# Analysis I - Zweite Klausur

Wintersemester 2004-2005

Matrikelnummer: ______________________________

Vorname: ______________________________

Name: ______________________________

| | |
|---|---|
| Aufgabe 1 | |
| Aufgabe 2 | |
| Aufgabe 3 | |
| Aufgabe 4 | |
| Aufgabe 5 | |
| Aufgabe 6 | |
| Aufgabe 7 | |
| Aufgabe 8 | |
| Aufgabe 9 | |
| **Summe** | |

Analysis I - Zweite Klausur 19.02.2005

Matrikelnummer: ___________

# Aufgabe 1 14 Punkte

Bestimmen Sie (mit Beweis) alle lokalen Minima, Maxima und Wendepunkte sowie das Krümmungsverhalten von

$$\text{a) } f(x) \;=\; 3x^3 - x + 1 \quad , \quad \text{b) } g(x) \;=\; e^{x^2+1}$$

auf $\mathbb{R}$. Sie brauchen nur die Stellen der gefragten Punkte und nicht den Funktionswert ausrechnen.

**Lösung**

Als Polynom ist $f$ laut Vorlesung beliebig oft differenzierbar. Anwendung der Ableitungsregel für Polynome ergibt

$$f'(x) \;=\; 9x^2 - 1 \quad , \quad f''(x) \;=\; 18x \quad , \quad f'''(x) \;=\; 18$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

**Krümmungsverhalten und Wendepunkte:**

Laut Satz 5.10.2(ii) ist die beliebig oft differenzierbare Funktion $f(x)$ konkav auf $(-\infty, 0]$ wegen $f''(x) \geq 0$ und konvex auf $[0, \infty)$ wegen $f''(x) \geq 0$. Damit folgt auch, dass $w = 0$ ein Wendepunkt von $f(x)$ ist (Definition 5.10.2). Es gibt keine weiteren Wendepunkte, denn für jeden solchen müsste $f''(x) = 18x = 0$ gelten (Satz 5.10.3), woraus aber $x = 0$ folgt. Also liegt der einzige Wendepunkt von $f(x)$ an der Stelle $w = 0$.

**Lokale Extrema**:

Ist $\eta \in \mathbb{R}$ eine Extremalstelle von $f(x)$, so gilt notwendig $f'(\eta) = 0$ nach Satz 5.1.3, also $9\eta^2 - 1 = 0$ bzw. $(3\eta)^2 = 1$, was offenbar genau für $\eta_1 = -\frac{1}{3}$ und $\eta_2 = \frac{1}{3}$ der Fall ist. Die hinreichende Bedingung für lokale Extrema (Satz 5.10.5 für $n = 1$) ist auch erfüllt wegen $f''(\eta_{1,2}) = 18\eta_{1,2} \neq 0$. Es ist $f''(\eta_1) = -18\frac{1}{3} = -6 < 0$, also besitzt $f(x)$ in $\eta_1$ ein lokales Maximum. Andererseits ist $f''(\eta_2) = 18\frac{1}{3} = 6 > 0$, also besitzt $f(x)$ in $\eta_2$ ein lokales Minimum. Da die notwendige Bedingung $f'(x) = 0$ nur für $\eta_{1,2}$ erfüllt ist besitzt $f(x)$ keine weiteren lokalen Extrema.

Ableiten von $g(x)$ ergibt nach der Kettenregel

$$g'(x) \;=\; (e^{x^2+1})' \;=\; (x^2+1)' \cdot e^{x^2+1} \;=\; 2x \cdot e^{x^2+1} \;,$$

womit $g(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist. Erneutes Ableiten ergibt nach der Produktregel

$$g''(x) \;=\; (2xe^{x^2+1})' \;=\; (2x)'(e^{x^2+1}) \;+\; (2x)(e^{2x+1})' \;=\; 2e^{x^2+1} \;+\; 4x^2e^{2x+1} \;=\; (2+4x^2)e^{x^2+1} \;,$$

womit $g(x)$ zweimal auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist.

**Krümmungsverhalten und Wendepunkte:**

Laut Vorlesung ist $e^x$ positiv für alle $x \in \mathbb{R}$, andererseits ist $2 + 4x^2$ positiv (da wir $g(x)$ nur auf $\mathbb{R}$ und nicht auf $\mathbb{C}$ betrachten). Damit folgt, dass $g''(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist, d. h. nach Satz 5.10.2 ist $g(x)$ konvex auf ganz $\mathbb{R}$, woraus auch folgt, dass $g(x)$ keinen Wendepunkt besitzt.

**Lokale Extrema**:

Die notwendige Bedingung für lokale Extrema (Satz 5.1.3) $g'(x) = 0$ ist wegen $2e^x \neq 0$ nur für $x = 0$ erfüllt. Damit besitzt $g(x)$ höchstens ein lokales Extremum in $\xi = 0$. Da die zweite Ableitung stets positiv ist folgt, dass $g(x)$ in $\xi$ ein lokales Minimum besitzt.

Matrikelnummer: ___________

# Aufgabe 2 12 Punkte

Zeigen Sie mit Hilfe des 1. Mittelwertsatzes:

(a) Sind Funktionen $f, g$ auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) = g'(x)$, so gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = c + g(x)$.

(b) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $|\sin(a) - \sin(b)| \;\leq\; |a - b|$.

**Lösung**

**Zu a):**
Das ist eine Umformulierung von Satz 5.4.2(i), die wie folgt bewiesen wird: man setzt $h(x) = f(x) - g(x)$, dann ist nach den Rechenregeln für Ableitungen $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ auf ganz $\mathbb{R}$. Nach dem ersten Mittelwertsatz gibt es für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ ein $\xi$ mit

$$\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} \;=\; h'(\xi) \;=\; 0 \quad\Rightarrow\quad h(x) - h(0) \;=\; 0 \quad\Rightarrow\quad h(x) \;=\; h(0) \;=:\; c$$

für alle $x \neq 0$. Das bedeutet aber gerade $f(x) = g(x) + c$ für alle $x \neq 0$. Da $f$ und $g$ stetig sind muss das dann auch in $x = 0$ gelten. Der Mittelwertsatz darf benutzt werden, weil $h(x)$ als Differenz der auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbaren Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und stetig ist.

**Zu b)**:
Ist $a = b$, so steht auf beide Seiten der Ungleichung Null, und die Aussage ist erfüllt. Also seien $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig aber verschieden. Anwendung des ersten Mittelwertsatzes auf die laut Vorlesung differenzierbare Funktion $\sin(x)$ ergibt

$$\frac{\sin(a) - \sin(b)}{a - b} \;=\; \sin'(\xi) \;=\; \cos(\xi)$$

wegen $\sin'(x) = \cos(x)$ laut Vorlesung für irgend ein $\xi \in (a, b)$. Betragsanwendung auf beiden Seiten liefert

$$\frac{|\sin(a) - \sin(b)|}{|a - b|} \;=\; |\cos(\xi)|\;,$$

und Multiplikation mit $|a - b|$ schließlich

$$|\sin(a) - \sin(b)| \;=\; |\cos(\xi)| \cdot |a - b| \;\leq\; |a - b|$$

wegen $\cos(x) \in [-1, 1]$ laut Vorlesung.

Analysis I - Zweite Klausur 19.02.2005

Matrikelnummer: ___________

# Aufgabe 3 14 Punkte

Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge

$$f_n(x) \ = \ e^{\frac{x}{n}}$$

auf $\mathbb{R}$ punktweise gegen die Grenzfunktion $f(x) = 1$ konvergiert, und dass diese Konvergenz auf $[0, 1]$ sogar gleichmäßig ist. Zeigen Sie zudem, dass die Konvergenz auf ganz $\mathbb{R}$ nicht gleichmäßig ist.

**Lösung**

**Punktweise Konvergenz**:
Da $e^x$ stetig ist laut Vorlesung gilt für festes $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{x}{n}} \ = \ e^{\lim_{n\to\infty} \frac{x}{n}} \ = \ e^{x \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} \ = \ e^{x \cdot 0} \ = \ e^0 \ = \ 1 \, .$$

Da $x$ beliebig war gilt $f_n \to f$ punktweise mit $f(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

**Gleichmäßige Konvergenz:**
Für jedes $n$ ist die Funktion $f_n(x)$ streng monoton wachsend in $x \in \mathbb{R}$, da $e^x$ streng monoton wächst und $\frac{x}{n}$ streng monoton wächst. Also gilt $f_n(x) \leq f_n(1)$ für alle $x \in [0, 1]$. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, dann gilt

$$|f_n(x) - f(x)| \ = \ |f_n(x) - 1| \ = \ e^{\frac{x}{n}} - 1 \, ,$$

da $e^{\frac{x}{n}} \geq 1$ ist für $x \in [0, 1]$ wegen $\frac{x}{n} \geq 0$ und $e^0 = 1$ sowie der strengen Monotonie von $e^x$. Also gilt insgesamt

$$|f_n(x) - f(x)| \ = \ |f_n(x) - 1| \ = \ f_n(x) - 1 \ \leq \ f_n(1) - 1 \, .$$

Da $f_n(1) \longrightarrow 1$ für $n \to \infty$ ist gibt es ein $n_0 = n_0(\varepsilon)$, so dass $f_n(1) - 1 < \varepsilon$ ist für alle $n > n_0$. Damit gilt insgesamt

$$|f_n(x) - f(x)| \ = \ |f_n(x) - 1| \ = \ f_n(x) - 1 \ \leq \ f_n(1) - 1 \ < \ \varepsilon$$

falls $n > n_0(\varepsilon)$ ist, und zwar für alle $x$. Die Wahl von $n_0$ ist nicht von $x$ abhängig, also ist $f_n \to f$ gleichmäßig konvergent auf $[0, 1]$.

**Nur punktweise Konvergenz:**
Es sei $\varepsilon = 1$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ beliebig groß. Es ist zu zeigen, dass es ein $x \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $|f_n(x) - f(x)| \geq 1$ ist für ein $n > n_0$. Wir wählen $x = n_0 + 1 \in \mathbb{R}$ und $n = n_0 + 1 \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$|f_n(x) - f(x)| \ = \ |e^{\frac{x}{n}} - 1| \ = \ |e^{\frac{n}{n}} - 1| \ = \ |e^1 - 1| \ = \ e - 1 \ > \ 1$$

wegen $e \approx 2.7$. Also ist die Konvergenz auf $\mathbb{R}$ nicht gleichmäßig, da durch Wahl von $x$ und $n > n_0$ der Betrag der Differenz $f_n(x) - f(x)$ über $\varepsilon = 1$ gehoben werden kann.

Matrikelnummer: ___________

# Aufgabe 4 10 Punkte

Berechnen (und beweisen) Sie den Konvergenzradius dieser Reihen:

$$\text{a)} \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{k^k} \cdot x^k \quad , \quad \text{b)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k!} \cdot x^k \, .$$

**Lösung**

Zu a):
Einsetzen in den Satz von Cauchy-Hadamard ergibt

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\sqrt{k^k}} \;=\; \limsup_{k\to\infty}(((k^k)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{k}}) \;=\; \limsup_{k\to\infty}((k^k)^{\frac{1}{2k}}) \;=\; \limsup_{k\to\infty}(k^{\frac{k}{2k}}) \;=\; \limsup_{k\to\infty}(k^{\frac{1}{2}}) \;=\; \infty \, ,$$

da $\sqrt{k}$ gegen $\infty$ geht für $k \to \infty$. Damit ist nach dem Satz $R = 0$, d. h. die Reihe konvergiert nur im Nullpunkt.

Zu b):
Einsetzen in das Quotientenkriterium ergibt

$$\limsup_{k\to\infty} \left| \frac{(-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{(k+1)!} \cdot x^{k+1}}{(-1)^k \cdot \frac{1}{k!} \cdot x^k} \right| \;=\; \limsup_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(k+1)!} \cdot x^{k+1}}{\frac{1}{k!} \cdot x^k} \right| \underset{x \text{ fest}}{=} |x| \cdot \limsup_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} \right|$$

$$= |x| \cdot \limsup_{k\to\infty} \frac{k!}{(k+1)!} \;=\; |x| \cdot \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} \;=\; |x| \cdot 0 \;=\; 0$$

völlig unabhängig von $x$, da $\frac{1}{k+1}$ eine Nullfolge und $x$ fest ist. Da der Limes superior Null ist folgt mit dem Quotientenkriterium, dass die Reihe konvergiert (ebenfalls unabhängig von $x$). Da die Potenzreihe also für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergiert ist der Radius $R = \infty$.

Am einfachsten ist der Aufgabenteil b) damit zu zeigen, dass die Reihe von $e^x$ eine konvergente Majorante ist (und zwar jeweils für festes aber beliebiges $x \in \mathbb{R}$).

Analysis I - Zweite Klausur 19.02.2005

Matrikelnummer: __________

# Aufgabe 5 08 Punkte

Kreuzen Sie in der folgenden Tabelle an, ob die gegebenen Aussagen wahr oder falsch sind. Für jedes richtig gesetzte Kreuz erhalten Sie einen Punkt, für jedes falsch gesetzte Kreuz bekommen Sie einen Punkt abgezogen. Die gesamte Aufgabe wird jedoch in keinem Fall mit einer negativen Anzahl Punkte bewertet. Sie können auch in einer Zeile nichts ankreuzen.

Sie müssen ihre Aussagen nicht beweisen.

| **Behauptung** | **Wahr** | **Falsch** |
|---|---|---|
| Jede kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}$ ist in einer offenen Menge $O \subseteq \mathbb{R}$ enthalten. | ☐ | ☐ |
| Jede offene Menge $O \subseteq \mathbb{R}$ ist in einer kompakten Menge $K \subseteq \mathbb{R}$ enthalten. | ☐ | ☐ |
| Ist $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so auch gleichmäßig stetig. | ☐ | ☐ |
| Ist $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig, so auch differenzierbar. | ☐ | ☐ |
| Jedes Polynom ist auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig und beliebig oft differenzierbar. | ☐ | ☐ |
| Ist $\xi \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt einer kompakten Menge $K \subseteq \mathbb{R}$, so folgt $\xi \in K$. | ☐ | ☐ |
| Für jede Potenzreihe $\sum a_n x^n$ gibt es $u \in \mathbb{R}$ so dass $\sum a_n u^n$ konvergiert. | ☐ | ☐ |
| Für jede Potenzreihe $\sum a_n x^n$ gibt es $v \in \mathbb{R}$ so dass $\sum a_n v^n$ divergiert. | ☐ | ☐ |

**Lösung**

| **Behauptung** | **Wahr** | **Falsch** |
|---|---|---|
| Jede kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}$ ist in einer offenen Menge $O \subseteq \mathbb{R}$ enthalten. | ☒ | ☐ |
| Jede offene Menge $O \subseteq \mathbb{R}$ ist in einer kompakten Menge $K \subseteq \mathbb{R}$ enthalten. | ☐ | ☒ |
| Ist $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so auch gleichmäßig stetig. | ☒ | ☐ |
| Ist $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig, so auch differenzierbar. | ☐ | ☒ |
| Jedes Polynom ist auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig und beliebig oft differenzierbar. | ☐ | ☒ |
| Ist $\xi \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt einer kompakten Menge $K \subseteq \mathbb{R}$, so folgt $\xi \in K$. | ☒ | ☐ |
| Für jede Potenzreihe $\sum a_n x^n$ gibt es $u \in \mathbb{R}$ so dass $\sum a_n u^n$ konvergiert. | ☒ | ☐ |
| Für jede Potenzreihe $\sum a_n x^n$ gibt es $v \in \mathbb{R}$ so dass $\sum a_n v^n$ divergiert. | ☐ | ☒ |

*Jede kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}$ ist in einer offenen Menge $O \subseteq \mathbb{R}$ enthalten*: **WAHR**
...nämlich in der offenen Menge $\mathbb{R}$.

*Jede offene Menge $O \subseteq \mathbb{R}$ ist in einer kompakten Menge $K \subseteq \mathbb{R}$ enthalten*: **FALSCH**
Die offene Menge $\mathbb{R}$ kann nicht in einer kompakten Menge liegen, da $\mathbb{R}$ nicht beschränkt ist.

*Ist $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so auch gleichmäßig stetig*: **WAHR**
Denn als differenzierbare Funktion ist $f$ auch stetig, und nach Satz 4.3.4 dann auch gleichmäßig stetig da der Definitionsbereich $[-1, 1]$ kompakt ist.

*Ist $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig, so auch differenzierbar*: **FALSCH**
Beispielsweise ist $f(x) = |x|$ stetig (damit gleichmäßig stetig) auf $[-1, 1]$ aber in $x = 0$ nicht differenzierbar.

*Jedes Polynom ist auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig und beliebig oft differenzierbar*: **FALSCH**
Differenzierbar nach Vorlesung und damit stetig, aber (da $\mathbb{R}$ nicht kompakt) kann es auch nicht gleichmäßig stetige Polynome geben, beispielsweise $P(x) = x^2$.

*Ist $\xi \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt einer kompakten Menge $K \subseteq \mathbb{R}$, so folgt $\xi \in K$*: **WAHR**
Ist $\xi$ Häufungspunkt von $K$, so gibt es eine Folge $(x_n)$ aus $K$, die gegen $\xi$ konvergiert. Da $K$ als kompakte Menge auch abgeschlossen ist folgt $\xi = \lim x_n \in K$.

*Für jede Potenzreihe $\sum a_n x^n$ gibt es $u \in \mathbb{R}$ so dass $\sum a_n u^n$ konvergiert*: **WAHR**
...nämlich $u = 0$.

*Für jede Potenzreihe $\sum a_n x^n$ gibt es $v \in \mathbb{R}$ so dass $\sum a_n v^n$ divergiert*: **FALSCH**
Beispielsweise konvergiert $e^x = \sum \frac{1}{n!} x^n$ in jedem $x \in \mathbb{R}$, also divergiert diese Potenzreihe nirgends.

Matrikelnummer: ___________

# Aufgabe 6 12 Punkte

Beweisen Sie:

(a) $\overline{x \cdot z} = x \cdot \overline{z}$ falls $x \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$.

(b) Für alle $z \neq 0$ in $\mathbb{C}$ gilt $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$.

Hinweis: Sie dürfen Teil a) zur Lösung von b) benutzen, auch wenn Sie a) nicht bearbeitet haben.

Inhalte der Probeklausur dürfen Sie nicht ohne Beweis benutzen!

**Lösung**

Zu a):
Es sei $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\overline{x \cdot z} \;=\; \overline{x \cdot (a+ib)} \;=\; \overline{xa + ixb} \underset{x \in \mathbb{R}}{=} xa - ixb \;=\; x \cdot (a - ib) \;=\; x \cdot \overline{a+ib} \;=\; x \cdot \overline{z}\,.$$

Zu b):
Es sei $z = r \cdot e^{i\phi}$ die (eindeutige) Polardarstellung von $z$ mit $r \in \mathbb{R}^+$ und $\phi \in [0, 2\pi)$. Zunächst gilt

$$\overline{e^{i\phi}} \underset{\text{Euler}}{=} \overline{\cos(\phi) + i\sin(\phi)} \;=\; \cos(\phi) - i\sin(\phi) \underset{5.7.6(\text{ii})}{=} \cos(-\phi) + i\sin(-\phi) \underset{\text{Euler}}{=} e^{-i\phi}\,,$$

also negiert die Konjugation gerade den Exponenten in reinen Winkeldarstellungen. Damit gilt nun

$$\overline{z^{-1}} \;=\; \overline{(r \cdot e^{i\phi})^{-1}} \;=\; \overline{r^{-1} \cdot e^{-i\phi}} \underset{a)}{=} r^{-1} \cdot \overline{e^{-i\phi}} \;=\; r^{-1} \cdot e^{i\phi}$$

$$=\; (r \cdot e^{-i\phi})^{-1} \;=\; (r \cdot \overline{e^{i\phi}})^{-1} \underset{a)}{=} (\overline{r \cdot e^{i\phi}})^{-1} \;=\; (\overline{z})^{-1}\,.$$

Matrikelnummer: __________

# Aufgabe 7 08 Punkte

Überprüfen Sie (mit Beweis) die Funktion

$$f(x) \;=\; \begin{cases} (x-1)^4 & \text{falls} \quad x \le 0 \\ \sin(x)+\cos(x) & \text{falls} \quad x > 0 \end{cases}$$

auf Stetigkeit auf ganz $\mathbb{R}$.

**Lösung**

Die Funktion $f(x)$ ist auf $(-\infty, 0)$ stetig, da dort $f(x) = (x-1)^4$ ein Polynom ist, und Polynome laut Vorlesung stetig sind. Auf $(0, \infty)$ ist $f(x)$ ebenfalls stetig, da dort $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ als Summe stetiger Funktionen laut Vorlesung stetig ist. Es bleibt die Stetigkeit im Nullpunkt zu zeigen. Laut Satz 4.5.3 ist $f(x)$ stetig in $x = 0$, falls $f(0+) = f(0-) = f(0)$ ist. Es gilt

$$\lim_{x\to 0-} f(x) \underset{(x<0)}{=} \lim_{x\to 0-} (x-1)^4 \underset{\text{stetig}}{=} (0-1)^4 \;=\; 1\,,$$

und andererseits

$$\lim_{x\to 0+} f(x) \underset{(x>0)}{=} \lim_{x\to 0+} (\sin(x)+\cos(x)) \underset{\text{stetig}}{=} \sin(0)+\cos(0) \;=\; 0+1 \;=\; 1\,.$$

Damit ist $f(0+) = f(0-) = 1 = f(0)$, und $f(x)$ damit stetig in Null. Insgesamt ist $f(x)$ damit auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

Analysis I - Zweite Klausur 19.02.2005

Matrikelnummer: ___________

# Aufgabe 8 12 Punkte

Es sei $\mathcal{Z}_n = (x_0, \ldots, x_n)$ die äquidistante Zerlegung von $[0,1]$ mit $x_\nu = \frac{\nu}{n}$. Berechnen Sie Ober- und Untersumme von

$$f(x) = 2x + 1$$

bzgl. dieser Zerlegung in Abhängigkeit von $n$. Berechnen Sie den Limes dieser Summen für $n \to \infty$.

**Lösung**

Die Funktion $f(x) = 2x + 1$ ist offenbar streng monoton wachsend auf $[0,1]$, damit werden Suprema stets in rechten und Infima stets in linken Intervallgrenzen angenommen: $x_\nu = \frac{\nu}{n}$ für $\nu = 0 \ldots n$ nach Definition von $\mathcal{Z}_n$, also

$$\overline{M}_\nu = \sup\{f(x) \mid x_{\nu-1} \leq x \leq x_\nu\} = f(x_\nu) = 2\tfrac{\nu}{n} + 1 \quad ,$$

$$\underline{M}_\nu = \inf\{f(x) \mid x_{\nu-1} \leq x \leq x_\nu\} = f(x_{\nu-1}) = 2\tfrac{\nu-1}{n} + 1 \quad .$$

Andererseits ist $x_\nu - x_{\nu-1} = \frac{\nu}{n} - \frac{\nu-1}{n} = \frac{1}{n}$ für alle $\nu$, also gilt insgesamt nach Definition 6.1.1:

$$\overline{S}(\mathcal{Z}_n) = \sum_{\nu=1}^{n} \overline{M}_\nu (x_\nu - x_{\nu-1}) = \sum_{\nu=1}^{n} (2\frac{\nu}{n} + 1) \cdot (x_\nu - x_{\nu-1}) = \sum_{\nu=1}^{n} (2\frac{\nu}{n} + 1) \cdot \frac{1}{n} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{2\nu + n}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{\nu=1}^{n} (2\nu + n) = 2\frac{1}{n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \nu + \frac{1}{n^2} \sum_{\nu=1}^{n} n \underset{1.7.1}{=} 2\frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{n^2} \cdot n^2 = \frac{n+1}{n} + 1 = 2 + \frac{1}{n} .$$

Analog gilt

$$\underline{S}(\mathcal{Z}_n) = \sum_{\nu=1}^{n} \underline{M}_\nu (x_\nu - x_{\nu-1}) = \sum_{\nu=1}^{n} (2\frac{\nu-1}{n} + 1) \cdot (x_\nu - x_{\nu-1}) = \sum_{\nu=1}^{n} (2\frac{\nu-1}{n} + 1) \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{2\nu - 2 + n}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{\nu=1}^{n} (2\nu - 2 + n) = 2\frac{1}{n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \nu - 2\frac{1}{n^2} \sum_{\nu=1}^{n} 1 + \frac{1}{n^2} \sum_{\nu=1}^{n} n$$

$$\underset{1.7.1}{=} 2\frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 2\frac{1}{n^2} n + \frac{1}{n^2} \cdot n^2 = \frac{n+1}{n} - \frac{2}{n} + 1 = 2 - \frac{1}{n} .$$

Nach den Rechenregeln für Folgen konvergieren Unter- bzw. Obersumme gegen 2 für $n \to \infty$.

Analysis I - Zweite Klausur 19.02.2005

Matrikelnummer: ___________

# Aufgabe 9 **10 Punkte**

Geben Sie <u>ohne Beweis</u> an, welche dieser Mengen jeweils offen, abgeschlossen bzw. kompakt in $\mathbb{R}$ sind:

$$\text{a) } A = [1,2) \cup (3,4] \quad , \quad \text{b) } B = [1,3) \cup (2,4] \quad , \quad \text{c) } C = [1,2) \cup (2,4]\,.$$

Beweisen oder widerlegen Sie ausführlich eine der Eigenschaften für eine der genannten Mengen.

**Lösung**

Kurz: $A$ erfüllt keine Eigenschaft, $B$ ist nur kompakt, und $C$ erfüllt keine Eigenschaft.

Zu a):
$A$ ist nicht offen, denn keine noch so kleine Umgebung $U_\varepsilon(1)$ der Eins liegt in komplett in $A$, da alle $x < 1$ nicht in $A$ liegen. Die Menge ist auch nicht abgeschlossen, da die Folge $2 - \frac{1}{n}$ komplett in $A$ liegt, aber gegen $2 \notin A$ konvergiert. Damit ist $A$ auch nicht kompakt.

Zu b):
Offenbar ist $B = [1,4]$ ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall, das laut Vorlesung kompakt ist. Es ist aber nicht offen, da wieder $U_\varepsilon(1)$ für kein $\varepsilon > 0$ in $B$ liegt.

Zu c):
Offenbar ist $C = [1,4]\backslash\{2\}$. Damit ist $C$ nicht abgeschlossen, weil die in $C$ liegende Folge $2 - \frac{1}{n}$ gegen $2 \notin C$ konvergiert. Damit ist $C$ auch nicht kompakt. $C$ ist auch nicht offen, da wieder $U_\varepsilon(1)$ nicht in $C$ liegt für jedes $\varepsilon > 0$.