x = 0$.
Mittels der Dimensionsformel $n = \text{Rang } A + \dim \text{Kern } A$ und Rang $A =$ Rang A^{T} folgt die Behauptung.

6. **Aufgabe:**
Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne $AB, B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}, BA$.

(b) Untersuche die Matrizen A, B auf Invertierbarkeit und berechne gegebenenfalls ihre Inverse.

(c) Bestimme alle Lösungen folgendes linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 3. \end{array}$$

(14)

Lösungsvorschlag:

(a) Wir berechnen

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & -8 \end{pmatrix}, \\ B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} &= (AB)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -8 \end{pmatrix}, \\ BA &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 7 & -5 & 5 \\ -7 & 4 & -5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Wir zeigen, dass A regulär ist, und berechnen zugleich die Inverse.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{Z3-Z1}{\overset{Z2-3Z1}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{Z3+2Z2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right) \underset{(-1)Z3}{\overset{Z1+Z3}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right).$$

Die Matrix A ist regulär und ihre Inverse lautet

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Da die Spaltenvektoren der Matrix B linear abhängig sind, ist B singulär. Es ist etwa

$$2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(c) Das lineare Gleichungssystem

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ist eindeutig lösbar und die Lösung lautet

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

7. **Aufgabe:**
Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne $\operatorname{Rang} A, \dim \operatorname{Im} A$, sowie $\dim \operatorname{Kern} A$.

(b) Bestimme eine Basis von $\operatorname{Kern} A$.

(c) Bestimme die Lösungsgesamtheit von $Ax = b$. (14)

Lösungsvorschlag:

(a) Im Hinblick auf Aufgabenteil (c) bringen wir die erweiterte Matrix $(A|b)$ auf Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 6 & 5 & -2 \end{array}\right) \overset{Z2-Z1}{\underset{Z3-Z1}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & -4 \end{array}\right)$$

$$\overset{Z3+2Z2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Es ergibt sich $\operatorname{Rang} A = \dim \operatorname{Im} A = 2$, $\dim \operatorname{Kern} A = 4 - 2 = 2$.

(b) Es ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von $\operatorname{Kern} A$.

(c) In Aufgabenteil (a) haben wir berechnet, dass $\operatorname{Rang} A = \operatorname{Rang} (A|b)$ gilt, d.h. das gegebene lineare Gleichungssystem ist lösbar. Die Lösungen dieses linearen Gleichungssystems setzen sich aus einer partikulären Lösung plus einer Lösung der Kerns von A zusammen. Wir erhalten also als Lösungsgesamtheit

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

8. **Aufgabe:**
Entscheide, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind. Dabei seien K ein beliebiger Körper und $m, n \in \mathbb{N}$. Kreuze auf dem Beiblatt zur Aufgabe 8 entsprechend an.
Die Punkte für diese Aufgabe werden wie folgt vergeben:

richtig angekreuzt	1 Punkt
nicht angekreuzt	0 Punkte
falsch angekreuzt	-1 Punkt.

Bei negativem Punktesaldo werden für diese Aufgabe 0 Punkte vergeben.

1. Es gibt eine nichtabelsche Gruppe mit zwei Elementen.
2. Der Durchschnitt zweier Unterräume ist stets nicht die leere Menge.
3. Die Vereinigung zweier beliebiger Unterräume eines Vektorraums ist stets wiederum ein Unterraum.
4. Vier Vektoren des $\mathbb{R}^3$ sind stets linear abhängig.
5. Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.
6. Die Menge aller $n \times n$-Matrizen mit Elementen in einem Körper K bilden bezüglich der Matrixmultiplikation eine Gruppe.
7. Das Matrixprodukt zweier regulärer $n \times n$-Matrizen ist wiederum regulär.
8. Für jede Matrix $A \in K^{m \times n}$ gilt Kern $A =$ Kern A^{T}.
9. Für jede Matrix $A \in K^{m \times n}$ besitzen die Bilder von A und A^{T} dieselbe Dimension.
10. Für eine quadratische Matrix $A \in K^{n \times n}$ besitzt $Ax = 0$ eine Lösung $x \neq 0$ genau dann, wenn A regulär ist.

(10)

Lösungsvorschlag:

Aussage	richtig	falsch
1.	$\bigcirc$	$\otimes$
2.	$\otimes$	$\bigcirc$
3.	$\bigcirc$	$\otimes$
4.	$\otimes$	$\bigcirc$
5.	$\otimes$	$\bigcirc$
6.	$\bigcirc$	$\otimes$
7.	$\otimes$	$\bigcirc$
8.	$\bigcirc$	$\otimes$
9.	$\otimes$	$\bigcirc$
10.	$\bigcirc$	$\otimes$