Lösungsvorschlag zur 2. Klausur zur Linearen Algebra

15.07.2005

1. **Aufgabe:**
Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne die Determinanten der obigen Matrizen A, B und C.

(b) Untersuche die Matrizen A und B auf Definitheit. (14)

Lösungsvorschlag:

(a) Es ist

$$\begin{aligned} \det A &= 3 - 4 = -1. \\ \det B &= -2 \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \\ &= -120 + 4 \det \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 10 \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \\ &= -120 - 48 + 170 = 2. \\ \det C &= -3 \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = -6. \end{aligned}$$

(b) Da der zweite Hauptminor der Matrix A die Determinante von A und damit nach Teil (a) negativ ist, ist die Matrix A indefinit.
Zur Matrix B: Es ist

$$\begin{aligned} D_1 &= 3 > 0 \\ D_2 &= 2 > 0 \\ D_3 &= \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 6D_2 = -2 + 12 = 10 > 0 \\ D_4 &= \det B = 2 > 0. \end{aligned}$$

Die Matrix B ist folglich positiv definit.

2. **Aufgabe:**

(a) Entscheide, ob die folgenden Matrizen diagonalisierbar sind. Bestimme gegebenenfalls eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ so, dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

(i)
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

(ii)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Löse die Rekursion $a_{n+1} = 5a_n - 4a_{n-1},\ n \in \mathbb{N}$, mit $a_0 = 5, a_1 = 2$ explizit nach a_n auf. (14)

Lösungsvorschlag:

(a) (i) Wir bestimmen zunächst die Eigenwerte der Matrix A. Es ist

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & 5-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 4).$$

Die Eigenwerte ergeben sich aus den Nullstellen des obigen charakteristischen Polynoms von A zu 1 und 4. Da diese Werte verschieden sind, ist A diagonalisierbar. Wir bestimmen zugehörige Eigenvektoren zu den Eigenwerten der Matrix A.
Zum Eigenwert 1:
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} x = 0 \text{ für } x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Zum Eigenwert 4:
$$\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} x = 0 \text{ für } x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$
Mit
$$S := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$
gilt folglich
$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(ii) A ist eine obere Dreiecksmatrix, daher kann man die Eigenwerte dieser Matrix direkt aus den Diagonalelementen von A ablesen. A besitzt lediglich den Eigenwert 1 mit algebraischer Vielfachheit 3. Die geometrische Vielfachheit beträgt hingegen 1, wie man leicht anhand der Formel $\rho(1) = 3 - \text{Rang}(A - 1 \cdot I)$ ablesen kann. Da somit die geometrische Vielfachheit nicht mit der algebraischen Vielfachheit des Eigenwertes der Matrix A übereinstimmt, ist A nicht diagonalisierbar.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen daher

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}^n &= S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^n S^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 - 4^n & 4^n - 1 \\ 4 - 4^{n+1} & 4^{n+1} - 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es ist also

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 - 4^n & 4^n - 1 \\ 4 - 4^{n+1} & 4^{n+1} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 4^n \\ 6 - 4^{n+1} \end{pmatrix},$$

d.h. insbesondere $a_n = 6 - 4^n,\ n \in \mathbb{N}_0$.

3. **Aufgabe:**
Es seien $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ regulär und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor x. Zeige: λ^{-1} ist ein Eigenwert von A^{-1} zum selben Eigenvektor x. (10)

Lösungsvorschlag:
Aufgrund der Regularität von A ist $\lambda \neq 0$ und folglich

$$Ax = \lambda x \iff x = \lambda A^{-1}x \iff \lambda^{-1}x = A^{-1}x.$$

Hieraus ergibt sich die Behauptung.

4. **Aufgabe:**
Gegeben seien folgende Vektoren des $\mathbb{R}^4$.

$$a_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \; a_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \; a_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Orthonormalisiere a_1, a_2, a_3 mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens in der angegebenen Reihenfolge bezüglich des kanonischen Skalarproduktes. (11)

Lösungsvorschlag:
Wir konstruieren orthonormale Vektoren b_1, b_2, b_3 mit dem Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren.

$$b_1 := \frac{a_1}{\|a_1\|} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\widetilde{b}_2 := a_2 - < b_1, a_2 > b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{9} \cdot 18 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$b_2 := \frac{\widetilde{b}_2}{\|\widetilde{b}_2\|} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\widetilde{b}_3 := a_3 - < b_1, a_3 > b_1 - < b_2, a_3 > b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{1}{9} \cdot 9 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{9} \cdot 9 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$b_3 := \frac{\widetilde{b}_3}{\|\widetilde{b}_3\|} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

5. **Aufgabe:**
Es sei V ein Euklidischer oder unitärer Raum mit Orthonormalbasis $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Zeige, dass für jedes $x \in V$ gilt:

(a) $x = \sum_{\nu=1}^{n} < a_\nu, x > a_\nu$.

(b) $\|x\|^2 = \sum_{\nu=1}^{n} | < a_\nu, x > |^2$ *(Pythagoras).* (12)

Lösungsvorschlag:

(a) Es seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K (= \mathbb{R}$ oder $= \mathbb{C})$ so, dass $x = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu a_\nu$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=1}^{n} < a_\nu, \sum_{\mu=1}^{n} \alpha_\mu a_\mu > a_\nu &= \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} \alpha_\mu < a_\nu, a_\mu > a_\nu \\
&= \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} \alpha_\mu \delta_{\mu\nu} a_\nu \\
&= \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu a_\nu \\
&= x.
\end{aligned}$$

(b) Mit dem Satz von Pythagoras ist nach (a)

$$\begin{aligned}
\|x\|^2 &= \sum_{\nu=1}^{n} \| < a_\nu, x > a_\nu \|^2 \\
&= \sum_{\nu=1}^{n} | < a_\nu, x > |^2 \, \|a_\nu\|^2 \\
&= \sum_{\nu=1}^{n} | < a_\nu, x > |^2.
\end{aligned}$$

6. **Aufgabe:**
Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Zeige: Das orthogonale Komplement des Bildes von A^{T} ist gleich dem Kern von A, d.h. $(\text{Im } A^{\mathrm{T}})^{\perp} = \text{Kern } A$. (15)

Lösungsvorschlag:
Es ist

$$\begin{aligned} x \in \text{Kern } A &\iff Ax = 0 \\ &\iff x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = 0 \\ &\iff x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}y = 0 \text{ für alle } y \in \mathbb{R}^m \\ &\iff < x, A^{\mathrm{T}}y >= 0 \text{ für alle } y \in \mathbb{R}^m \\ &\iff x \in (\text{Im } A^{\mathrm{T}})^{\perp}. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich die Behauptung.

7. **Aufgabe:**
Führe, falls möglich, die Hauptachsentransformation für folgende Matrizen durch, d.h.: Bestimme alle Eigenwerte und eine unitäre Matrix U so, dass $U^{-1}AU = \mathrm{diag}(\lambda_\nu)$ ist.

$$(a)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad (b)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Lösungsvorschlag:
Wir berechnen die Eigenwerte der Matrix A. Es ist

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda) \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2-\lambda & -2 \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)[\lambda^2 - 6\lambda + 4] - 4(2-\lambda) \\ &= (2-\lambda)\ \lambda\ (\lambda - 6) \end{aligned}$$

Die Matrix A besitzt folglich die Eigenwerte $0, 2$ und 6. Wir bestimmen ferner zugehörige normierte Eigenvektoren
zum Eigenwert 0:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} x = 0 \text{ für } x = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

zum Eigenwert 2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} x = 0 \text{ für } x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

zum Eigenwert 6:

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} x = 0 \text{ für } x = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Da die Matrix A symmetrisch und die Eigenwerte von A verschieden sind, bilden die angegebenen Eigenvektoren eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$. Damit ist

$$U := \frac{\sqrt{6}}{6} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

unitär und es gilt

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix B ist nicht hermitesch und demzufolge ist eine Hauptachsentransformation für B nicht definiert.

8. **Aufgabe:**
Entscheide, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind. Kreuze auf dem Beiblatt zur Aufgabe 8 entsprechend an.
Die Punkte für diese Aufgabe werden wie folgt vergeben:

richtig angekreuzt	1 Punkt
nicht angekreuzt	0 Punkte
falsch angekreuzt	-1 Punkt.

Bei negativem Punktesaldo werden für diese Aufgabe 0 Punkte vergeben.

1. Die Determinante der Summe zweier Matrizen ist stets gleich der Summe der Determinanten dieser beiden Matrizen.
2. Eine Orthonormalbasis ist stets linear unabhängig.
3. Jede reelle quadratische Matrix besitzt nur reelle Eigenwerte.
4. Zwei Eigenvektoren zum selben Eigenwert einer Matrix sind stets linear abhängig.
5. Eine $n \times n$-Matrix ist genau dann diagonalisierbar, wenn sie n linear unabhängige Eigenvektoren besitzt.
6. Jede diagonalisierbare Matrix ist regulär.
7. Jede komplexe quadratische Matrix ist ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix.
8. Jede normale Matrix ist diagonalisierbar.
9. Es gibt Matrizen, die diagonalisierbar, aber nicht unitär diagonalisierbar sind.
10. Jede reelle symmetrische Matrix besitzt eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren.

(10)

Lösungsvorschlag:

Aussage	richtig	falsch
1.	○	⊗
2.	⊗	○
3.	○	⊗
4.	○	⊗
5.	⊗	○
6.	○	⊗
7.	⊗	○
8.	⊗	○
9.	⊗	○
10.	⊗	○